UNIVERZITET U NIŠU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Multivarijaciona normalna raspodela

MASTER RAD

Mentor:

Prof. dr Aleksandar Nastić

Student:

Milovanović Miljana

Niš, 2017

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Multivarijaciona statistička analiza pojavila se u nauci pre jednog veka. Primenjuje se u oblasti ekonomije u ranim pedestim godinama XX veka, a onda se njena primena širi i na ostale naučne oblasti.

Multivarijaciona statistička analiza omogućava otkrivanje zakonitosti u odnosima promenjljivih koje su sakrivene ili jedva primetne. Većina tehnika dovoljno je precizna da se testiranjem statističke značajnosti utvrdi da li su otkrivene zakonitosti značajne ili slučajne. Primenom multivarijacione analize povećava se obim relativnih informacija koje se mogu „izvući" iz nekog skupa podataka.

Predmet multivarijacione analize su višedimenzionalne promenljive. Slučajna promenljiva je numerička funkcija koja svakom ishodu statističkog eksperimenta pridružuje jedan realan broj. Na primer, visina ličnog dohodka radnika, broj prodatih proizvoda po prodavnicama, stopa nezaposlenih. Pojam „multivarijacioni" podrazumeva da je u pitanju veliki broj promenljivih.

Za razumevanje multivarijacione analize neophodno je poznavanje normalne raspodele za jednu slučajnu promenljivu. Kako je normalna raspodela karakterističnog oblika (u obliku zvona) mnogi statistički modeli bazirani su na tome da originalni podaci imaju normalnu raspodelu.

Multivarijaciona raspodela je u potpunosti određena vektorom sredine i matricom kovarijanse. Vektor sredine se sastoji od sredina svih promenljivih, dok matrica kovarijanse sadrži varijanse svih promenljivih i kovarijanse, koje pokazuju koliko su parovi promenljivih međusobno povezani.

Merenja koja se odnose na pojedinca mogu se smestiti u vektor kolone. Kada je pojedinac nasumično izabran, posmatrani vektor ili slučajan vektor sa određenom raspodelom ili zakonom verovatnoće opisuje tu populaciju. Prilikom vizualizacije podataka u zavisnosti od metoda svaki vektor posmatranja predstavićemo kao tačku u Euklidskom prostoru.

Bitan aspekt, u multivarijacionoj analizi je zavisnost između različitih slučajnih promenljivih. Korelacija predstavlja odnos ili međusobnu povezanost između različitih pojava predstavljenih kao vrednosti dve slučajne promenljive. Koeficijent korelacije izražava meru povezanosti između dve slučajne promenljive. Višestruki koeficijent korelacije je produžetak pojma korelacije koji predstavlja odnos jedne slučajne promenljive i skupa slučajnih promenljivih. Parcijalni koeficijent korelacije je mera zavisnosti između dve slučajne promenljive kada su efekti drugih korelisanih slučanih promenljivih uklonjeni. Osobine ocena i testova se izračunavaju za uzorak uzetog iz populacije sa multivarijacionom normalnom raspodelom.

Zahvaljujem se mentor A. Nastiću i prof. B.Popovič na stručnim savetima prilikom izrade ovog rada, i naravno svojoj porodici na podršci tokom mog studiranja.

Glava 2

Multivarijaciona normalna raspodela

U ovoj glavi posmatramo osnovne pojmove multivarijacione normalne raspodele, i razmatramo neka njena svojstva. Razmatramo zajedničke raspodele od nekoliko promenljivih, izvodimo marginalnu raspodelu za podskup promenljivih i uslovnu raspodelu.

2.1. Pojmovi multivarijacione raspodela

2.1.1.Zajednička raspodela

Neka je X slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $f(x)$, i funkcijom raspodele $F(x)$. Gde je

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(u)du,$$
$$f(x) = F'(x). \tag{2.1.1}$$

Posmatrajmo sad slučaj dve (realne) slučajne promenljive X i Y. Verovatnoća događaja definisanih u smislu ovih promenljivih može se dobiti uključenjem *zajedničke funkcije raspodele*

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \tag{2.1.2}$$

koja je definisana za svaki par realnih brojeva (x,y). Posmatramo slučaj kada je $F(x,y)$ dva puta apsolutno diferencijabilna; to znači da sledeći izvod postoji skoro svuda:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \tag{2.1.3}$$

i

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \tag{2.1.4}$$

Gustina slučajnih promenljivih X i Y je nenegativna funkcija $f(x,y)$ data sa (2.1.3). Uređen par slučajnih promenljivih (X,Y) definiše jednu tačku u ravni. Verovatnoća da (X,Y) padne u pravougaonik $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ je

$$\begin{aligned}
&P\{x \le X \le x + \Delta x, y \le Y \le y + \Delta y\} \qquad (2.1.5)\\
&= P\{X \in [x, x + \Delta x], Y \in [y, y + \Delta y]\} = P\{(X, Y) \in [x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]\}\\
&= \Delta^2 F(x, y) = \Delta_1 \Delta_2 F(x, y) = \Delta_1 [F(x, y + \Delta y) - F(x, y)]\\
&= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)\\
&= \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} f(u, v) du dv \qquad (\Delta x > 0,\ \Delta y > 0)
\end{aligned}$$

Verovatnoća da slučajna tačka (X, Y) pripadne nekom skupu E za koji je sledeći integral definisan, je

$$P\{(X, Y) \in E\} = \iint_E f(x, y) dx dy \ . \qquad (2.1.6)$$

Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna po obe promenljive, verovatnoća da X padne unutar intervala $[x, x + \Delta x]$, a Y unutar intervala $[y, y + \Delta y]$ je

$$\begin{aligned}
P\{x \le X \le x + \Delta x, y \le Y \le y + \Delta y\} &= \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} f(u, v) du dv \qquad (2.1.7)\\
&= f(x_0, y_0) \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

za neke x_0 , y_0 $(x \le x_0 \le x + \Delta x, y \le y_0 \le y + \Delta y)$. Kako je funkcija f neprekidna, sledi da je relacija (2.1.7) približno jednaka $f(x, y)\Delta x \Delta y$, kada $\Delta x, \Delta y \to 0$ tj. važi

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} |P\{x \le X \le x + \Delta x, y \le Y \le y + \Delta y\} - f(x, y)\Delta x \Delta y| = 0 \qquad (2.1.8)$$

Razmotrimo sada slučaj za p slučajnih promenljivih $X_1,\ X_2, \dots, X_p$. Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_P)$ slučajan vektor. Naš zadatak je da na osnovu poznavanja zajedničke gustine vektora slučajnih promenljivih $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_P)$ odredimo funkciju raspodele. Zajednička funkcija raspodele

$$\begin{gathered}
F(x_1, \dots, x_p) = P\{X_1 \le x_1, \dots, X_p \le x_p\}\,, \qquad (2.1.9)\\
F(x_1, \dots, x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(u_1, \dots, u_p)\, du_1 \dots du_p
\end{gathered}$$

definisana je za svaki $(x_1, \dots, x_p) \in R^p$. Funkciju gustine, kada je $F(x_1, \dots, x_p)$ neprekidno diferencijabilna po svim promenljivima definišemo kao

$$\frac{\partial^p F(x_1, \dots, x_p)}{\partial x_1 \cdots \partial x_p} = f(x_1, \dots, x_p). \tag{2.1.10}$$

Verovatroća da $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_P)$ padne u bilo koji (merljivi) skup P u p-dimenzionalnom Euklidskom prostoru je

$$P\{(X_1, \dots, X_P) \in P\} = \underset{P}{\int \dots \int} f(x_1, \dots, x_p)\, dx_1 dx_2 \dots dx_p \tag{2.1.11}$$

„Element verovatnoće" $f(x_1, \dots, x_p)\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_p$ približno je jednak verovatnoći $P\{x_1 \leq X_1 \leq x_1 + \Delta x_1, \dots, x_p \leq X_p \leq x_p + \Delta x_p\}$ ako je $f(x_1, \dots, x_p)$ neprekidna.

Zajednički momenti definisani su kao

$$EX_1^{h_1} \dots X_P^{h_p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{h_1} \dots x_p^{h_p}\, f(x_1, \dots, x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p. \tag{2.1.12}$$

2.1.2. Marginalne raspodele

Pošto je zajednička funkcija raspodele slučajnih promenljivih X i Y data sa $F(x, y)$, marginalnu funkciju raspodele za X definišemo kao

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y \leq \infty\} = F(x, \infty). \tag{2.1.13}$$

Funkciju $F(x, \infty)$ označavamo sa $F(x)$, tj.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du\,, \tag{2.1.14}$$

a kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv = f(u) \tag{2.1.15}$$

relaciju (2.1.14) možemo zapisati kao

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du. \tag{2.1.16}$$

Relacija (2.1.16) predstavlja marginalu raspodelu za X, a $f(x)$ je njena marginalna gustina.

Na sličan način se definiše $G(y)$, marginalna funkcija raspodele za Y, a $g(y)$ je marginalna gustina za Y.

Sada prelazimo na opštiji slučaj. Neka je $F(x_1, \dots, x_p)$ funkcija raspodele slučajne promenljive $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_P)$, nađimo sada marginalnu funkciju raspodele za neki podskup slučajnih promenljivih $X_1, \dots, X_P$, recimo za $\boldsymbol{Y} = (X_1, \dots, X_r)$, $(r < p)$. Tada je

$$\begin{aligned} &P\{X_1 \le x_1, \dots, X_r \le x_r\} \\ &= P\{X_1 \le x_1, \dots, X_r \le x_r, X_{r+1} \le \infty, \dots, X_p \le \infty\} \\ &= F(x_1, \dots, x_r, \infty, \dots, \infty), \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

a marginalna gustina slučajne promenljive $\boldsymbol{Y} = (X_1, \dots, X_r)$ je

$$f(x_1, \dots, x_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_r, u_{r+1}, \dots, u_p)\, du_{r+1} \dots du_p \tag{2.1.18}$$

Marginalna funkcija raspodele je onda

$$F(x_1, \dots, x_r) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_r} f(u_1, \dots, u_r)\, du_1 \dots du_r\,. \tag{2.1.19}$$

Zajednički moment za podskup promenljivih može se izračunati iz marginalnih raspodela, na primer

$$\begin{aligned} EX_1^{h_1} \dots X_r^{h_r} &= EX_1^{h_1} \dots X_r^{h_r} X_{r+1}^0 \dots X_p^0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{h_1} \dots x_r^{h_r}\ f(x_1, \dots, x_p)\, dx_1 dx_2 \dots dx_p \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{h_1} \dots x_r^{h_r} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_p)\, dx_{r+1} \dots dx_p \right] dx_1 \dots dx_r. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

2.1.3. Nezavisnost

Slučajne promenljive X i Y sa zajedničom funkcijom raspodele $F(x,y)$ su nezavisne ako važi

$$F(x,y) = F(x)G(y), \tag{2.1.21}$$

gde je $F(x)$ marginalna funkcija raspodele za X, a $G(y)$ marginalna funkcija raspodele za Y. Gustina za X i Y se onda može zapisati kao

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x)G(y)}{\partial x \partial y} = \frac{dF(x)dG(y)}{dx\, dy} = f(x)g(y) \tag{2.1.22}$$

Obrnuto, ako je $f(x,y) = f(x)g(y)$ onda je

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u)g(v)dudv \tag{2.1.23}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \int_{-\infty}^{y} g(v)dv = F(x)G(y).$$

Na osnovu relacija (2.1.22) i (2.1.23) možemo izvesti i definiciju nezavisnosti na osnovu nezavisnosti marginalnih gustina, tj. ako važi $f(x,y) = f(x)g(y)$, slučajne promenljive X i Y su nezavisne.

Da bi pokazali nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y, za bilo koje $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2$, posmatramo sledeću verovatnoću

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\} = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2,} f(u,v)dudv \tag{2.1.24}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} f(u)du \int_{y_1}^{y_2} g(v)dv = P\{x_1 \leq X \leq x_2\}P\{y_1 \leq Y \leq y_2\}.$$

Slučajne promenljive $X_1, \dots, X_P$ sa zajedničkom funkcijom raspodele $F(x_1, \dots, x_p)$ su međusobno nezavisne ako važi

$$F(x_1, \dots, x_p) = F_1(x_1) \cdots F_p(x_p), \tag{2.1.25}$$

gde je $F_i(x_i)$ marginalna funkcija raspodele za X_i , $i = 1, \dots, p$. Za skup promenljivih $X_1, \dots, X_r$ kažemo da je nezavisan od skupa $X_{r+1}, \dots, X_P$ kada se njihova zajednička funkcija raspodele može zapisati kao proizvod marginalnih gustina, tj. ako važi

$$F(x_1, \dots, x_p) = F(x_1, \dots, x_r, \infty, \dots, \infty) \cdot F(\infty, \dots, \infty, x_{r+1}, \dots, x_p). \tag{2.1.26}$$

Ako su slučajne promenljive $X_1, \dots, X_P$ međusobno nezavisne, onda zajednički moment za te promenljive možemo zapisati kao proizvod momenata svake od njih, tj. važi

$$EX_1^{h_1} \dots X_P^{h_p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{h_1} \dots x_p^{h_p}\ f_1(x_1) \cdots\ f_p(x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p \tag{2.1.27}$$
$$= \prod_{i=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^{h_i} f_i(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^{p} EX_i^{h_i}.$$

2.1.4. Uslovna raspodela

Neka je A događaj čija realizacija ne zavisi od nastupanja bilo kog drugog događaja, tada se verovatnoća ovog događaja naziva **bezuslovna verovatnoća.** Ako je realizacija događaja A uslovljena nastupanjem još nekog događaja $(P(B) \neq 0)$, tada se verovatnoća događaja A pod uslovom da se desio događaj B naziva **uslovna verovatnoća** i označava sa $P(A|B)$. Dakle, $P(A|B)$ je verovatnoća događaja A pod uslovima koji sigurno dovode do realizacije događaja B, i važi

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \tag{2.1.28}$$

Događaj A je nezavistan od događaja B, ako je uslovna verovatnoća nastupanja događaja A pod uslovom da je nastupio događaj B, jednaka bezuslovnoj verovatnoći nastupanja događaja A, tj. ako važi $P(A|B) = P(A)$.

Pretpostavimo da je A događaj da „ X padne u interval $[x_1, x_2]$", a događaj B da „ Y padne u interval $[y_1, y_2]$". Onda je uslovna verovatnoća da X padne u $[x_1, x_2]$, pod uslovom da Y padne u $[y_1, y_2]$

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq X \leq x_2 \,|\, y_1 \leq Y \leq y_2\} &= \frac{P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\}}{P\{y_1 \leq Y \leq y_2\}} \\ &= \frac{\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(u,v)dvdu}{\int_{y_1}^{y_2} g(v)dv}. \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Stavimo sad da je $y_1 = y,\ y_2 = y + \Delta y$, onda za neprekidnu gustinu važi

$$\int_{y}^{y+\Delta y} g(v)dv = g(y^*)\Delta y, \tag{2.1.30}$$

gde je $y \leq y^* \leq y + \Delta y$. Takođe je

$$\int_{y}^{y+\Delta y} f(u,v)dv = f[u, y^*(u)]\Delta y, \tag{2.1.31}$$

gde je $y \leq y^*(u) \leq y + \Delta y$. Stoga je

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2 \,|\, y \leq Y \leq y + \Delta y\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f[u, y^*(u)]}{g(y^*)} du. \tag{2.1.32}$$

Možemo zaključiti da ako fiksiramo y i Δy, integral (2.1.32) se ponaša kao jednodimenzionala funkcija gustine. Verovatnoća da X bude između x_1 i x_2 pod uslovom da je $Y = y$, jednaka je graničnoj vrednosti integrala (2.1.32), kada $\Delta y \to 0$

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2 \,|\, Y = y\} = \int_{x_1}^{x_2} f(u|y) du, \tag{2.1.33}$$

gde je $f(u|y) = f(u,y)/g(y)$, $g(y) > 0$. Funkcija gustine $f(u|y)$ naziva se *uslovna funkcija gustine* X za dato y. Ako su X i Y nezavisne, onda je $f(x|y) = f(x)$.

U opštem slučaju, za slučajne promenljive $X_1, \dots, X_P$ sa funkcijom raspodele $F(x_1, \dots, x_p)$, uslovna gustina za $X_1, \dots, X_r$, pod uslovom $X_{r+1} = x_{r+1}, \dots, X_P = x_p$ data je formulom

$$\frac{f(x_1, \dots, x_p)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_p)\, du_1 \dots du_r}\,. \tag{2.1.34}$$

2.1.5. Transformacija slučajnih promenljivih

Neka je $f(x_1, \dots, x_p)$ funkcija gustine za slučajne promenljive $X_1, \dots, X_P$. Razmotrimo sada p realnih vrednosti, definisanih na sledeći način

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_p), \\ y_2 &= y_2(x_1, \dots, x_p), \\ &\vdots \\ y_p &= y_p(x_1, \dots, x_p). \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Pretpostavimo da je transformacija sa x-prostora na y-prostor 1-1; onda postoji inverzna transformacija

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, \dots, y_p), \\ x_2 &= x_2(y_1, \dots, y_p), \\ &\vdots \\ x_p &= x_p(y_1, \dots, y_p). \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Neka su slučajne promenljive $Y_1, \dots, Y_P$ definisane kao

$$Y_i = y_i(X_1, \dots, X_p), \qquad i = 1, \dots, p, \tag{2.1.37}$$

tada je gustina za $Y_1, \dots, Y_P$

$$g(y_1, \dots, y_p) = f[x_1(y_1, \dots, y_p), \dots, x_p(y_1, \dots, y_p)] \cdot J(y_1, \dots, y_p), \tag{2.1.38}$$

a $J(y_1, \dots, y_p)$ je Jakobijan transformacije, i definiše se kao

$$J(y_1, \dots, y_p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_p} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}. \tag{2.1.39}$$

Verovatnoća da $(X_1, \dots, X_p)$ padne na skup P data je relacijom (2.1.11); a verovatnoća da $(Y_1, \dots, Y_p)$ padne na skup S, gde su slučajne promenljive definisane kao u relaciji (2.1.37), je

$$P\{(Y_1, \dots, Y_P) \in S\} = \int_S \dots \int g(y_1, \dots, y_p)\, dy_1 dy_2 \dots dy_p. \tag{2.1.40}$$

2.2. Multivarijaciona normalna raspodela

Generalizacija poznatog oblika zvona koji ima normalna raspodela u odnosu na nekoliko dimenzija igra fundamentalnu ulogu u multivarijacionoj analizi. Većina tehnika i metoda koje primenjujemo zasnivaju se na pretpostavci da su podaci koje posmatramo generisani multivarijacionom normalnom raspodelom, dok stvarni podaci često nisu normalno raspodeljeni. Prednost multivarijacione normalne raspodele je u tome što se na osnovu nje mogu dobiti „lepi" rezultati. Multivarijaciona normalna raspodela u praksi se koristi iz dva razloga: prvi, normalna raspodela u nekim slučajevima služi kao verodostojan model populacije; drugi, uzoračke raspodele mnogih multivarijacionih statistika su normalne.

Jednodimenzionalna normalna funkcija gustine može se zapisati kao

$$ke^{-\frac{1}{2}\alpha(x-\beta)^2} = ke^{-\frac{1}{2}(x-\beta)\alpha(x-\beta)}, \tag{2.2.1}$$

gde je α pozitivan broj, a broj k izabran tako da integral od (2.2.1) bude jedinstven na celoj x-osi. Multivarijaciona normalna gustina je generalizacija jednodimenzionalne normalne gustine, pa će multivarijaciona funkcija gustine za $X_1, \dots, X_p$ imati analogan oblik. Skalranu veličinu x zamenićemo vektorom

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{pmatrix}; \tag{2.2.2}$$

skalarnu konstantu β vektorom

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_p \end{pmatrix}; \tag{2.2.3}$$

a pozitivnu konstantu α simetričnom pozitivno definitnom matricom

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Kvadrat $\alpha(x-\beta)^2 = (x-\beta)\alpha(x-\beta)$ možemo zameniti kvadratnom formom

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) = \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}\,(x_i - b_i)(x_j - b_j). \tag{2.2.5}$$

Sada je funkcija gustine p -dimenzionalne normalne raspodele definisana kao

$$f(x_1, \dots, x_p) = Ke^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})}, \tag{2.2.6}$$

gde je $K > 0$ izabrano tako da integral nad celim p-dimenzionalnim Euklidnim prostorom bude jedinstven.

Kad ovako zapišemo multivarijacionu normalnu gustinu jasno se vidi sličnost između relacije (2.2.6) i jednodimenzionalne gustine (2.2.1).

Kako je $\boldsymbol{A}$ nenegativno definitna matrica, tj.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) \geq 0, \tag{2.2.7}$$

sledi da je $f(x_1, \dots, x_p)$ nenegativna, a onda je i ograničena, tj.

$$f(x_1, \dots, x_p) \leq K. \tag{2.2.8}$$

Ovo K određujemo tako da integral (2.2.6) bude jediničan. Najpre se vrši procena, neka je

$$K^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})} \; dx_p dx_{p-1} \dots dx_1. \tag{2.2.9}$$

Ako je $\boldsymbol{A}$ simetrična matrica, onda postoji nesingularna matrica $\boldsymbol{C}$ tako da je

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}, \tag{2.2.10}$$

gde je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica, a $\boldsymbol{C}'$ transponovano $\boldsymbol{C}$. Neka je

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \tag{2.2.11}$$

gde je

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix}. \tag{2.2.12}$$

Tada kvadratnu formu možemo zapisati kao

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}. \tag{2.2.13 }$$

Jakobijan ove transformacije jednak je apsolutnoj vrednosti determinante matrice $\boldsymbol{C}$, tj.

$$J = mod|\boldsymbol{C}|, \tag{2.2.14}$$

Relaciju (2.2.9) zapisujemo na sledeći način

$$K^* = mod|\boldsymbol{C}| \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} \; dy_p \dots dy_1. \tag{2.2.15}$$

Onda, imamo da je

$$e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} = exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} y_i^2\right) = \prod_{i=1}^{p} e^{-\frac{1}{2}y_i^2}, \tag{2.2.16}$$

gde je $exp(z) = e^z$, a relaciju (2.2.15) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} K^* &= mod|\boldsymbol{C}| \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \cdots e^{-\frac{1}{2}y_p^2}\, dy_p \ldots dy_1 \\ &= mod|\boldsymbol{C}| \prod_{i=1}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \right\} \\ &= mod|\boldsymbol{C}| \prod_{i=1}^{p} \{\sqrt{2\pi}\} \\ &= mod|\boldsymbol{C}|(2\pi)^{\frac{p}{2}} \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

jer je

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1. \tag{2.2.18}$$

Relacija (2.2.10) može se zapisati u obliku proizvoda determinanti, tj. važi

$$|\boldsymbol{C}'| \cdot |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{I}|, \tag{2.2.19}$$

gde je

$$|\boldsymbol{C}'| = |\boldsymbol{C}|, \tag{2.2.20}$$

a $|\boldsymbol{I}| = 1$. Iz relacije (2.2.19) zaključujemo da je

$$|\boldsymbol{C}| = 1/\sqrt{|\boldsymbol{A}|}. \tag{2.2.21}$$

Tada je

$$K = \frac{1}{K^*} = \sqrt{|\boldsymbol{A}|} \cdot (2\pi)^{-\frac{p}{2}}. \tag{2.2.22}$$

Normalna funkcija gustine je

$$\frac{\sqrt{|\boldsymbol{A}|}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})} \tag{2.2.23}$$

Da bi smo pokazali značaj vektora $\boldsymbol{b}$ i matrice $\boldsymbol{A}$, treba da pronađemo prvi i drugi moment za slučajne promenljive $X_1, \dots, X_p$, koje ćemo predstaviti kao slučajan vektor

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p \end{pmatrix}. \tag{2.2.24}$$

Definicija 2.2.1. *Slučajna matrica* $\boldsymbol{Z}$, *u oznaci*

$$\boldsymbol{Z} = (Z_{gh}), \quad g = 1, \dots, m, \quad h = 1, \dots, n, \tag{2.2.25}$$

je matrica slučajnih promenljivih $Z_{11}, \dots, Z_{mn}$.

Ako od datih slučajnih promenljivih $Z_{11}, \dots, Z_{mn}$ možemo uzeti samo konačan broj promenljivih, slučajna matrica $\boldsymbol{Z}$ može biti jedna od matrica, recimo $Z(1), \dots, Z(q)$. Ako je p_i verovatnoća za $\boldsymbol{Z} = Z(i)$, onda matematičko očekivanje $E\boldsymbol{Z}$ definišemo kao $\sum_{i=1}^{q} p_i \cdot Z(i)$. Tada je $E\boldsymbol{Z} = (EZ_{gh})$. Ako slučajne promenljive $Z_{11}, \dots, Z_{mn}$ imaju zajedničku gustinu, onda se $E\boldsymbol{Z}$ može definisati preko Rimanovih suma kao granična vrednost niza očekivanja slučajnih promenljivih diskretnog tipa, pa je ponovo $E\boldsymbol{Z} = (EZ_{gh})$.

Zahvaljujući prethodnom izvođenju dolazimo do sledeće definicije.

Definicija 2.2.2. *Očekivana vrednost matrice* $\boldsymbol{Z}$ *je*

$$E\boldsymbol{Z} = (EZ_{gh}), \quad g = 1, \dots, m, \quad h = 1, \dots, n. \tag{2.2.26}$$

Ako je slučajan vektor definisan relacijom (2.2.24), onda se očekivana vrednost

$$E\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} EX_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ EX_p \end{pmatrix} \tag{2.2.27}$$

naziva *sredina* ili *vektor sredine* za $\boldsymbol{X}$. Vektor sredine označavamo sa $\boldsymbol{\mu}$.

Posmatrajmo $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'$, onda je očekivana vrednost

$$Cov(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' = \left(E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right)_{i,j=1}^{p} \tag{2.2.28}$$

kovarijansa ili *kovarijaciona matrica* za $\boldsymbol{X}$. Dijagonalni element ove matrice $E(X_i - \mu_i)^2$ je *varijansa* od X_i, a i,j-ti element $E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$ je kovarijansa za X_i i X_j, $i \neq j$. Kovarijansnu matricu označavamo sa $\boldsymbol{\Sigma}$. Primetiti da je

$$Cov(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}') = E\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'. \tag{2.2.29}$$

Da bi izračunali očekivanu vrednost jedne slučajne matrice (ili vektora) primenjujemo određena pravila koja se mogu iskazati sledećom lemom:

Lema 2.2.1. *Ako je $\boldsymbol{Z}$ $m \times n$ slučajna matrica, $\boldsymbol{D}$ $l \times m$ realna matrica, $\boldsymbol{P}$ $n \times q$ realna matrica, i $\boldsymbol{F}$ $l \times q$ realna matrica, onda je*

$$E(\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{D}(E\boldsymbol{Z})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}. \tag{2.2.30}$$

Dokaz: Element u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $E(\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F})$ je

$$E\left(\textstyle\sum_{h,g} d_{ih} Z_{hg} p_{gj} + f_{ij}\right) = \textstyle\sum_{h,g} d_{ih}(E\, Z_{hg}) p_{gj} + f_{ij}, \tag{2.2.31}$$

a to je i element u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $\boldsymbol{D}(E\boldsymbol{Z})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}$. ■

Lema 2.2.2. *Ako je $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{f}$, gde je $\boldsymbol{X}$ slučajan vektor, onda je*

$$E\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}(E\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{f}, \tag{2.2.32}$$

$$Cov(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{D}Cov(\boldsymbol{X})\boldsymbol{D}', \tag{2.2.33}$$

Dokaz: Prva relacija sledi direktnom primenom Leme 2.2.1, a druga iz

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{Y}) &= E(\boldsymbol{Y} - E\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{Y} - E\boldsymbol{Y})' \\ &= E[\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{D}(E\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{f})][\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{D}(E\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{f})]' \\ &= E[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X} - E\boldsymbol{X})][\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X} - E\boldsymbol{X})]' \\ &= E[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X} - E\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X} - E\boldsymbol{X})'\boldsymbol{D}']. \quad ■ \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Ako izvršimo transformaciju kao u relaciji (2.2.11), dobijamo da je $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{b}$, i $E\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}(E\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{b}$**.** A onda je prema teoriji o transformaciji datoj u Odeljku 2.1. gustina za $\boldsymbol{Y}$ proporcionalna relaciji (2.2.16) tj.

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2}y'y} = \prod_{j=1}^{p} \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_j^2}\} \tag{2.2.35}$$

Očekivana vrednost i-te komponente vektora $\boldsymbol{Y}$ je

$$\begin{aligned} EY_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} y_i \prod_{j=1}^{p} \{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_j^2}\} \, dy_1 \dots dy_p \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i \, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_j^2} dy_j \right\} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i \, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i = 0. \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Poslednja jednakost sledi iz toga što je $y_i e^{-\frac{1}{2}y_i^2}$ neparna funkcija po y_i, i $EY_i = 0$. Vektor sredine je označen sa $\boldsymbol{\mu}$, i važi da je

$$\boldsymbol{\mu} = E\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}, \tag{2.2.37}$$

Iz relacije (2.1.33) sledi da je $Cov(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}E(\boldsymbol{YY}')\boldsymbol{C}'$, gde je i, j-ti element $E(\boldsymbol{YY}')$

$$EY_iY_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} y_i y_j \prod_{h=1}^{p} \{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_h^2}\} \, dy_1 \dots dy_p \tag{2.2.38}$$

jer je gustina za $\boldsymbol{Y}$ definisana relacijom (2.2.35). Ako je $i = j$, onda je

$$\begin{aligned} EY_i^2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 \, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \prod_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_h^2} dy_h \right\} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 \, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

Izraz $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 \, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i$ predstavlja očekivanje kvadrata slučajne promenljive koja ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0, i varijansom 1. Ako stavimo da je $i \neq j$, relaciju (2.1.38) možemo zapisati kao

$$EY_iY_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y_i\, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y_j e^{-\frac{1}{2}y_j^2} dy_j \cdot \prod_{\substack{h=1\\ h\neq i,j}}^{p} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_h^2} dy_h\right\}$$
$$= 0, \quad i \neq j, \tag{2.2.40}$$

jer je prva integracija 0. Iz relacija (2.2.39) i (2.2.40) sledi da je

$$E\boldsymbol{YY'} = \boldsymbol{I}. \tag{2.2.41}$$

Onda je

$$E(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})' = \boldsymbol{CIC'} = \boldsymbol{CC'}. \tag{2.2.42}$$

Iz relacije (2.2.20) dobijamo da je $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}')^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{C})^{-\mathbf{1}}$ množenjem sa $(\boldsymbol{C}')^{-1}$ s leve strane i sa $(\boldsymbol{C})^{-\mathbf{1}}$ s desne strane. Ako uzmemo inverze sa obe strane jednakosti, dobijamo

$$\boldsymbol{CC'} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}. \tag{2.2.43}$$

Onda je kovarijansna matrica za $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})' = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}. \tag{2.2.44}$$

Matrica $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitivno definitna na osnovu razlaganja $\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$ u (2.2.43).

Teorema 2.2.1. *Ako je relacijom* (2.2.23) *data gustina p-dimenzionalnog vektora* $\boldsymbol{X}$, *onda je njegova očekivana vrednost* $\mathbf{b}$, *a kovarijansna matrica* $\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$. *S druge strane, ako je dat vektor* $\boldsymbol{\mu}$ *i pozitivno definitna matrica* $\boldsymbol{\Sigma}$, *postoji multivarijaciona normalna gustina*

$$(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}, \tag{2.2.45}$$

tako da je očekivana vrednost vektora $\boldsymbol{X}$ *sa ovom gustinom* $\boldsymbol{\mu}$, *a kovarijansna matrica* $\boldsymbol{\Sigma}$.

Gustinu datu relacijom (2.2.45) označavamo sa $n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, a raspodelu kao $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Slučajnu promenljivu $\boldsymbol{X}$ koja ima normalnu raspodelu sa vektorom očekivanja $\boldsymbol{\mu}$, i kovarijansnom matricom $\boldsymbol{\Sigma}$, označavaćemo sa $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

i-ti dijagonalni element kovarijansne matrice σ_{ii}, je varijansa za i-tu komponentu od X; koju označavamo sa σ_i^2. Koeficijent korelacije između elemenata X_i i X_j definisan je kao

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \tag{2.2.46}$$

Koeficijenti korelacije između elemenata X_i i X_j su simetrični, tj. $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, jer je matrica

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} & \sigma_j^2 \end{pmatrix}, \tag{2.2.47}$$

simetrična, a njena determinanta

$$\begin{vmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} & \sigma_j^2 \end{vmatrix} = \sigma_i^2 \sigma_j^2 (1 - {\rho_{ij}}^2) \tag{2.2.48}$$

je nenegativna, gde je $-1 < \rho_{ij} < 1$. Multivarijaciona normalna gustina određena je sredinama μ_i , $i = 1, \dots, p$, varijansama σ_i^2, $i = 1, \dots, p$, i korelacijama ρ_{ij}, $i < j$, $i, j = 1, \dots, p$.

Kao specijalan slučaj prethodne teorije, razmotrićemo *dvodimenzionalnu* normalnu raspodelu. Vektor sredine je

$$E \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \tag{2.2.49}$$

a kovarijansna matrica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= E \begin{pmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

gde σ_1^2 predstavlja varijansu za X_1, σ_2^2 varijansu za X_2, a ρ je korelacija između X_1 i X_2 . Inverzna matrica za $\boldsymbol{\Sigma}$ je

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}. \tag{2.2.51}$$

Zajednička funkcija gustine slučajnih promenljivih X_1 i X_2 je

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \tag{2.2.52}$$

Teorema 2.2.2. *Koeficijent korelacije* ρ *dvodimenzionalne raspodele je invarijantan u odnosu na transformaciju* $X_i^* = b_i X_i + c_i,\ b_i > 0,\ i = 1,2$. *Svaka funkcija parametara dvodimenzionalne normalne raspodele koja je invarijantna u odnosu na takve transformacije je funkcija od* ρ.

Dokaz : Varijansa za X_i^* je $b_i^2\sigma_i^2,\ i = 1,2,$ a kovarijansa za X_1^* i X_2^* je $b_1 b_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho$ po Lemi 2.2.2. A po definiciji korelacije između X_1^* i X_2^* sledi da je ta vrednost ρ. Ako je $f(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ invarijantna funkcija u odnosu na te transformacije, tada funkcija $f(0,0,1,1,\rho)$ zavisi od ρ ako uzmemo da je $b_i = \frac{1}{\sigma_i}$ a $c_i = -\frac{\mu_i}{\sigma_i},\ i = 1,2.$ ■

Koeficijent korelacije ρ je prirodna mera povezanosti između X_1 i X_2. Ako posmatramo dve *standardizovane* promenljive definisane kao $Y_i = \frac{(X_i-\mu_i)}{\sigma_i},\ i = 1,2,$ očekivana vrednost kvadrata razlike ovih promenljive je funkcija od ρ, tj.

$$E(Y_1 - Y_2)^2 = 2(1-\rho). \tag{2.2.53}$$

Ako je ρ veliko, promenljive Y_1 i Y_2 su sličnije. Ako je $\rho > 0$, promenljive X_1 i X_2 imaju tendenciju da su pozitivno povezane, ako je $\rho < 0$, one su negativno povezane. Ako je $\rho = 0$, onda relacija (2.2.52) predstavlja proizvod marginalnih gustina za X_1 i X_2; tj. X_1 i X_2 su nezavisne.

Numeričke vrednosti jednodimenzionalne funkcije raspodele normalne promenljive dobijene su iz tabela u većini statističkih testova, dok numeričke vrednosti za dvodimenzionalne funkcije raspodele

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2\} \\ &= P\left\{\frac{(X_1-\mu_1)}{\sigma_1} \le y_1,\ \frac{(X_2-\mu_2)}{\sigma_2} \le y_2\right\}, \end{aligned} \tag{2.2.54}$$

gde je $\frac{(x_i-\mu_i)}{\sigma_i} = y_i$, $i = 1{,}2$, mogu se naći kod Pearsona[9] (1931). Obimnija tabela je data u National Bureau of Standards[7] (1959). Pearson je takođe pokazao da

$$F(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j \, \tau_j(y_1)\tau_j(y_2), \tag{2.2.55}$$

gde su funkcije $\tau_j(y)$ date tabelarno u Pearson[11](1931) do $\tau_{19}(y)$. Harris i Soms[4] (1980) su proučavali generalizacije o (2.2.55).

2.3. Raspodela linearnih kombinacija normalno raspodeljenih promenljivih; Nezavisne promenljive; Marginalne raspodele

Teorija multivarijacione normalne raspodele je veoma korisna, pa je i njena primena velika. Jedan od razloga jeste taj što marginalna raspodela i uslovna raspodela izvedene iz normalne raspodele imaju normalnu raspodelu. Štaviše, linaerne kombinacije multivarijacionih normalnih promenljivih su ponovo normalno raspodeljene.

Teorema 2.3.1. *Ako je dat p-dimenzionalan vektor $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, onda je*

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'), \tag{2.3.1}$$

gde je $\boldsymbol{C}$ nesingularna matrica reda $p \times p$.

Dokaz: Gustina za $\boldsymbol{Y}$ dobija se iz gustine $n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, zamenom $\boldsymbol{x}$ sa

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}, \tag{2.3.2}$$

i množenjem Jakobijanom transformacije (2.3.2),

$$\left|\boldsymbol{C}^{-1}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{C}|} = \sqrt{\frac{1}{|\boldsymbol{C}|^2}} = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{\Sigma}|}{|\boldsymbol{C}| \cdot |\boldsymbol{\Sigma}| \cdot |\boldsymbol{C}'|}} = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}{|\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'|^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{2.3.3}$$

Kvadratna forma u eksponencijalnoj funkciji gustine $n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}), \tag{2.3.4}$$

transforacijom (2.3.2) pretvara se u

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}) \qquad (2.3.5)\\ &= (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})\\ &= (\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}))'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}))\\ &= (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})\\ &= (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}).\end{aligned}$$

Kako važi da je $(\boldsymbol{C}^{-1})' = (\boldsymbol{C}')^{-1}$ na osnovu transformacije $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{I}$, gustina za $\boldsymbol{Y}$ je

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})|\boldsymbol{C}|^{-1} &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'|^{-\frac{1}{2}}exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})\right]\\ &= n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{C}'). \quad \blacksquare \qquad (2.3.6)\end{aligned}$$

Neka je dat slučajan vektor

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(1)}\\ \boldsymbol{X}^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ X_p\end{pmatrix}, \qquad (2.3.7)$$

gde je su vektori $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ definisani kao

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \begin{pmatrix}X_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ X_q\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}^{(2)} = \begin{pmatrix}X_{q+1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ X_p\end{pmatrix}, \qquad p > q. \qquad (2.3.8)$$

Posmatrajmo sada vektore $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$, koje imaju zajedničku normalnu raspodelu sa vektorima očekivanja

$$E\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \qquad E\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \qquad (2.3.9)$$

i kovarijansnim matricama

$$E\left(\boldsymbol{X}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{X}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)'=\boldsymbol{\Sigma}_{11}, \tag{2.3.10}$$

$$E\left(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)\left(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)'=\boldsymbol{\Sigma}_{22}, \tag{2.3.11}$$

$$E\left(\boldsymbol{X}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)'=\boldsymbol{\Sigma}_{12}. \tag{2.3.12}$$

Očekivanje vektora $\boldsymbol{X}$ datog relacijom (2.3.7) podeljeno je na podvektore, kao

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{(1)}\\ \boldsymbol{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}. \tag{2.3.13}$$

A matrica

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{pmatrix}, \tag{2.3.14}$$

je na sličan način data kao blok matrica, gde je $\boldsymbol{\Sigma}_{21}=\boldsymbol{\Sigma}_{12}{}'$.

Pokažimo sad da su vektori $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ nezavisni, ako je $\boldsymbol{\Sigma}_{21}=\boldsymbol{\Sigma}_{12}{}'=\boldsymbol{0}$. Neka je

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{pmatrix}, \tag{2.3.15}$$

a njena inverzna matrica je

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\end{pmatrix}. \tag{2.3.16}$$

Kvadratna forma u eksponentu funkcije $n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \qquad (2.3.17)\\ &=\left[\left(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)',\left(\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)'\right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}\\ &=\left[\left(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1},\left(\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}\\ &=\left(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)+\left(\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)\\ &=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2,\end{aligned}$$

gde su

$$\boldsymbol{Q_1} = \left(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}\right)' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \left(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}\right). \tag{2.3.18}$$
$$\boldsymbol{Q_2} = \left(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \left(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\right).$$

Važi da je $|\boldsymbol{\Sigma}| = |\boldsymbol{\Sigma_{11}}| \cdot |\boldsymbol{\Sigma_{22}}|$. A gustina za $\boldsymbol{X}$ može se zapisati kao

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma_{11}}|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{Q_1}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(p-q)}{2}} |\boldsymbol{\Sigma_{22}}|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{Q_2}} \\ &= n\left(\boldsymbol{x}^{(1)} \middle| \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma_{11}}\right) \cdot n\left(\boldsymbol{x}^{(2)} \middle| \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma_{22}}\right). \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Marginalna gustina za $\boldsymbol{X}^{(1)}$ data je integralom

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})\, dx_{q+1} \cdots dx_p \\ &= n\left(\boldsymbol{x}^{(1)} \middle| \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma_{11}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} n\left(\boldsymbol{x}^{(2)} \middle| \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma_{22}}\right) dx_{q+1} \cdots dx_p \\ &= n\left(\boldsymbol{x}^{(1)} \middle| \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma_{11}}\right). \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Neka je marginalna raspodela za $\boldsymbol{X}^{(1)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma_{11}})$; a marginalna raspodela za $\boldsymbol{X}^{(2)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma_{22}})$. Zajednička gustina za $X_1, \dots, X_p$ jednaka je proizvodu marginalne gustine za $X_1, \dots, X_q$ i marginalne gustine za $X_{q+1}, \dots, X_p$, pa su ta dva skupa promenljivih nezavisna.

Teorema 2.3.2. *Ako slučajne promenljive $X_1, \dots, X_p$ imaju zajedničku normalnu raspodelu, potreban i dovoljan uslov da podskup ovih slučajnih promenljivih i podskup koji čine preostale slučajne promenljive budu nezavisni, je da kovarijansa promenljivih iz jednog skupa i promenljivih iz drugog skupa bude 0.*

Dokaz : Neophodnost sledi iz činjenice da ako je X_i iz jednog skupa, a X_j iz drugog, važi

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\, f(x_1, \dots, x_q) \cdot f(x_{q+1}, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i) f(x_1, \dots, x_q) dx_1 \dots dx_q \cdot$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j) f(x_{q+1}, \dots, x_p) dx_{q+1} \dots dx_p$$
$$= 0.$$

Kako je $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$, a $\sigma_i, \sigma_j \neq 0$ (za $\mathbf{\Sigma}$ pretpostavljamo da je nesingularna) uslov $\sigma_{ij} = 0$ ekvivalentan je uslovu $\rho_{ij} = 0$. Dakle, ako je jedan skup promenljivih nekoreliran sa ostalim promenljivim, ti skupovi su nezavisni. Implikacija nezavisnosti usled nedostatka koreliranosti, zavisi od pretpostavke normalnosti tih promenljivih, dok obratno uvek važi. ■

Razmotrimo sada specijalan slučaj dvodimenzione normalne raspodele. Neka je $X^{(1)} = X_1$, $X^{(2)} = X_2$, $\mu^{(1)} = \mu_1$, $\mu^{(2)} = \mu_2$, $\Sigma_{11} = \sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\Sigma_{22} = \sigma_{22} = \sigma_2^2$, i $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$. Dvodimenzione slučajne promenljive X_1 i X_2 su nezavisne ako i samo ako su nekorelirane. Ako su nekorelirane, marginalna raspodela za X_i je normalna sa sredinom μ_i i varijansom σ_i^2, $i = 1,2$.

Posledica 2.3.1. *Ako je $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, a skup komponenata iz $\boldsymbol{X}$ nekoreliran sa preostalim komponentama, onda je marginalna gustina jednog skupa multivarijaciona normalna raspodela sa očekivanjem, varijansom i kovarijansom, dobijena od odgovarajućih komponenta iz $\boldsymbol{\mu}$* i *$\boldsymbol{\Sigma}$, respektivno.*

Ova posledica važi čak i ako dva skupa nisu nezavisna. Neka su particije za $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ definisane kao ranije. Napravićemo nesingularnu linearnu transformaciju od vektora

$$\boldsymbol{Y}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(1)} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(2)}, \tag{2.3.22}$$
$$\boldsymbol{Y}^{(2)} = \boldsymbol{X}^{(2)}, \tag{2.3.23}$$

gde je matrica $\boldsymbol{B}$ izabrana tako da su komponente $\boldsymbol{Y}^{(1)}$ nekorelirane sa komponentama iz $\boldsymbol{Y}^{(2)}$ i da zadovoljava sledeću jednačinu

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= E\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - E\boldsymbol{Y}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{(2)} - E\boldsymbol{Y}^{(2)}\right)' \\ &= E\left(\boldsymbol{X}^{(1)} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(2)} - E\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{B}E\boldsymbol{X}^{(2)}\right)(\boldsymbol{X}^{(2)} - E\boldsymbol{X}^{(2)})' \\ &= E\left((\boldsymbol{X}^{(1)} - E\boldsymbol{X}^{(1)}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}^{(2)} - E\boldsymbol{X}^{(2)})\right)(\boldsymbol{X}^{(2)} - E\boldsymbol{X}^{(2)})' \\ &= \mathbf{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{B}\mathbf{\Sigma}_{22}. \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Odavde je $\boldsymbol{B} = -\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}$ i

$$\boldsymbol{Y}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{X}^{(2)}. \tag{2.3.25}$$

Vektor

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}^{(1)} \\ \boldsymbol{Y}^{(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}, \tag{2.3.26}$$

je nesingularna transformacija od $\boldsymbol{X}$ i ima normalnu raspodelu sa

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}^{(1)} \\ \boldsymbol{Y}^{(2)} \end{pmatrix} &= E\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}^{(2)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}^{(1)} \\ \boldsymbol{v}^{(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

i

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{Y}) &= E(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})' \\ &= \begin{pmatrix} E\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(1)}\right)' & E\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{(2)} - \boldsymbol{v}^{(2)}\right)' \\ E\left(\boldsymbol{Y}^{(2)} - \boldsymbol{v}^{(2)}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(1)}\right)' & E\left(\boldsymbol{Y}^{(2)} - \boldsymbol{v}^{(2)}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{(2)} - \boldsymbol{v}^{(2)}\right)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

jer je

$$\begin{aligned} &E\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{Y}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(1)}\right)' \\ &= E\left[\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)\right] \cdot \left[\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)\right]' \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Slučajne promenljive $\boldsymbol{Y}^{(1)}$ i $\boldsymbol{Y}^{(2)}$ su nezavisne, a na osnovu Posledice 2.3.1. $\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{Y}^{(2)}$ ima marginalnu raspodelu $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$. Kako je broj komponenata promenljive $\boldsymbol{X}$ proizvoljan, možemo konstruisati sledeću teoremu:

Teorema 2.3.3. *Ako je* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *marginalna gustina za bilo koji skup promenljivih iz* $\boldsymbol{X}$ *je multivarijaciona normalna sa očekivanjem, varijansom, i kovarijansom dobijenih uzimanjem odgovarajućih komponenata iz* $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$, *respektivno.*

Razmotrimo bilo koju transformaciju

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}, \tag{2.3.30}$$

gde je $\boldsymbol{D}$ $q \times p$ realna matrica, a $\boldsymbol{Z}$ q -dimenzionalni vektor. Tada je njegova očekivana vrednost

$$E\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}, \tag{2.3.31}$$

a kovarijaciona matrica je

$$E(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu})' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}'. \tag{2.3.32}$$

Slučaj $q = p$ i $\boldsymbol{D}$ je nesingularna matrica razmatran je iznad. Ako je $q \leq p$ i matrica $\boldsymbol{D}$ ranga q, možemo naći matricu $\boldsymbol{E}$ ranga $(p - q) \times p$ tako da je

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \tag{2.3.33}$$

nesingularna transformacija. Promenljive $\boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{W}$ imaju zajedničku normalnu raspodelu, a $\boldsymbol{Z}$ ima marginalnu normalnu raspodelu koja je data Teoremom 2.3.3. Dakle, za matricu $\boldsymbol{D}$ ranga q (i $\boldsymbol{X}$ ima nesingularnu raspodelu , tj. gustinu) dokazali smo sledeću teoremu:

Teorema 2.3.4. *Ako je* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *onda* $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{D}')$, *gde je* $\boldsymbol{D}$ *matrica* $q \times p$ *ranga* $q \leq p$.

U ovom odeljku bavićemo se jednodimenzionalnim ili degenerisanim normalnim raspodelama, i proširenju Teoreme 2.3.4. za bilo koju matricu $\boldsymbol{D}$. Jednodimenzionalna raspodela je raspodela u p-dimenzionalnom prostoru koja je koncentrisana na niže dimenzionalnom skupu, tj. verovotnaća povezivanja sa bilo kojim skupom koji ne presaca dati skup je 0. A njena masa je skoncentrisana na linearnom skupu (tj, broj preseka sa $(p-1)$-dimenzionalnom hiperravni). Neka je $\boldsymbol{y}$ skup koordinata linearnog skupa; tada se parametarska definicija ovog linearnog skupa može se definisati kao $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\lambda}$, gde je $\boldsymbol{A}$ $p \times q$ matrica, a $\boldsymbol{\lambda}$ je p-dimenzionalni vektor. Ako je data slučajna promenljiva $\boldsymbol{Y}$ sa normalnom raspodelom u q-dimenzionalnom linearnom skupu, onda

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\lambda}, \tag{2.3.34}$$

ima singularnu ili degenerisanu normalnu raspodelu u p-dimenzionalnom prostoru. Ako je $E\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{v}$, onda je $E\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$. Neka je $E(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{T}$, tada je

$$E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' = E\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})'\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\Sigma}. \tag{2.3.35}$$

Ako je $p > q$, onda je matrica $\boldsymbol{\Sigma}$ singularna i nema inverznu maticu, pa ne možemo izvesti normalnu gustinu za $\boldsymbol{X}$, tj. promenljiva ne može imati gustinu uopšte (jer verovatnoća bilo kog skupa koji ne seče q-dimenzionalan skup je 0, tj. gustina je 0 skoro svuda).

Razmotrimo da li $\boldsymbol{X}$ ima očekivanje $\boldsymbol{\mu}$ i kovarijansnu matricu $\boldsymbol{\Sigma}$ ranga r, gde $\boldsymbol{X}$ ima proizvoljnu raspodelu, a $\boldsymbol{Y}$ normalnu raspodelu sa r $(< p)$ komponenenata. Neka je $\boldsymbol{\Sigma}$ ranga r, tada postoji $p \times p$ nesingularna matrica $\boldsymbol{B}$ takva da je

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \tag{2.3.36}$$

a jedinična matrica je reda r . Transformacija

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^{(1)} \\ \boldsymbol{V}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{2.3.37}$$

definiše slučajan vektor $\boldsymbol{V}$ sa korelacionom matricom (2.3.36) i vektorom sredine

$$E\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\nu}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2.3.38}$$

Varijanse elemenata $\boldsymbol{V}^{(2)}$ su 0 , pa je $\boldsymbol{V}^{(2)} = \boldsymbol{\nu}^{(2)}$ sa verovatnoćom 1. Neka je sada data blok matrica

$$\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{D}), \tag{2.3.39}$$

gde se $\boldsymbol{C}$ sastoji od r kolona. Relacija (2.3.34) je ekvivalentna

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{D})\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^{(1)} \\ \boldsymbol{V}^{(2)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}^{(1)} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{(2)}. \tag{2.3.40}$$

Tako je sa verovatnoćom 1

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}^{(1)} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\nu}^{(2)}, \tag{2.3.41}$$

koja je oblika (2.3.34), gde je $\boldsymbol{C}$ predstavljeno kao $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{V}^{(1)}$ kao $\boldsymbol{Y}$, a $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\nu}^{(2)}$ kao $\boldsymbol{\lambda}$.

Definicija 2.3.1. *Za slučajan vektor* $\boldsymbol{X}$ *od* p*-komponenata sa* $E\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}$ *i* $E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' = \boldsymbol{\Sigma}$ *kaže se da je normalno raspodeljen* (*tj.* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$) *ako postoji transformacija* (2.3.34), *matrica* $\boldsymbol{A}$ *je reda* p, *broj kolona jednak rangu matrice* $\boldsymbol{\Sigma}$, recimo r, *a slučajna promenljiva* $\boldsymbol{Y}$ (*sa r komponenata*) *ima nesingularnu normalnu raspodelu, tj. gustinu*

$$k\boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})'\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})}. \tag{2.3.42}$$

Teorema 2.3.5. *Ako je* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *tada je* $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{DX} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{D\mu}, \boldsymbol{D\Sigma D'})$.

Ova teorema obuhvata slučaj gde $\boldsymbol{X}$ može biti nesingularana ili jednodimzionalna slučajna promenljiva, i slučaj gde je $\boldsymbol{D}$ nesingularana ili ranga manjeg od q. Kako se $\boldsymbol{X}$ može predstaviti relacijom (2.3.34), a $\boldsymbol{Y}$ ima nesingularnu raspodelu $\mathcal{N}(\boldsymbol{v}, \mathbf{T})$, možemo pisati

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{DAY} + \boldsymbol{D\lambda}, \tag{2.3.43}$$

gde je $\boldsymbol{DA}$ formata $q \times r$.

2.4. Uslovna raspodela i višedimenzionalni koeficijent korelacije

2.4.1. Uslovna raspodela

U ovom delu vidimo da je uslovna raspodela izvedena na osnovu zajedničke normalne raspodele normalna. Uslovna raspodela je jednostavna, jer sredina zavisi od linearnih promenljivih koje su fiksirane, a varijacija i kovarijansa ne zavise uopšte od fiksiranih promenljivih. Teorija u ovom odeljku razvijena je od strane Karla Pearson[8] (1896) za tri promenljive, a zatim njegov rad nastavlja Yule[10] (1897).

Neka je $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (gde je $\boldsymbol{\Sigma}$ nesinglarna matrica), i

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)} \\ \boldsymbol{X}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{2.4.1}$$

gde su $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ kao i ranije q i $(p - q)$ -dimenzionalni vektori, respektivno. Zajednička raspodela za $\boldsymbol{Y}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{X}^{(2)}$ i $\boldsymbol{Y}^{(2)} = \boldsymbol{X}^{(2)}$ je

$$n(\boldsymbol{y}^{(1)} | \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})n(\boldsymbol{y}^{(2)} | \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22}). \tag{2.4.2}$$

Gustina za $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ može se dobiti iz prethodnog zamenom $\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{x}^{(2)}$ sa $\boldsymbol{y}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$ sa $\boldsymbol{y}^{(2)}$ (Jakobijan ove transformacije je 1); a gustina za $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ je

$$f(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\sqrt{|\,\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}|}} exp\Big\{-\frac{1}{2}\big[\big(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}\big) - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)\big]' \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1} \big[\big(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}\big) - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)\big]\Big\} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(p-q)}{2}}\sqrt{|\,\boldsymbol{\Sigma}_{22}|}} exp\big[\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)' - \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)\big] \qquad (2.4.3)$$

gde je

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\,\boldsymbol{\Sigma}_{21}. \qquad (2.4.4)$$

Ova gustina mora biti $n(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Uslovna gustina za $\boldsymbol{X}^{(1)}$ pod uslovom $\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$ je količnik gustine date relacijom (2.4.2) i marginalne gustine za $\boldsymbol{X}^{(2)}$ u tački $\boldsymbol{x}^{(2)}$, tj. važi

$$f\big(\boldsymbol{x}^{(1)}|\boldsymbol{x}^{(2)}\big) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\sqrt{|\,\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}|}} exp\Big\{-\frac{1}{2}\big[\big(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}\big) - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)\big]' \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1}\big[\big(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}\big) - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)\big]\Big\}. \qquad (2.4.5)$$

$\boldsymbol{x}^{(2)}$ sastoji se od $(p-q)$ brojeva, a uslovna gustina $f(\boldsymbol{x}^{(1)}|\boldsymbol{x}^{(2)})$ je q-dimenzionalna normalna sa očekivanjem

$$E\big(\boldsymbol{X}^{(1)}|\boldsymbol{x}^{(2)}\big) = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}^{(2)}), \qquad (2.4.6)$$

i kovarijacionom matricom

$$E\{[\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}^{(2)})][\boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}^{(2)})]'|\boldsymbol{x}^{(2)}\} = \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\,\boldsymbol{\Sigma}_{21}. \qquad (2.4.7)$$

Treba napomenuti da je očekivanje od $\boldsymbol{X}^{(1)}$ za dato $\boldsymbol{x}^{(2)}$ linearna funkcija po $\boldsymbol{x}^{(2)}$, a da kovarijaciona matrica od $\boldsymbol{X}^{(1)}$ za dato $\boldsymbol{x}^{(2)}$ uopšte ne zavisi od $\boldsymbol{x}^{(2)}$.

Definicija 2.4.1. *Matrica* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}$ *je matrica regresionog koeficijenta za* $\boldsymbol{X}^{(1)}$ *pod uslovom* $\boldsymbol{x}^{(2)}$.

Element u i –toj vrsti i $(k-q)$-toj koloni matrice $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}$ označava se kao

$$\beta_{i,k\ \ q+1,\dots k-1,k+1\dots p,} \quad i = 1,2,\dots,q, \qquad k = q+1,\dots,p. \tag{2.4.8}$$

Vektor $\boldsymbol{\mu}^{(1)} + \boldsymbol{\beta}\big(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}\big)$ se naziva *regresiona funkcija.*

Neka je $\sigma_{ij\ q+1,\dots,p}$ i,j-ti element matrice $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}$, ove elemente nazivamo parcijalne kovarijanse, a $\sigma_{ii\ q+1,\dots,p}$ su parcijalne varijanse.

Definicija 2.4.2. *Parcijalna korelacija između* X_i *i* X_j, $i,j = 1,\dots,q$, *za fiksirane* $X_{q+1},\dots,X_p$ je

$$\rho_{ij\ q+1,\dots,p} = \frac{\sigma_{ij\ q+1,\dots,p}}{\sqrt{\sigma_{ii\ q+1,\dots,p}}\sqrt{\sigma_{jj\ q+1,\dots,p}}}\,, \quad i,j = 1,\dots,q. \tag{2.4.9}$$

Teorema 2.4.1. *Neka su komponente vektora* $\boldsymbol{X}$ *podeljene u dve grupe koje čine vektori* $\boldsymbol{X}^{(1)}$ *i* $\boldsymbol{X}^{(2)}$, *pri čemu je vektor sredina* $\boldsymbol{\mu}$ *slično podeljen na* $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ *i* $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$, *a kovarijaciona matrica* $\boldsymbol{\Sigma}$ *podeljena na* $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$, *tj. kovarijacione matrice za* $\boldsymbol{X}^{(1)}$, *za* $\boldsymbol{X}^{(1)}$ *i* $\boldsymbol{X}^{(2)}$, *i za* $\boldsymbol{X}^{(2)}$, *respektivno. Tada ako je raspodela za* $\boldsymbol{X}$ *normalna, uslovna raspodela za* $\boldsymbol{X}^{(1)}$ *pod uslovom* $\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$ *je normalna sa sredinom* $\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ *i disperzijom* $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$.

Posmatrajmo dvodimenzionalnu normalnu raspodelu i nađimo uslovnu raspodelu za $X^{(1)}$ pod uslovom $x^{(2)}$, kada je $\mu^{(1)} = \mu_1$ i $\mu^{(2)} = \mu_2$, $\Sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\Sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2\rho$ i $\Sigma_{22} = \sigma_2^2$. Tada je matrica regresionih koeficijenata $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} = \sigma_1\rho/\sigma_2$, i matrica parcijalnih kovarijansi

$$\Sigma_{11\cdot 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2\rho^2}{\sigma_2^2} = \sigma_1^2(1-\rho^2), \tag{2.4.10}$$

a gustina za $X^{(1)}$ pod uslovom $x^{(2)}$ je $n(x_1|\mu_1 + \frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(x_2-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2))$.

2.4.2. Multivarijacioni koeficijent korelacije

Već smo razmatrali vektor $\boldsymbol{X}$ podeljen na podvektore $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$, a sada proučavamo neka svojstva za $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{X}^{(2)}$, gde je matrica $\boldsymbol{\beta}$ dimenzije $q \times (p-q)$.

Definicija 2.4.3. *Vektor* $\boldsymbol{X}^{(1\cdot 2)} = \boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$ *je vektor reziduala* (*ostataka*) $\boldsymbol{X}^{(1)}$ *i njene regresije u odnosu na* $\boldsymbol{X}^{(2)}$.

Teorema 2.4.2. *Komponente iz* $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{1}\cdot\mathbf{2})}$ *nisu u korelaciji sa komponentama iz* $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}$.

Dokaz: Vektor $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{1}\cdot\mathbf{2})}$ je $\boldsymbol{Y}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{EY}^{(\mathbf{2})}$ dat relacijom (2.3.25) u Odeljku 2.3. ■

Neka je $\boldsymbol{\sigma}'_{(i)}$ i-ta vrsta matrice $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{12}}$, $\boldsymbol{\beta}'_{(i)}$ i-ta vrsta matrice $\boldsymbol{\beta}$ (tj. $\boldsymbol{\beta}'_{(i)}$=$\boldsymbol{\sigma}'_{(i)}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{22}}^{-\mathbf{1}}$), a $V(\boldsymbol{Z})$ varijansa za $\boldsymbol{Z}$.

Teorema 2.4.3. *Za svaki vektor* $\boldsymbol{\alpha}$, *koji je iste dimenzije kao* $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}$, *važi da je*

$$V(X_i^{(1\cdot 2)}) \leq V(X_i - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}). \tag{2.4.11}$$

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.4.2.

$$\begin{aligned} &V(X_i - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}) && (2.4.12)\\ &= E[X_i - \mu_i - \boldsymbol{\alpha}'\big(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})}\big)]^2 \\ &= E[X_i^{(1\cdot 2)} - EX_i^{(1\cdot 2)} + (\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha})'\,(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})})]^2 \\ &= V\Big(X_i^{(1\cdot 2)}\Big) + (\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha})'\,E(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})})(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})})'(\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha}) \\ &= V\Big(X_i^{(1\cdot 2)}\Big) + (\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{22}}(\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Jednakost bi važila za pozitivno definitnu matricu $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{22}}$, u kvadratnoj formi $(\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{22}}(\boldsymbol{\beta}_{(i)} - \boldsymbol{\alpha})$ ako bi ta kvadratna forma bila jednaka 0, a to se ostvaruje samo ako je $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}_{(i)}$. ■

Kako je $E\Big(X_i^{(1\cdot 2)}\Big) = 0$, a $V\Big(X_i^{(1\cdot 2)}\Big) = E\Big(X_i^{(1\cdot 2)}\Big)^2$, sledi da je $\mu_i - \boldsymbol{\beta}'_{(i)}\big(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})}\big)$ najbolji linearni prediktor za X_i među svim funkcijama od $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}$ u formi $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} + c$, a srednje kvadratna greška relacije (2.4.12) je minimalna.

Teorema 2.4.4. *Za svaki vektor* $\boldsymbol{\alpha}$, *koji je iste dimenzije kao* $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}$, *važi da je*

$$Corr(X_i, \boldsymbol{\beta}'_{(i)}\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}) \geq Corr(X_i, \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}). \tag{2.4.13}$$

Dokaz : Korelacija između dve promenljive se ne menja kada jednu ili obe pomnožimo pozitivnom konstantom. Pretpostavimo da je $E[\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})})]^2 = E[\boldsymbol{\beta}'_{(i)}(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})})]^2$, tada je proširenje relacije (2.4.11)

$$\begin{aligned} &\sigma_{ii} - 2E(X_i - \mu_i)\boldsymbol{\beta}'_{(i)}\big(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})}\big) + V\big(\boldsymbol{\beta}'_{(i)}\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}\big) \\ &\leq \sigma_{ii} - 2E(X_i - \mu_i)\boldsymbol{\alpha}'\big(\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})} - \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{2})}\big) + V\big(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}\big)\,. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Onda je

$$\frac{E(X_i-\mu_i)\boldsymbol{\beta}'_{(i)}\left(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)}{\sqrt{\sigma_{ii}V(\boldsymbol{\beta}'_{(i)}\boldsymbol{X}^{(2)})}} \geq \frac{E(X_i-\mu_i)\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)}{\sqrt{\sigma_{ii}V(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(2)})}}. \quad \blacksquare \qquad (2.4.15)$$

Definicija 2.4.4. *Koeficijent multivarijacione korelacije između* X_i *i* $\boldsymbol{X}^{(2)}$ *je maksimalna korelacija između* X_i *i linearne kombinacije* $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}^{(2)}$.

Iz toga sledi da je

$$\bar{R}_{i\cdot q+1,\dots,p} = \frac{E\boldsymbol{\beta}'_{(i)}\left(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)(X_i-\mu_i)}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{E\boldsymbol{\beta}'_{(i)}(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)})(\boldsymbol{X}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)})'\boldsymbol{\beta}_{(i)}}} \qquad (2.4.16)$$

$$= \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{(i)}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(i)}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}'_{(i)}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(i)}}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}'_{(i)}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(i)}}}{\sqrt{\sigma_{ii}}}.$$

Međutim, uobičajena formula je

$$1-\bar{R}^2_{i\cdot q+1,\dots,p} = \frac{\sigma_{ii}-\boldsymbol{\sigma}'_{(i)}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(i)}}{\sigma_{ii}} = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}_i|}{\sigma_{ii}|\boldsymbol{\Sigma}_{22}|}, \qquad (2.4.17)$$

gde je

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{ii} & \boldsymbol{\sigma}'_{(i)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{(i)} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.4.18)$$

Kako je

$$\sigma_{ii\cdot q+1,\dots,p} = \sigma_{ii} - \boldsymbol{\sigma}'_{(i)}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \qquad (2.4.19)$$

sledi da je

$$\sigma_{ii\cdot q+1,\dots,p} = (1-\bar{R}^2_{i\cdot q+1,\dots,p})\sigma_{ii} \qquad (2.4.20)$$

Poslednja relacija pokazuje da parcijalna varijacija ne može biti veća od varijanse, tj. za veće $\bar{R}^2_{i\cdot q+1,\ldots,p}$ veće je i smanjenje varijacije koje ide na osnovu uslovne raspodele. Ova činjenica daje još jedan razlog za razmatranje višedimenzionalnog koeficijenta korelacije između X_i i $\boldsymbol{X}^{(2)}$.

Samo na osnovu strukture korelacije, može se zaključiti da li je $\boldsymbol{\beta}'_{(i)}\boldsymbol{X}^{(2)}$ najbolji linearni prediktor za X_i, i odrediti maksimalna korelacija između X_i i bilo koje linearne funkcije od $\boldsymbol{X}^{(2)}$.

Čak i ako $\boldsymbol{X}$ ne poseduje normalnu raspodelu, regresija $\boldsymbol{X}^{(1)}$ na $\boldsymbol{X}^{(2)}$ se može definisati kao $\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$; reziduali se definišu kao u Definiciji 2.4.3; a parcijalne kovarijanse i korelacije se mogu definisati kao kovarijanse i korelacije reziduala koji su prikazani u (2.4.3) i (2.4.8).

2.4.3. Neki primeri parcijalne korelacije

Ovde razmatramo odnose između nekoliko uslovnih raspodela dobijenih pridruživanjem nekoliko različitih skupova promenljivih koji su fiksirani. Ovi odnosi nam omogućavaju da iz jednog skupa uslovnih parametara izračunamo drugi skup. Poseban slučaj je

$$\rho_{12\cdot 3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}\sqrt{1-\rho_{23}{}^2}}\ ; \tag{2.4.21}$$

kada je $p = 3$, a $q = 2$. Izvedimo sada uopštenje ovog rezultata.
Neka je

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \\ \mathbf{X}^{(3)} \end{pmatrix}, \tag{2.4.22}$$

gde $\mathbf{X}^{(1)}$ ima p_1 komponentu, $\mathbf{X}^{(2)}$ p_2 komponenenata, a $\mathbf{X}^{(3)}$ p_3 komponenenata. Pretpostavimo da imamo uslovnu raspodelu $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$, pod uslovom da je $\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$; kako pronaći uslovnu raspodelu $\boldsymbol{X}^{(1)}$ pod uslovom $\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$ i $\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$? Mi koristimo činjenicu da je uslovna gustina $\boldsymbol{X}^{(1)}$ pod uslovom $\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$ i $\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^{(1)}|\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}) &= \frac{f(\boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{x}^{(3)})}{f(\boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{x}^{(3)})} \\ &= \frac{f(\boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{x}^{(3)})/f(\ \boldsymbol{x}^{(3)})}{f(\boldsymbol{x}^{(2)},\ \boldsymbol{x}^{(3)})/f(\ \boldsymbol{x}^{(3)})} \\ &= \frac{f(\boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(2)}|\ \boldsymbol{x}^{(3)})}{f(\boldsymbol{x}^{(2)}|\boldsymbol{x}^{(3)})}. \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

U slučaju normalnosti uslovna kovarijaciona matrica za $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$, pod uslovom $\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$ je

$$Cov\left[\begin{pmatrix}\mathbf{X}^{(1)}\\ \mathbf{X}^{(2)}\end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x}^{(3)}\right] = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{13}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{23}\end{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{33}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_{31} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{32}) \tag{2.4.24}$$
$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 3} & \boldsymbol{\Sigma}_{12\cdot 3}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21\cdot 3} & \boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 3}\end{pmatrix},$$

gde je

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \boldsymbol{\Sigma}_{13}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \boldsymbol{\Sigma}_{23}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{31} & \boldsymbol{\Sigma}_{32} & \boldsymbol{\Sigma}_{33}\end{pmatrix}. \tag{2.4.25}$$

Uslovna kovarijansa $\boldsymbol{X}^{(1)}$ pod uslovom $\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$ i $\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$ se izračunava iz uslovne kovarijanse za $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$, pod uslovom $\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$ jer je

$$Cov\left[\mathbf{X}^{(1)} | \boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(3)}\right] = \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 3} - \boldsymbol{\Sigma}_{12\cdot 3}(\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 3})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21\cdot 3}\,. \tag{2.4.26}$$

Ovaj rezultat dopušta izračunavanje $\sigma_{ij\cdot p_1+1,\dots,p}$, $i,j = 1,2,\dots,p_1$ iz $\sigma_{ij\cdot p_1+p_2,\dots,p}$, $i,j = 1,2,\dots,p_1+p_2$.

U slučaju, kada je $p_1 = q$, $p_2 = 1$ i $p_3 = p - q - 1$, dobijamo da je

$$\sigma_{ij\cdot q+1,\dots,p} = \sigma_{ij\cdot q+2,\dots,p} - \frac{\sigma_{i,q+1\cdot q+2,\dots,p}\sigma_{j,q+1\cdot q+2,\dots,p}}{\sigma_{q+1,q+1\cdot q+2,\dots,p}}, \quad i,j = 1,\dots,q. \tag{2.4.27}$$

A iz

$$\sigma_{ii\cdot q+1,\dots,p} = \sigma_{ii\cdot q+2,\dots,p}(1 - \rho^2_{i,q+1\cdot q+2,\dots,p}), \tag{2.4.28}$$

dobijamo da je

$$\rho_{ij\cdot q+1,\dots,p} = \frac{\rho_{ij\cdot q+2,\dots,p} - \rho_{i,q+1\cdot q+2,\dots,p}\rho_{j,q+1\cdot q+2,\dots,p}}{\sqrt{1-\rho^2_{i,q+1\cdot q+2,\dots,p}}\sqrt{1-\rho^2_{j,q+1\cdot q+2,\dots,p}}}. \tag{2.4.29}$$

Ovo je rekurzivna formula za računanje (ρ_{ij}) iz niza $(\rho_{ij\cdot p})$, $(\rho_{ij\cdot p-1})$, ..., $\rho_{12\cdot 3,\dots,p}$.

2.5. Karakteristična funkcija. Momenti

2.5.1. Karakteristična funkcija

Karakteristična funkcija multivarijacione normalne raspodele ima sličan oblik kao funkcija gustine. Stoga se momenti i funkcije gustine mogu lako naći preko karakterističnih funkcija.

Definicija 2.5.1. *Karakteristična funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ je*

$$\phi(t) = Ee^{\boldsymbol{it'X}} \tag{2.5.1}$$

definisana za svaki realan vektor $\boldsymbol{t}$*, koji je iste dimezije kao vektor* $\boldsymbol{X}$*.*

Da bi ova definicija imala smisla treba da definišemo očekivane vrednosti kompleksne funkcije slučajnog vektora.

Definicija 2.5.2. *Neka je kompleksna funkcija $g(x)$ zapisana kao $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, gde su $g_1(x)$ i $g_2(x)$ realne funkcije. Očekivana vrednost za $g(\boldsymbol{X})$ je*

$$Eg(\boldsymbol{X}) = Eg_1(\boldsymbol{X}) + iEg_2(\boldsymbol{X}). \tag{2.5.2}$$

Posebno, kada je $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$Ee^{it'\boldsymbol{X}} = E\cos t'\boldsymbol{X} + iE\sin t'\boldsymbol{X}. \tag{2.5.3}$$

Da bi se odredila vrednost karakteristične funkcije vektora $\boldsymbol{X}$, često se koristi sledeća lema:

Lema 2.5.1. *Neka je $\boldsymbol{X}' = \left(\boldsymbol{X}^{(1)'}, \boldsymbol{X}^{(2)'}\right)$. Ako su vektori $\boldsymbol{X}^{(1)}$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}$ nezavisni i $g(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)g^{(2)}\left(\boldsymbol{x}^{(2)}\right)$, tada važi da je*

$$Eg(\boldsymbol{X}) = Eg^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)})Eg^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)}). \tag{2.5.4}$$

Dokaz : Ako je $g(\boldsymbol{X})$ realna funkcija, i postoji gustina za $\boldsymbol{X}$ tada je

$$\begin{aligned}
Eg(\boldsymbol{X}) &= \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{x} g(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_p \\
&= \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{x} g^{(1)}\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) g^{(2)}\big(\boldsymbol{x}^{(2)}\big) f^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)}) f^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)})\, dx_1 \cdots dx_p \\
&= \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{x} g^{(1)}\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) f^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)})\, dx_1 \cdots dx_q \\
&\cdot \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{x} g^{(2)}\big(\boldsymbol{x}^{(2)}\big) f^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)})\, dx_{q+1} \cdots dx_p \\
&= Eg^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)}) Eg^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)}).
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Ako je $g(\boldsymbol{x})$ kompleksna funkcija

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}) &= [g_1{}^{(1)}\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) + i\, g_2{}^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)})][g_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{x}^{(2)}\big) + i\, g_2{}^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)})] \\
&= g_1{}^{(1)}\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) g_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{x}^{(2)}\big) - g_2{}^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)})\, g_2{}^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)}) \\
&+ i[g_2{}^{(1)}\big(\boldsymbol{x}^{(1)}\big) g_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{x}^{(2)}\big) + g_1{}^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)})\, g_2{}^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)})].
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
Eg(\boldsymbol{X}) &= E[g_1{}^{(1)}\big(\boldsymbol{X}^{(1)}\big) g_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{X}^{(2)}\big) - g_2{}^{(1)}\big(\boldsymbol{X}^{(1)}\big) g_2{}^{(2)}\big(\boldsymbol{X}^{(2)}\big)] \\
&+ iE[g_2{}^{(1)}\big(\boldsymbol{X}^{(1)}\big) g_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{X}^{(2)}\big) + g_1{}^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)})\, g_2{}^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)})] \\
&= Eg_1{}^{(1)}\big(\boldsymbol{X}^{(1)}\big) Eg_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{X}^{(2)}\big) - Eg_2{}^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)}) E\, g_2{}^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)}) \\
&+ i[Eg_2{}^{(1)}\big(\boldsymbol{X}^{(1)}\big) Eg_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{X}^{(2)}\big) + Eg_1{}^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)}) Eg_2{}^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)})] \\
&= [Eg_1{}^{(1)}\big(\boldsymbol{X}^{(1)}\big) + iE\, g_2{}^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)})][Eg_1{}^{(2)}\big(\boldsymbol{X}^{(2)}\big) + iEg_2{}^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)})] \\
&= Eg^{(1)}(\boldsymbol{X}^{(1)}) Eg^{(2)}(\boldsymbol{X}^{(2)}). \ \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Primenom prethodne leme na funkciju $g(\boldsymbol{X}) = Ee^{\boldsymbol{it'X}}$ dobijamo

Lemu 2.5.2. *Ako su komponente od* $\boldsymbol{X}$ *međusobno nezavisne, onda je*

$$Ee^{\boldsymbol{it'X}} = \prod_{j=1}^{p} e^{it_j X_j}. \tag{2.5.8}$$

Teorema 2.5.1. *Karakteristična funkcija za slučajan vektor* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *je*

$$\phi(\boldsymbol{t}) = Ee^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}} = e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}}, \tag{2.5.9}$$

za svaki realan vektor $\boldsymbol{t}$.

Dokaz : Neka postoji nesingularna matrica $\boldsymbol{C}$ takva da je

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}. \tag{2.5.10}$$

Onda je

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}. \tag{2.5.11}$$

I neka je

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}, \tag{2.5.12}$$

gde je $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \mathbf{I})$.

Sada je karakteristična funkcija za $\boldsymbol{Y}$

$$\psi(\boldsymbol{u}) = Ee^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y}} = \prod_{j=1}^{p} e^{it_j Y_j}. \tag{2.5.13}$$

Kako je $Y_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ tada je

$$\psi(\boldsymbol{u}) = \prod_{j=1}^{p} e^{-\frac{1}{2}u_j^2} = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}. \tag{2.5.14}$$

Onda je

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{t}) &= Ee^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}} = Ee^{i\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\mu})} \\ &= e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu}}\, Ee^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}} \\ &= e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{C})(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{C})'} \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

za $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{u}'$; treća jednakost potvrđuje se pisanjem obe strane kao integral. A ovo je

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{t}) &= e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{t}} \\ &= e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}}. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Karateristična funkcija normalne raspodele je veoma korisna. Na primer, ako stavimo da je $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}$, gde je $\boldsymbol{D}$ $q \times p$ realna matrica, onda je karakteristična funkcija za $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{D}')$, data sa

$$\begin{aligned} Ee^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Z}} &= Ee^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}} = E\boldsymbol{e}^{i(\boldsymbol{D}'t)'\boldsymbol{X}} \\ &= e^{i(\boldsymbol{D}'t)'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}'t)'\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{t})} \\ &= e^{it'(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}t'(\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{D}')\boldsymbol{t}}. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Karakterističnu funkciju koristimo da bi pokazali da multivarijaciona normalna raspodela ima svojstvo da je svaka njena linearna kombinacija slučajnih promenljivih normalno raspodeljena. Posmatrajmo sad p-dimenzionalan vektor $\boldsymbol{Y}$ sa gustinom $f(\boldsymbol{y})$ i karakterističnom funkcijom

$$\psi(\boldsymbol{u}) = Ee^{i\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Y}} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{u}'\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y})\, dy_1 \cdots dy_p \tag{2.5.18}$$

i pretpostavimo da je njegovo očekivanje $\boldsymbol{\mu}$, a kovarijaciona matrica $\boldsymbol{\Sigma}$. Neka je linearna kombinacija $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Y}$ normalno raspodeljena za svaki vektor $\boldsymbol{u}$, iste dimenzije kao $\boldsymbol{Y}$, onda je karakteristična funkcija linearne kombinacije

$$Ee^{i\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Y}} = e^{\boldsymbol{i t u'\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t^2 u'\Sigma u}}. \tag{2.5.19}$$

Ako je $t = 1$, desna strana jednačine je karakteristična funkcija normalne raspodele $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Teorema 2.5.2. *Ako je svaka linearna kombinacija komponenata vektora* $\boldsymbol{Y}$ *normalno raspodeljena, onda je i* $\boldsymbol{Y}$ *normalno raspodeljen.*

Teorema 2.5.3. *Ako je dat slučajan vektor* $\boldsymbol{X}$ *koji ima gustinu* $f(\boldsymbol{x})$ *i karakterističnu funkciju* $\phi(\boldsymbol{t})$, *tada je*

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x}}\ \phi(\boldsymbol{t})\, dt_1 \cdots dt_p. \tag{2.5.20}$$

Ova teorema pokazuje da karakteristična funkcija određuje funkciju gustine jednoznačno. Ako $\boldsymbol{X}$ nema gustinu, karakteristična funkcija je definisana na svakom neprekidnom intervalu. U opštem slučaju na neprekidnom intervalu zajednička funkcija raspodele nema prekida u krajnjim tačkama intervala.

Teorema 2.5.4. *Neka je* $\left(F_j(x)\right)$ *niz funkicija raspodela slučajnih promenljivih* $X_1, \dots, X_p$, *i neka je* $\left(\phi_j(t)\right)$ *niz odgovarajućih karakterističnih funkicja. Potreban i dovoljan uslov da* $F_j(x)$ *konvergira ka* $F(x)$ *koja je funkcija raspodele slučajne promenljive* X, *je da za svako* t $\phi_j(t)$ *konvergira ka graničnoj fukciji* $\phi(t)$ *kada* $t \to 0$ *koja je karakteristična funkcija te iste slučajne promenljive* X.

2.5.2. Momenti

Momenti promenljivih $X_1, \dots, X_p$ sa zajedničkom normalnom raspodelom mogu se izračunati preko karakteristične funkcije (2.5.9). Očekivanje slučajne promenjive je

$$\begin{aligned} EX_h &= \frac{1}{i}\frac{\partial \phi}{\partial t_h}\Big|_{\boldsymbol{t=0}} \\ &= \frac{1}{i}\left\{-\sum_j \sigma_{hj} t_j + i\mu_h\right\}\phi(t)\Big|_{\boldsymbol{t=0}} \\ &= \mu_h. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Drugi moment je

$$\begin{aligned} EX_hX_j &= \frac{1}{i^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_h \partial t_j}\Big|_{\boldsymbol{t=0}} \\ &= \frac{1}{i^2}\left\{\left(-\sum_k \sigma_{hk} t_k + i\mu_h\right)\left(-\sum_k \sigma_{kj} t_j + i\mu_j\right) - \sigma_{hj}\right\}\phi(t)\Big|_{\boldsymbol{t=0}} \\ &= \sigma_{hj} + \mu_h\mu_j. \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Tada je

$$Var(X_i) = E(X_i - \mu_i)^2 = \sigma_{ii}, \tag{2.5.23}$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) = \sigma_{ij}. \tag{2.5.24}$$

Svaki treći centralni moment je

$$E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k) = 0. \tag{2.5.25}$$

Četvrti centralni moment je

$$E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)(X_l - \mu_l) = \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}, \tag{2.5.26}$$

a svaki naredni moment neparnog reda je 0.

Glava 3

Ocena vektora sredine i kovarijansne matrice

Multivarijaciona normalna raspodela je u potpunosti određena vektorom sredine $\boldsymbol{\mu}$ i kovarijacionom matricom $\boldsymbol{\Sigma}$. Pravi statistički problem je kako proceniti ove parametre na osnovu posmatranog uzorka. Mi ćemo pokazati da je ocena maksimalne verodostojnosti za $\boldsymbol{\mu}$ vektor sredine, a ocena maksimalne verodostojnosti za $\boldsymbol{\Sigma}$ proporcionalna uzoračkoj varijansi i kovarijansi. Uzoračka varijansa je zbir kvadrata odstupanja dobijenih na osnovu uzoračke sredine podeljene brojem koji je za jedan broj manji od veličine posmatranog uzorka; uzoračka kovarijansa je slično definisana u smislu unakrsnih proizvoda. Matrica uzoračke kovarijanse je nepristrastna ocena za $\boldsymbol{\Sigma}$.

3.1. Ocena maksimalne verodostojnosti za vektor sredine i kovarijansnu matricu

Neka je dat uzorak (vektor) od n posmatranja koji su normalno raspodeljeni, mi ćemo tražiti ocenu za vektor sredine $\boldsymbol{\mu}$ i za kovarijacionu matricu $\boldsymbol{\Sigma}$, metodom maksimalne verodostojnosti. Ovaj metod se često koristi u rešavanju raznih problema procene i prilikom testiranja hipoteza u vezi sa multivarijacionom raspodelom. Ocena maksimalne verodostojnosti često ima neke optimalne osobine, a mi ćemo ovde proučavati ocene koje su asimtotički efikasne.

Neka je $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ i uzorak od N posmatranja $\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_N}$, gde je $N > p$, onda je funkcija verodostojnosti

$$L = \prod_{\alpha=1}^{N} n(\boldsymbol{x_\alpha} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}pN} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}N}} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x_\alpha} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x_\alpha} - \boldsymbol{\mu})\right]. \quad (3.1.1)$$

U funkciji verodostojnosti vektori $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_N}$ su fiksirani a posmatrani uzorak i L su funkcije od $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$. Ove veličine su promenljive (a ne parametri) pa ćemo ih označavati sa $\boldsymbol{\mu}^*$ i $\boldsymbol{\Sigma}^*$. Tada je logaritam funkcije verodostojnosti

$$log\, L = -\tfrac{1}{2} pN\, log\, 2\pi - \tfrac{1}{2} N\, log\, \boldsymbol{\Sigma}^* - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x_\alpha} - \boldsymbol{\mu}^*)' \boldsymbol{\Sigma}^{*\boldsymbol{-1}} (\boldsymbol{x_\alpha} - \boldsymbol{\mu}^*). \quad (3.1.2)$$

Funkcija $log\, L$ je rastuća po L i dostiže maksimum u istoj tački u prostoru u kojoj i funkcija L.

Posmatrajmo uzorački vektor sredine

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_{1\alpha} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_{p\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{X_p} \end{pmatrix}, \tag{3.1.3}$$

gde je $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} = \left(X_{1\alpha}, \dots, X_{p\alpha}\right)'$ i $\overline{X_i} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} X_{i\alpha}$, i neka je matrica $\boldsymbol{A}$ suma kvadrata odstupanja od vektora sredine

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' \\ &= \left[\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{i\alpha} - \overline{X_i})\left(X_{j\alpha} - \overline{X_j}\right)\right]_{i,j=1,\dots,p.} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Biće zgodno koristiti sledeću lemu:

Lema 3.1.1. *Neka je* $\boldsymbol{X}_{\mathbf{1}}, \dots, \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{N}}$ *uzorak od* N *vektora, i* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *definisan kao u* (3.1.3). *Onda za svaki vektor* $\mathbf{b}$ *imamo da je*

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{b})' = \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' + N(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})'. \tag{3.1.5}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} &\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{b})' = \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}[(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}}) + (\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})][(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}}) + (\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})]' \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}[(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' + (\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})' + (\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' + (\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})'] \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' + [\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})]\,(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})' \\ &\qquad + (\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' + N(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{b})'. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Drugi i treci izraz na desnoj strani jednaki su 0 jer je $\sum(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}}) = \sum \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - N\overline{\boldsymbol{X}} = 0.$ ■

Ako stavimo da je $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\mu}^*$, onda je

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\mu}^*)(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\mu}^*)' &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' + \boldsymbol{N}\,(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)' \\ &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{N}(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)'. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Iskoristimo sada svojstva traga matrice ($tr\boldsymbol{CD} = \sum c_{ij}d_{ji} = tr\boldsymbol{DC}$) i prethodni rezultat, dobićemo

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu}^*)'\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\boldsymbol{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu}^*) &= tr \sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu}^*)'\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\boldsymbol{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu}^*) \\ &= tr \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\boldsymbol{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu}^*)(\boldsymbol{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu}^*)' \\ &= tr\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}\boldsymbol{A} + tr\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}N(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)' \\ &= tr\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}\boldsymbol{A} + N(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}^*)'. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Onda relaciju (3.1.2) možemo zapisati kao

$$log\, L = -\frac{1}{2}pN\, log(2\pi) - \frac{1}{2}N\, log|\boldsymbol{\Sigma}^*| - \frac{1}{2}tr\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}A - \frac{1}{2}N(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^*)'. \tag{3.1.9}$$

Kako je $\boldsymbol{\Sigma}^*$ pozitivno definitna matrica, tada je i $\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}$ pozitivno definitna, pa je $N(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^*)' \geq 0$; jednakost važi ako i samo ako $\boldsymbol{\mu}^* = \overline{\boldsymbol{x}}$.

Lema 3.1.2. *Neka je $\boldsymbol{D}$ pozitivno definitna matrica reda p, tada maksimum funkcije*

$$f(\boldsymbol{G}) = N\, log|\boldsymbol{G}| - tr\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{D}, \tag{3.1.10}$$

postoji u odnosu na pozitivno definitnu matricu $\boldsymbol{G}$. Ako je $\boldsymbol{G} = \left[\left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{D}\right]$ onda važi

$$f\left[\left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{D}\right] = pN\, log\, N - N\, log|\boldsymbol{D}| - pN. \tag{3.1.11}$$

Dokaz : Neka je $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}'$ i $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}$. Tada je $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{E}'$, i važi da je $|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{E}||\boldsymbol{H}^{-1}||\boldsymbol{E}'| = |\boldsymbol{H}^{-1}||\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}'| = |\boldsymbol{D}|/|\boldsymbol{H}|$, i $tr\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{D} = tr\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}' = tr\boldsymbol{E}'\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{E} = tr\boldsymbol{H}$. Zatim se funkcija maksimizira (u odnosu na pozitivno definitnu matricu H)

$$f = -N\, log|\boldsymbol{D}| + N\, log|\boldsymbol{H}| - tr\boldsymbol{H}. \tag{3.1.12}$$

Stavimo sad da je $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'$, gde je $\boldsymbol{T}$ donja trougaona matirica, onda se maksimum funkicije

$$\begin{aligned} f &= -N\, log|\boldsymbol{D}| + N\, log|\boldsymbol{T}|^2 - tr\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}' \\ &= -N\, log|\boldsymbol{D}| + \sum_{i=1}^{p}(N\, log\, {t_{ii}}^2 - t_{ii}^2) - \sum_{i>j} t_{ij}^2. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

javlja za $t_{ii}^2 = N$, a $t_{ij} = 0$, $i \neq j$; tj. kod $\boldsymbol{H} = N\boldsymbol{I}$. Tada je $\boldsymbol{G} = (1/N)\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}' = \left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{D}$. ∎

Teorema 3.1.1. *Neka je* $\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_N}$ *uzorak uzet iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele, gde je* $p < N$, *tada su ocene maksimalne verodostojnost za* $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$, $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{\alpha=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{X_\alpha}$ *i* $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}) \sum_{\boldsymbol{\alpha=1}}^{\boldsymbol{N}} (\boldsymbol{X_\alpha} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X_\alpha} - \overline{\boldsymbol{X}})'$, *respektivno.*

Ako u Lemi 3.1.1. stavimo da je $\boldsymbol{b} = 0$, onda je izračunavanje ocene za $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ znatno lakše, tj.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{X_\alpha} - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X_\alpha} - \overline{\boldsymbol{X}})' = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{X_\alpha X'_\alpha} - N\overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{X}}'. \tag{3.1.14}$$

Element matrice $\sum_{\boldsymbol{\alpha=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{X_\alpha X'_\alpha}$ je $\sum_{\alpha=1}^{N} X_{i\alpha} X_{j\alpha}$, a element $N\overline{\boldsymbol{X}}\overline{\boldsymbol{X}}'$ je $N\overline{X}_\iota \overline{X}_J$ ili $(\sum_{\alpha=1}^{N} X_{i\alpha})(\sum_{\alpha=1}^{N} X_{j\alpha})/N$.

Lema 3.1.3. *Neka je* $f(\theta)$ *realna funkcija definisana na skupu* S, *i neka je* ϕ *jednodimenzionalna funkcija, sa skupa* S *na skup* S^*, *sa inverznom funkcijom; tj. za svako* $\theta \in S$, *postoji jedinstven element* $\theta^* \in S^*$ *tako da je* $\phi(\theta) = \theta^*$, *i obrnuto, za svaki* $\theta^* \in S^*$ *postoji jedinstven element* $\theta \in S$ *takav da je* $\phi^{-1}(\theta^*) = \theta$. *Odnosno, ako je*

$$g(\theta^*) = f[\phi^{-1}(\theta^*)] \tag{3.1.15}$$

i $f(\theta)$ *dostiže maksimum u* $\theta = \theta_0$, *a* $g(\theta^*)$ *dostiže maksimum za* θ^* *za koje je* $\theta^* = {\theta_0}^* = \phi(\theta)$. *Ako je maksimum za* $f(\theta)$ *u* θ_0 *jedinstven, takav je i maksimum za* $g(\theta^*)$ *u* ${\theta_0}^*$.

Dokaz: Po pretpostavci je $f(\theta_0) \geq f(\theta)$ za svako $\theta \in S$. Onda je za svako $\theta^* \in S^*$

$$g(\theta^*) = f[\phi^{-1}(\theta^*)] = f(\theta) \leq f(\theta_0) = g[\phi(\theta_0)] = g({\theta_0}^*). \tag{3.1.16}$$

Tako $g(\theta^*)$ dostiže maksimum za ${\theta_0}^*$. Ako je maksimum za $f(\theta)$ θ_0 jedinstven, u (3.1.16) postoji stroga nejednakost za $\theta \neq \theta_0$, a maksimum za $g(\theta^*)$ je jedinstven. ■

Posledica 3.1.1. *Ako su na osnovu datog uzorka,* $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ *ocene maksimalne verodostojnosti parametara raspodele* $\theta_1, \dots, \theta_m$, *onda su* $\phi_1(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m), \dots, \phi_m(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m)$, *ocene maksimalne verodostojnosti za* $\phi_1(\theta_1, \dots, \theta_m)$, ..., $\phi_m(\theta_1, \dots, \theta_m)$ *ako je transformacija iz* $\theta_1, \dots, \theta_m$ *na* $\phi_1, \dots, \phi_m$ $1-1$. *Ako su ocene za* $\theta_1, \dots, \theta_m$ *jedinstvene, onda su i ocene za* $\phi_1, \dots, \phi_m$ *jedinstvene.*

Posledica 3.1.2. *Ako je* $\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_N}$ *uzorak iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele, gde je* $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$, $i, j = 1, \dots, p$ $(\rho_{ij} = 1)$, *tada ocena maksimalne verodostojnosti za* $\boldsymbol{\mu}$ *je* $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{\alpha=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{x_\alpha}$; *a ocena maksimalne verodostojnosti za* σ_i^2 *je* $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{i\alpha} -$

$\bar{X}_i)^2 = \frac{1}{N}(\sum_{\alpha=1}^{N} X_{i\alpha}^2 - N\bar{X}_i^2)$, *gde je* $X_{i\alpha}$ *i -ta komponenta vektora* $\boldsymbol{X_\alpha}$ *a* $\bar{X}_i$ *i -ta komponenta vektora* $\bar{\boldsymbol{X}}$; *tada je ocena maksimalne verodostojnosti za* ρ_{ij}

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{i\alpha} - \bar{X}_i)(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{i\alpha} - \bar{X}_i)^2}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)^2}} \tag{3.1.17}$$
$$= \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} X_{i\alpha} X_{j\alpha} - N\bar{X}_i\bar{X}_j}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} X_{i\alpha}^2 - N\bar{X}_i^2}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} X_{j\alpha}^2 - N\bar{X}_j^2}}.$$

Dokaz : Skup parametara $\mu_i = \mu_j$, $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$, i $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$ je $1-1$ transformacija skupa parametara μ_i i σ_{ij}. Na osnovu toga po Posledici 3.1.1. ocena za μ_i je $\widehat{\mu_i}$, za σ_i^2 je $\hat{\sigma}_i^2$, a za ρ_{ij} je

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}}. \quad \blacksquare \tag{3.1.18}$$

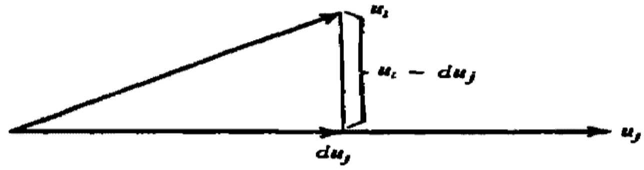
Pearson[10](1896) je dao objašnjenje ocene ρ_{ij}, i ponekad je nazivamo Pirsonovim koeficijentom korelacije. Takođe se naziva koeficijent korelacije, i označava sa r_{ij}.

Pogodna geometrijska interpretacija realizovanog uzorka $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_N})$, data je na sledeći način. Neka je

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pt} & \cdots & x_{pN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_p'} \end{pmatrix}; \tag{3.1.19}$$

tj. $\boldsymbol{u_i'}$ je i-ta vrsta vektora $\boldsymbol{X}$. Vektor $\boldsymbol{u_i}$ može biti razmatran kao vektor u N-dimenzionalnom prostoru. Pa smo uzorak p-dimezionalnog vektora predstavili u N-dimenzionalnom Euklidovom prostoru, a na osnovu definicije Euklidske metrike, kvadrat dužine $\boldsymbol{u_i}$ je $\boldsymbol{u_i'u_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}^2$.

Pokažimo da je kosinus ugla između $\boldsymbol{u_i}$ i $\boldsymbol{u_j}$ jednak $\boldsymbol{u_i'u_j}/\sqrt{\boldsymbol{u_i'u_iu_j'u_j}} = \sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}\, x_{j\alpha}/\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}^2 \sum_{\alpha=1}^{N} x_{j\alpha}^2}$. Neka je skalar d takav da je vektor $d\boldsymbol{u_j}$ ortogonalnan na $\boldsymbol{u_i} - d\boldsymbol{u_j}$; tj. 0= $d\boldsymbol{u_j}\left(\boldsymbol{u_i} - d\boldsymbol{u_j}\right) = d(\boldsymbol{u_ju_i} - d\boldsymbol{u_j'u_j})$, onda je $d = \boldsymbol{u_ju_i}/\boldsymbol{u_j'u_j}$. Vektor $\boldsymbol{u_i}$ možemo zapisati kao $\boldsymbol{u_i}$=$(\boldsymbol{u_i} - d\boldsymbol{u_j})$ +$d\boldsymbol{u_j}$ (prikazano na slici 1.). Apsolutna vrednost kosinus ugla između $\boldsymbol{u_i}$ i $\boldsymbol{u_j}$ jednaka je količniku dužine $d\boldsymbol{u_j}$ i dužine za $\boldsymbol{u_i}$; tj. $\sqrt{d\boldsymbol{u_j'}(d\boldsymbol{u_j})/\boldsymbol{u_i'u_i}} = \sqrt{d\boldsymbol{u_i'u_j}d/\boldsymbol{u_i'u_i}}$; a kosinus je $\boldsymbol{u_i'u_j}/\sqrt{\boldsymbol{u_i'u_iu_j'u_j}}$. Što je i trebalo pokazati.



Slika 1.

Da bismo dali geometrijsko tumačenje za a_{ii} i $a_{ij}/\sqrt{a_{ii}a_{jj}}$, uvodimo pojam ugaone linije, ta linija prolazi kroz koordinatni početak i kroz tačku (1,1,...,1). Projekcija $\boldsymbol{u_i}$ na vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = (1,1,\ldots,1)'$ je $(\boldsymbol{\varepsilon}' u_i / \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon} = (\sum_\alpha x_{i\alpha} / \sum_\alpha 1)\,\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{x}_i\boldsymbol{\varepsilon} = (\overline{x}_i, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_i)'$. Tada se $\boldsymbol{u_i}$ razlaže na $\overline{x}_i\boldsymbol{\varepsilon}$, kao projekcija na ugaone linije i $\boldsymbol{u_i} - \overline{x}_i\boldsymbol{\varepsilon}$ kao projekcija $\boldsymbol{u_i}$ na ravan normalna na ugaonu liniju. A dužina kvadrata $\boldsymbol{u_i} - \overline{x}_i\boldsymbol{\varepsilon}$ je $(\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon})'(\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_\alpha (x_{i\alpha} - \overline{x}_i)^2$; ovo je $N\hat{\sigma}_{ii} = a_{ii}$. Zatim transformišemo $\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{u_j} - \bar{x}_j\boldsymbol{\varepsilon}$, tako da svaki od vektora ima krajnju tačku u koordinatnom početku, a α-ta koordinata prvog vektora je $x_{i\alpha} - \overline{x}_i$, dok je drugog $x_{j\alpha} - \overline{x}_j$. Onda je kosinus ugla između ova dva vektora

$$r_{ij} = \frac{(\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon})'(\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon})}{\sqrt{(\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon})'(\boldsymbol{u_i} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{u_j} - \bar{x}_i\boldsymbol{\varepsilon})'(\boldsymbol{u_j} - \bar{x}_j\boldsymbol{\varepsilon})}}$$
$$= \frac{\sum_{\alpha=1}^N (x_{i\alpha} - \bar{x}_i)(x_{j\alpha} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^N (x_{i\alpha} - \bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^N (x_{j\alpha} - \bar{x}_j)^2}} \quad ,$$

odnosno statistika kojom se ocenjuje ρ_{ij}, $r_{ij} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N (X_{i\alpha} - \bar{X}_i)(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^N (X_{i\alpha} - \bar{X}_i)^2}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^N (X_{j\alpha} - \bar{X}_j)^2}}$.

3.2. Raspodela uzoračkog vektora sredine

3.2.1. Zaključivanje u vezi sa vektorom sredine kada je kovarijansna matrica poznata

U jednodimenzionalnom slučaju srednja vrednost uzorka je normalno raspodeljenja i nezavisna od uzoračke varijanse. Slično tome, uzoračka sredine za $\boldsymbol{X}$ definisana u prethodnom odeljku je normalno raspodeljena i nezavisna od $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$.
Da bi dokazali ovaj rezultat napravićemo transformaciju skupa vektora posmatranja. Ovu vrstu transformacije koristićemo više puta, pa ćemo zbog toga pre toga dokazati nekoliko opštijih teorema.

Teorema 3.2.1. *Pretpostavimo da su p-dimenzionalne slučajne promenljive $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ nezavisne gde je $\boldsymbol{X_\alpha} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_\alpha}, \boldsymbol{\Sigma})$, i neka je $\boldsymbol{C} = (c_{\alpha\beta})$ $N \times N$ ortogonalna matrica. Tada je $\boldsymbol{Y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^N c_{\alpha\beta}\boldsymbol{X_\beta} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu_\alpha}, \boldsymbol{\Sigma})$, gde je $\boldsymbol{\nu_\alpha} = \sum_{\beta=1}^N c_{\alpha\beta}\boldsymbol{\mu_\beta}$, $\alpha = 1, \ldots, N$, a $\boldsymbol{Y_1}, \ldots, \boldsymbol{Y_N}$ su nezavisni.*

Dokaz : Skup vektora $\boldsymbol{Y_1}, \dots, \boldsymbol{Y_N}$ ima zajedničku normalnu raspodelu, jer je čitav skup komponenata skup linearnih kombinacija komponenata $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X_N}$ koje imaju zajedničku normalnu raspodelu. Očekivana vrednost za $\boldsymbol{Y_\alpha}$ je

$$E\boldsymbol{Y_\alpha} = E\sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{X_\beta} = \sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\,E\boldsymbol{X_\beta} = \sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{\mu_\beta} = \boldsymbol{\nu_\alpha}. \tag{3.2.1}$$

Kovarijansna matrica između $\boldsymbol{Y_\alpha}$ i $\boldsymbol{Y_\gamma}$ je

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{Y_\alpha}, \boldsymbol{Y_\gamma}) &= E(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu_\alpha})(\boldsymbol{Y_\gamma} - \boldsymbol{\nu_\gamma})' \\ &= E\left[\textstyle\sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{X_\beta} - \boldsymbol{\mu_\beta})\right]\left[\textstyle\sum_{\varepsilon=1}^{N} c_{\gamma\varepsilon}(\boldsymbol{X_\varepsilon} - \boldsymbol{\mu_\varepsilon})'\right] \\ &= \textstyle\sum_{\beta,\varepsilon=1}^{N} c_{\alpha\beta}c_{\gamma\varepsilon}E\,(\boldsymbol{X_\beta} - \boldsymbol{\mu_\beta})(\boldsymbol{X_\varepsilon} - \boldsymbol{\mu_\varepsilon})' \\ &= \textstyle\sum_{\beta,\varepsilon=1}^{N} c_{\alpha\beta}c_{\gamma\varepsilon}\delta_{\beta\varepsilon}\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \textstyle\sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\,c_{\gamma\beta}\,\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \delta_{\alpha\gamma}\boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

gde je $\delta_{\alpha\gamma}$ Kronekerova delta ($\delta_{\alpha\gamma}$=1 ako je $\alpha = \gamma$, i $\delta_{\alpha\gamma}$=0 ako je $\alpha \neq \gamma$). Ovo pokazuje da je $\boldsymbol{Y_\alpha}$ nezavisno od $\boldsymbol{Y_\gamma}$ kada je $\alpha \neq \gamma$, i $\boldsymbol{Y_\alpha}$ ima kovarijacionu matricu $\boldsymbol{\Sigma}$. ■

Lema 3.2.1. *Neka je* $\boldsymbol{C} = (c_{\alpha\beta})$ *ortogonalna matrica, tada je* $\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{x_\alpha}\boldsymbol{x_\alpha}' = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{y_\alpha}\boldsymbol{y_\alpha}'$, *gde je* $\boldsymbol{y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{x_\beta}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{y_\alpha}\boldsymbol{y'_\alpha} &= \textstyle\sum_\alpha \sum_\beta c_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{x_\beta} \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}\,\boldsymbol{x'_\gamma} \\ &= \textstyle\sum_{\beta,\gamma}\left(\sum_\alpha c_{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}\right)\boldsymbol{x_\beta}\boldsymbol{x'_\gamma} \\ &= \textstyle\sum_{\beta,\gamma} \delta_{\beta\gamma}\,\boldsymbol{x_\beta}\boldsymbol{x'_\gamma} \\ &= \textstyle\sum_\beta \boldsymbol{x_\beta}\boldsymbol{x'_\beta}. \quad ■ \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Neka su $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X_N}$ nezavisne slučajne promenljive i svaka od njih ima p-dimenzionalnu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Pretpostavimo da postoji $N \times N$ ortogonalna matrica $\boldsymbol{B} = (b_{\alpha\beta})$ sa poslednjom vrstom

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{3.2.4}$$

Neka je $\boldsymbol{A} = N\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$, i

$$\boldsymbol{Z_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{X_\beta}, \tag{3.2.5}$$

tada je

$$\boldsymbol{Z_N} = \sum_{\beta=1}^{N} b_{N\beta}\, \boldsymbol{X_\beta} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{X_\beta} = \sqrt{N}\overline{\boldsymbol{X}}. \tag{3.2.6}$$

Na osnovu Leme 3.2.1 imamo da je:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{X_\alpha}\boldsymbol{X_\alpha}' - N\overline{\boldsymbol{X}}\overline{\boldsymbol{X}}' \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{Z_\alpha}\boldsymbol{Z_\alpha'} - \boldsymbol{Z_N}\boldsymbol{Z_N'} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N-1} \boldsymbol{Z_\alpha}\boldsymbol{Z_\alpha'}. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Pošto je $\boldsymbol{Z_N}$ nezavisan od $\boldsymbol{Z}_1, \dots, \boldsymbol{Z_{N-1}}$, onda je vektor sredine $\overline{\boldsymbol{X}}$ nezavistan od matrice $\boldsymbol{A}$. A kako je

$$E\boldsymbol{Z_N} = \sum_{\beta=1}^{N} b_{N\beta}\, E\boldsymbol{X_\beta} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{\mu} = \sqrt{N}\boldsymbol{\mu}, \tag{3.2.8}$$

sledi da je $\boldsymbol{Z_N} \sim \mathcal{N}(\sqrt{N}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, a $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{Z_N} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{N}\boldsymbol{\Sigma})$. Napomenimo da je

$$\begin{aligned} E\boldsymbol{Z_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, E\boldsymbol{X_\beta} = \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{\mu} \\ &= \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, b_{N\beta} \sqrt{N}\boldsymbol{\mu} \\ &= 0, \qquad \alpha \neq N. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Teorema 3.2.2. *Vektor sredine uzorka veličine N iz $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ raspodele ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{N}\boldsymbol{\Sigma}\right)$, i nezavistan je od ocene maksimalne verodostojnosti za $\boldsymbol{\Sigma}$, tj. $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$. $N\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ima raspodelu kao $\sum_{\alpha=1}^{N-1} \boldsymbol{Z_\alpha}\boldsymbol{Z_\alpha'}$, gde je $\boldsymbol{Z_\alpha} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\alpha = 1, 2, \dots, N-1$, a $\boldsymbol{Z}_1, \dots, \boldsymbol{Z_{N-1}}$ su nezavisni.*

Definicija 3.2.1. *Ocena $\boldsymbol{t}$ za parametarski vektor $\boldsymbol{\theta}$ je nepristrastna ako i samo ako je $E_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta}$.*

Pošto važi da je $E\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N} E \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{X}_\alpha = \boldsymbol{\mu}$, sledi da je uzoračka sredina nepristrastna ocena vektora sredine. Međutim,

$$E\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{N} E \sum_{\alpha=1}^{N-1} \boldsymbol{Z}_\alpha \boldsymbol{Z}_\alpha' = \frac{N-1}{N} \boldsymbol{\Sigma}, \tag{3.2.10}$$

pa je $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ pristrastna ocena za $\boldsymbol{\Sigma}$. Da bismo došli do nepristrasne ocene, definisaćemo

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{N-1} \boldsymbol{A} = \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{X}_\alpha - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_\alpha - \overline{\boldsymbol{X}})' \tag{3.2.11}$$

kao matricu *uzoračke kovarijanse.* $\boldsymbol{S}$ je nepristrastna ocena za $\boldsymbol{\Sigma}$ a dijagonalni elementi su uobičajene (nepristrastne) uzoračke varijanse komponenata od $\boldsymbol{X}$.

3.2.2. Testovi i intervali poverenja za vektor sredine kada je kovarijansna matrica poznata

Testiranje hipoteze da je vektor sredine normalno raspodeljen vektor, dovodi nas do značajnih statističkih rezultata. Problem nastaje prilikom određivanja intervala za nepoznati vektor sredine. U ovom odeljku odredićemo interval poverenja kada je matrica kovarijanse poznata. Ako posmatramo jednodimenzionalan slučaj, jedan od testova za određivanje intervala zasniva se na činjenici da je razlika uzoračke sredine i vektora sredine normalno raspodeljena sa očekivanjem 0 i poznatom varijansom; zatim se tabele za normalnu raspodelu mogu koristiti za izračunavanje nivoa poverenja i interval poverenja. U višedimenizionalnom slučaju razlika između uzoračke sredine i vektora sredine je normalno raspodeljena sa očekivanjem 0 i poznatom kovarijansnom matricom.

Teorema 3.2.3. *Ako je m-dimenzionalni vektor $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{T})$ (nesingularan), tada $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Y}$ ima necentralnu χ^2 -raspodelu sa m -stepeni slobode i necentralnim parametarom $\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{v}$. Ako je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, radi se o centralnoj χ^2-raspodeli.*

Dokaz : Neka je $\boldsymbol{C}$ nesingularna matrica takva da je $\boldsymbol{CTC}' = \boldsymbol{I}$, definišimo vektor $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CY}$ koji je normalno raspodeljen sa očekivanjem $E\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}E\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Cv} = \boldsymbol{\lambda}$, i kovarijansnom matricom $E(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\lambda})' = E\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})'\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{CTC}' = \boldsymbol{I}$. Tada je $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{CTC}')^{-1}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$. Slično $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\lambda}$. Prema tome $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Y}$ je raspodeljeno kao $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Z}_i^2$, a vektori $\boldsymbol{Z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_m$, su nezavisni i normalno raspodeljeni sa vektorima sredine $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m$, respektivno, i varijansom 1. Po definiciji ova raspodela je necentralna χ^2-raspodela sa necentralnim parametrima $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\lambda}_i^2$. Ako je $\boldsymbol{\lambda}_1 = \cdots = \boldsymbol{\lambda}_m = 0$, onda je raspodela centralna. ■

Kako je $\sqrt{N}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu})\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma})$, iz prethodne teoreme sledi da

$$N(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}) \tag{3.2.12}$$

ima (centralnu) χ^2-raspodelu sa p-stepeni slobode. Ovo je fundamentalna činjenica koju koristimo pri formiranju testova i intervala poverenja za $\boldsymbol{\mu}$.

Neka je $\chi_p^2(\alpha)$ broj takav da je

$$P\{\chi_p^2>\chi_p^2(\alpha)\}=\alpha. \tag{3.2.13}$$

Prema tome

$$P\{N(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu})>\chi_p^2(\alpha)\}=\alpha. \tag{3.2.14}$$

Naša kritična oblast za testiranje hipoteze $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}$, gde je $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}$ fiksiran vektor, je

$$N(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})>\chi_p^2(\alpha). \tag{3.2.15}$$

Ako dobijemo uzorak takav da je uslov (3.2.15) zadovoljen, mi odbacujemo nultu hipotezu. Ako je verovatnoća veća od α onda intuitivno odbacujemo hipotezu da je $\boldsymbol{\mu}\neq\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}$. Veličina $N(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})$ je raspodeljena kao necentralna χ^2-raspodela sa p stepeni slobode i necentralnim parametrom $N(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}})$, gde je $\bar{\boldsymbol{X}}$ uzoračka sredina uzorka iz $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ raspodele. Razmotrimo sad sledeću izjavu: „Vektor sredine raspodele zadovoljava

$$N(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)\leq\chi_p^2(\alpha) \tag{3.2.16}$$

kao nejednakost za $\boldsymbol{\mu}^*$". Iz relacije (3.2.14) uočavamo da je verovatnoća da uzorak premaši zadatu vrednost, odnosno da izjava bude istinita, jednaka $1-\alpha$. Prema tome, skup $\boldsymbol{\mu}^*$ koji zadovoljavavaju (3.2.16) je interval poverenja za $\boldsymbol{\mu}$ sa nivom poverenja $1-\alpha$.

U n-dimenzionalnom prostoru za $\bar{\boldsymbol{x}}$, relacija (3.2.15) predstavlja površinu spoljašnjeg dela elipsoida sa centrom u $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}$. Oblik našeg elipsoida zavisi od $\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}$ i od veličine $(\frac{1}{N})\chi_p^2(\alpha)$ za dato $\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}$. U n-dimenzionalnom prostoru za $\boldsymbol{\mu}^*$, relacija (3.2.16) predstavlja površinu i unutrašnjost elipsoida sa centrom u $\bar{\boldsymbol{x}}$. Ako je $\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}=\boldsymbol{I}$, iz relacije (3.2.14) možemo uočiti da je sa verovatnoćom α, udaljenost između $\bar{\boldsymbol{x}}$ i $\boldsymbol{\mu}$ veća od $\sqrt{\chi_p^2(\alpha)/N}$.

Teorema 3.2.4. *Ako je* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *uzoračka sredina iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele, gde je* $\boldsymbol{\Sigma}$ *poznata matrica, onda je relacija* (3.2.15) *kritična oblast veličine* α *za testiranje hipoteze* $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu_0}$. *Relacija* (3.2.16) *je intereval poverenja za* $\boldsymbol{\mu}$ *sa nivom poverenja* $1-\alpha$, *a* $\chi_p^2(\alpha)$ *smo izabrali tako da je relacija* (3.2.13) *zadovoljena.*

Ista tehnika se može koristiti za rešavanje problema sa dva uzorka. Pretpostavimo da imamo uzorak $\left\{x_\alpha^{(1)}\right\}$, $\alpha=1,\dots,N_1$, iz $\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{(1)},\boldsymbol{\Sigma}\right)$ raspodele i uzorak $\left\{x_\alpha^{(2)}\right\}$, $\alpha=1,\dots,N_2$, iz druge $\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{(2)},\boldsymbol{\Sigma}\right)$ raspodele, sa istom kovarijacionom matricom. Onda su odgovarajuće uzoračke sredine

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{(1)}=\frac{1}{N_1}\sum_{\boldsymbol{\alpha}=1}^{N_1}x_\alpha^{(1)}\sim\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{(1)},(\frac{1}{N_1})\boldsymbol{\Sigma}\right),\tag{3.2.17}$$

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{(2)}=\frac{1}{N_2}\sum_{\boldsymbol{\alpha}=1}^{N_2}x_\alpha^{(2)}\sim\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{(2)},(\frac{1}{N_2})\boldsymbol{\Sigma}\right)$$

i one su nezavisne. Razlika ovih uzoračkih sredina je $\boldsymbol{Y}=\overline{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\overline{\boldsymbol{X}}^{(2)}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu},[\left(\frac{1}{N_1}\right)+(\frac{1}{N_2})]\boldsymbol{\Sigma})$, gde je $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\mu}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}$. Tada je

$$\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\nu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\nu})\le\chi_p^2(\alpha)\tag{3.2.18}$$

interval poverenja za razliku $\boldsymbol{\nu}$, a kritična oblast za testiranje hipoteze $\boldsymbol{\mu}^{(1)}=\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ je data kao

$$\frac{N_1N_2}{N_1+N_2}\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)}-\overline{\boldsymbol{x}}^{(2)}\right)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)}-\overline{\boldsymbol{x}}^{(2)}\right)>\chi_p^2(\alpha).\tag{3.2.19}$$

Mahalanobis[6] (1930) je predložio da $\left(\boldsymbol{\mu}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\mu}^{(1)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\right)$ predstavlja udaljenost između dva uzorka (populacije). Neka je matrica $\boldsymbol{C}$ takva da je $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ i neka je $\boldsymbol{\nu}^{(i)}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}^{(i)}, i=1,2$. Onda je kvadratna udaljenost $\left(\boldsymbol{\nu}^{(1)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)}\right)'\left(\boldsymbol{\nu}^{(1)}-\boldsymbol{\nu}^{(2)}\right)$ Euklidska udaljenost.

3.3. Teorijska svojstva ocene vektora sredine

3.3.1. Svojstva ocene maksimalne verodostojnosti

U prethodnom odeljku pokazali smo da su $\bar{\boldsymbol{X}}$ i $\boldsymbol{S}$ nepristrasne ocene za $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$, respektivno. Pokažimo sada da su $\bar{\boldsymbol{X}}$ i $\boldsymbol{S}$ dovoljne statistike i da su one kompletne.

Dovoljnost

Statistika $\boldsymbol{T}$ je dovoljna ocena za familiju raspodela $\boldsymbol{X}$ ili za parametar $\boldsymbol{\theta}$, ako uslovna raspodela za $\boldsymbol{X}$ pod uslovom $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{t}$ ne zavisi od $\boldsymbol{\theta}$. U tom smislu, statistika $\boldsymbol{T}$ daje dovoljno informacija za $\boldsymbol{\theta}$ kao ceo uzorak $\boldsymbol{X}$.

Teorema faktorizacije. *Statistika* $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{Y})$ *je dovoljna ocena za* $\boldsymbol{\theta}$ *ako i samo ako se gustina* $f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})$ *može predstaviti kao*

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}) = g[\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}]h(\boldsymbol{y}), \tag{3.3.1}$$

gde su $g[\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}]$ i $h(\boldsymbol{y})$ *nenegativne funkcije i* $h(\boldsymbol{y})$ *ne zavisi od* $\boldsymbol{\theta}$.

Teorema 3.3.1. *Ako su* $\boldsymbol{X_1},\dots,\boldsymbol{X_N}$ *posmatranja iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ raspodele, *tada su* $\bar{\boldsymbol{X}}$ *i* $\boldsymbol{S}$ *dovoljne ocene za* $\boldsymbol{\mu}$ *i* $\boldsymbol{\Sigma}$. *Ako je* $\boldsymbol{\mu}$ *dato, onda je* $\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{X_\alpha}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X_\alpha}-\boldsymbol{\mu})'$ *dovoljna ocena za* $\boldsymbol{\Sigma}$. *Ako je* $\boldsymbol{\Sigma}$ *dato, onda je* $\bar{\boldsymbol{X}}$ *dovoljna ocena za* $\boldsymbol{\mu}$.

Dokaz: Neka je gustina za $\boldsymbol{X_1},\dots,\boldsymbol{X_N}$

$$\begin{aligned}
&\prod_{\alpha=1}^{N} n(x_\alpha|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}Np}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}N} exp[-\tfrac{1}{2} tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha-\boldsymbol{\mu})(x_\alpha-\boldsymbol{\mu})'] \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}Np}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}N} exp\{-\tfrac{1}{2}[N(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})+(N-1)tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}S]\}.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Desna strana jednakosti (3.3.2) je oblika (3.3.1) za $\bar{\boldsymbol{x}}$ i $\boldsymbol{\mu}$ pri čemu je $h(x_1,\dots,x_N) = exp\{-\frac{1}{2}(N-1)tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}S\}$. ■

Ako je $\boldsymbol{\Sigma}$ dato, onda je $\bar{\boldsymbol{X}}$ dovoljna ocena za $\boldsymbol{\mu}$, ali ako je $\boldsymbol{\mu}$ dato, onda $\boldsymbol{S}$ nije dovoljna ocena za $\boldsymbol{\Sigma}$.

Kompletnost

Da bi dokazali optimalna svojstva T^2-testa, potrebno je da $(\bar{\boldsymbol{X}},\boldsymbol{S})$ bude kompletan dovoljan skup statistika za $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$.

Definicija 3.3.1. *Familija raspodela za* $\boldsymbol{Y}$ *indeksirana sa* $\boldsymbol{\theta}$ *je kompletna ako za svaku realnu funkcije* $g(\boldsymbol{y})$ *važi da je*

$$E_\theta g(\boldsymbol{Y}) \equiv 0\,, \tag{3.3.3}$$

samo ako je $g(\boldsymbol{y}) = 0$, *osim za skup* $\boldsymbol{y}$*-na čija je verovatnoća 0 za svako* $\boldsymbol{\theta}$.

Teorema 3.3.2. *Dovoljan skup statistika* $\overline{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{S}$ *je kompletan za* $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ *kada se uzorak uzima iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele.*

Dokaz : Realizovani uzorak možemo definisati u terminima $\overline{\boldsymbol{x}}$ i $\boldsymbol{z_1}, \dots, \boldsymbol{z_N}$ kao u Odeljku 3.2. pri čemu je $n = N - 1$. Pretpostavimo da za bilo koju funkciju $g(\overline{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{A}) = g(\overline{\boldsymbol{X}}, n\boldsymbol{S})$ važi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} K|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}N} g\left(\overline{\boldsymbol{x}}, \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z_\alpha z_\alpha}'\right)$$
$$\cdot\, exp\left\{-\frac{1}{2}\left[N(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-\boldsymbol{1}}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}) + \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z_\alpha z_\alpha}'\right]\right\} d\overline{\boldsymbol{x}} \prod_{i=1}^{p} d\boldsymbol{z_\alpha} \equiv 0\,, \forall\, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \tag{3.3.4}$$

gde je $K = \sqrt{N}(2\pi)^{-\frac{1}{2}Np}$, $d\overline{\boldsymbol{x}} = \prod_{i=1}^{p} d\overline{x}_i$, i $d\boldsymbol{z_\alpha} = \prod_{i=1}^{p} dz_{i\alpha}$. Neka je $\boldsymbol{\Sigma}^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{2\Theta}$, gde je $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}'$ a $\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta}$ pozitivno definitna matrica, i neka je $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{t}$, onda se relacija (3.3.4) može zapisati kao

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} K|\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta}|^{\frac{1}{2}N} g(\overline{\boldsymbol{x}}, \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z_\alpha z_\alpha}')\, exp\{-\frac{1}{2}[tr(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta})(\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z_\alpha z_\alpha}' + N\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}}') \\ &\qquad -2N\boldsymbol{t}'\overline{\boldsymbol{x}} + N\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{t}]\} d\overline{\boldsymbol{x}} \textstyle\prod_{\alpha=1}^{n} dz_{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= |\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta}|^{\frac{1}{2}N} exp\{-\tfrac{1}{2}\, N\boldsymbol{t}'(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Theta})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{t}\} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{B} - N\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}}') \\ &\qquad exp[tr\boldsymbol{\Theta B} + \boldsymbol{t}'(N\overline{\boldsymbol{x}})]n[\overline{\boldsymbol{x}} \left|\left(\tfrac{1}{N}\right)\boldsymbol{I}\right] \textstyle\prod_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} n(\boldsymbol{z_\alpha}|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) d\overline{\boldsymbol{x}} \prod_{\alpha=1}^{n} dz_{\boldsymbol{\alpha}}, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

gde je $\boldsymbol{B} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z_\alpha z_\alpha}' + N\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}}'$. Tako je

$$\begin{aligned} 0 &\equiv Eg(\overline{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{B} - N\overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{X}}')exp[tr\boldsymbol{\Theta B} + \boldsymbol{t}'(N\overline{\boldsymbol{X}})] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{B} - N\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}}')exp[tr\boldsymbol{\Theta B} + \boldsymbol{t}'(N\overline{\boldsymbol{x}})]\, h(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{B}) d\overline{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{B}, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

gde je $h(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{B})$ zajednička raspodela za $\overline{\boldsymbol{x}}$ i $\boldsymbol{B}$, a $d\boldsymbol{B} = \prod_{i<j} db_{ij}$. Desna strana jednakosti (3.3.6) je Laplasova transformacija za $g(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{B} - N\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}}')h(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{B})$. Pošto je ovo 0, $g(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{A}) = 0$, osim na skupu mere 0. ■

Efikasnost

Ako je dat q-dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{Y}$ sa očekivanjem $E\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{v}$ i kovarijansnom matricom $E(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{\Psi}$, tada se

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v})' = q \tag{3.3.7}$$

naziva *elipsoid koncentracije za Y.* Neka je $\boldsymbol{\theta}$ q-dimenzionalni vektor, a $\boldsymbol{t}$ nepristrasna ocena (tj. $E\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta}$) dobijena iz N posmatranja iz date raspodele sa kovarijacionom matricom $\boldsymbol{\Psi}$. Tada elipsoid

$$N(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\theta})'E(\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}})(\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}})'(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\theta}) = q \tag{3.3.8}$$

leži u potpunosti u elipsoidu koncentracije za $\boldsymbol{t}$; $\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ označava vektor kolone funkcije verovatnoće u odnosu na komponente $\boldsymbol{\theta}$. Ako je (3.3.8) elipsoid koncentracije za $\boldsymbol{t}$, onda se za ocenu $\boldsymbol{t}$ kaže da je *efikasna*. U slučaju multivarijacione normalne raspodele, ako je $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}$, onda je $\overline{\boldsymbol{X}}$ efikasna ocena. Ako je parametar $\boldsymbol{\theta}$ uključen i u $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$, tada $\overline{\boldsymbol{X}}$ i $\boldsymbol{S}$ imaju efikasnost $[(N-1)/N]^{p(p+1)/2}$. Ako multivarijaciona normalna raspodela ispunjava uslove regularnosti, onda vazi

$$E(\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}})(\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}})' = -E\,\frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'}. \tag{3.3.9}$$

Rao-Kramerova donja granica za svaku nepristrastnu ocenu $\boldsymbol{t}$ je matrica

$$NE(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\theta})' - [-E\,\frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'}]^{-\mathbf{1}} \tag{3.3.10}$$

koja je pozitivno semidefinitna.

Postojanost

Definicija 3.3.2. *Niz vektora* $\boldsymbol{t_n} = (t_{1n}, \dots, t_{mn})'$, $n = 1,2, \dots$, *je postojana ocena za* $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$ *ako je* $P\, lim_{n\to\infty}\, t_{in} = \theta_i,\ i = 1, \dots, m$.

Po zakonu velikih brojeva svaka komponenta uzoračke sredine $\overline{\boldsymbol{X}}$ je postojana ocena nekoj komponenti vektora sredine $\boldsymbol{\mu}$; ako je posmatrani vektor nezavistan i identički raspodeljen sa vektrom sredine $\boldsymbol{\mu}$, onda je $\overline{\boldsymbol{X}}$ postojana ocena za $\boldsymbol{\mu}$. Normalnost nije uključena.

Element matrice uzoračke kovarijanse je

$$s_{ij} = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(x_{i\alpha} - \mu_i)(x_{j\alpha} - \mu_j) - \frac{N}{N-1}(\overline{x_\iota} - \mu_i)(\overline{x_J} - \mu_j) \qquad (3.3.11)$$

na osnovu Leme 3.1.1. gde je $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\mu}$. Drugi izvod je 0, a prvi izvod je σ_{ij} ako su $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots$ nezavisni i identično raspodeljeni sa očekivanjem $\boldsymbol{\mu}$ i kovarijacionom matricom $\boldsymbol{\Sigma}$. Onda je $\boldsymbol{S}$ postojana ocena za $\boldsymbol{\Sigma}$.

Asimptotska normalnost

Teorema 3.3.3. (Centralna granična teorema) *Za niz m-dimenzionalnih vektora $\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \ldots$ koji su nezavisni i identično raspodeljeni sa očekivanjem $E\boldsymbol{Y_\alpha} = \boldsymbol{\nu}$ i kovarijacionom matricom $E(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu})' = \boldsymbol{T}$, važi*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T}).$$

Dokaz: Neka je

$$\phi_n(\boldsymbol{t}, u) = Eexp[iu\boldsymbol{t}'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu})], \qquad (3.3.12)$$

gde je u skalar, a $\boldsymbol{t}$ $m-$dimenzionalni vektor; ako fiksiramo $\boldsymbol{t}$, $\phi_n(\boldsymbol{t}, u)$ možemo posmatrati kao karakterističnu funkciju za $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y_\alpha} - E\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y_\alpha})$. Po uopštenoj centralnoj graničnoj teoremi (Kramer[1] 1946), granična raspodela je $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{t})$. Onda prema Teoremi 2.5.4 sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(\boldsymbol{t}, u) = e^{-\frac{1}{2}u^2\boldsymbol{t}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{t}} \qquad (3.3.13)$$

za svaki u i $\boldsymbol{t}$. Ako stavimo da je $u = 1$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} Eexp[i\boldsymbol{t}'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu})] = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{t}} \qquad (3.3.14)$$

za svako $\boldsymbol{t}$. Kako je funkcija $e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{t}}$ neprekidna za $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, konvergencija je uniformna u okolini $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$. ■

Teorema 3.3.4. *Neka je* $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots$ *niz nezavisnih slučajnih vektora iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele, i neka je* $\boldsymbol{A}(n) = \sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{X_\alpha} - \overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}})(\boldsymbol{X_\alpha} - \overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}})'$, *gde je* $n = N - 1$. *Tada je asimptotska raspodela za* $\boldsymbol{B}(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)[\boldsymbol{A}(n) - n\boldsymbol{\Sigma}]$ *normalna sa očekivanjem 0 i kovarijansom*

$$Eb_{ij}(n)b_{kl}(n) = \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}. \tag{3.3.15}$$

Dokaz : Već smo ranije pokazali da se $\boldsymbol{A}(n)$ može predstaviti kao $\boldsymbol{A}(n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{Z_\alpha}\boldsymbol{Z_\alpha}'$, gde su $\boldsymbol{Z_1}, \boldsymbol{Z_2}, \ldots$ nezavisni slučajni vektori iz $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ raspodele. Elemente iz $\boldsymbol{Z_\alpha}\boldsymbol{Z_\alpha}'$ zapisaćemo kao vektor

$$\boldsymbol{Y_\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z_{1\alpha}^2} \\ \boldsymbol{Z_{1\alpha}Z_{2\alpha}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z_{2\alpha}^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z_{p\alpha}^2} \end{pmatrix}. \tag{3.3.16}$$

Moment za vektor $\boldsymbol{Y_\alpha}$ možemo odrediti iz momenata za vektor $\boldsymbol{Z_\alpha}$. Znamo da je $EZ_{i\alpha}Z_{j\alpha} = \sigma_{ij}$, $EZ_{i\alpha}Z_{j\alpha}Z_{k\alpha}Z_{l\alpha} = \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}$, $E(Z_{i\alpha}Z_{j\alpha} - \sigma_{ij})(Z_{k\alpha}Z_{l\alpha} - \sigma_{kl}) = \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}$. Vektori $\boldsymbol{Y_\alpha}$ definisani relacijom (3.3.16) zadovoljavaju sve uslove Teoreme 3.3.3. Ako su elementi za $\boldsymbol{A}(n)$ dati u vektorskom obliku sličnom (3.3.16), sa elementima $\boldsymbol{\nu}$ koji su elementi matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ zapisani kao u relaciji (3.3.16), onda definišemo vektor $\boldsymbol{W}(n)$, gde je $\boldsymbol{W}(n) - n\boldsymbol{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{Y_\alpha} - \boldsymbol{\nu})$. Po Teoremi 3.3.3, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)[\boldsymbol{W}(n) - n\boldsymbol{\nu}]$ ima asimptotsku normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i kovarijansnom matricom za $\boldsymbol{Y_\alpha}$. ■

Elementi $\boldsymbol{B}(n)$ imaće asimptotsku normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 ako su $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots$ nezavisni i identički raspodeljeni sa ograničenim momentom četvrtog reda, pri čemu kovarijansna struktura za $\boldsymbol{B}(n)$ zavisi od momenata četvrtog reda.

Glava 4

Raspodela i primena uzoračkog koeficijenata korelacije

Mera zavisnosti između dve normalne promenljive je koeficijent korelacije $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$. Pri uslovnoj raspodeli $X_1, \dots, X_q$ pod uslovom $X_{q+1} = x_{q+1}, \dots, X_p = x_p$, parcijalna korelacija $\rho_{ij \cdot q+1,\dots,p}$ meri zavisnost između X_i i X_j. Treća vrsta korelacije je višestruka korelacija koja meri odnos između jedne promenljive i skupa drugih.

4.1. Raspodela kada je koeficijent korelacije nula

Već smo pokazali kada je uzorak (p-dimenzionalnih vektora) $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_N})$ iz normalne raspodele ocena maksimalne verodostojnosti korelacije između X_i i X_j, $i, j = 1, \dots, p$ (tj. između dve komponente slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$) je

$$r_{ij} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{i\alpha} - \bar{X}_i)(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{i\alpha} - \bar{X}_i)^2}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)^2}} \tag{4.1.1}$$

gde je $X_{i\alpha}$ i-ta komponenta $\boldsymbol{X_\alpha}$ i

$$\bar{X}_i = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_{i\alpha}. \tag{4.1.2}$$

Ovde nalazimo raspodelu za r_{ij}, kada je $Corr(X_i, X_j) = 0$, i pokazaćemo primenu uzoračkog koeficijenta korelacije za testiranje hipoteze kada je koeficijent korelacije 0.

Radi lakšeg snalaženja mi ćemo posmatrati r_{12}; ista teorija važi za svako r_{ij}. Pošto r_{12} zavisi samo od prve dve komponente svakog vektora $\boldsymbol{X_\alpha}$, da bi smo pronašli raspodelu za r_{12} moramo da razmotrimo zajedničku raspodelu za (X_{11}, X_{21}), $(X_{12}, X_{22}), \dots, (X_{1N}, X_{2N})$. Problem možemo da preformulišemo na rešavanje dvodimenzionalne normalne raspodele. Neka je $(\boldsymbol{X_1^*}, \dots, \boldsymbol{X_N^*})$ posmatrani vektor uzorka iz

$$\mathcal{N}\left[\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right], \tag{4.1.3}$$

raspodele.

Razmotrićemo

$$r = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{22}}}, \tag{4.1.4}$$

gde je

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_{i\alpha} - \bar{X}_i)(X_{j\alpha} - \bar{X}_j), \quad i, j = 1,2. \tag{4.1.5}$$

i $\bar{X}_i$ definisano u (4.1.2), a $X_{i\alpha}$ i-ta komponenta $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^*$.

Iz Odeljka 3.2. vidimo da su A_{11}, A_{12} i A_{22} raspodeljene kao

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} Z_{i\alpha} Z_{j\alpha} \quad i, j = 1,2, \tag{4.1.6}$$

gde je $n = N - 1$, i

$$(Z_{1\alpha}, Z_{2\alpha}) \sim \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right], \tag{4.1.7}$$

a parovi $(Z_{11}, Z_{21}), \dots, (Z_{1N}, Z_{2N})$, su nezavisno raspodeljeni.

Lema 4.1.1. *Neka su* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}$ *nezavisno raspodeljeni,* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})\prime}, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})\prime}\right)$ *ima gustinu* $f(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}})$, *a uslovna gustina* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})}$ *pod uslovom* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})} = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})}$ *je* $f(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})} | \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})})$, $\alpha = 1, \dots, n$, *tada su u uslovnoj raspodeli* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{2})}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{2})}$ *pod uslovom* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{1})} = y_1^{(1)}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{1})} = y_n^{(1)}$, *slučajni vektori* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{2})}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{2})}$ *nezavisni a gustina od* $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})}$ *je* $f(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})} | \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})})$, $\alpha = 1, \dots, n$.

Dokaz : Marginalna gustina za $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{1})}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{1})}$ je $\prod_{\alpha=1}^{n} f_1(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})})$, gde je $f_1(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})})$ marginalna gustina za $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})}$ i uslovna gustina za $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{2})}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{2})}$ pod uslovom $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{1})} = y_{\boldsymbol{1}}^{(\mathbf{1})}, \dots, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{1})} = y_{\boldsymbol{n}}^{(\mathbf{1})}$ je

$$\frac{\prod_{\alpha=1}^{n} f(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\prod_{\alpha=1}^{n} f_1(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})})} = \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{f(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}})}{f_1(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})})} = \prod_{\alpha=1}^{n} f(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})} | \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})}). \quad \blacksquare \tag{4.1.8}$$

Neka su $\boldsymbol{V}_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{in})'$, $i = 1,2$, slučajni vektori, gde su $Z_{i\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$ nezavisni. Tada je $Z_{2\alpha} \,\big|\, Z_{1\alpha} = z_{1\alpha} \sim \mathcal{N}(\beta z_{1\alpha}, \sigma^2)$, gde je $\beta = \sigma_2\rho/\sigma_1$ i $\sigma^2 = \sigma_2^2(1-\rho^2)$. A $\boldsymbol{V}_2 \,\big|\, \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{v}_1 \sim \mathcal{N}(\beta\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{I}\sigma^2)$. Definišimo $B = \boldsymbol{V}_2'\boldsymbol{v}_1/\boldsymbol{v}_2'\boldsymbol{v}_1$ tako da je $B\boldsymbol{v}_1'(\boldsymbol{V}_2 - b\boldsymbol{v}_1) = 0$, i neka je $U = (\boldsymbol{V}_2 - B\boldsymbol{v}_1)'(\boldsymbol{V}_2 - B\boldsymbol{v}_1)$.

Primenimo sada Teoremu 3.2.1. gde je $X_\alpha = Z_{2\alpha}$. Neka je $Y_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} Z_{2\beta}$, $\alpha = 1, \dots, n$, tada su $Y_1, \dots, Y_n$ nezavisno raspodeljeni sa normalnom raspodelom čija je varijansa σ^2 i očekivanja

$$EY_1 = \sum_{\gamma=1}^n c_{1\gamma}\beta z_{1\gamma} = \frac{\beta}{c}\sum_{\gamma=1}^n z_{1\gamma}^2 = \beta c, \tag{4.1.9}$$

$$EY_\alpha = \sum_{\gamma=1}^n c_{\alpha\gamma}\beta z_{1\gamma} = \beta c\sum_{\gamma=1}^n c_{\alpha\gamma}c_{1\gamma} = 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{4.1.10}$$

Kako je $B = \sum_{\alpha=1}^n Z_{2\alpha} z_{1\alpha}/\sum_{\alpha=1}^n z_{1\alpha}^2 = c\sum_{\alpha=1}^n Z_{2\alpha} c_{1\alpha}/c^2 = Y_1/c$, na osnovu Leme 3.2.1. sledi da je

$$U = \sum_{\alpha=1}^n Z_{2\alpha}^2 - B\sum_{\alpha=1}^n z_{1\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^n Y_\alpha^2 - Y_1^2 = \sum_{\alpha=2}^n Y_\alpha^2, \tag{4.1.11}$$

i ne zavisi od B. Tada U/σ^2 ima χ^2-raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode.

Lema 4.1.2. *Ako su parovi* $(Z_{1\alpha}, Z_{2\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, n$, *iz gustine* (3.3.7) *nezavisni, tada je* $B = \sum_{\alpha=1}^n Z_{2\alpha} z_{1\alpha}/\sum_{\alpha=1}^n z_{1\alpha}^2 \;\; |Z_{1\alpha} = z_{1\alpha} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2/c^2)$ *gde je* $c^2 = \sum_{\alpha=1}^n z_{1\alpha}^2$, *a* $U/\sigma^2 = (\sum_{\alpha=1}^n Z_{2\alpha} - B\sum_{\alpha=1}^n z_{1\alpha})^2/\sigma^2$ *pod uslovom* $Z_{1\alpha} = z_{1\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$, *ima* χ^2-*raspodelu sa* $n-1$ *stepeni slobode;* B *i* U *su nezavisne.*

Ako je $\rho = 0$, onda je $\beta = 0$ a B ima uslovnu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma^2/c^2)$, a

$$\frac{cB/\sigma}{\sqrt{\frac{U/\sigma^2}{n-1}}} = \frac{cB}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}} \tag{4.1.12}$$

ima uslovnu t-raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode.

Teorema 4.1.1. *Neka su* $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_N$ *nezavisno raspodeljeni koji imaju normalnu raspodelu* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. *Ako je* $\rho_{ij} = 0$, *gustina za* r_{ij} *definisanog relacijom* (4.1.1) *je*

$$\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-2)\right]\sqrt{\pi}}(1-r^2)^{\frac{1}{2}(N-4)}. \tag{4.1.13}$$

Najznačajnija upotreba Teoreme 4.1.1. je da pronađe značajne tačke za testiranje hipoteze da par promenljivih nije u korelaciji. Razmotrimo hipotezu

$$H_0 \; : \; \rho_{ij} = 0 \tag{4.1.14}$$

za neki uređeni par (i, j). Hipotezu odbacujemo ako je odgovarajući uzorački koeficijent korelacije veoma različiti od 0.

Ako želimo da testiramo H_0 protiv alternativne hipoteze $H_1 : \rho_{ij} > 0$. Hipotezu H_0 odbacujemo ako je uzorački koeficijent ρ_{ij} veći od nekog broja r_0. Verovatnoća odbacivanja nulte hipoteze kada je H_0 tačno je

$$\int_{r_0}^{1} k_N\,(r)\,dr, \tag{4.1.15}$$

gde je $k_N(r)$ jednako (4.1.13) i predstavlja gustinu koeficijenta korelacije na osnovu N posmatranja. Biramo r_0 tako da dostignemo željeni nivo poverenja. Ako testiramo H_0 protiv alternativne hipoteze $H_2 : \rho_{ij} < 0$, H_0 odbacujemo kada je $r_{ij} < -r_0$.

Sada pretpostavimo da želimo da testiramo alternativnu $\rho_{ij} \neq 0$; tj. da ρ_{ij} može biti pozitivan ili negativan broj. Onda odbacujemo H_0 ako je $r_{ij} > r_1$ ili $r_{ij} < -r_1$. Verovatnoća odbacivanja nulte hipiteze kada je H_0 tačno je

$$\int_{-1}^{-r_1} k_N\,(r)\,dr + \int_{r_1}^{1} k_N\,(r)\,dr. \tag{4.1.16}$$

Broj r_1 je izabran tako da je (4.1.16) željeni nivo poverenja.

Značajne tačke r_1 date su u mnogim knjigama, uključujuči Tabelu VI Fišera i Yatesa[3]; indeks n u Tabeli VI jednak je našem $N-2$. Kako $\sqrt{N-2}r/\sqrt{1-r^2}$ ima Studentovu raspodelu sa $N-2$ stepeni slobode, t-tabele se takođe mogu koristiti. Testiranjem nulte hipoteze protiv alternativne hipoteze $\rho_{ij} \neq 0$, H_0 odbacujemo ako je

$$\sqrt{N-2}\,\frac{|r_{ij}|}{\sqrt{1-r_{ij}^2}} > t_{N-2}(\alpha), \tag{4.1.17}$$

gde je $t_{N-2}(\alpha)$ veličina koja se određuje iz Studentove raspodele za $N-2$ stepeni slobode i nivo poverenja α. Protiv alternativne $H_1 : \rho_{ij} > 0$, H_0 odbacujemo ako je

$$\sqrt{N-2}\,\frac{r_{ij}}{\sqrt{1-r_{ij}^2}} > t_{N-2}(2\alpha). \tag{4.1.18}$$

4.2. Raspodela kada je koeficijent korelacije različit od nule

Da bismo pronašli raspodelu uzoračkog koeficijenta korelacije kada je koeficijent različit od nule, prvo izvodimo zajedničku gustinu za slučajne promenljive A_{11}, A_{12} i A_{22}. Kada je $\boldsymbol{v}_1$ fiksirano, onda slučajna promenljiva $B = A_{12}/A_{11} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2/c^2)$ a $U/\sigma^2 = (A_{22} - A_{12}^2/A_{11})/\sigma^2$ ima χ^2-raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode. Označimo sada gustinu χ^2-raspodeljene slučajne promenljive sa $g_{n-1}(u)$, a zajedničku gustinu za B i U označimo sa $n(b|\beta, \sigma^2/a_{11}) g_{n-1}(u/\sigma^2)/\sigma^2$. Tada je zajednička gustina za $\boldsymbol{V}_1$, B i U $n(\boldsymbol{v}_1|0, \sigma^2 \boldsymbol{I}) n(b|\beta, \sigma^2/a_{11}) g_{n-1}(u/\sigma^2)/\sigma^2$. Marginalna gustina za $\boldsymbol{V}_1{}'\boldsymbol{V}_1/\sigma^2 = \frac{A_{11}}{\sigma^2}$ je $g_n(u)$; pa je, gustina za A_{11}

$$\frac{1}{\sigma_1^2} g_n\left(\frac{a_{11}}{\sigma_1^2}\right) = \underset{\boldsymbol{v}_1{}'\boldsymbol{v}_1 = a_{11}}{\int \cdots \int} n(\boldsymbol{v}_1|0, \sigma_1^2 \boldsymbol{I})\, dW, \tag{4.2.19}$$

gde je dW odgovarajući element zapremine.

Zajednička gustina za B, U i A_{11} je

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int n(b|\beta, \sigma^2/a_{11}) g_{n-1}\left(\frac{u}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma^2} n(\boldsymbol{v}_1|0, \sigma_1^2 \boldsymbol{I})\, dW \\ &= \frac{g_n(a_{11}/\sigma_1^2) n(b|\beta, \sigma^2/a_{11}) g_{n-1}\left(\frac{u}{\sigma^2}\right)}{\sigma_1^2 \sigma^2} \\ &= \frac{(a_{11})^{\frac{1}{2}n-1}}{(2\sigma_1^2)^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} exp\left(-\frac{a_{11}}{2\sigma_1^2}\right) \frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{a_{11}}{2\sigma_1^2}(b-\beta)^2\right] \\ &\cdot \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} u^{\frac{1}{2}(n-3)} exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Neka je $B = A_{12}/A_{11}$, $U = A_{22} - A_{12}^2/A_{11}$, tada je Jakobijan

$$\left|\frac{\partial(b,u)}{\partial(a_{12}, a_{22})}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ -2\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}}. \tag{4.2.21}$$

A gustina za A_{11}, A_{12} i $A_{11} \geq 0$, $A_{22} \geq 0$, i $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \geq 0$ je

$$\frac{a_{11}^{\frac{1}{2}(n-3)}\left(\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)} e^{-\frac{1}{2}Q}}{2^n\sigma_1^n\sigma_2^n(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}, \tag{4.2.22}$$

gde je

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a_{11}}{\sigma_1^2} + \frac{a_{11}}{\sigma^2}\left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} - 2\rho\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2}\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^4}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right) \\ &= a_{11}\left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^4\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right] - 2a_{12}\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2^2(1-\rho^2)} + \frac{a_{22}}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{a_{11}}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{a_{12}}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{a_{22}}{\sigma_2^2}\right). \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Gustina se može zapisati kao

$$\frac{|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{2}(n-3)}e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}}}{2^n|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} \tag{4.2.24}$$

kada je $\mathbf{A}$ pozitivno definitna matrica i 0 u suprotnom.

Sada želimo da nađemo gustinu za

$$r = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}} = \frac{A_{12}/(\sigma_1\sigma_2)}{\sqrt{(A_{11}/\sigma_1^2)(A_{22}/\sigma_2^2)}} = \frac{a_{12}^*}{\sqrt{a_{11}^*a_{22}^*}}, \tag{4.2.25}$$

gde je $a_{11}^* = A_{11}/\sigma_1^2, a_{22}^* = A_{22}/\sigma_2^2$, i $a_{12}^* = A_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$. Transformacija je ekvivalentna za $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. A gustina za A_{11}, A_{22} i $r = A_{12}/\sqrt{A_{11}A_{22}}$ $(dr = d\,a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}})$ je

$$\frac{a_{11}^{\frac{1}{2}n-1}a_{22}^{\frac{1}{2}n-1}(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}e^{-\frac{1}{2}Q}}{2^n(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}, \tag{4.2.26}$$

gde je

$$Q = \frac{a_{11} - 2\rho r\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} + a_{22}}{1-\rho^2}. \tag{4.2.27}$$

Gustinu za r nalazimo tako što integrišemo relaciju (4.2.26) u intervalu od 0 do ∞ u odnosu na sve A_{11} i A_{22}. A da bismo izvršli integraciju eksponencijalni deo moramo zapisati kao

$$exp\left[\frac{\rho r\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}}{(1-\rho^2)}\right] = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\rho r\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}})^{\alpha}}{\alpha!\,(1-\rho^2)^{\alpha}}\,. \tag{4.2.28}$$

Onda gustinu datu relacijom (4.2.26) možemo zapisati kao

$$\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}}{2^n(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(\rho r)^{\alpha}}{\alpha!\,(1-\rho^2)^{\alpha}} \tag{4.2.29}$$

$$\cdot\left\{exp\left[-\frac{a_{11}}{2(1-\rho^2)}\right]a_{11}^{(n+\alpha)/2-1}\right\}\cdot\left\{exp\left[-\frac{a_{22}}{2(1-\rho^2)}\right]a_{22}^{(n+\alpha)/2-1}\right\}.$$

Pošto je

$$\int_0^{\infty} a^{\frac{1}{2}(n+\alpha)-1}\,exp\left[-\frac{a}{2(1-\rho^2)}\right]da = \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+\alpha)\right][2(1-\rho^2)]^{\frac{1}{2}(n+\alpha)}\,, \tag{4.2.30}$$

integral relacije (4.2.29) je

$$\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}}{2^n(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} \tag{4.2.31}$$

$$\cdot\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(\rho r)^{\alpha}}{\alpha!\,(1-\rho^2)^{\alpha}}\Gamma^2\left[\frac{1}{2}(n+\alpha)\right]2^{n+\alpha}(1-\rho^2)^{n+\alpha}$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(2\rho r)^{\alpha}}{\alpha!}\Gamma^2\left[\frac{1}{2}(n+\alpha)\right].$$

Dvostruka formula za gama funkciju je

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,. \tag{4.2.32}$$

Teorema 4.2.2. *Uzorački koeficijent korelacije* r *obima uzorka* N *iz populacije na kojoj se posmatra dvodimenzionalno obeležje koje ima dvodimenzionalnu normalnu raspodelu ima gustinu*

$$\frac{2^{n-2}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}}{(n-2)!\,\pi}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(2\rho r)^{\alpha}}{\alpha!}\Gamma^2\left[\frac{1}{2}(n+\alpha)\right], \tag{4.2.33}$$

$$-1 \leq r \leq 1,$$

gde je $n = N - 1$.

Raspodelu za r prvi je našao Fišer[2] (1915) i dao drugi oblik gustine

$$\frac{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}}{\pi(n-2)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{cos^{-1}(-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right\}\Big|_{x=r\rho}\right] \tag{4.2.34}$$

Hotelling[5] (1953) je napravio iscrpnu studiju o raspodeli za r i preporučio sledeći oblik gustine

$$\frac{n-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n}\cdot(1-\rho r)^{-n+\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\, n+\frac{1}{2};\, \frac{1+\rho r}{2}\right), \tag{4.2.35}$$

gde je

$$F(a,b;c;x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+j)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c+j)}{\Gamma(c)}\frac{x^j}{j!} \tag{4.2.36}$$

hipergeometrijska funkcija.

4.3. Parcijalni koeficijent korelacije. Ocene parcijalnih koeficijenata

Parcijalni koeficijenti korelacije normalne raspodele su koeficijenti korelacije uslovne raspodele. Neka je $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, gde je

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^{(1)}\\ \boldsymbol{X}^{(2)}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{(1)}\\ \boldsymbol{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{pmatrix}, \tag{4.3.1}$$

tada je uslovna raspodela za $\boldsymbol{X}^{(1)}\,\big|\,\boldsymbol{X}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(2)}\sim\mathcal{N}\big(\boldsymbol{\mu}^{(1)}+\boldsymbol{\beta}\big(\boldsymbol{x}^{(2)}-\boldsymbol{\mu}^{(2)}\big),\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{11\cdot 2}}\big)$ gde je

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}, \tag{4.3.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}. \tag{4.3.3}$$

Parcijalne korelacije za $\boldsymbol{X}^{(1)} \,\big|\, \boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$ su korelacije izračunate na uobičajen način iz $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}$.

Razmatramo prvo problem ocene na osnovu uzorka veličine N iz $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ raspodele. Koja je ocena maksimalne verodostojnosti parcijalne korelacije $\boldsymbol{X}^{(1)}$ (od q komponenenata), $\rho_{ij\cdot q+1,\dots,p}$? Ocena maksimalne verodostojnosti za $\boldsymbol{\Sigma}$ je $\left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{A}$, gde je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{X}_\alpha - \overline{\boldsymbol{X}})\,(\boldsymbol{X}_\alpha - \overline{\boldsymbol{X}})' \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_\alpha^{(1)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(1)} \\ \boldsymbol{X}_\alpha^{(2)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)} \end{pmatrix} \left(\boldsymbol{X}_\alpha^{(1)\prime} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(1)\prime}, \boldsymbol{X}_\alpha^{(2)\prime} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)\prime}\right) \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

i $\overline{\boldsymbol{X}} = (1/N)\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{X}_\alpha = \left(\overline{\boldsymbol{X}}^{(1)\prime}\ \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)\prime}\right)'$. Korespodencija između $\boldsymbol{\Sigma}$ i $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}$, $\boldsymbol{\beta}$, i $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ je 1-1 na osnovu (4.3.2) i (4.3.3) i

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Sigma}_{22}, \tag{4.3.5}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{\beta}'. \tag{4.3.6}$$

Teorema 4.3.1. *Neka je* $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_N$ *uzorak iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele, gde su* $\boldsymbol{\mu}$ *i* $\boldsymbol{\Sigma}$ *definisani kao u* (4.3.1)*, a* $\boldsymbol{A}$ *definisano kao u relaciji* (4.3.4)*,* $\left(\overline{\boldsymbol{X}}^{(1)\prime}\ \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)\prime}\right) = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{X}_\alpha^{(1)\prime}\ \boldsymbol{X}_\alpha^{(2)\prime})$*. Ocene maksimalne verodostojnosti za* $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}$, *i* $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ *su redom*

$$\begin{gathered} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(1)} = \overline{\boldsymbol{X}}^{(1)}, \qquad \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(2)} = \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = A_{12}A_{22}^{-1}, \qquad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11\cdot 2} = \frac{1}{N}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right), \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} = (1/N)A_{22}. \end{gathered} \tag{4.3.7}$$

Posledica 3.1.1. može se koristiti za dobijanje ocena maksimalne verodostojnosti za $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$, $\sigma_{ii\cdot q+1,\dots,p}$, $i = 1, \dots, q$, i $\rho_{ij\cdot q+1,\dots,p}$, $i, j = 1, \dots, q$. A iz toga sledi da su ocene maksimalne verodostojnosti parcijalnih koeficijenata korelacije

$$\hat{\rho}_{ij\cdot q+1,\dots,p} = \frac{\hat{\sigma}_{ij\cdot q+1,\dots,p}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii\cdot q+1,\dots,p}\hat{\sigma}_{jj\cdot q+1,\dots,p}}} \qquad i,j = 1,\dots,q. \tag{4.3.8}$$

gde je $\hat{\sigma}_{ij\cdot q+1,\dots,p}$ i,j-ti element za $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{11\cdot 2}}$.

Teorema 4.3.2. *Neka je* $\boldsymbol{X}_{\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{N}}$ *uzorak iz* $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ *raspodele. Ocena maksimalne verodostojnosti za* $\rho_{ij\cdot q+1\dots p}$, *je parcijalna korelacija prvih* q *komponenata pod uslovom* $p-q$ *komponenata i data je kao*

$$\hat{\rho}_{ij\cdot q+1,\dots,p} = \frac{a_{ij\cdot q+1,\dots,p}}{\sqrt{a_{ii\cdot q+1,\dots,p}a_{jj\cdot q+1,\dots,p}}}\,, \qquad i,j = 1,\dots,q, \tag{4.3.9}$$

gde je

$$\left(a_{ij\cdot q+1,\dots,p}\right) = \boldsymbol{A}_{\mathbf{11}} - \boldsymbol{A}_{\mathbf{12}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{22}}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{21}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{11\cdot 2}}. \tag{4.3.10}$$

Ocena $\hat{\rho}_{ij\cdot q+1,\dots,p}$, označava se kao $r_{ij\cdot q+1,\dots,p}$, i naziva se *uzorački parcijalni koeficijent korelacije* između X_i i X_j, $i,j = 1,\dots,q$ dok su $X_{q+1},\dots,X_p$ fiksirani. Takođe se naziva uzorački parcijalni koeficijent između X_i i X_j, $i,j = 1,\dots,q$ uzevši u obzir $X_{q+1},\dots,X_p$.

Matrica $\boldsymbol{A}_{\mathbf{11\cdot 2}}$ se može predstaviti kao

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\mathbf{11\cdot 2}} &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}\left[\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\mathbf{1})} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\mathbf{2})}\right)\right]\left[\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\mathbf{1})} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\mathbf{2})}\right)\right]' \\ &= \boldsymbol{A}_{\mathbf{11}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{A}_{\mathbf{22}}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Vektor $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\mathbf{1})} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(\mathbf{2})}\right)$ je ostatak od $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{1})}$ iz svoje regresije na $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{2})}$ i 1.

4.4. Višestruki koeficijent korelacije. Ocene višestrukih koeficijenta korelacije

Višestruka korelacija između jedne promenljive i skupa promenljivih definisana je u Odeljku 2.4. Ovde prvo tretiramo slučaj višestruke korelacije između X_1 i $\boldsymbol{X}^{(2)} = \left(X_2, \dots, X_p\right)'$. Tada je višestruka korelacija u populaciji

$$\bar{R} = \frac{\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\sigma_{11}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{\beta}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{\beta}}{\sigma_{11}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{(1)}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(1)}}{\sigma_{11}}}\ , \tag{4.4.1}$$

gde su $\boldsymbol{\sigma}_{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}$ i $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ definisani kao

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \boldsymbol{\sigma}'_{(1)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{(1)} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.4.2}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{(1)}. \tag{4.4.3}$$

Na osnovu uzorka $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_N$ $(N > p)$, $\boldsymbol{\Sigma}$ ocenjujemo sa $\boldsymbol{S} = \left[\frac{N}{N-1}\right]\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ili

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{N}A = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})\,(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{\boldsymbol{X}})' = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \widehat{\boldsymbol{\sigma}}'_{(1)} \\ \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)} & \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.4.4}$$

a $\boldsymbol{\beta}$ kao $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)} = A_{22}^{-1}\boldsymbol{a}_{(1)}$. Definišimo sada *uzorački koeficijent višestruke korelacije* kao

$$R = \sqrt{\frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}\widehat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\sigma}_{11}}} = \sqrt{\frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}'_{(1)}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)}}{\hat{\sigma}_{11}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}'_{(1)}A_{22}^{-1}\boldsymbol{a}_{(1)}}{a_{11}}}\,. \tag{4.4.5}$$

Ovo je ocena maksimalne verodostojnosti za $\bar{R}$, na osnovu Posledice 3.1.1. jer možemo definisati $\bar{R}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(1)}$, i $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ kao transformaciju $1-1$ na $\boldsymbol{\Sigma}$. Još jedan izraz za R sledi iz

$$1 - R^2 = \frac{\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\right|}{\hat{\sigma}_{11}\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22}\right|} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{a_{11}|\boldsymbol{A}_{22}|}\,. \tag{4.4.6}$$

Neka je $\hat{X}_{1\alpha} = \bar{X}_1 + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)$, a $X_{1\alpha}^{*} = X_{1\alpha} - \hat{X}_{1\alpha}$ su reziduali.

Teorema 4.4.1. *Reziduali* $X_{1\alpha}^*$ *nisu u korelaciji sa komponentama iz uzorka* $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}$*,* $\alpha = 1, \dots, N$*. Za svaki vektor* $\boldsymbol{a}$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left[X_{1\alpha} - \bar{X}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \left[X_{1\alpha} - \bar{X}_1 - \boldsymbol{a}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2. \qquad (4.4.7)$$

Uzoračka korelacija između $X_{1\alpha}$ *i* $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}$*,* $\alpha = 1, \dots, N$*, ima maksimum za* $\boldsymbol{a} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$*, i to je maksimalna korelacija za R.*

Dokaz : Pošto je uzoračka sredina reziduala 0, onda je vektor uzoračke kovarijanse između $X_{1\alpha}^*$ i $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}$ jednak

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left[X_{1\alpha} - \bar{X}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)' = \boldsymbol{a}_{(1)}' - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathrm{A}_{22} = \boldsymbol{0}. \qquad (4.4.8)$$

Desna strana jednačine (4.4.7) može da se zapiše kao leva plus

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left[(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{a})'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2 = (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{a})' \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)'(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{a}), \qquad (4.4.9)$$

koja je 0 ako i samo ako je $\boldsymbol{a} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Da bi smo dokazali tvrđenje, uzimamo u obzir vektor $\boldsymbol{a}$ za koji je $\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\boldsymbol{a}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2 = \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2$, jer se korelacija ne menja kada se linearna funkcija množi pozitivnom konstantom. Tada iz relacije (4.4.7) dobijamo

$$\begin{aligned} &a_{11} - 2\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{1\alpha} - \bar{X}_1)\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2 \qquad (4.4.10) \\ &\leq a_{11} - 2\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{1\alpha} - \bar{X}_1)\boldsymbol{a}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\boldsymbol{a}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{1\alpha} - \bar{X}_1)\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\boldsymbol{a}'}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\boldsymbol{a}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2}} &\leq \frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(X_{1\alpha} - \bar{X}_1)\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}}'}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2}} \qquad (4.4.11) \\ &= \frac{\boldsymbol{a}_{(1)}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}'}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathrm{A}_{22}\widehat{\boldsymbol{\beta}}}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sledi da je $\bar{X}_1 + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)$ najbolji linearni prediktor za $X_{1\alpha}$, a $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}$ linearna funkcija od $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}$ koja ima maksimalnu uzoračku korelaciju sa $X_{1\alpha}$. Onda je minimalna suma kvadrata odstupanja

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left[(X_{1\alpha} - \bar{X}_1) - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} - \overline{\boldsymbol{X}}^{(2)}\right)\right]^2 = a_{11} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}' \mathrm{A}_{\mathbf{22}}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{4.4.12}$$

$$= a_{11} - \boldsymbol{a}'_{(\mathbf{1})} A_{\mathbf{22}}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{a}_{(\mathbf{1})}$$

$$= a_{11\cdot 2}.$$

Ocena maksimalne verodostojnosti za $\sigma_{11\cdot 2}$ je $\hat{\sigma}_{11\cdot 2} = a_{11\cdot 2}/N$, pa sledi da je

$$\hat{\sigma}_{11\cdot 2} = (1 - R^2)\hat{\sigma}_{11}. \tag{4.4.13}$$

Izraz $(1 - R^2)$ meri proporcionalno smanjenje varijanse korišćenjem reziduala. Možemo reći da je R^2 funkcija varijanse objašnjena preko $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}$**.** Što je veće R^2, to je više varijansi smanjeno upotrebom promenjivih iz $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{2})}$.

Citirani autori

- **Karl Pearson** (1857–1936) je bio značajan engleski matematičar. Osnivač moderne matematičke statistike, a njegov najznačajniji doprinos iz oblasti statistike je koefijent korelacije – prvi ga je osmislio Francis Galton , ali ga je Pirson dodefinisao.
- **George Udny Yule** (1871–1951) bio je britanski statističar. Sarađivao je sa Pirsonom, koji je bio jedan od njegovih nastavnika. Objavio je *Introduction to the Theory of Statistics* (1911) i *The Statistical Study of Literary Vocabulary* (1940).
- **Prasanta Chandra Mahalanobis** (1893–1972) bio je pionir u upotrebi statistike u Indiji, pomogo je da se izgradi Indijski statistički institut, i izradio je statističku bazu podataka o indijskoj trgovini.
- **Gabriel Cramer** (1704 –1752) je bio švajcarski matematičar. Rano je pokazao svoje interesovanje za matematiku, sa 18 godina je doktorirao, a već sa 20 godina bio sef katedre za matematiku. Poznat je po Kramerovom pravilu.
- **Ronald A. Fisher** (1890 –1962) bio je britanski statističar i biolog koji je koristio matematiku za kombinovanje genetike i prirodne selekcije.
- **Frank Yates** (1902–1994) je bio začetnik statistike XX veka. Poznat je po Fisher-Yates stuffle – algoritamu za stvaranje slučajne permutacije konačne sekvence.
- **Harold Hotelling** (1895–1973) bio je matematički statističar i uticajni ekonomski teoretičar, poznat je po Hotelingovoj T^2–raspodeli. Razvio je metodu glavne komponente koja je široko korišćena u statisticu i računarskim naukama.

Bibliografija

[1] Cramer. H. (1946). *Malhematical Methods of Statistics,* Princeton University, Princeton.[2.6. 3.2, 3.4. 6.5. 7.21]

[2] Fisher, R. A. (1915), Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population, *Biometriko.,* **10,** 507-521. [4.2, 7.2]

[3] Fisher, R. A, anti f. Yateii (1942), *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (2nd ed.), Oliver and Boyd, Edinburgh. [4.2]

[4] Harris, Bernard, and Andrew P. Soms (1980). The use of the tetrachoric series for evaluating multivariate pormal probabilities, *Journal of Multivariate Analysis, 10.* 252-267. [2.3]

[5] Hotteling. Harold (1953). New light on the correlation coefficient and its transforms (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society B,* 15, 193-232. [4.2]

[6] Mahalanobis, P. C (1930). On tests and measures of group divergence, *Journal and Proceedings of the Asiatic Society of Bengal,* 26, 541-588. [3.3]

[7] National Bureau of Standards, United States (1959), *Tables of the Bivariate Nonnal Distribution Function and Related Functions,* U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. [2.3]

[8] Pearson, K. (1896), Mathematical contributions to the theory o(evolution---llL Regression, heredity and panmixia, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A,* 187, 253-318, [2.5, 3.2]

[9] Pearson, K. (1931), *Tables for Statisticians and Biometricians.* Part 11, Cambridge University, Cambridge. [2.3, 6.8]

[10] Yule, G. U. (1897a), On the Significance of Bravais' formulae for regression & c., in the case of skew correlation, *Proceedings of the Royal Society of London, 60,* 477-489. [2.5]

Literatura

[1] Anderson T. W., An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1958

[2] Rao C. Radhakrishna, Linear Statistical Inference and its Applications, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 2002

[3] Härdle W., Simar L., Applied Multivariate Statistical Analiyis, 2nd edition, Springer-Verlag, Benfiri Heidelberg 2007

Biografija

Miljana Milovanović rođena je 26.12.1990 u Prokuplju. Završila je srednju Administrativno-birotehničku školu u Nišu kao nosilac Vukove diplome. Prirodno-matematički fakultet u Nišu je upisala školske 2009/10. godine na Departmanu za matematiku. Osnovne studije je završila 2013. godine, a iste godine upisuje master akademske studije na smeru Primenjena matematika, modul Matematika u finansijama.

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	Мастер рад
Аутор, **АУ**:	Миљана Миловановић
Ментор, **МН**:	Александар Настић
Наслов рада, **НР**:	МУЛТИВАРИЈАЦИОНА НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Р. Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Р. Србија
Година, **ГО**:	2017.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	73 стр.
Научна област, **НО**:	Математика
Научна дисциплина, **НД**:	Математичка статистика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Мултиваријациона анализа, нормална расподела
УДК	519.237 519.224 330.4
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овом раду, након дефинисања случајних вектора и основних узорачких статистика дефинисаних на основу мултиваријационих случајних узорака биће детаљно разматрана мултиваријациона нормална расподела.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	Др Биљана Поповић
Члан:	Др Мирослав Ристић
Члан, ментор:	Др Александар Настић

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	Master thesis
Author, **AU**:	**Miljana Milovanović**
Mentor, **MN**:	**Aleksandar Nastić**
Title, **TI**:	MULTIVARIATE NORMAL DISTRIBUTION
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Republic of Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2017**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**73 p. ;**
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Mathematical statistics
Subject/Key words, **S/KW**:	**Multivariate analysis, normal distribution**
UC	**519.237** **519.224** **330.4**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this paper, after defining random vectors and basic sample statistics defined on the basis of multivariate random samples, the multivariate normal distribution will be considered in detail.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	Dr Biljana Popović
Member:	Dr Miroslav Ristić
Member, Mentor:	Dr Aleksandar Nastić