Vladimir Pavlović

ZBIRKA ZADATAKA IZ OPŠTE TOPOLOGIJE

prvo izdanje

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Niš, 2013.

Vladimir Pavlović

ZBIRKA ZADATAKA IZ OPŠTE TOPOLOGIJE

prvo izdanje

Serija: Pomoćni udžbenici

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Niš, 2013.

Izdavač:

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Recenzenti:

Prof. Dr Ljubiša Kočinac

Prof. Dr Radoslav Dimitrijević

Serija: Pomoćni udžbenici

Odluka Nastavno-naučnog veća Fakulteta:

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu broj 79/1-01 od 23.01.2013. godine odobrava se štampanje rukopisa *Zbirka zadataka iz opšte topologije* kao zbirka zadataka.

Štampa: Unigraf X-copy

Tiraž: 70 primeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji

Narodna biblioteka Srbije, Beograd

515.1(075.8)(076)

ПАВЛОВИЋ, Владимир, 1976-
Zbirka zadataka iz opšte topologije / Vladimir Pavlović. - 1. izd. - Niš : Prirodno-matematički fakultet, 2013 (Niš : Unigraf X-copy). - 260 str. ; 25 cm. - (Serija Pomoćni udžbenici / Prirodno-matematički fakultet, Niš)
Na nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž 70. - Bibliografija: str. 253. - Registar.
ISBN 978-86-6275-013-6
a) Topologija - Zadaci
COBISS.SR-ID 198159628

Vladimir Pavlović

ZBIRKA ZADATAKA IZ OPŠTE TOPOLOGIJE

prvo izdanje

Serija: Pomoćni udžbenici

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Niš, 2013.

Izdavač:

Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet

Recenzenti:

Prof. Dr Ljubiša Kočinac

Prof. Dr Radoslav Dimitrijević

Serija: Pomoćni udžbenici

Odluka Nastavno-naučnog veća Fakulteta:

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu broj 79/1-01 od 23.01.2013. godine odobrava se štampanje rukopisa *Zbirka zadataka iz opšte topologije* kao zbirka zadataka.

Štampa: Unigraf X-copy

Tiraž: 70 primeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji

Narodna biblioteka Srbije, Beograd

515.1(075.8)(076)

ПАВЛОВИЋ, Владимир, 1976-
Zbirka zadataka iz opšte topologije / Vladimir Pavlović. - 1. izd. - Niš : Prirodno-matematički fakultet, 2013 (Niš : Unigraf X-copy). - 260 str. ; 25 cm. - (Serija Pomoćni udžbenici / Prirodno-matematički fakultet, Niš)
Na nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž
70. - Bibliografija: str. 253. - Registar.
ISBN 978-86-6275-013-6
a) Topologija - Zadaci
COBISS.SR-ID 198159628

Predgovor

Ova zbirka je prvenstveno namenjena studentima matematike za lakše savladavanje gradiva iz oblasti opšte topologije, a proistekla je iz višegodišnjeg rada autora u nastavi na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu.

U prvom delu date su definicije pojmova koji će se javljati u zadacima koji slede i opisana notacija koja će se koristiti.

Drugi deo zbirke čine zadaci koji su tematski poređani u odeljke. Pojmovi obrađeni u jednom odeljku figurišu i u narednim, gde se dalje posmatraju u kontekstu oblasti koje slede.

Teorijsko znanje koje je potrebno da se isprate rešenja zadataka data u trećem delu je skromno, uslovno rečeno, i nije ovde izloženo. U vezi sa tim čitalac se upućuje na [2], [5] i [10]. Upravo želja za pristupačnošću materije širem spektru čitalaca dovela je do činjenice da ozbiljniji, skupovno-teoretski delovi opšte topologije uopšte nisu prisutni u zbirci. Takođe, izostavljen je jedan veliki deo standardnih zadataka, obzirom da se isti mogu naći u izvrsnim zbirkama [1], [7] i [9].

Tekst ispisan *na ovaj način* koristi se prilikom uvođenja novih pojmova, a ponekad i prilikom navođenja iskaza. Tekst ispisan **na ovaj način** služi za isticanje pojedinih reči.

Autor duguje zahvalnost recenzentima dr Ljubiši Kočincu i dr Radoslavu Dimitrijeviću na pažljivom čitanju rukopisa knjige i mnogim korisnim primedbama i savetima.

Niš, 2013. Autor

Sadržaj

Deo 1

Uvod

1.1 Terminologija i konvencije

Zapis $A \subset B$, tj. $B \supset A$, značiće $A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B$. Sa $\varnothing$ ćemo označavati prazan skup.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, i $\mathbb{R}$ označavaju, tim redom, skup celih, racionalnih i realnih brojeva. $\mathbb{N}$ je skup pozitivnih celih, tj. u našoj terminologiji - prirodnih, a $\mathbb{N}_0$ nenegativnih celih brojeva.

Reči *familija*, *kolekcija* i *mnoštvo* su sinonimi za reč *skup*. Za proizvoljnu familiju $\mathcal{A}$ skupova definišemo uniju

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x \ : \ \exists A \in \mathcal{A}\, (x \in A)\}\,,$$

a ako je familija $\mathcal{A}$ neprazna, onda definišemo i presek

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \ : \ \forall A \in \mathcal{A}\, (x \in A)\}$$

Sa $=$ označavamo jednakost dok ćemo simbole $:=$ i $=:$ koristiti za uvođenje oznaka (kao što smo to upravo i uradili).

$\mathbb{P}(A)$ označava partitivni skup skupa A. Koristimo i oznaku

$$\mathrm{rel}_S(\mathcal{A}) := \{S \cap A \ : \ A \in \mathcal{A}\}\,.$$

$\langle u, v\rangle := \{\{u\}, \{u, v\}\}$ je *primitivan* uređen par. Relacije su skupovi primitivnih uređenih parova. $\mathrm{dom}(f) := \big\{x \ : \ \exists y \ (\langle x, y\rangle \in f)\big\}$ je domen relacije f, a $\mathrm{ran}(f) := \big\{y \ : \ \exists x \ (\langle x, y\rangle \in f)\big\}$ njen rang .

Funkcije su one relacije f sa osobinom da ako je $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in f$, onda je $b = c$; u tom slučaju za $x \in \mathrm{dom}(f)$ pišemo $f(x) = y$, gde je $\{y\} = \{z \in \mathrm{ran}(f) \ : \ \langle x, z\rangle \in f\}$.

Koristimo oznake

$$f^{\rightharpoonup}A := \{f(x) \ : \ x \in \mathrm{dom}(f) \cap A\}$$

i

$$f^{\leftharpoonup}A := \{x \in \mathrm{dom}(f) \ : \ f(x) \in A\} \ .$$

Zapis $f : A \to B$ znači da je f preslikavanje, $\mathrm{dom}(f) = A$ i $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$, a fraza f *je preslikavanje* **na skup** B podrazumeva da je baš $\mathrm{ran}(f) = B$.

${}^{A}B$ je skup svih funkcija $f : A \to B$. $f \restriction A := \{\langle x, f(x)\rangle \ : \ x \in A\}$.

Sa id_X označavamo identičko preslikavanje $\mathrm{id}_X : X \to X$ ($\mathrm{id}_X(x) = x$ za svako $x \in X$). Pod *karakterističnom funkcijom skupa* A *u odnosu na skup* X podrazumevamo funkciju $f : X \to \{0, 1\}$ takvu da je $f^{\rightharpoonup}A = \{1\}$ i $f^{\rightharpoonup}(X \setminus A) = \{0\}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ uređene n-torke su po konvenciji funkcije

$$(x_1, \ldots, x_n) = \{\langle 1, x(1)\rangle, \ldots, \langle n, x(n)\rangle\}, \ x : \{1, \ldots, n\} \to \{x(1), \ldots, x(n)\}$$

Kao što je to i uobičajeno, umesto ${}^{\{1,\ldots,n\}}A$ pišemo A^n. Smatramo $A^0 = \{\varnothing\}$.

Skup $\Delta_X := \{(x, x) \ : \ x \in X\}$ nazivamo *dijagonalom* skupa X.

Za $x \in A$ sa $\underline{(x)}$ označavamo funkciju $\{\langle 1, x\rangle\} \in A^1$; dakle $A^1 = \{\underline{(x)} \ : \ x \in A\}$. Koristićemo oznaku $A^{<\omega} := \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$. Ako je $s \in A^n$ za neko $n \in \mathbb{N}_0$, onda definišemo $[s\rangle_A := \big\{a \in {}^{\mathbb{N}}A \ : \ s \subseteq a\big\}$, a ovu oznaku kratimo na $[s\rangle$, ukoliko se podrazumeva o kom se skupu A radi. Ako je $s \in A^n$ i $t \in B^m$, za $n, m \in \mathbb{N}_0$, koristimo oznaku $s\,\hat{}\,t$ tako da je

$$s\,\hat{}\,t = \begin{cases} s & , \text{ ako } m = 0, \quad \text{tj. ako } t = \varnothing \\ t & , \text{ ako } n = 0, \quad \text{tj. ako } s = \varnothing \end{cases}$$

odnosno, ako je $n, m \in \mathbb{N}$, da označimo $(n+m)$-torku $h \in (A \cup B)^{n+m}$ definisanu sa $h(i) = s(i)$, za $i = \overline{1, n}$, i $h(i) = t(i-n)$ za $i = \overline{n+1, n+m}$.

$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ označava skup kompleksnih brojeva. Za $x \in \mathbb{R}$ pišemo $\dot{x} = (x, 0)$. $\mathrm{i} := (0, 1)$ tako da je $(x, y) = \dot{x} + \mathrm{i} \cdot \dot{y}$ i $\dot{y} \cdot \mathrm{i} = (0, y)$ za $x, y \in \mathbb{R}$.

Indeksirane familije su funkcije:

$$F = (F(i) \ : \ i \in I) = \{\langle i, F(i)\rangle \ : \ i \in I\},$$

gde je $I = \mathrm{dom}(F)$. Pišemo ravnopravno $F_i = F(i)$. Takođe koristimo i standardne oznake

$$\bigcup_{i \in I} F_i = \bigcup \{F(i) \ : \ i \in I\} = \bigcup \mathrm{ran}(F)$$

i

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap \{F(i) \ : \ i \in I\} = \bigcap \mathrm{ran}(F).$$

Familija $\mathcal{A}$ je *pokrivač* skupa A ako važi $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$; govorimo podjednako i *familija* $\mathcal{A}$ *pokriva skup* A. Za indeksiranu familiju $(A_i \ : \ i \in I)$ kažemo da *pokriva skup* A ako $\{A_i \ : \ i \in I\}$ pokriva skup A.

Za skup A kažemo da je *prebrojiv* ukoliko postoji bar jedno preslikavanje $f : \mathbb{N} \to A$ **na** skup A; u tom slučaju je $A = \{f_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Za beskonačan i prebrojiv skup kažemo da je *prebrojivo beskonačan*. Za skup A kažemo da je *moći kontinuum* ukoliko postoji bar jedna bijekcija $f : A \to \mathbb{R}$.

Ako je $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{dom}(f) \subseteq A^n$, onda pišemo skraćeno $f(x_1, \ldots, x_n) = f((x_1, \ldots, x_n))$.

`Descartes`-*ov proizvod* familije skupova $(X_i \; : \; i \in I)$, u oznaci $\prod\limits_{i\in I} X_i$, je skup svih onih funkcija $f : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ takvih da je $f(i) \in X_i$ za svako $i \in I$.

Proizvod familije preslikavanja $f_i : X_i \to Y_i,\; i \in I$, u oznaci

$$\bigotimes_{i\in I} f_i = \bigotimes(f_i \; : \; i \in I)$$

je preslikavanje

$$T : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$$

definisano sa

$$T(x) = (f_i(x(i)) \; : \; i \in I) \;\text{ za svako } x \in \prod_{i\in I} X_i\,.$$

Za konačan broj preslikavanja $f_1, \dots, f_n$ koristimo i oznaku $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$.

Dijagonalni proizvod familije preslikavanja $f_i : X \to Y_i,\; i \in I$, u oznaci

$$\triangle_{i\in I} f_i = \triangle(f_i \; : \; i \in I)$$

je preslikavanje

$$T : X \to \prod_{i\in I} Y_i$$

definisano sa

$$T(x) = (f_i(x) \; : \; i \in I) \text{ za svako } x \in X\,.$$

Za konačan broj preslikavanja $f_1, \dots, f_n$ koristimo i oznaku $f_1 \triangle \cdots \triangle f_n$.

Ako je $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, onda familiju preslikavanja $f_i : X_i \to Y_i,\; i \in I$ nazivamo *kompatibilnom* ako za svako $i, j \in I$ i svako $x \in X_i \cap X_j$ važi $f_i(x) = f_j(x)$. Primetimo da je u tom slučaju relacija $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ funkcija i to

$$\bigcup_{i\in I} f_i : \bigcup_{i\in I} X_i \to \bigcup_{i\in I} Y_i$$

i pritom za svako $i_0 \in I$ i $x \in X_{i_0}$ važi $\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(x) = f_{i_0}(x)$.

Indeksirana familija $(F_i \ : \ i \in I)$ je *centrirana* ako je $\bigcap_{i\in T} F_i \neq \varnothing$ za svaki konačan $T \subseteq I$, a *celularna* ako važi $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing$ za svako $i, j \in I$. Za (**neindeksiranu**) familiju $\mathcal{A}$ kažemo da je *centrirana*, odnosno *celularna* ako je takva indeksirana familija $(G_i \ : \ i \in J)$ gde je $J = \mathcal{A}$ i $G_A = A$ za svako $A \in \mathcal{A}$. Primetimo da je prema ovakvim našim definicijama moguće da familija $\{F_i \ : \ i \in I\}$ bude celularna, a da indeksirana familija $(F_i \ : \ i \in I)$ ne bude takva.

Podskup $\preceq$ skupa X^2 (tj. binarna relacija na skupu X) je *parcijalno uređenje* na skupu X ako za svako $x, y, z \in X$ važi
$x \preceq x$ (relacija je *refleksivna*),
$x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y$ (relacija je *antisimetrična*),
$x \preceq y \wedge y \preceq z \ \Rightarrow x \preceq z$ (relacija je *tranzitivna*),

gde $x \preceq y$ znači $(x, y) \in\preceq$. I inače, ako je $R \subseteq X \times X$ proizvoljna relacija na skupu X, onda će za $x, y \in X$ zapis $x\,R\,y$, kao što je to i uobičajeno, značiti $(x, y) \in R$.

Ako je $\preceq$ parcijalno uređenje na skupu X i $Y \subseteq X$ onda:

- za $x \in X$ kažemo da je *majoranta* skupa Y (preciznije $\preceq$-*majoranta* skupa Y) ako važi $y \preceq x$ za svako $y \in Y$; Y je *odozgo ograničen* ukoliko postoji neka majoranta skupa Y;
- za $x \in X$ kažemo da je *minoranta* skupa Y ako važi $x \preceq y$ za svako $y \in Y$; Y je *odozdo ograničen* ukoliko postoji neka minoranta skupa Y;
- za $a \in X$ kažemo da je *najveći* element skupa Y ako važi $a \in Y$ i $y \preceq a$ za svako $y \in Y$; primetimo da on, ukoliko postoji, mora biti jedinstven;
- za $a \in X$ kažemo da je *najmanji* element skupa Y ako važi $a \in Y$ i $a \preceq y$ za svako $y \in Y$; primetimo da on, ukoliko postoji, mora biti jedinstven;
- za $a \in X$ kažemo da je *supremum* skupa Y ako je skup M majoranti skupa Y neprazan i a je njegov najmanji element; ako postoji, ovakav element skupa X je jedinstven i označavamo ga sa $\sup Y$;
- za $a \in X$ kažemo da je *infimum* skupa Y ako je skup M minoranti skupa

Y neprazan i a je njegov najveći element; ako postoji ovakav element skupa X je jedinstven i označavamo ga sa $\inf Y$;
- Y je *lanac* ako za svako $x, y \in Y$ važi $x \preceq y \vee y \preceq x$; za $\preceq$ kažemo da je *linearno uređenje* na skupu X ako je sam skup X lanac.

Podskup $\prec$ skupa X^2 je *strogo uređenje* na skupu X ako za svako $x, y, z \in X$ važi $x \prec y \Rightarrow y \not\prec x$ i $x \prec y \wedge y \prec z \ \Rightarrow x \prec z$. Jasno, $\preceq \subseteq X^2$ je parcijalno uređenje na skupu X ako i samo ako je $\prec := \{(u, v) \in X^2 \ : \ u \preceq v \wedge u \neq v\}$ strogo uređenje na skupu X; za $\prec$ u tom slučaju kažemo da je *strogo uređenje pridruženo parcijalnom uređenju* $\preceq$.

$\prec \subseteq X^2$ je strogo uređenje na skupu X ako i samo ako je

$$\preceq := \{(u, v) \in X^2 \ : \ u \prec v \vee u = v\}$$

parcijalno uređenje na skupu X. U tom slučaju za $\preceq$ kažemo da je *parcijalno uređenje pridruženo strogom uređenju* $\prec$, a ako je $Y \subseteq X$ pod $\prec$-majorantom (respektivno $\prec$-minorantom, $\prec$-najvećim elementom, $\prec$-najmanjim elementom, $\prec$-supremumom, $\prec$-infimumom) skupa Y podrazumevaćemo $\preceq$-majorantu (respektivno $\preceq$-minorantu, $\preceq$-najveći element, $\preceq$-najmanji element, $\preceq$-supremum, $\preceq$-infimum) skupa Y, a za Y ćemo govoriti da je $\prec$-odozgo ograničen (respektivno $\prec$-odozdo ograničen, $\prec$-lanac) ako je Y $\preceq$-odozgo ograničen (respektivno $\preceq$-odozdo ograničen, $\preceq$-lanac). Takođe za $\prec$ kažemo da je *strogo linearno uređenje* na skupu X ako je $\preceq$ linearno uređenje na skupu X.

Ako je $\prec$ strogo linearno uređenje na skupu X (i $\preceq$ njemu pridruženo parcijalno uređenje) onda za $x, y \in X$ definišemo skupove
- $[x; y)_\prec := \{z \in X \ : \ x \preceq z \prec y\}$;
- $[x; \rightarrow)_\prec := \{z \in X \ : \ x \preceq z\}$;
- $(x; y]_\prec := \{z \in X \ : \ x \prec z \preceq y\}$;
- $(\leftarrow; y]_\prec := \{z \in X \ : \ z \preceq y\}$;
- $[x; y]_\prec := \{z \in X \ : \ x \preceq z \preceq y\}$;
- $(x; y)_\prec := \{z \in X \ : \ x \prec z \prec y\}$;
- $(x; \rightarrow)_\prec := \{z \in X \ : \ x \prec z\}$;
- $(\leftarrow; y)_\prec := \{z \in X \ : \ z \prec y\}$.

Sa $<$ uvek označavamo uobičajeno uređenje skupa $\mathbb{R}$. Za $x, y \in \mathbb{R}$ umesto $[x; y]_<$, $[x; y)_<$ i sl. pisaćemo ukratko $[x; y]$, $[x; y)$ itd. Slično u ovom slučaju pišemo $\sup Y$ i $\inf Y$ umesto $\sup_< Y$ i $\inf_< Y$, respektivno. Primetimo da se u skladu sa našom notacijom oznaka (x, y) odnosi isključivo na *uređene parove*, dok odgovarajući *otvoreni interval* realne prave označavamo sa $(x; y)$. Takođe, oznake $(-\infty; x), [x; +\infty)$ i sl., gde je $x \in \mathbb{R}$, imaju uobičajeno značenje. Napomenimo da ćemo termin *otvoren interval realne prave* koristiti da označimo podskupove skupa $\mathbb{R}$ koji su nekog od oblika $(x; y)$, $(-\infty; x)$ ili $(x; +\infty)$ za neke realne brojeve $x < y$.

Neka je $\prec$ strogo uređenje na nepraznom skupu X. Sledeća tri uslova su ekvivalentna:
- *X ima najmanji element i svaki neprazan podskup od X ima supremum*;
- *X ima najveći element i svaki neprazan podskup od X ima infimum*;
- *svaki neprazan poskup od X ima i supremum i infimum.*

Slično, naredna dva uslova su ekvivalentna:
- *svaki neprazan odozgo ograničen podskup od X ima supremum*;
- *svaki neprazan odozdo ograničen podskup od X ima infimum.*

Najzad lako se proverava da je uslov:

- *ako je $\varnothing \neq Y \subset X$ takav da važi*

$$\forall x \in X \setminus Y \ \forall y \in Y \ (x \prec y) \, ,$$

onda skup $X \backslash Y$ ima supremum, Y ima infimum i pritom važi $\sup_\prec(X \backslash Y) = \inf_\prec Y$

ekvivalentan konjunkciji uslova (a) i (b) gde je
(a) $\forall a, b \in X \ \big(a \prec b \Rightarrow \exists c \in X \ (a \prec c \prec b)\big)$ (tj. ne postoje dva uzastopna elementa ili kako se to obično kaže *strogo uređenje $\prec$ je uređajno gusto* (*u sebi*))
i
(b) *svaki neprazan $\prec$-odozgo ograničen podskup od X ima supremum.*

§

Neka je X neprazan skup. Za familiju $\mathcal{A}$ kažemo da je *particija skupa* X ako važi
– ako su $P, Q \in \mathcal{A}$ tako da je $P \neq Q$, onda važi $P \cap Q = \varnothing$,
– $\bigcup \mathcal{A} = X$.

Za binarnu relaciju $R \subseteq X^2$ kažemo da je *relacija ekvivalencije na skupu* X ako za svako $x, y, z \in X$ važi:
– xRx,
– ako važi xRy, onda mora da važi i yRx (relacija je *simetrična*),
– ako važi xRy i yRz, onda mora da važi i xRz.

U tom slučaju za svako $x \in X$ sa

$$[x]_R := \{y \in X \,:\, xRy\}$$

označavamo *klasu ekvivalencije elementa* x *u odnosu na* relaciju ekvivalencije R.

§

Ako je $\mathcal{E}$ proizvoljna particija nepraznog skupa X tako da $\varnothing \notin \mathcal{E}$, onda je

$$E := \big\{(x, y) \in X^2 \,:\, \exists A \in \mathcal{E}\ (\{x, y\} \subseteq A)\big\}$$

relacija ekvivalencije na skupu X i za nju kažemo da je *relacija ekvivalencije indukovana particijom* $\mathcal{E}$.

Neka je fiksirana relacija ekvivalencije E na nepraznom skupu X.

Skup $X_{/E} := \{[x]_E \,:\, x \in X\}$ nazivamo *faktor skup skupa* X *po relaciji* E ili *particija skupa* X *indukovana relacijom ekvivalencije* E. Primetimo da $\varnothing \notin X_{/E}$ i da je relacija ekvivalencije indukovana particijom $X_{/E}$ upravo E; takođe, ako je $\mathcal{A} \not\ni \varnothing$ proizvoljna particija skupa X, a $A \subseteq X^2$ relacija ekvivalencije na skupu X indukovana particijom $\mathcal{A}$, onda je $X_{/A} = \mathcal{A}$.

Preslikavanje $\mathrm{proj}_E : X \to X_{/E}$ definisano sa $\mathrm{proj}_E(x) = [x]_E$, za $x \in X$, nazivamo *prirodna projekcija indukovana relacijom ekvivalencije* E.

Za $A \subseteq X$ kažemo da je *pravilan skup za* (*relaciju*) E ako za svako $x \in X$ važi:

$$\text{za svako } x \in A \text{ važi } [x]_E \subseteq A\,.$$

tj. ako za svako $x, y \in X$ važi:

$$\text{ako je } x \in A \text{ i } xEy\,, \text{ onda mora biti i } y \in A\,.$$

Primetimo da je preslikavanje

$$T : \mathbb{P}\left(X_{/E}\right) \to \{A \subseteq X \,:\, A \text{ je pravilan za } E\}$$

definisano sa

$$T(N) = \bigcup N \text{ za svako } N \subseteq X_{/E}$$

bijektivno kao i da je njemu inverzno dato sa

$$T^{-1}(A) = (\mathrm{proj}_E)^{\rightharpoonup} A = \{[x]_E \,:\, x \in A\}$$

za svaki pravilan za E skup $A \subseteq X$. Za ovu bijekciju T kažemo da je *kanonska korespondencija koja odgovara relaciji ekvivalencije E.*

§

Neka je fiksirano preslikavanje $g : X \to Y$, gde su X i Y neprazni.

Relaciju $\ker(g) := \{(u, v) \in X^2 \,:\, g(u) = g(v)\}$ nazivamo *jezgro preslikavanja g*. Jasno je da je $\ker(g)$ relacija ekvivalencije na skupu X.

Preslikavanju g pridružujemo bijektivno preslikavanje

$$g_\diamond : X_{/\ker(g)} \to g^{\rightharpoonup} X$$

definisano sa

$$\{g_\diamond(C)\} = g^{\rightharpoonup} C$$

za svako $C \in X_{/\ker(g)}$. Ovo $g_\diamond$ je naravno ono jedinstveno preslikavanje

$$f : \left\{[x]_{\mathrm{ker(g)}} \,:\, x \in X\right\} \to Y$$

za koje važi $f\big([x]_{\ker(g)}\big) = f(x)$.

Ako je $\pi_g : X \to X_{/\ker(g)}$ prirodna projekcija indukovana sa $\ker(g)$, onda jasno važi

$$g = g_\diamond \circ \pi_g$$

§

Ako je dato $g : X \to Y$, gde su X i Y neprazni i ako je $\pi : X \to X_{/\ker(g)}$ prirodna projekcija indukovana sa $\ker(g)$, onda očigledno važi $\ker(g) = \ker(\pi)$. Ako je još $X_0 \subseteq X$ neprazan, onda je jasno da važi $\ker(g \restriction X_0) = \ker((\pi) \restriction X_0)$.

Ako je E relacija ekvivalencije na skupu $X \neq \varnothing$, a $\pi_E : X \to X_{/E}$ prirodna projekcija indukovana sa E, onda očigledno važi $\ker(\pi_E) = E$ i $(\pi_E)_\diamond = \mathrm{id}_{X_{/E}}$.

Neka je $\varnothing \neq X_0 \subseteq X$, E relacija ekvivalencije na skupu X, $E_0 := E \cap (X_0)^2$ *restrikcija* relacije E na skup X_0, i π prirodna projekcija indukovana sa E. Jednostavno je videti da postoji **jedinstveno** preslikavanje

$$f : X_0/E_0 \to \pi^{\rightharpoonup} X_0$$

odnosno

$$f : \{[x]_{E_0} : x \in X_0\} \to \{[x]_E : x \in X_0\}$$

za koje važi

$$f([x]_{E_0}) = [x]_E \text{ za svako } x \in X_0$$

Ovo preslikavanje je bijektivno. Naravno $f = (\pi \restriction X_0)_\diamond$.

§

Za $n \in \mathbb{N}$ podrazumevamo da je na $\mathbb{R}^n$ zadata standardna linearna struktura nad poljem $\mathbb{R}$, tj. ako su

$$u = \big(u(1), \ldots, u(n)\big),\ v = \big(v(1), \ldots, v(n)\big) \in \mathbb{R}^n \text{ i } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pisaćemo $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = w$ gde je $w(i) = \alpha u(i) + \beta v(i)$, za svako $i = \overline{1, n}$.

U slučaju $n = 2$ za $t \in \mathbb{R}$ imamo $\dot{t} \cdot \imath = t \cdot \imath = (0, t) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ i $u = \big(u(1), \dots, u(n)\big),\ v = \big(v(1), \dots, v(n)\big) \in \mathbb{R}^n$ definišimo

$$h_{u,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad \text{sa}$$

$$h_{u,v}(t) := (1 - t) \cdot u + t \cdot v$$

kao i

$$\mathrm{Seg}[u, v] := h_{u,v}^{\rightarrow}[0; 1],\ \mathrm{Seg}(u, v] := h_{u,v}^{\rightarrow}(0; 1],\ \mathrm{Seg}[u, v) := h_{u,v}^{\rightarrow}[0; 1)$$

i

$$\mathrm{Seg}(u, v) := h_{u,v}^{\rightarrow}(0; 1)\,.$$

Za $u \neq v$ skup $h_{u,v}^{\rightarrow}\mathbb{R}$ je lako prepoznati kao pravu u $\mathbb{R}^n$ određenu tačkama u i v, a $h_{u,v}^{\rightarrow}[0; 1]$ kao (zatvorenu) duž u $\mathbb{R}^n$ sa krajevima u i v.

Za $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je *konveksan* ako za svako $u, v \in A$ važi $\mathrm{Seg}[u, v] \subseteq A$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $b = (b_0, \dots, b_n) \in \big(\mathbb{R}^2\big)^n$. Definišemo

$$\mathrm{PG}(b) = \mathrm{PG}(b_0, \dots, b_n) := \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathrm{Seg}[b_i, b_{i+1}]$$

Za b kažemo da *definiše izlomljenu liniju* ako važi $b_0 \neq b_n$ i $b_i \neq b_{i+1}$ za $i = \overline{0, n-1}$; u tom slučaju za $\mathrm{PG}(b)$ kažemo da je *izlomljena linija određena sa* b i za nju kažemo da *spaja* b_0 *i* b_n. Za $b \in \big(\mathbb{R}^2\big)^n$ kažemo da *ne dozvoljava samopreseke* ako b definiše izlomljenu liniju i ako važe sledeća dva uslova:
- $\mathrm{Seg}[b_i, b_{i+1}] \cap \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}] = \varnothing$ kad god je $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n\}$ i $i < j$;
- ako je $n > 1$ onda $\mathrm{Seg}[b_i, b_{i+1}] \cap \mathrm{Seg}[b_{i+1}, b_{i+2}] = \{b_{i+2}\}$ za svako $i = \overline{0, n-2}$.

Neka su p i q funkcije tako da je $\mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(q) = [0; 1]$ i $p(1) = q(0)$. Za funkciju $p * q$, čiji je domen $[0; 1]$, a definisana je sa $(p * q)(t) = p(2t)$ ako

$0 \le t \le 1/2$, odnosno $(p * q)(t) = q(2t-1)$ ako $1/2 \le t \le 1$, reći ćemo da *nastaje nastavljanjem* q *na* p.

Ukoliko čitalac nije upoznat sa pojmom (*spoljne*) `Lebesgue`-*ove mere* na skupu $\mathbb{R}$ i njenim osnovnim osobinama, upućuje se na [6].

1.2 Osnovni pojmovi opšte topologije

Pod *topologijom* podrazumevamo svaku familiju skupova τ za koju važi:
– $\varnothing \in \tau$,
– za svako $A, B \in \tau$ važi $A \cap B \in \tau$ i – za svako $\mathcal{A} \subseteq \tau$ važi $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

U tom slučaju za familiju τ kažemo da je topologija *na skupu* $\bigcup \tau$. Ekvivalentno, familija τ je topologija na skupu X ako je τ topologija, $\tau \subseteq \mathbb{P}(X)$ i $X \in \tau$. Uređeni par (X, τ), gde je X neprazan skup a τ topologija na skupu X, nazivamo *topološki prostor*. Drugim rečima, (X, τ) je topološki prostor ako važi $\tau \subseteq \mathbb{P}(X)$, τ je topologija i $\varnothing \neq X \in \tau$. Za skup X kažemo da je *nosač*, a za njegove elemente da su *tačke* (topološkog) *prostora* (X, τ) ; članove topologije τ je uobičajeno nazivati τ-*otvorenim* skupovima ili *otvorenim skupovima topologije* τ (*prostora* (X, τ)), dok se za njihove relativne komplemente u odnosu na X kaže da su τ-*zatvoreni* skupovi ili *zatvoreni skupovi topologije* τ (*prostora* (X, τ)). Govorićemo i jednostavno *otvoren skup* i *zatvoren skup* ukoliko je iz konteksta jasno na koju se topologiju τ misli. Za skup koji je istovremeno i otvoren i zatvoren kažemo da je *otvoreno-zatvoren*.

Familiju $\mathbb{P}(X)$ nazivamo *diskretna topologija na skupu* X. Ako je $X \neq \varnothing$ onda prostor $\big(X, \mathbb{P}(X)\big)$ nazivamo *diskretan topološki prostor*, a prostor $\big(X, \{\varnothing, X\}\big)$ nazivamo *antidiskretan topološki prostor*.

Često ćemo pod *prostor* X zapravo podrazumevati par (X, τ), dok će se oznaka τ_X odnositi na tu podrazumevanu topologiju τ.

§

Lako je videti da je presek proizvoljne neprazne kolekcije topologija i sam topologija. Usto ako su sve familije iz te kolekcije topologije na jednom te istom skupu X, onda je i presek te kolekcije topologija na skupu X.

Za topologiju τ_1 kažemo da je *finija* (ili *jača*) *od* topologije τ_2, odnosno za τ_2 da je *grublja* (ili *slabija*) *od* topologije τ_1, ako važi $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna neprazna familija skupova i $X := \bigcup \mathcal{B}$. Definišemo

$$\mathrm{Top}(\mathcal{B}) := \bigcap \{\tau \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(X)) \ : \ \mathcal{B} \subseteq \tau, \ \tau \text{ je topologija na skupu } X\}\,.$$

$\mathrm{Top}(\mathcal{B})$ je topologija na skupu X i za nju kažemo da je *generisana* sa $\mathcal{B}$.

Ako je τ topologija za $\mathcal{B} \subseteq \tau$ kažemo da je (*topološka*) *baza* topologije τ (ili τ-*baza*, *baza za* τ) ako za svako $U \in \tau$ postoji neko $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ tako da je $U = \bigcup \mathcal{U}$. Familija $\mathcal{A} \subseteq \tau$ je *predbaza* (*subbaza*) topologije τ (ili τ-*subbaza*, *subbaza za* τ) ako je familija

$$\left\{\bigcap \mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \text{ je neprazan konačan skup}\right\}$$

baza za τ. Lako je videti da je $\mathcal{A} \subseteq \tau$ je subbaza topologije τ ako i samo ako važi $\mathrm{Top}(\mathcal{A}) = \tau$.

Za prostor (X, τ) kažemo da *zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti* ako postoji neka prebrojiva baza za τ.

Za familiju $\mathcal{A}$ kažemo da je (*topološka*) *mreža prostora* (X, τ) (ili *topologije* τ) ako je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ i ako za svako $U \in \tau$ postoji neko $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $U = \bigcup \mathcal{U}$.

Ako je $x \in X$ i τ topologija na X, onda pod *lokalnom bazom topologije* τ (kažemo i τ-*lokalna baza*, *lokalna baza prostora* (X, τ)) *u tački* x podrazumevamo svaku familiju $\mathcal{B} \subseteq \tau$ takvu da za svaki otvoren skup $U \in \tau$ takav da je $x \in U$ postoji neko $V \in \mathcal{B}$ sa osobinom da je $x \in V \subseteq U$. Pritom **ne** zahtevamo da za svako $U \in \mathcal{B}$ važi $x \in U$ - u ovom specijalnom slučaju rećićemo da je $\mathcal{B}$ τ-lokalna baza *u strogom smislu* u tački x. Za (X, τ) kažemo da *zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti* ako za svaku tačku prostora postoji neka prebrojiva lokalna baza za τ u toj tački.

§

Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova topološkog prostora (X, τ) kažemo da je *τ-lokalno konačna* ako za svako $x \in X$ postoji $U \in \tau$ tako da je $x \in U$ i tako da je skup $\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \varnothing\}$ konačan. Za **indeksiranu** familiju $(A_i : i \in I)$ kažemo da je *τ-lokalno konačna* ako za svako $x \in X$ postoji $U \in \tau$ tako da je $x \in U$ i tako da je skup $\{i \in I : U \cap A_i \neq \varnothing\}$ konačan. Ako je indeksirana familija $(A_i : i \in I)$ lokalno konačna (a ovako ćemo govoriti umesto *τ-lokalno konačna* kad god je jasno o kojoj topologiji τ se radi), onda je i (neindeksirana) familija $\{A_i : i \in I\}$ lokalno konačna. Obrat ne mora da važi.

§

Neka je (X, τ) fiksiran topološki prostor.

Definišemo operatore $\mathrm{int}_\tau, \mathrm{cl}_\tau : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ sa $\mathrm{int}_\tau(A) = \bigcup\{U \subseteq A : U \in \tau\}$ i $\mathrm{cl}_\tau(A) = \bigcap\{F \supseteq A : X \setminus F \in \tau\}$. Usvojićemo **konvenciju** da ukoliko je u datom razmatranju - kao što je to upravo sada slučaj - fiksiran neki prostor X i ako je $M \subseteq X$, onda pod M^c zapravo podrazumevamo skup $X \setminus M$. $\mathrm{int}_\tau(A)$ i $\mathrm{cl}_\tau(A)$ su *unutrašnjost* i *zatvorenje* (ili *atherencija*), respektivno, skupa A (*u odnosu na topologiju τ*). Pisaćemo samo int i cl ukoliko je jasno o o kojoj je topologiji reč i tada ćemo takođe kratko označavati $\overline{A} := \mathrm{cl}(A)$. $\mathrm{bd}_\tau(A) := \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(A^c)$ (ili samo $\mathrm{bd}(A)$) je *rub* skupa $A \subseteq X$. Za $x \in \mathrm{cl}(A)$ kažemo da je *atherentna* (preciznije *τ-atherentna*) tačka skupa A ili da je tačka *blizu* skupa A (*u odnosu na topologiju τ*); za $x \in \mathrm{int}(A)$ kažemo da je *unutrašnja* (preciznije *τ-unutrašnja*) tačka skupa A; za $x \in \mathrm{bd}(A)$ kažemo da je *rubna* (preciznije *τ-rubna*) tačka skupa A. Za tačku x kažemo da je *izolovana* tačka skupa $A \subseteq X$ ako postoji $U \in \tau$ tako da je $U \cap A = \{x\}$; ako je $A = X$ govorimo o izolovanim tačkama *prostora* (X, τ) (ili *topologije* τ). Za tačku koja nije izolovana tačka skupa A kažemo da je tačka *nagomilavanja* skupa A (*u odnosu na topologiju τ*); skup svih tačaka nagomilavanja od A označavamo sa $\mathrm{acc}_\tau(A)$ (ili samo $\mathrm{acc}(A)$ odnosno A') i nazivamo *izvodnim skupom* (preciznije *τ-izvodnim skupom*) skupa A.

Ako je $A \subseteq X$ i $x \in \mathrm{int}(A)$ za A kažemo da je *okolina* tačke x. *Otvorena okolina* tačke je otvoren skup koji sadrži tu tačku.

§

Ako je $Y \subseteq X$ onda je $\mathrm{rel}_Y(\tau)$ topologija na skupu Y. Za ovu topologiju kažemo da je topologija na skupu Y koja je *nasleđena* od τ a, pod uslovom da je $Y \neq \varnothing$, za $(Y, \mathrm{rel}_Y(\tau))$ da je *potprostor* prostora (X, τ). Za $A \subseteq X$ kažemo da je τ-*diskretan podskup* od X ako je $(A, \mathrm{rel}_A(\tau))$ diskretan prostor. Ovo je ekvivalentno činjenici da je svaka tačka skupa A izolovana tačka tog skupa.

Za $A \subseteq X$ kažemo da je G_δ *skup prostora* (X, τ) (ili *topologije* τ) ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji otvoren skup $U_n \subseteq X$ tako da je $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Slično za $A \subseteq X$ kažemo da je F_σ *skup prostora* (X, τ) (ili *topologije* τ) ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji zatvoren skup $F_n \subseteq X$ tako da je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je *gust* (*u prostoru* X) ako je $\mathrm{cl}(A) = X$, a da je *kogust* ako je A^c gust skup. Prostor je *separabilan* ukoliko postoji bar jedan njegov prebrojiv podskup koji je gust. Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je
- *nigde gust* ako $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) = \varnothing$,
- I *kategorije* ako je $A = \bigcup\{B_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ za neke nigde guste $B_n \subseteq X$,
- II *kategorije* ako nije I kategorije,
- *rezidualan* ako je A^c I kategorije.

Za (X, τ) kažemo da je `Baire`-*ov prostor* ukoliko je svaki rezidualan skup tog prostora gust.

§

Neka je M neprazan skup i neka je svako $i \in M$ familija τ_i topologija na skupu X_i. Za $j \in M$ sa $\pi_j : \prod_{i\in M} X_i \to X_j$ označimo projekciju na

X_j definisanu sa $\pi_j(x) = x(j)$. Pod (`Tychonoff`-*skim*) *proizvodom* familije topologija $(\tau_i : i \in M)$, u oznaci $\prod'_{i\in M} \tau_i$, podrazumevamo topologiju generisanu familijom $\{\pi_i^{\leftarrow} U : i \in M,\ U \in \tau_i\}$. Naglasimo da iako je u literaturi uobičajena praksa da se `Tychonoff`-ski proizvod familije topologija $(\tau_i : i \in M)$ označava jednostavno sa $\prod_{i\in M} \tau_i$, mi ćemo kao što je to već rečeno koristiti zapis $\prod'_{i\in M} \tau_i$ no kako bi smo razlikovali `Decartes`-ov proizvod dotične familije od njenog `Tychonoff`-skog proizvoda (koji je po svojoj prirodi jedna topologija). $\prod'_{i\in M} \tau_i$ je topologija na skupu $\prod\limits_{i\in M} X_i$. Za topološki prostor $\left(\prod_{i\in M} X_i, \prod'_{i\in M} \tau_i\right)$ kažemo da je (`Tychonoff`-*ski*) *proizvod familije prostora* $\big((X_i, \tau_i) : i \in M\big)$.

Lako je videti da je familija $\prod'_{i\in M} \tau_i$ ona jedinstvena topologija na skupu $\prod\limits_{i\in M} X_i$ za koju je familija

$$\{\pi_i^{\leftarrow} U \ : \ i \in M,\ U \in \tau_i\}$$

jedna predbaza. Stoga je familija

$$\left\{ \bigcap_{i\in T} \pi_i^{\leftarrow} U_i \ : \ T \subseteq M \text{ je neprazan konačan, } U_i \in \tau_i \text{ za } i \in T \right\}$$

jedna baza ove topologije.

Ukoliko je $M = \{1, \ldots, n\}$ konačan skup umesto $\prod'_{i\in\{1,\ldots,n\}} \tau_i$ pišemo i $\prod'_{i=\overline{1,n}} \tau_i$ i $\tau_1 \times' \cdots \times' \tau_n$. Ako je $(X_i, \tau_i) = (Y, \lambda)$ za svako $i \in M$ (tada je $\prod\limits_{i\in M} X_i = {}^M Y$) za $\prod'_{i\in M} \tau_i = \prod'_{i\in M} \lambda$ kažemo da je *M-stepen topologije* λ, a za $\left({}^M Y, \prod'_{i\in M} \lambda\right)$ da je *M-stepen prostora* (Y, λ).

§

Ako je $\prec$ strogo linearno uređenje na skupu X, onda definišemo

$$\operatorname{lot}(\prec) := \operatorname{Top}(\mathcal{B} \cup \{X\})$$

gde je

$$\mathcal{B} := \{(\leftarrow, x) \,:\, x \in X\} \cup \{(x, \rightarrow) \,:\, x \in X\}\,.$$

Familija $\mathrm{lot}(\prec)$ je dakle topologija na skupu X. Takođe je jasno da je $\mathrm{lot}(\prec) = \mathrm{Top}(\mathcal{B})$ ukoliko X ima bar dva elementa.

§

Topologiju $\mu_{\mathbb{R}} := \mathrm{lot}(<)$, gde je $<$ standardno uređenje na skupu $\mathbb{R}$ nazivamo *uobičajena topologija realne prave*.

Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ onda ćemo sa μ_A označavati topologiju na skupu A nasleđenu od uobičajene topologije realne prave.

§

Ako su dati topološki prostori (X, τ_X) i (Y, τ_Y), preslikavanje $f : X \to Y$, $E \subseteq X$ i $q \in X$, onda za $r \in Y$ kažemo da je (τ_X, τ_Y)-*granična vrednost* funkcije f *u tački* q *po skupu* E, i to zapisujemo sa $(\tau_X, \tau_Y) - \lim\limits_{\substack{x \to q\\ x \in E}} f(x) = r$, ili samo $\lim\limits_{\substack{x \to q\\ x \in E}} f(x) = r$, ako za svaki τ_Y-otvoren podskup $V \ni r$ od Y postoji τ_X-otvoren podskup $U \ni q$ od X tako da je $f^{\rightharpoonup}[(U \cap E) \setminus \{q\}] \subseteq V$. Naglasimo da mi **ne** pretpostavljamo da je $q \in \mathrm{acc}_{\tau_X}(E)$ kako je to često običaj u literaturi. Lako je videti da u slučaju da je $q \notin \mathrm{acc}_{\tau_X}(E)$ važi $\lim\limits_{\substack{x \to q\\ x \in E}} f(x) = r$ za bilo koje $r \in Y$ (što zapravo sledi iz $f^{\rightharpoonup}\varnothing = \varnothing$).

§

Za niz tačaka $(x_n \,:\, n \in \mathbb{N})$ prostora (X, τ) kažemo da *konvergira ka tački* $y \in X$ *u odnosu na topologiju* τ, ako

za svako $U \in \tau$ tako da je $y \in U$ postoji $n \in \mathbb{N}$ sa osobinom da važi

$$x_m \in U \quad \text{kad god je } m \in \mathbb{N} \text{ takvo da } n \leq m\,.$$

Govorimo i da je tačka y *granična vrednost* (u odnosu na topologiju τ) *niza* $(x_n \,:\, n \in \mathbb{N})$. Ukoliko postoji bar jedna granična vrednost (u odnosu na topologiju τ) niza $(x_n : n \in \mathbb{N})$ za dotični niz se kaže da je *konvergentan* (preciznije τ-*konvergentan*).

§

Neka su dati preslikavanje $f : X \to Y$ i topologije τ_1 na X i τ_2 na Y i $x \in X$. Za f kažemo da je (τ_1, τ_2)-*neprekidno* preslikavanje *u tački* x ako za svako $V \in \tau_2$ takvo da je $f(x) \in V$ postoji $U \in \tau_1$ tako da je $x \in U$ i $f^{\rightharpoonup}U \subseteq V$. f je (τ_1, τ_2)-*neprekidno* ako je (τ_1, τ_2)-neprekidno u svakoj tački $x \in X$ (što je ekvivalentno sa tim da je $f^{\leftharpoonup}W \in \tau_1$ kad god je $W \in \tau_2$, ili sa tim da je $f(a) \in \mathrm{cl}_{\tau_2}\big(f^{\rightharpoonup}A\big)$ kad god su $a \in X$ i $A \subseteq X$ takvi da je $a \in \mathrm{cl}_{\tau_1}(A)$).

Ako je $Y \subseteq \mathbb{R}$ onda "*f je τ_1-neprekidno*" znači "f je (τ_1, μ_Y)-*neprekidno*". Za f kažemo da je (τ_1, τ_2)-*otvoreno* [(τ_1, τ_2)-*zatvoreno*] preslikavanje ako je skup $f^{\rightharpoonup}A$ τ_2-otvoren [τ_2-zatvoren] kad god je $A \subseteq X$ τ_1-otvoren [τ_1-zatvoren] skup.

Za topološke prostore (X, τ_X) i (Y, τ_Y) sa

$$f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y)$$

ćemo skraćeno označavati činjenicu da je $f : X \to Y$ (τ_X, τ_Y)-neprekidno preslikavanje. Pri tom umesto (X, τ_X), odnosno (Y, τ_Y), ovde može da stoji, tim redom, samo X odnosno Y, kad god je jasno o kojim topologijama τ_X odnosno τ_Y je reč. Specijalno, ako je $X \subseteq \mathbb{R}$ odnosno $Y \subseteq \mathbb{R}$ i ako je oznaka za topologiju izostavljena, onda se podrazumeva da je reč o topologiji μ_X odnosno μ_Y.

Jednostavno je videti da

$$f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y) \wedge g : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z) \implies g \circ f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z).$$

Bijektivno preslikavanje $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y)$ takvo da je $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau_X)$ nazivamo (τ_X, τ_Y)-*homeomorfizam*. Za prostore (X, τ_X) i (Y, τ_Y) kažemo da su *homeomorfni* ako postoji neki (τ_X, τ_Y)-homeomorfizam.

Za topološki prostor (X, τ) kažemo da je *homogen* ako za svako $x, y \in X$ postoji neki (τ, τ)-homeomorfizam $h : X \to X$ tako da je $h(x) = y$.

Za $A \subseteq X$ kažemo da je *nul skup* (ili *funkcionalno zatvoren skup*) topološkog prostora (X, τ) ako postoji neko $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ tako da je $A = f^{\leftharpoonup}\{0\}$. Za $A \subseteq X$ kažemo da je *konul skup* (ili *funkcionalno otvoren skup*) topološkog prostora (X, τ) ako postoji neko $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ tako da je $A = f^{\leftharpoonup}(0; 1]$.

Ako je $A \subseteq X$ i τ topologija na X, onda se za preslikavanje $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (A, \mathrm{rel}_A(\tau))$ kaže da je *retrakcija na skup* A ako je $f(x) = x$ za svako $x \in A$; u tom slučaju se za (pod)prostor $(A, \mathrm{rel}_A(\tau))$ kaže da je *retrakt* prostora (X, τ).

Neka su dati preslikavanje $f : X \to Y$ i topologije τ_1 na X i τ_2 na Y. Za preslikavanje f kažemo da je (τ_1, τ_2)-*nizovno neprekidno* ako kad god niz $(x_n : n \in \mathbb{N})$ tačaka prostora (X, τ_1) konvergira ka nekoj tački $z \in X$ u odnosu na topologiju τ_1, onda niz $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ tačaka prostora (Y, τ_2) konvergira ka tački $f(z) \in Y$ u odnosu na topologiju τ_2.

§

Za topološki prostor (X, τ) kažemo da je:

– T_0 *prostor* ako kad god su tačke $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ tako da je $U \cap \{x, y\}$ jednočlan skup;

– T_1 *prostor* ako kad god su tačke $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ tako da je $x \in U \not\ni y$ i $y \in V \not\ni x$;

– T_2 ili `Hausdorff`-*ov prostor* ako kad god su tačke $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ tako da je $x \in U$ $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$;

– *regularan prostor* ako kad god su tačka $x \in X$ i zatvoren skup $F \subseteq X$ takvi da je $x \notin F$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ tako da je $x \in U$, $F \subseteq V$ i $U \cap V = \varnothing$;

– *potpuno regularan prostor* ako kad god su tačka $x \in X$ i zatvoren skup $F \subseteq X$ takvi da je $x \notin F$, postoji neko preslikavanje $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ takvo da je $f(x) = 0$ i $f(z) = 1$ za svako $z \in F$;

– *normalan prostor* ako kad god su zatvoreni skupovi $G, F \subseteq X$ takvi da je $G \cap F = \varnothing$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ tako da je $G \subseteq U$, $F \subseteq V$ i $U \cap V = \varnothing$;

– *savršeno normalan prostor* ako je on normalan prostor takav da je svaki zatvoren skup $\mathtt{G}_\delta$ skup.

Za regularan T_1 prostor kažemo da je T_3 *prostor*. Potpuno regularan T_1 prostor nazivamo $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ *prostor*, `Tychonoff`-*ski prostor* ili *prostor* `Tychonoff`-a.

§

Neka su X i Y neprazni, $f : X \to Y$ i τ topologija na skupu X. Familija $\mathrm{Intop}(\tau, f, Y) := \{B \subseteq Y \,:\, f^{\leftharpoonup}B \in \tau\}$ je (očigledno) topologija na skupu Y i za nju kažemo da je *topologija na* Y *indukovana topologijom* τ *preslikavanjem* f ili *topologija koju topologija* τ *indukuje na skupu* Y *preslikavanjem* f.

Prema samoj definiciji pojma *neprekidnosti funkcije* za proizvoljnu topologiju η na skupu Y važi:

$$f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \eta) \iff \eta \subseteq \mathrm{Intop}(\tau, f, Y)\,.$$

Odavde specijalno imamo $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(Y, \mathrm{Intop}(\tau, f, Y)\big)$, a $\mathrm{Intop}(\tau, f, Y)$ je najfinija topologija na skupu Y u odnosu na koju je preslikavanje f neprekidno.

§

Ako su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori, onda za preslikavanje $q : X \to Y$ kažemo da je (τ_X, τ_Y)-*predkoličničko* (ili (τ_X, τ_Y)-*predfaktorno*) ako se topologija τ_Y poklapa sa topologijom na skupu Y koja je indukovana topologijom τ_X putem q, drugim rečima ako za svako $B \subseteq Y$ važi

$$B \in \tau_Y \iff q^{\leftharpoonup} B \in \tau_X$$

Ovu činjenicu ćemo kratko zapisivati sa $q : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}^-} (Y, \tau_Y)$.

Ako su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori, onda za preslikavanje $q : X \to Y$ kažemo da je (τ_X, τ_Y)-*količničko* (ili (τ_X, τ_Y)-*faktorno*) ako je q preslikavanje **na** skup Y i ako je q (τ_X, τ_Y)-predkoličničko; ovu činjenicu ćemo kratko zapisivati sa $q : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}} (Y, \tau_Y)$.

Jasno, svaki (τ_X, τ_Y)-homeomorfizam mora biti (τ_X, τ_Y)-količničko preslikavanje, i svako (τ_X, τ_Y)-predkoličničko preslikavanje mora biti (τ_X, τ_Y)-neprekidno. Svako injektivno (τ_X, τ_Y)-količničko preslikavanje je (τ_X, τ_Y)-homeomorfizam. (τ_X, τ_Y)-neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ **na** skup Y koje je bilo (τ_X, τ_Y)-otvoreno bilo (τ_X, τ_Y)-zatvoreno mora biti (τ_X, τ_Y)-količničko.

Jednostavno je videti da

$$\text{ako je } f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}^-} (Y, \tau_Y) \text{ i } g : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{q}^-} (Z, \tau_Z)\,,$$

$$\text{onda je i } g \circ f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}^-} (Z, \tau_Z).$$

§

Neka je E relacija ekvivalencije, a τ topologija na nepraznom skupu X, i neka je $\pi : X \to X_{/E}$ prirodna projekcija indukovana sa E. Topologiju na skupu $X_{/E}$ koju indukuje τ preslikavanjem π nazivamo *faktor* (ili *količnik*) *topologija topologije* τ *po* (*relaciji ekvivalencije*) E i označavamo je sa

$$\mathrm{Factor}(\tau, E) := \left\{ N \in X_{/E} \; : \; \bigcup N \in \tau \right\}$$

Jasno, preslikavanje π je $(\tau, \mathrm{Factor}(\tau, E))$-količničko. Ako je

$$T : \mathbb{P}\left(X_{/E}\right) \to \{A \subseteq X \; : \; A \text{ je pravilan za } E\}$$

kanonska korespondencija koja odgovara relaciji ekvivalencije E, onda je

$$T \restriction \mathrm{Factor}(\tau, E) : \mathrm{Factor}(\tau, E) \to \{A \subseteq X \ : \ A \text{ je pravilan za } E \text{ i } \tau \text{ otvoren}\}$$

bijekcija.

§

Neka je data familija $\big((X_i, \tau_i) \ : \ i \in I\big)$ **po parovima disjunktnih** topoloških prostora, tj. takva da za svako $i, j \in I$ važi

$$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing \, .$$

Stavimo $S := \bigcup\limits_{i \in I} X_i$. Familija

$$\lambda := \{A \subseteq Y \ : \ U \cap X_i \in \tau_i \text{ za svako } i \in I\}$$

je topologija na skupu S. Za topološki prostor (S, λ) kažemo da je *disjunktna suma* familije $\big((X_i, \tau_i) \ : \ i \in I\big)$ i označavamo ga sa

$$\bigsqcup_{i \in I} (X_i, \tau_i) \, .$$

Ako je $I = \{1, \ldots, n\}$ za neko $n \in \mathbb{N}$ umesto $\bigsqcup\limits_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ pišemo i

$$(X_1, \tau_1) \sqcup \cdots \sqcup (X_n, \tau_n) \, .$$

Neka je data **proizvoljna** familija $\big((X_i, \tau_i) \ : \ i \in I\big)$ topoloških prostora. Za svako $i \in I$ familija

$$\lambda_i \overset{\mathrm{df}}{:=} \{U \times \{i\} \ : \ U \in \tau_i\}$$

je topologija na skupu $X_i \times \{i\}$, i to takva da je preslikavanje

$$s_i : X_i \to X_i \times \{i\}$$

definisano sa

$$s_i(x) :\overset{\text{df}}{=} (x, i), \qquad \text{za svako } x \in X_i,$$

(τ_i, λ_i)-homeomorfizam.

Za disjunktnu sumu $\bigsqcup_{i\in I}\Big(X_i \times \{i\}, \lambda_i\Big)$ familije $\Big(\Big(X_i \times \{i\}, \lambda_i\Big) : i \in I\Big)$ kažemo da je *topološka suma* familije $\big((X_i, \tau_i) : i \in I\big)$ i ovaj prostor označavamo sa

$$\bigoplus_{i\in I}(X_i, \tau_i)\,.$$

Ako je $I = \{1, \ldots, n\}$ za neko $n \in \mathbb{N}$ umesto $\bigoplus_{i\in I}(X_i, \tau_i)$ pišemo i

$$(X_1, \tau_1) \oplus \cdots \oplus (X_n, \tau_n)\,.$$

§

Neka je (X, τ) topološki prostor. Za familiju $\mathcal{A}$ kažemo da je τ-*otvoren* [τ-*zatvoren*] ili jednostavno *otvoren* [*zatvoren*] *pokrivač skupa* $A \subseteq X$ ako važi
– elementi familije $\mathcal{A}$ su otvoreni [zatvoreni] skupovi i
– $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A}$ je pokrivač skupa A.

Za otvoren [zatvoren] pokrivač skupa X kažemo da je *otvoren* [*zatvoren*] *pokrivač prostora* (X, τ).

Za (X, τ) kažemo da je `Lindelöf`-*ov prostor* ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ skupa X postoji prebrojiv $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $\bigcup \mathcal{B} = X$. Za (X, τ) kažemo da je *kompaktan prostor*, a za τ da je *kompaktna topologija*, ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ skupa X postoji konačan $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $\bigcup \mathcal{B} = X$, odnosno, kako se to obično kaže, ako svaki otvoren pokrivač sadrži konačan podpokrivač. Za skup $A \subseteq X$ tačaka prostora (X, τ) kažemo da je *kompaktan skup* datog prostora ako je podprostor $\big(A, \mathrm{rel}_A(\tau)\big)$ kompaktan; lako je videti da je ovo ekvivalentno činjenici da svaki otvoren pokrivač skupa A sadrži konačan podpokrivač skupa A.

Za prostor (X, τ) kažemo da je *nizovno kompaktan* (ili *sekvencijalno kompaktan*) ako svaki niz tačaka tog prostora ima konvergentan podniz.

Neka je (X, τ) proizvoljan, (Y, λ) kompaktan prostor, $f : X \to Y$ preslikavanje takvo da je $X_0 := f^{\rightharpoonup}X$ λ-gust podskup od Y, i neka je $\tau_0 := \mathrm{rel}_{X_0}(\lambda)$. Ako je $f : X \to X_0$ (τ, τ_0)-homeomorfizam za uređeni par $\Big((Y, \lambda), f\Big)$ kažemo da je *kompaktifikacija* prostora (X, τ), a za podprostor $\Big(Y \setminus X_0, \mathrm{rel}_{Y \setminus X_0}(\lambda)\Big)$ prostora (Y, λ) da je *narast prostora* (X, τ) u dotičnoj kompaktifikaciji.

Za (X, τ) kažemo da je *σ-kompaktan prostor* ako postoji niz $K_n : n \in \mathbb{N})$ kompaktnih podskupova tog prostora tako da je $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Za prostor (X, τ) kažemo da je *lokalno kompaktan* ako za svaku tačku $x \in X$ postoji neki otvoren skup $U \ni x$ takav da je skup $\mathrm{cl}(U)$ kompaktan.

§

Za prostor (X, τ) kažemo da je *povezan* ako ne postoje neprazni, otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $U \cap V = \varnothing$ i $U \cup V = X$. Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je *povezan skup prostora* (X, τ) ako je podprostor $\big(A, \mathrm{rel}_A(\tau)\big)$ povezan; lako je videti da je ovo ekvivalentno sa činjenicom da kad god su $U, V \subseteq X$ otvoreni skupovi takvi da je $A \cap U \cap V = \varnothing$ i $A \subseteq U \cup V$, onda

$$A \cap U \neq \varnothing \;\Rightarrow\; A \subseteq U$$

Za $x \in X$ skup

$$\bigcup \{A \subseteq X \,:\, x \in A \text{ i } A \text{ je povezan}\}$$

nazivamo *komponenta povezanosti tačke x u prostoru* X, a skup

$$\bigcap \{A \subseteq X \,:\, x \in A \text{ i } A \text{ je otvoreno-zatvoren}\}$$

kvazikomponenta povezanosti tačke x u prostoru X. Za skup kažemo da je *komponenta* [*kvazikomponenta*] *povezanosti prostora* X ako je on komponenta [kvazikomponenta] povezanosti neke tačke u prostoru X.

Za prostor (X, τ) kažemo da je *nuldimenzionalan* ako postoji baza čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi tog prostora.

Za prostor (X, τ) kažemo da je *lokalno povezan* ako za svaku tačku $x \in X$ i otvoren skup $U \ni x$ postoji neki povezan otvoren skup V takav da je $x \in V \subseteq U$.

Preslikavanje $f : [a; b] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$, gde su $a < b$ realni brojevi, nazivamo *put u prostoru* (X, τ). Za prostor (X, τ) kažemo da je *put povezan* ako za svako $u, v \in X$ postoji neki put $f : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ takav da je $f(0) = u$ i $f(1) = v$. Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je *put povezan skup prostora* (X, τ) ako je podprostor $\big(A, \mathrm{rel}_A(\tau)\big)$ put povezan.

§

Neka je $X \neq \varnothing$ i $d : X \times X \to [0; +\infty)$. Za $x \in X$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$ definišimo

$$\mathrm{K}_d[x; \varepsilon) := \{y \in X \,:\, d(x, y) < \varepsilon\} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{K}_d[x; \varepsilon] := \{y \in X \,:\, d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

(I) Definišemo $\mathrm{Top_m}(d) := \{A \subseteq X \,:\, \forall x \in A\, \exists \varepsilon \in (0; +\infty)\ (\mathrm{K}_d[x; \varepsilon) \subseteq A)\}$. Važi:

(i) $\tau := \mathrm{Top_m}(d)$ je topologija na skupu X;
(ii) ako su $b_n \in B$ za $n \in \mathbb{N}$ i $a \in X$ tako da važi $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a, b_n) = 0$, onda je $a \in \mathrm{cl}_\tau(B)$.

(II) Za $A, B \in \mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ definišemo

$$\mathrm{H}_d(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(b, a)\right\}$$

Može biti da je $\mathrm{H}_d(A, B) = +\infty$ za neke neprazne $A, B \subseteq X$. Dakle

$$\mathrm{H}_d(A, B) : \big(\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big) \times \big(\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big) \to [0; +\infty]$$

Funkciju H_d nazivamo d-`Hausdorff`-*ovo rastojanje*.

Za neprazne $A, B \subseteq X$ i $\varepsilon \in (0;+\infty)$ definišemo

$$[A, B, \varepsilon]_d \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \Big(\forall a \in A \exists b \in B\ d(a, b) < \varepsilon\ \wedge\ \forall b \in B \exists a \in A\ d(b, a) < \varepsilon\Big)$$

(a) Lako je videti da za proizvoljne $A, B \in \mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ i $\varepsilon \in (0;+\infty)$ važi

$$\mathrm{H}_d(A, B) < \varepsilon \Longleftrightarrow \exists \varepsilon_0 \in (0;\varepsilon)\ [A, B, \varepsilon_0]_d$$

(b) Za proizvoljne $A, B \in \mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ važi

$$\mathrm{H}_d(A, B) < +\infty \iff \exists \varepsilon \in (0;+\infty)\ [A, B, \varepsilon]_d$$

i u tom slučaju je $\mathrm{H}_d(A, B) = \inf\{\varepsilon \in (0;+\infty) : [A, B, \varepsilon]_d\}$.

(III) Formulišemo osobine

(TR) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in X$.
(M_0) $d(x, x) = 0$ za svako $x \in X$.
(SIM) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$.
(M_1) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$ za svako $x, y \in X$.

Za d kažemo da je *pseudometrika na skupu* X ako zadovoljava uslove (TR), (M_0) i (SIM); u tom slučaju za par (X, d) kažemo da je *pseudometrički prostor*. Za d kažemo da je *metrika na skupu* X ako zadovoljava uslove (TR), (M_0), (SIM) i (M_1); u tom slučaju za par (X, d) kažemo da je *metrički prostor*.

Ako d zadovoljava uslov (M_0) onda je $x \in \mathrm{K}_d[x;\varepsilon)$ i $x \in \mathrm{K}_d[x;\varepsilon]$, za svako $x \in X$ i $\varepsilon \in (0;+\infty)$.

Ako d zadovoljava uslove (TR) i (SIM) onda važi $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ za svako $x, y, z \in X$.

(IV) Neke veze između ovih osobina i topologije τ date su kako sledi.

(iii) Ako d zadovoljava (TR) i (M_0) onda

– za svako $x \in X$ familija $\{\mathrm{K}_d[x;\varepsilon) : \varepsilon \in (0;+\infty)\}$ je τ-lokalna baza u strogom smislu u tački x;

– za svako $a \in X$ i $B \subseteq X$ važi $a \in \mathrm{cl}_\tau(B)$ ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji neko $b_n \in B$ tako da je $\lim_{n\to+\infty} d(a,b_n) = 0$.

(iv) Ako je τ je T_0 topologija onda d mora da zadovoljava uslov (M_1).
(v) Ako je d pseudometrika na skupu X onda su sledeći uslovi ekvivalentni:
τ je T_0 topologija;
τ je T_1 topologija;
τ je T_2 topologija;
d zadovoljava uslov (M_1);
d je metrika na skupu X.

(V) U nastavku dajemo neke veze između ovih osobina i funkcije H_d.

(c) Ako je $\mathrm{H}_d(A,C) < +\infty$ i $\mathrm{H}_d(C,B) < +\infty$, onda je i $\mathrm{H}_d(A,B) < +\infty$; u tom slučaju, ako d zadovoljava uslov (TR), onda važi

$$\mathrm{H}_d(A,B) \leq \mathrm{H}_d(A,C) + \mathrm{H}_d(C,B)$$

(d) $\mathrm{H}_d(A,B) = \mathrm{H}_d(B,A)$.
(e) Ako su A i B neprazni τ-zatvoreni skupovi, onda $\mathrm{H}_d(A,B) = 0 \ \Rightarrow\ A = B$.
(f) Ako d zadovoljava uslov (M_0) onda je $\mathrm{H}_d(A,A) = 0$.
(g) Ako d zadovoljava uslove (TR), (M_0) i (SIM), tj. ako je d pseudometrika na skupu X, i ako su A i B neprazni τ-kompaktni podskupovi od X, onda je $\mathrm{H}_d(A,B) < +\infty$.

Neka su $\mathcal{F}_0$ i $\mathcal{K}_0$ familija svih nepraznih τ-zatvorenih i familija svih nepraznih τ-kompaktnih podskupova od X, tim redom, i neka je $\mathcal{C}_0 := \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{K}_0$.

(VI) Pretpostavimo da postoji neko $M \in (0;+\infty)$ tako da je $d(x,y) \leq M$ za svako $x,y \in X$, tj. neka je d ograničena funkcija. Tada je jasno i H_d ograničena funkcija.
Ako d zadovoljava uslov (TR) onda i H_d zadovoljava uslov (TR).
Ako d zadovoljava uslov (M_0) onda i H_d zadovoljava uslov M_0.

Dakle ako je d ograničena funkcija i zadovoljava uslove (M_0) i (TR), onda je H_d pseudometrika na skupu $\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ a, zbog (e), restrikcija $\mathrm{H}_{\mathcal{F}_0,d} := (\mathrm{H}_d) \restriction (\mathcal{F}_0)^2$ je metrika na skupu $\mathcal{F}_0$.

(VII) Ako funkcija d zadovoljava uslove (M_0) i (TR), onda iako nije nužno ograničena ona indukuje na skupu $\mathcal{F}_0$ bar dve metrike na sasvim prirodan način kako sledi.

Definišimo $d' : X^2 \to [0;1]$ sa $d'(x,y) := \min\{d(x,y),1\}$ za svako $x, y \in X$. d' je ograničena funkcija. Ako d zadovoljava uslov (TR), onda i d' zadovoljava uslov (TR). Ako d zadovoljava uslov (M_0), onda i d' zadovoljava uslov M_0.

Ako d zadovoljava uslove (M_0) i (TR), onda je dakle $\mathrm{H}_{\mathcal{F}_0,d'}$ metrika na skupu $\mathcal{F}_0$.

Definišimo i

$$\mathrm{G}_d : \big(\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big) \times \big(\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big) \to [0;1]$$

sa $\mathrm{G}_d(A,B) := \min\{\mathrm{H}_d(A,B),1\}$. Koristeći (c), (e) i (f) jednostavno je pokazati da ako d zadovoljava uslove (M_0) i (TR), onda je G_d pseudometrika na skupu $\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, a $\mathrm{G}_{\mathcal{F}_0,d} := (\mathrm{G}_d) \restriction (\mathcal{F}_0)^2$ metrika na skupu $\mathcal{F}_0$.

(VIII) Ako je d pseudometrika na skupu X (ne nužno ograničena), onda je (zbog (e) i (g)) restrikcija $\mathrm{H}_{\mathcal{C}_0,d} := (\mathrm{H}_d) \restriction (\mathcal{C}_0)^2$ metrika na skupu $\mathcal{C}_0$ (nezavisno od toga da li je d ograničena ili ne).

(IX) Za neprazne $A, B \subseteq X$ definišemo $\mathrm{Dist}_d(A,B) := \inf\{d(a,b) : (a,b) \in A \times B\}$ i $\mathrm{diam}_d(A) := \sup\{d(u,v) : u, v \in A\} \in [0;+\infty]$; po definiciji uzimamo da je $\mathrm{diam}_d(\varnothing) = 0$. Ukoliko je jasno o kojoj je funkciji d u konkretnom razmatranju reč, u ovim zapisima oznaku d u donjem indeksu možemo i izostaviti. Takođe, za $A \subseteq X$ možemo pisati jednostavno $\mathrm{cl}(A)$ [$\mathrm{int}(A)$ i sl.] umesto $\mathrm{cl}_{\mathrm{Top}_\mathrm{m}(d)}(A)$ [$\mathrm{int}_{\mathrm{Top}_\mathrm{m}(d)}(A)$ i sl.] ukoliko je $\mathrm{Top}_\mathrm{m}(d)$ jedina topologija koja se u datom razmatranju javlja.

§

Neka je (Y,d) metrički prostor i $\lambda := \mathrm{Top}_\mathrm{m}(d)$.

Lako je videti da niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ tačaka prostora Y konvergira ka tački $z \in Y$ ako i samo ako važi

$$\lim_{n \to +\infty} d(y_n, z) = 0$$

Za niz $(y_n : n \in \mathbb{N})$ tačaka metričkog prostora (Y, d) kažemo da je `Cauchy`-*jev* (preciznije d-`Cauchy`-*jev*) ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \, \Big(m, k \geq n_0 \;\Rightarrow\; d(y_m, y_k) < \varepsilon \Big)$$

Za metrički prostor (Y, d) kažemo da je *kompletan* , a za samu metriku d da je *kompletna*, ako je svaki `Cauchy`-jev niz konvergentan.

§

Ako su (Y_1, d_1) i (Y_2, d_2) metrički prostori i $f : Y_1 \to Y_2$, onda kažemo da je preslikavanje f (d_1, d_2)-*ravnomerno neprekidno* ako za svako $\varepsilon \in (0; +\infty)$ postoji $\delta \in (0; +\infty)$ tako da važi $d_2\big(f(u), f(v)\big) < \varepsilon$ kad god su $u, v \in Y_1$ takvi da je $d_1(u, v) < \delta$.

§

Za prostor (X, τ) kažemo da je *metrizabilan* ako postoji neka metrika d na skupu X takva da je $\tau = \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d)$. Za proizvoljnu takvu metriku se kaže da je *kompatibilna sa topologijom* τ.

Za prostor (X, τ) kažemo da je *kompletno metrizabilan* ako postoji neka kompletna metrika d na skupu X takva da je $\tau = \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d)$.

§

Za $n \in \mathbb{R}$ pod *euklidskom normom na* $\mathbb{R}^n$ podrazumevamo preslikavanje $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisano sa $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$ za $x = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n$.

Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pod *euklidskom metrikom na* A podrazumevamo preslikavanje $d_n : A \times A \to \mathbb{R}$ definisano sa $d(x, y) := \|x - y\|$ za $x, y \in A$, gde je $\| \cdot \|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$; topologiju $\mu_{\mathbb{R}^n} := \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d_n)$ nazivamo *uobičajena topologija na skupu* $\mathbb{R}^n$.

§

Za $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sa μ_A označavamo topologiju na skupu A nasleđenu od uobičajene topologije na skupu $\mathbb{R}^n$, tj. topologiju $\mathrm{rel}_A(\mu_{\mathbb{R}^n})$.

Ukoliko drugačije nije naglašeno podrazumevamo da su skupovi ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, ${}^{S}\mathbb{R}$ za $S \neq \varnothing$ i $A \subseteq \mathbb{R}^n$ uvek sa topologijama $\prod'_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathbb{N})$, $\prod'_{x\in S} \mu_{\mathbb{R}}$ i μ_A, respektivno.

§

Neka je (Y, d) metrički prostor. Za niz funkcija $f_n \in {}^{A}Y$, $n \in \mathbb{N}$, kažemo da *uniformno* (*ravnomerno*) *konvergira* ka funkciji $g \in {}^{A}Y$ *u odnosu na* d ako za svako $\varepsilon \in (0; +\infty)$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za svako $x \in A$ i svaki prirodan broj $m \geq n$ važi $d\big(f_m(x), g(x)\big) < \varepsilon$. Ako je specijalno $Y = \mathbb{R}$ i $d(x, y) = |x - y|$, poznata je činjenica da ukoliko postoji niz $(r_n : n \in \mathbb{N}) \in {}^{\mathbb{N}}[0; +\infty)$ tako da je brojni red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ konvergentan i tako da važi

$$\forall x \in A \forall n \in \mathbb{N} \left(|f_n(x)| \leq r_n \right),$$

onda je za svako $x \in A$ red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konvergentan sa sumom

$$s(x) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \in \mathbb{R}$$

i niz funkcija $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i$ ravnomerno konvergira ka funkciji s.

§

Neka je (X, τ) proizvoljan topološki prostor. Za zatvoren skup $F \subseteq X$ i konačnu familiju $\mathcal{U} \subseteq \tau$ definišemo

$$\mathrm{Miss}_X(F) := \{A \in \mathbb{P}(X) \,:\, A \cap F = \varnothing\}$$

i

$$\mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) := \{A \in \mathbb{P}(X) \,:\, A \cap U \neq \varnothing \text{ za svako } U \in \mathcal{U}\}$$

Dakle $\mathrm{Hit}_X(\varnothing) = \mathbb{P}(X)$ i $\mathrm{Miss}_X(\varnothing) = \mathbb{P}(X)$. Stavimo

$$\mathcal{B} := \{\mathrm{Miss}_X(F) \,:\, X \setminus F \in \tau\} \cup \{\mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) \,:\, \mathcal{U} \subseteq \tau \text{ je konačna familija}\}$$

Ako je $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$, onda za $(\mathcal{A}, \lambda_{\mathcal{A}})$, gde je $\lambda_{\mathcal{A}} = \mathrm{rel}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Top}(\mathcal{B}))$, kažemo da je $\mathcal{A}$-*hiperprostor nad prostorom* (X, τ). Lako je videti da je familija $\{B \cap \mathcal{A} \,:\, B \in \mathcal{B}\}$ baza za $(\mathcal{A}, \lambda_{\mathcal{A}})$.

$(\mathbb{P}(X), \mathrm{Top}(\mathcal{B}))$ je $\mathbb{P}(X)$-hiperprostor nad prostorom (X, τ). $(\mathcal{A}, \lambda_{\mathcal{A}})$ je podprostor prostora $(\mathbb{P}(X), \mathrm{Top}(\mathcal{B}))$ za svako $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$.

Specijalno ako je $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \,:\, X \text{ je } \tau\text{−zatvoren}\}$, za $(\mathcal{A}, \lambda_{\mathcal{A}})$ kažemo da je *hiperprostor zatvorenih skupova prostora* (X, τ). Ako je $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \,:\, X \text{ je neprazan, } \tau - \text{kompaktan}\}$ za $(\mathcal{A}, \lambda_{\mathcal{A}})$ kažemo da je *hiperprostor nepraznih, kompaktnih skupova prostora* (X, τ). Ovakvu konvencju ćemo koristiti i kad se radi o familiji τ-povezanih skupova, familiji skupova koji su istovremeno τ-zatvoreni i τ-kompaktni i sl.

§

Topološka grupa je svaka uređena trojka $(G, \cdot, \tau)$, gde je (G, τ) topološki prostor, a $(G, \cdot)$ (algebarska) grupa, kod koje je funkcija $f : G^2 \to G$ definisana sa $f(x, y) = x \cdot y$ $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidna, a funkcija $g : G \to G$ definisana sa $g(x) = x^{-1}$ (ovo je inverz elementa x u grupi $(G, \cdot)$) (τ, τ)-neprekidna.

(*Normalna*) *podgrupa, jedinični element* i *centar topološke grupe* $\mathbb{G} = (G, \cdot, \tau)$ značiće respektivno (normalna) podgrupa, jedinični element i centar grupe $(G, \cdot)$. *Gust, zatvoren, otvoren, diskretan, povezan podskup* (i sl.) *topološke grupe* $(G, \cdot, \tau)$ značiće respektivno gust, zatvoren, otvoren, diskretan, povezan podskup topološkog prostora (G, τ).

§

Neka je $X \neq \varnothing$. Za $x \in X$ i $A \subseteq X \times X$ definišemo

$$\mathrm{B}[x; A) := \{y \in X \,:\, x\, A\, y\}\,.$$

Ako je A refleksivna relacija to je jasno $x \in \mathrm{B}[x; A)$. Za **nepraznu** familiju $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{P}(X \times X)$ formulišemo sledeće osobine:

(FB) ako je $\{A, B\} \subseteq \mathcal{R}$ onda postoji $C \in \mathcal{R}$ tako da je $C \subseteq A \cap B$.

(F1) $\{A, B\} \subseteq \mathcal{R} \ \Rightarrow \ A \cap B \in \mathcal{R}$;

(F2) $\mathcal{R} \ni A \subseteq B \subseteq X \times X \ \Rightarrow \ B \in \mathcal{R}$;

(U1) za svako $A \in \mathcal{R}$ postoji neko $B \in \mathcal{R}$ tako da je $B^{(2} \subseteq A$;

(U2) za svako $A \in \mathcal{R}$ postoji neko $B \in \mathcal{R}$ tako da je $B \subseteq A^{(-1}$,

i definišemo

$$\mathcal{R}_{\mathrm{u}} := \{M \subseteq X \times X \ : \ \exists N \in \mathcal{R} \ (N \subseteq M)\}$$

i

$$\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{R}) := \{U \subseteq X \ : \ \forall x \in U \exists A \in \mathcal{R} \ (\mathrm{B}[x; A) \subseteq U)\} \ .$$

Jasno je da $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$, $\bigcap \mathcal{R} = \bigcap \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$, $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{R}_{\mathrm{u}}) = \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{R})$, kao i da ako $\mathcal{R}$ zadovoljava uslov (FB), onda je $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{R})$ topologija na skupu X.

Za nepraznu familiju $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}(X \times X)$ refleksivnih relacija na skupu X koja zadovoljava uslove (F1), (F2), (U1) i (U2) (što je ekvivalentno sa tim da zadovoljava uslove (FB), (F2), (U1) i (U2)) kažemo da je *uniformnost na skupu* X, a za uređeni par $(X, \mathcal{U})$ u tom slučaju kažemo da je *uniforman prostor*. Ako je još $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$, onda za $\mathcal{U}$ kažemo da je `Hausdorff`-*ova uniformnost*. Za familiju $\mathcal{V}$ kažemo da je *baza uniformnosti* $\mathcal{U}$ ako važe sledeća dva uslova:
– $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ i
– za svako $A \in \mathcal{U}$ postoji neko $B \in \mathcal{V}$ tako da je $B \subseteq A$.

Za nepraznu familiju $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{P}(X \times X)$ refleksivnih relacija na skupu X koja ima osobine (FB), (U1) i (U2) kažemo da je u-*baza na skupu* X. Istaknimo (iako očiglednu) činjenicu da je svaka uniformnost na skupu X istovremeno i u-baza na skupu X. Za proizvoljnu familiju $\mathcal{R}$ i $X \neq \varnothing$ jednostavno je videti da važi:

$\mathcal{R}$ je u-baza na skupu X ako i samo ako je $\mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ uniformnost na skupu X.

Očigledno, $\mathcal{R}_{\mathrm{u}}$ je `Hausdorff`-ova uniformnost ako i samo ako je $\mathcal{R}$ u-baza takva da $\bigcap \mathcal{R} = \Delta_X$.

Za $X \neq \varnothing$ i proizvoljne familije $\mathcal{U}$ i $\mathcal{R}$ sledeća dva uslova su ekvivalentna:
– $\mathcal{U}$ je uniformnost na skupu X i $\mathcal{R}$ je baza uniformnosti $\mathcal{U}$;
– $\mathcal{R}$ je u-baza na skupu X i $\mathcal{U} = \mathcal{R}_{\mathrm{u}}$.

Ako je $\mathcal{R}$ je u-baza na skupu $X \neq \varnothing$, onda za familiju $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{R})$ kažemo da je *topologija na skupu* X *indukovana* u-*bazom* $\mathcal{R}$.

§§

Kako bismo izbegli nepotrebno ponavljanje sledi kratak popis nekoliko konkretnih topoloških prostora ili konkretnih konstrukcija topoloških prostora polazeći od nekih datih, na koje ćemo se na više mesta pozivati u zadacima.

P 1 $X := \mathbb{N},\ \tau := \{[k; +\infty) \cap \mathbb{N}\ :\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$.

P 2 *Kofinitna topologija na skupu* X. X je proizvoljan beskonačan skup i $\tau := \{A \subseteq X\ :\ X \setminus A$ je konačan$\} \cup \{\varnothing\}$.

P 3 X je proizvoljan beskonačan skup i $\tau := \{A \subseteq X\ :\ X \setminus A$ je prebrojiv$\} \cup \{\varnothing\}$.

P 4 (24) X je proizvoljan beskonačan skup, $x_0 \in X$ fiksirana tačka i $\tau := \{A \subseteq X\ :\ x_0 \notin A$ ili $X \setminus A$ je konačan$\}$.

P 5 X je proizvoljan neprebrojiv skup, $x_0 \in X$ fiksirana tačka i $\tau := \{A \subseteq X\ :\ x_0 \notin A$ ili $X \setminus A$ je prebrojiv$\}$.

P 6 $X := \mathbb{N}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde $\mathcal{B} := \{k\mathbb{N} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$.

P 7 $X := \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 2\}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde $\mathcal{B} := \{D_k \ : \ k \in X\}$ i $D_k := \{m \in X \ : \ k \in m\mathbb{N}\}$ je skup svih delioca broja k različitih od 1.

P 8 $X := \mathbb{Z}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde $\mathcal{B} := \{l + k\mathbb{Z} \ : \ k, l \in \mathbb{Z}; \ k \neq 0\}$.

P 9 $X := \mathbb{N}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde $\mathcal{B} := \{(l + k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} \ : \ k, l \in \mathbb{N}; \ \mathrm{NZD}(l, k) = 1\}$.

P 10 $X := \mathbb{N}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde

$$\mathcal{B} := \{(l + p\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} \ : \ l \in \mathbb{N}; \ p \text{ je prost broj koji ne deli } l\}$$

P 11 `Sorgenfrey`-*eva prava.* $X := \mathbb{R}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde $\mathcal{B} := \{[x; y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}; \ x < y\}$.

P 12 X je proizvoljan neprazan podskup od ${}^{A}B$, gde su A i B neprazni. Za $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ i $b_1, \ldots, b_k \in B$ definišemo $\mathrm{V}[a_1, \ldots, a_k | b_1, \ldots, b_k] := \{f \in X : \ f(a_i) = b_i, \ 1 \leq i \leq k\}$. $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$ gde je

$$\mathcal{B} := \{\mathrm{V}[a_1, \ldots, a_k | b_1, \ldots, b_k] \ : \ k \in \mathbb{N}, \ a_1, \ldots, a_k \in A, \ b_1, \ldots, b_k \in B\}$$

P 13 *Prostor* $\mathbb{C}_p(\mathbb{R})$. Za $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mu_{\mathbb{R}}$ stavimo

$$\mathrm{O}[x_1, \ldots, x_n | U_1, \ldots, U_n] := \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \ : \ f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R} \text{ i } f(x_i) \in U_i \text{ za } 1 \leq i \leq n\}$$

i

$$\mathcal{B} := \{\mathrm{O}[x_1, \ldots, x_n | U_1, \ldots, U_n] \ : \ n \in \mathbb{N}, \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \ U_1, \ldots, U_n \in \mu_{\mathbb{R}}\}$$

$$X := \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \ : \ f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}\} \text{ i } \tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B}).$$

P 14 *Prostor* $\mathbb{C}_u[0, 1]$. $X := \{f \in {}^{[0;1]}\mathbb{R} \ : \ f : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}\}$. Za $f, g \in X$ definišimo $d_{\sup}(f, g) := \sup\limits_{t \in [0;1]} |f(t) - g(t)|$. $d_{\sup}$ je metrika na X. $\tau := \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d_{\sup})$.

P 15 `Ellentuck` *topologija.* $X := \{S \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \ : \ S \text{ je beskonačan}\}$. Za $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definišimo $\mathrm{El}(A, B) := \{S \in X \ : \ A \subseteq S \subseteq A \cup B\}$ i $\tau := \mathrm{Top}(\mathcal{B})$, gde je $\mathcal{B} := \big\{\mathrm{El}(A, B) \ : \ A \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus X;\ B \in X;\ \max A < \min B\big\}$.

P 16 (48) *Leksikografsko uređenje na* $[0; 1] \times [0; 1]$. $X := [0; 1] \times [0; 1]$ i $\tau := \mathrm{lot}(\prec)$, gde je $\prec$ strogo uređenje na skupu X definisano sa

$$(x, y) \prec (u, v)$$

ako i samo ako

$$(x < u) \vee (x = u \wedge y < v)\,.$$

Deo 2

Zadaci

2.1 Primeri topoloških prostora

Zadatak 1. *Proveriti da li je familija*

$\tau := \{\varnothing, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}\}$

topologija na skupu $X := \{1,2,3,4,5\}$.

Zadatak 2. *Da li je familija* τ *topologija na skupu* $X := \mathbb{R}$ *ako je*
(1) $\tau := \{(-\infty, r) \ : \ r \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$;
(2) $\tau := \{(-\infty, r) \ : \ r \in \mathbb{Q}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$.

Zadatak 3. *Dati su skupovi* X *i* Y *tako da je* $X \supseteq Y$ *i topologija* τ_0 *na skupu* Y. *Dokazati da je* $\tau := \{X\} \cup \tau_0$ *topologija na skupu* X.

Zadatak 4. *Dat je niz* $(A_i \ : \ i \in \mathbb{N})$ *nepraznih skupova tako da važi* $A_i \subseteq A_j$ *kad god su* $i, j \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $i \leq j$. *Ako je* $X := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, *dokazati da je familija* $\tau := \{A_i \ : \ i \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing, X\}$ *topologija na skupu* X.

Zadatak 5. *Dokazati da je u* **P 1**-**P 5** *familija* τ *zaista topologija na skupu* X.

2.2 Predbaza. Baza

Zadatak 6. *Ako je* $\mathcal{B} \neq \varnothing$ *dokazati da je* $\mathrm{Top}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ *ako i samo ako je* $\mathcal{B}$ *topologija.*

Zadatak 7. *Ako je* $\varnothing \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ *dokazati da je*

$$\mathrm{Top}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Top}(\mathcal{V})$$

Zadatak 8. *Ako je* $\varnothing \neq \mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}_i \subseteq \mathrm{Top}(\mathcal{B}_i),\ i \in I,$ *dokazati da je*

$$\mathrm{Top}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i\right) = \mathrm{Top}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i\right).$$

Zadatak 9. *Dokazati da za proizvoljnu nepraznu familiju skupova* $\mathcal{B}$ *važi*

$$\mathrm{Top}(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{A} \ :\ \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pr}(\mathcal{B})\}$$

gde je $\mathrm{Pr}(\mathcal{B}) := \{\bigcap \mathcal{F} \ :\ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ *je neprazan konačan skup*$\}$. (*Drugim rečima* $\mathrm{Pr}(\mathcal{B})$ *je baza topologije* $\mathrm{Top}(\mathcal{B})$)

Zadatak 10. *Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Neka je* λ *topologija na skupu* X *i* $S \subseteq X$. *Dokazati jednakost*

$$\mathrm{Top}\,(\lambda \cup \{S\}) = \{A \cup B \ :\ A \in \lambda \text{ i } B \in \mathrm{rel}_S(\lambda)\}.$$

(2) *Neka je* $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *i* $X := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. *Definišimo* $\lambda_0 := \{X, \varnothing\}$ *i* $\lambda_{i+1} := \mathrm{Top}\,(\lambda_i \cup \{A_{i+1}\})$, *za* $i = \overline{0, n-1}$. *Dokazati da je* $\mathrm{Top}(\mathcal{B}) = \lambda_n$.

Zadatak 11. *Naći* $\mathrm{Top}(\mathcal{B})$ *ako je* $\mathcal{B} := \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}\}$.

Zadatak 12. *Dokazati da je* $\tau = \mathbb{P}(X)$ *ako je:*
(1) $X = \mathbb{R}$ *i* $\tau = \mathrm{Top}(\{[x;y] \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ x < y\})$*;*
(2) X *skup svih pravih neke ravni* R*, a* $\tau = \mathrm{Top}(\mathcal{B})$*, gde je*

$$\mathcal{B} = \{s(A,B) \ : \ A \neq B, \ A, B \in R\}$$

za $s(A,B) := \{p \in X \ : \ p$ *ima neprazan presek sa otvorenom duži sa krajevima* A *i* $B\}$*.*

Zadatak 13. *U* **P 6 - P 9**, **P 11**, **P 12** *i* **P 15** *dokazati da je data familija* $\mathcal{B}$ *baza topološkog prostora* (X, τ)*.*

Zadatak 14. *U* **P 10** *dokazati da familija* $\mathcal{B}$ *nije baza topološkog prostora* (X, τ)*, a da familija*

$$\mathcal{B}' := \{(l + k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} \ : \ l, k \in \mathbb{N}; \ \mathrm{NZD}(l,k) = 1;$$
$$\textit{ne postoji prost broj } p \textit{ tako da } p^2 | k\big\}$$

to jeste.

Zadatak 15. *Dokazati da ako je* τ *konačna topologija na nekom skupu* X*, onda je i* $\{A^c \ : \ A \in \tau\}$ *topologija na* X*.*

Zadatak 16. *Neka je* $\mathcal{B}_0$ *konačna baza neke topologije* τ *sa najmanjim mogućim brojem elemenata, a* $\mathcal{B}$ *proizvoljna baza topologije* τ*. Dokazati da je* $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$*.*

Zadatak 17. *Dokazati da* `Sorgenfrey`*-eva prava iz* **P 11** *nema prebrojivu mrežu.*

Zadatak 18. *Neka je* $X \neq \varnothing$ *proizvoljan skup i neka je za svako* $x \in X$ *zadata familija* $\mathcal{N}_x \subseteq \mathbb{P}(X)$ *tako da je* $\bigcap \mathcal{N}_x \supseteq \{x\}$*. Pretpostavimo da važe uslovi:*

(1) $\forall x \in X \forall U, V \in \mathcal{N}_x \exists W \in \mathcal{N}_x \ \big(W \subseteq U \cap V\big)$*;*

(2) $\forall x \in X \forall U \in \mathcal{N}_x \forall y \in U \exists V \in \mathcal{N}_y \ \big(V \subseteq U\big)$.

Dokazati da postoji jedinstvena topologija τ *na skupu* X *takva da joj je za svako* $x \in X$ *familija* $\mathcal{N}_x$ *lokalna baza u tački* x. *Takođe dokazati da je* $\tau = \big\{A \subseteq X : \ \forall x \in A \exists U \in \mathcal{N}_x (U \subseteq A)\big\}$.

Zadatak 19. *Ako je* X *nuldimenzionalan prostor koji zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, tada za svaka dva zatvorena, disjunktna skupa* $A, B \subseteq X$ *postoji neki otvoreno-zatvoren* $C \subseteq X$ *tako da je* $A \subseteq C$ *i* $C \cap B = \emptyset$. *Dokazati.*

Zadatak 20. *Dokazati da* $\mathbb{Q}$ *nije* $\mathtt{G}_\delta$ *skup prostora* $\mathbb{R}$.

Zadatak 21. *Neka su* τ_1 *i* τ_2 *dve topologije na istom skupu* X *i* $\tau := \mathrm{Top}(\tau_1 \cup \tau_2)$. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Familija* $\mathcal{B} := \{U \cap V \ : \ U \in \mathcal{B}_1, \ V \in \mathcal{B}_2\}$ *je baza topologije* τ *kad god je* $\mathcal{B}_1$ *baza topologije* τ_1 *i* $\mathcal{B}_2$ *baza topologije* τ_2*;*
(2) *Ako je* $x \in X$ *proizvoljna tačka, onda je* $\mathcal{B} := \{U \cap V \ : \ U \in \mathcal{B}_1, \ V \in \mathcal{B}_2\}$ *lokalna baza topologije* τ *u tački* x *kad god su* $\mathcal{B}_1$ *i* $\mathcal{B}_2$ *lokalne baze u tački* x *topologija* τ_1 *i* τ_2*, tim redom.*

Zadatak 22. *Neka je* X *skup svih beskonačnih podskupova od* $\mathbb{N}$. *Za konačan* $B \subseteq \mathbb{N}$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je* $\max B \leq n$ *definišemo* $\mathrm{T}_{B,n} := \{T \in X \ : \ T \cap [1;n] = B\}$. *Za beskonačan* $A \subseteq \mathbb{N}$ *definišemo* $\mathrm{S}_A := \{S \in X \ : \ S \cap [\min A; +\infty) \subseteq A\}$. *Neka je* $\mathcal{T} := \{\mathrm{T}_{B,n} \ : \ B \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus X, \ n \in \mathbb{N}, \ \max B \leq n\}$, $\mathcal{S} := \{\mathrm{S}_A \ : \ A \in X\}$ *i* $\tau_1 := \mathrm{Top}(\mathcal{T})$, $\tau_2 := \mathrm{Top}(\mathcal{S})$. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Familije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *su baze topologija* τ_1 *i* τ_2*, respektivno;*
(2) *Ako je* τ *topologija iz* **P 15**, *onda je* $\tau = \mathrm{Top}(\tau_1 \cup \tau_2)$.

Zadatak 23. *Dokazati da prostor iz* **P 15** *ne zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

Zadatak 24. *Neka je* $\prec$ *strogo linearno uređenje na nekom nepraznom skupu* A *i neka je* $\mathcal{B} := \{(x,y)_\prec : x,y \in A,\ x \prec y\}$. *Dokazati da je* $\mathrm{Top}(\mathcal{B}\cup\{A\}) \subseteq \mathrm{lot}(\prec)$. *Ako ne postoji ni najveći ni najmanji element skupa* A *u odnosu na uređenje* $\prec$, *dokazati da onda važi* $\mathrm{Top}(\mathcal{B}\cup\{A\}) = \mathrm{lot}(\prec)$.

Zadatak 25. *Ako su* X, $\prec$ *i* $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$ *kao u* **P 16**, *naći bar jednu celularnu familiju* $\mathcal{U} \subseteq \tau \setminus \{\varnothing\}$ *moći kontinuum.*

2.3 Unutrašnjost i zatvorenje

Zadatak 26. *Opisati* $\mathrm{cl}(A)$ *za proizvoljan podskup* $A \subseteq X$, *ako je* (X,τ)
(1) *prostor iz zadatka* 2. *pod* (1);
(2) *prostor iz* **P 1**.

Zadatak 27. *Za prostore iz* **P 2** - **P 5** *opisati* $\mathrm{cl}(A)$ *za proizvoljan podskup* $A \subseteq X$.

Zadatak 28. *Ako je* (X,τ) *prostor iz* **P 6**
(1) *naći sve tačke* $x \in X$ *za koje je* $\mathrm{cl}(\{x\}) = \{x\}$;
(2) *naći skup* $\mathrm{cl}(P)$, *gde je* P *skup svih prostih brojeva.*

Zadatak 29. *Ako je* (X,τ) *prostor iz* **P 7** *dokazati:*
(1) *podskup od* X *je gust ako i samo ako sadrži sve proste brojeve;*
(2) *za svako* $k \in X$ *važi* $\mathrm{cl}(\{k\}) = k\mathbb{N}$.

Zadatak 30. **(1)** *Ako su* (X,τ) *i* $\mathcal{B}$ *iz* **P 8** *i* $U \in \mathcal{B}$ *proizvoljan skup, dokazati da je* $\mathrm{acc}(U) = U$.
(2) *Ako je* (X,τ) *prostor iz* **P 9** *i ako su* $l,k \in \mathbb{N}$, *dokazati da je* $\{mk : m \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} \subseteq \mathrm{cl}\left((l+k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}\right)$.

Zadatak 31. *Neka su* U *otvoren,* S *gust i* A *proizvoljan podskup prostora* X. *Dokazati da važe sledeća tvrđenja:*

(1) $U \cap A \neq \varnothing$ *ako i samo ako* $U \cap \mathrm{cl}(A) \neq \varnothing$;

(2) $\mathrm{cl}(U \cap S) = \mathrm{cl}(U)$;

(3) *Ako je* $x \in \mathrm{cl}(A)$ *i* $x \in U$, *onda* $x \in \mathrm{cl}(U \cap A)$.

Zadatak 32. *Neka je* (X, τ) *prostor iz* **P 12**, *gde je* $A = B = \mathbb{R}$, *a* X *skup svih polinomskih funkcija iz* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}$. *Dokazati da je, za* $n \in \mathbb{N}_0$, *skup* Pol_n *svih polinomskih funkcija stepena ne većeg od* n, τ*-zatvoren skup.*

Zadatak 33. *Dokazati da za prostor* (X, τ) *iz* **P 12**, *gde je* $A = B = \mathbb{R}$ *a* X *skup svih polinomskih funkcija iz* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}$, *važi:*
(1) *postoji celularna familija* $\mathcal{A} \subseteq \tau \setminus \{\varnothing\}$ *moći kontinuum;*
(2) *prostor nije separabilan;*
(3) *za svaku tačku* x *prostora postoji niz otvorenih skupova* $(U_n : n \in \mathbb{N})$ *tako da je* $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$;
(4) *prostor ne zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Zadatak 34. *Naći sve petočlane topologije na skupu* $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *za koje važi:*
(1) $\mathrm{int}(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3\}$,
(2) $1 \notin \mathrm{cl}(\{5\})$ *i*
(3) $5 \notin \mathrm{cl}(\{1\})$.

Zadatak 35. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, $X := \{1, \ldots, 2n\}$, $S := \{1, \ldots, n\}$. *Koliko ima topologija na skupu* X *takvih da su istovremeno zadovoljeni sledeći uslovi: skupovi* S *i* $X \setminus S$ *su gusti dok nijedan skup* $T \subset S$ *nije gust? Za* $n = 3$ *naći sve takve topologije za koje usto važi i* $1 \in \mathrm{cl}\big(\{6\}\big)$, $2 \notin \mathrm{cl}\big(\{5, 6\}\big)$.

Zadatak 36. *Neka je* $(A_s : s \in S)$ *lokalno konačna indeksirana familija podskupova nekog topološkog prostora. Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{s \in S} A_s\right) = \bigcup_{s \in S} \mathrm{cl}(A_s)$;
(2) *Ako je* A_s *zatvoren skup za svako* $s \in S$, *onda je* $\bigcup_{s \in S} A_s$ *takođe zatvoren.*

Zadatak 37. *Neka su* $U, V \subseteq X$ *otvoreni, disjunktni podskupovi topološkog prostora* (X, τ), *i neka je* $F \subseteq X$ *zatvoren skup takav da je* $F \subseteq U \cup V$. *Dokazati da je skup* $F \cap U$ *zatvoren.*

Zadatak 38. *Ako je* $\mathrm{cpl} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ *operator komplementiranja, tj.* $\mathrm{cpl}(A) := X \setminus A$*, dokazati jednakosti* $\mathrm{int} = \mathrm{cl} \circ \mathrm{cpl} \circ \mathrm{cl}$ *i* $\mathrm{cl} = \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl} \circ \mathrm{int}$*. Dokazati da je* $\{\mathrm{int}(A), \mathrm{bd}(A), \mathrm{int}(A^c)\}$ *particija skupa* X *za proizvoljan skup* $A \subseteq X$*.*

Zadatak 39. *Dokazati jednakosti* $(\mathrm{int} \circ \mathrm{cl})^2 = \mathrm{int} \circ \mathrm{cl}$ *i* $(\mathrm{cl} \circ \mathrm{int})^2 = \mathrm{cl} \circ \mathrm{int}$*.*

Zadatak 40. *Neka je* (X, τ) *topološki prostor i neka je*

$$\mathcal{S}(\tau) := \big\{ A \subseteq X \ : \ A \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \big\}$$

i

$$\lambda(\tau) := \big\{ A \subseteq X \ : \ \forall U \in \mathcal{S}(\tau) \ \big(A \subseteq U \Rightarrow \mathrm{cl}(U) \subseteq U \big) \big\}.$$

Dokazati da je familija $\big\{ A \subseteq X \ : \ X \setminus A \in \lambda(\tau) \big\}$ *topologija na skupu* X*.*

Zadatak 41. *Neka je* X *separabilan prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i* $S \subseteq X$ *gust podskup. Dokazati da postoji neki prebrojiv, gust u* X *skup* $D \subseteq S$*.*

Zadatak 42. *Ako je* A *proizvoljan podskup prostora* X *dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Skup* A^c *je gust ako i samo ako važi* $\mathrm{int}(A) = \varnothing$*;*
(2) *Važi* $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$ *(tj. skup* A *je nigde gust) ako i samo ako za svaki otvoren, neprazan skup* $U \subseteq X$ *postoji neki otvoren, neprazan skup* $V \subseteq U$ *tako da je* $A \cap V = \varnothing$*.*
Ako je skup $U \subseteq X$ *otvoren, onda je* $\mathrm{bd}(U)$ *nigde gust.*

Zadatak 43. *Dokazati da su za proizvoljan podskup* $U \subseteq X$ *prostora* X *sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ *za neko* $A \subseteq X$*;*
(2) $U = \mathrm{int}(F)$ *za neki zatvoren* $F \subseteq X$*;*
(3) $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U))$*.*

Zadatak 44. *Dokazati da su za proizvoljan podskup $F \subseteq X$ prostora X sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) $F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$ *za neko* $A \subseteq X$*;*
(2) $F = \mathrm{cl}(U)$ *za neki otvoren* $U \subseteq X$*;*
(3) $F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(F))$.

Zadatak 45. *Podskup $A \subseteq X$ prostora X je* I *kategorije ako i samo ako je $A \subseteq \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ za neke zatvorene $F_n \subseteq X$, prazne unutrašnjosti. Skup A^c je I kategorije (tj. A je rezidualan) ako i samo ako je $A \supseteq \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ za neke otvorene guste $U_n \subseteq X$. Dokazati.*

Zadatak 46. *Dokazati da su za proizvoljan topološki prostor X sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) *X je* `Baire`*-ov prostor;*

(2) *Svaki neprazan, otvoren skup je* II *kategorije;*

(3) *Ako su $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, otvoreni, gusti skupovi, onda je skup $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gust;*
(4) *Ako su $F_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, zatvoreni prazne unutrašnjosti, onda je skup $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ prazne unutrašnjosti.*

Zadatak 47. *Dokazati da je* $\mathbb{R}$ `Baire`*-ov prostor.*

Zadatak 48. *Naći rezidualan podskup prostora $\mathbb{R}$ koji je* `Lebesgue`*-ove mere* 0*. Naći zatvoren, nigde gust podskup prostora $\mathbb{R}$ koji je* I *kategorije koji je beskonačne* `Lebesgue`*-ove mere.*

2.4 Neprekidnost preslikavanja

Zadatak 49. *Opisati sva preslikavanja $f : X \to Y$ koja su (τ, τ_Y)-neprekidna, ako je (X, τ) prostor iz* **P 2***, a (Y, τ_Y) je*

(1) *prostor* $(\mathbb{R}, \mu_{\mathbb{R}})$*;*

(2) *prostor iz* **P 6** *u slučaju kada je skup X neprebrojiv.*

Zadatak 50. *Ako su* $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije, onda je neprekidan i njihov maksimum i minimum. Preciznije, neprekidne su i funkcije* $f_{max}, f_{min} : X \to \mathbb{R}$ *definisane sa* $f_{max}(z) = \max\{f_i(x) \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ *i* $f_{min}(z) = \min\{f_i(x) \ : \ 1 \leq i \leq n\}$, $x \in X$. *Dokazati.*

Zadatak 51. *Neka je* $\mathcal{F}$ *lokalno konačna* [*proizvoljna*] *familija zatvorenih* [*otvorenih*] *podskupova topološkog prostora* (X, τ) *tako da je* $\bigcup \mathcal{F} = X$. *Neka je* (Y, λ) *topološki prostor i neka je za svako* $S \in \mathcal{F}$ *dato preslikavanje* $g_S : \big(S, \mathrm{rel}_S(\tau)\big) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \lambda)$ *tako da za svako* $S, T \in \mathcal{F}$ *važi* $g_S \restriction (S \cap T) = g_T \restriction (S \cap T)$. *Tada je sa*

$$\{g(x)\} = \{g_S(x) \ : \ x \in S \in \mathcal{F}\}$$

korektno definisano preslikavanje $g : X \to Y$. *Dokazati da je* g (τ, λ)-*neprekidno preslikavanje.*

Zadatak 52. *Ako je* τ *topologija iz* **P 11** *i preslikavanje* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definisano sa* $f(x) := [x]$, *gde je*

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leq x\}$$

ceo deo od x, *dokazati da je* f (τ, τ)-*neprekidno preslikavanje.*

Zadatak 53. *Ako je* (X, τ) *prostor iz* **P 3**, *gde je specijalno* $X = \mathbb{R}$, *dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Niz* $(a_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ *tačaka datog prostora konvergira ka nekoj tački* $b \in \mathbb{R}$ *u odnosu na topologiju* τ *ako i samo ako je on stacionaran;*
(2) *Preslikavanje* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nije* $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$-*neprekidno ali jeste* $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$-*nizovno neprekidno.*

Zadatak 54. *Neka* $f : X \to Y$. *Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) f *je zatvoreno* [*otvoreno*] *preslikavanje;*
(2) *Za proizvoljan skup* $A \subseteq Y$ *i svaki* τ_X-*otvoren* [τ_X-*zatvoren*] *skup* U *takav da* $U \supseteq f^{\leftharpoonup} A$, *postoji neki* τ_Y-*otvoren* [τ_Y-*zatvoren*] *skup* $V \supseteq A$ *tako da je* $f^{\leftharpoonup} A \subseteq f^{\leftharpoonup} V \subseteq U$.

Zadatak 55. *Neka $f : X \to Y$. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) *f je zatvoreno preslikavanje;*
(2) *Za proizvoljnu tačku $y \in Y$ i proizvoljan τ_X-otvoren skup U takav da $U \supseteq f^{\leftharpoonup}\{y\}$, postoji neki τ_Y-otvoren skup $V \ni y$ tako da je $f^{\leftharpoonup}\{y\} \subseteq f^{\leftharpoonup}V \subseteq U$.*

Zadatak 56. *Neka je $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ za svako $f \in \mathcal{L} \neq \varnothing$ tako da važe uslovi:*

(1) *za svako $x \in X$ skup $\{f(x) \ : \ f \in \mathcal{L}\}$ je ograničen ogozgo;*

(2) *za svako $s \in \mathbb{R}$ indeksirana familija $(f^{\leftharpoonup}(s, +\infty) \ : \ f \in \mathcal{L})$ je τ_X-lokalno konačna.*

Dokazati da je funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ definisana sa $g(x) := \sup\{f(x) \ : \ f \in \mathcal{L}\}$ neprekidna.

Zadatak 57. *Dati su $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$, $\tau_X = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}\}$, $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ i $f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 4, c\rangle\}$.*
(1) *Dokazati da se preslikavanje f ne može dodefinisati do neprekidnog preslikavanja na ceo skup X.*
(2) *Proširiti τ_X jednim skupom do topologije u odnosu na koju preslikavanje f ima neprekidnu ekstenziju i naći je.*

Zadatak 58. *Dati su funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, skup $E \subseteq X$ II kategorije i skup $S \subseteq E^c$ gust u X tako da za svako $q \in S$ važi $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in E}} f(x) = 0$. Dokazati da je i skup $E_0 := \{x \in E : \ f(x) = 0\}$ II kategorije.*

2.5 Metrički prostori

Zadatak 59. *Neka je (X, d) proizvoljan pseudometrički prostor. Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Za proizvoljan skup $A \subseteq X$ važi $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\operatorname{cl}(A))$;*

(2) *Za proizvoljne tačke $u, v \in X$ i skup $A \subseteq X$ važi*

$$\Big|\operatorname{Dist}\big(\{u\}, A\big) - \operatorname{Dist}\big(\{v\}, A\big)\Big| \leq d(u, v)\,.$$

Zadatak 60. *Neka je d pseudometrika na skupu X takva da za svako $a, b, c \in X$ važi $d(a,b) \leq \max\{d(a,c), d(c,b)\}$. Dokazati da za svako $\varepsilon \in (0;+\infty)$ i $x, y \in X$ važi*

$$y \in \mathrm{K}_d[x;\varepsilon) \;\Rightarrow\; \mathrm{K}_d[x;\varepsilon) = \mathrm{K}_d[y;\varepsilon)\,.$$

Zadatak 61. *Neka su skup X i metrika $d_{\sup}$ iz* **P 14**. *Pokazati da nijedan konačan skup $S \subseteq X$ nema osobinu da za svaku funkciju $f \in X$ postoji neka funkcija $g \in S$ tako da važi $d_{\sup}(f,g) \leq \dfrac{1}{3}$.*

Zadatak 62. *Neka je (X,d) proizvoljan pseudometrički prostor i neka je $E := \big\{(a,b) \in X^2 \,:\, d(a,b) = 0\big\}$. Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Za svako $a, b \in X$ važi*

$$a\,E\,b \text{ ako i samo ako za svako } c \in X \text{ važi } d(a,c) = d(b,c)\,;$$

(2) *E je relacija ekvivalencije;*

(3) *Funkcija $\rho : X_{/E} \times X_{/E} \to [0;+\infty)$ definisana sa $\rho\big([x]_{/E}, [y]_{/E}\big) := d(x,y)$ je metrika na skupu $X_{/E}$. Pritom za svako $x \in X$ i $\varepsilon \in (0;+\infty)$ važi*

$$\mathrm{K}_\rho\Big[[x]_{/E};\varepsilon\Big) = \Big\{[y]_{/E} \,:\, y \in \mathrm{K}_d[x;\varepsilon)\Big\}\,.$$

Zadatak 63. *Neka je (Y,d) metrički prostor i $f_n : (X,\tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(Y, \mathrm{Top_m}(d)\big)$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da ako niz $(f_n \,:\, n \in \mathbb{N})$ uniformno konvergira ka funkciji $g \in {}^XY$ (u odnosu na d), onda važi $g : (X,\tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(Y, \mathrm{Top_m}(d)\big)$.*

Zadatak 64. *Neka je d euklidska metrika u $\mathbb{R}^2$. Naći $\mathrm{H}_d(K,L)$ ako je*
(1) *$K = \mathrm{Seg}[A,B]$ i $L = \mathrm{Seg}[C,D]$, gde $A = (-1,0)$, $B = (3,0)$, $C = (0,2)$, $D = (0,-4)$;*
(2) *$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 4\}$ i $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-4)^2 + y^2 = 9\}$;*
(3) *$K = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0;+\infty) \,:\, x^2 + y^2 = 4\}$ i $L = \mathrm{Seg}[D,C]$, gde $C = (2,3)$, $D = (-1,3)$;*
(4) *K kružnica upisana u trougao $L = \mathrm{Seg}[A,B] \cup \mathrm{Seg}[B,C] \cup \mathrm{Seg}[C,A]$, gde su $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ tako da $d(A,B) = d(B,C) = d(C,A) = 2\sqrt{3}$.*

Zadatak 65. *Neka je* $X \neq \varnothing$ *i neka funkcija* $d : X \times X \to [0; +\infty)$ *zadovoljava uslove* (M_0) *i* (TR). *Definišimo* $d' : X^2 \to [0; 1]$ *sa* $d'(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ *i*

$$\mathrm{G}_d : \big(\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big) \times \big(\mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}\big) \to [0; 1]$$

sa $\mathrm{G}_d(A, B) := \min\{\mathrm{H}_d(A, B), 1\}$. *Dokazati da je* $\mathrm{Top_m}\big(\mathrm{H}_{d'}\big) = \mathrm{Top_m}\big(\mathrm{G}_d\big)$.

Zadatak 66. *Neka je* (X, d) *pseudometrički prostor i neka su nizovi* $(x_n : n \in \mathbb{N})$, $(y_n : n \in \mathbb{N}) \in {}^{\mathbb{N}}X$ *i* $\varepsilon \in (0; +\infty)$ *takvi da je* $d(x_n, y_n) > \varepsilon$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$. *Dokazati da postoji beskonačan skup* $R \subseteq \mathbb{N}$ *takav da je* $d(x_n, y_m) > \dfrac{\varepsilon}{3}$ *za svako* $n, m \in R$.

2.6 Podprostor

Zadatak 67. *Neka je* $\varnothing \neq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ *i* τ *topologija na skupu* X.
(1) *Dokazati da važi* $\mathrm{rel}_{X_1}(\mathrm{rel}_{X_2}(\tau)) = \mathrm{rel}_{X_1}(\tau)$.
(2) *Dokazati da ako je* X_1 $\mathrm{rel}_{X_2}(\tau)$*-otvoren* [$\mathrm{rel}_{X_2}(\tau)$*-zatvoren*] *i* X_2 τ*-otvoren* [τ*-zatvoren*], *onda je* X_1 τ*-otvoren* [τ*-zatvoren*].
(3) *Ako je* $\{x\} \cup X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$, *onda* $x \in \mathrm{cl}_\tau(X_1) \iff x \in \mathrm{cl}_{\mathrm{rel}_{X_2}(\tau)}(X_1)$.

Zadatak 68. *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori,* $\varnothing \neq X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ *i* $f : X \to Y$ *tako da je* $f^{\rightharpoonup}X \subseteq Y_0$. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Ako je* f (τ_X, τ_Y)*-neprekidno preslikavanje, onda je restrikcija* $f \restriction X_0$ $(\mathrm{rel}_{X_0}(\tau_X), \tau_Y)$*-neprekidno preslikavanje;*
(2) *Preslikavanje* f *je* (τ_X, τ_Y)*-neprekidno ako i samo ako je ono* $(\tau_X, \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y))$*-neprekidno.*

Zadatak 69. *Neka je* $((X_i, \tau_i) : i \in I)$ *familija topoloških prostora i* $X := \bigcup\limits_{i \in I} X_i$.
(1) *Dokazati da je familija* $\tau := \{L \subseteq X \mid \forall i \in I \ (L \cap X_i \in \tau_i)\}$ *topologija na skupu* X.

(2) *Ako su dati preslikavanje* $f : X \to Y$ *i topologija* τ_Y *na skupu* Y, *dokazati da je* f (τ, τ_X)*-neprekidno preslikavanje ako i samo ako je* $f \restriction X_i : X_i \to Y$ (τ_i, τ_Y)*-neprekidno preslikavanje za svako* $i \in I$.

(3) *Ako je* τ_X *topologija na skupu* X *tako da je za svako* $i \in I$ τ_i *upravo topologija na skupu* X_i *nasleđena od topologije* τ_X. *Dokazati da je* $\tau_X \subseteq \tau$.

(4) *Dokazati da je* $\mathrm{rel}_{X_i}(\tau) \subseteq \tau_i$ *za svako* $i \in I$;

(5) *Pretpostavimo da se za svako* $i, j \in I$ *topologija na skupu* $X_i \cap X_j$ *nasleđena od* τ_i *poklapa sa onom nasleđenom od* τ_j. *Ako je dodatno,* **bilo** *za svako* $i, j \in I$ *skup* $X_i \cap X_j$ *istovremeno* τ_i*-zatvoren i* τ_j*-zatvoren,* **bilo** *za svako* $i, j \in I$ *skup* $X_i \cap X_j$ *istovremeno* τ_i*-otvoren i* τ_j*-otvoren, dokazati da onda za svako* $i \in I$ *važi* $\mathrm{rel}_{X_i}(\tau) = \tau_i$; *dokazati još da je u prvom slučaju za svako* $i \in I$ *skup* X_i τ*-zatvoren, a u drugom za svako* $i \in I$ *skup* X_i τ*-otvoren.*

Zadatak 70. *Neka je* $\mathcal{B}$ *baza topološkog prostora* (X, τ) *i*

$$X_0 := X \setminus \bigcup \left\{ \overline{U} \setminus U \ : \ U \in \mathcal{B} \right\} .$$

Dokazati da je $(X_0, \mathrm{rel}_{X_0}(\tau))$ *nuldimenzionalan prostor. Šta je skup* X_0 *ako je* $(X, \tau) = (\mathbb{R}, \mu_{\mathbb{R}})$ *i* $\mathcal{B} = \{(a; b) \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$*?*

Zadatak 71. *Ako je prostor* X `Baire`*-ov, onda je i svaki neprazan otvoren podprostor* `Baire`*-ov. Dokazati.*

Zadatak 72. *Dokazati da je svaki podprostor* `Sorgenfrey`*-eve prave iz* **P 11** *separabilan.*

Zadatak 73. *Neka je* $\prec$ *strogo linearno uređenje na nekom skupu* $X \neq \varnothing$ *i* $Y \subseteq X$, $Y \neq \varnothing$. *Stavimo* $\prec_Y := \prec \cap Y^2 = \{(u, v) \in Y^2 \ : \ u \prec v\}$.
(1) *Dokazati* $\mathrm{lot}(\prec_Y) \subseteq \mathrm{rel}_Y(\mathrm{lot}(\prec))$.
(2) *Neka su specijalno* X, $\prec$ *i* $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$ *iz* **P 16**, *a* $Y := [0; 1] \times \{1\}$. *Dokazati da važi stroga inkluzija* $\mathrm{lot}(\prec_B) \subset \mathrm{rel}_B(\mathrm{lot}(\prec))$.

2.7 Proizvod topoloških prostora

Zadatak 74. *Neka je* $(\mathbb{N}, \tau_1)$ *prostor iz* **P 6** *i stavimo* $\lambda := \tau \times' \mathbb{P}(\mathbb{N})$. *Naći* $\mathrm{bd}_\lambda(R)$ *ako je*

$$R := \left\{(m,n) \in X^2 \middle| \text{ broj } n \text{ je deljiv brojem } m\right\} .$$

Zadatak 75. *Neka je* $(\mathbb{N}, \tau_1)$ *prostor iz* **P 6** *i* τ_2 $\mathbb{N}$*-stepen topologije* λ, *gde je* $(\mathbb{N}, \lambda)$ *prostor iz* **P 1**.

Ako je

$$S := \left\{x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq m \Rightarrow x(n) = 1)\right\} ,$$

dokazati da su topološki prostori $(\mathbb{N}, \tau_1)$ *i* $(S, \mathrm{rel}_S(\tau_2))$ *homeomorfni.*

Zadatak 76. *Dokazati* $(\tau \times' \tau, \tau)$*-neprekidnost preslikavanja* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definisanog sa* $f(x,y) := xy$, *gde je* τ *topologija iz* **P 6**.

Zadatak 77. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *neka je* $I_n := [-\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n}]$ *i neka je* $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n$ *i* $\tau := \prod'_{n \in \mathbb{N}} \mu_{I_n}$. *Dokazati da je preslikavanje* $f : X \to \mathbb{R}$ *definisano sa* $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)$ τ*-neprekidno.*

Zadatak 78. *Neka je* (X, τ) *prostor iz* **P 15**, λ $\mathbb{N}$*-stepen diskretne topologije* $\mathbb{P}(\{0,1\})$ *i preslikavanje* $f : X \to {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ *definisano sa* $f(A)(i) = 1$ *ako* $i \in A$, *odnosno* $f(A)(i) = 0$ *ako* $i \notin A$, *za* $i \in \mathbb{N}$ *i beskonačan* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Ako je* $\lambda_0 := \mathrm{rel}_{f^{\rightharpoonup}X}(\lambda)$, *dokazati da je* f (τ, λ_0)*-neprekidna injekcija koja nije* (τ, λ_0)*-otvoreno preslikavanje.*

Zadatak 79. *Neka je* $\tau := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a; +\infty) | a \in \mathbb{R}\}$ *i neka je preslikavanje* $T : {}^{[0;1]}\mathbb{N} \to (\mathbb{R}, \tau)$ *definisano sa*

$$T(f) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sup(\{0\} \cup f^{\leftharpoonup}\{n\})}{2^n}$$

za svako $f \in {}^{[0;1]}\mathbb{N}$. *Dokazati da je* T (λ, τ)*-neprekidno preslikavanje, gde je* λ $[0;1]$*-stepen diskretne topologije* $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Zadatak 80. *Ako* $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y)$, *onda je preslikavanje* $g : X \to f$ *definisano sa* $g(x) = (x, f(x))$ *homeomorfizam između prostora* (X, τ_X) *i* $(f, \mathrm{rel}_f(\tau_X \times' \tau_Y))$. *Dokazati.*

Zadatak 81. *Neka su metrika* $d_{\sup}$ *i prostor* (X, τ) *iz* **P 14**. *Definišimo preslikavanje* $T : X \times [0;1] \to \mathbb{R}$ *sa* $T(g, r) = g(r)$. *Dokazati da je* T $\big(\mathrm{Top_m}(d) \times' \mu_{[0;1]}, \mu_{\mathbb{R}}\big)$*-neprekidno preslikavanje.*

Zadatak 82. *Neka je* $(U_n : n \in \mathbb{N})$ *niz otvoreno-zatvorenih skupova prostora* X. *Definišimo funkciju* $f : X \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *sa* $f(x) = (a_i(x) : i \in \mathbb{N})$ *gde je* $a_i(x) = 1$ *ako* $x \in U_i$ *i* $a_i(x) = 0$ *ako* $x \notin U_i$. *Dokazati da je* f $(\tau_X, \prod'_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathbb{N}))$*-neprekidna funkcija.*

Zadatak 83. *Ako je* (X, d) *proizvoljan pseudometrički prostor, dokazati da je* $d : X^2 \to [0; +\infty)$ *funkcija koja je* $\big(\mathrm{Top_m}(d) \times' \mathrm{Top_m}(d)\big)$ − *neprekidna.*

Zadatak 84. *Neka je* (X, d) *pseudometrički prostor i* τ *proizvoljna topologija na skupu* X. *Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) $\mathrm{Top_m}(d) \subseteq \tau$;
(2) $\mathrm{id}_X : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \mathrm{Top_m}(d))$;
(3) $d : (X^2, \tau \times' \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$.

Zadatak 85. *Neka je za svako* $i \in \mathbb{N}$ d_i *pseudometrika na skupu* X_i *takva da je* $d_i(a, b) \leq 1$ *za svako* $a, b \in X_i$. *Stavimo* $\tau_i := \mathrm{Top_m}(d)$, *za* $i \in \mathbb{N}$ d_i, $X := \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ *i* $\tau := \prod'_{i\in\mathbb{N}} \tau_i$. *Definišimo preslikavanje* $D : X \times X \to \mathbb{R}$ *sa*

$$D(a, b) := \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\, d_i(a_i, b_i)$$

za $a = (a_i : i \in \mathbb{N}) \in X$, $b = (b_i : i \in \mathbb{N}) \in X$.

Tada je D *metrika na skupu* X *i to takva da je* $\mathrm{Top_m}(D) = \tau$. *Dokazati.*

Zadatak 86. *Dokazati da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $\mu_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{\mu_{\mathbb{R}} \times' \cdots \times' \mu_{\mathbb{R}}}_{n \text{ puta}}$.

2.8 Suma prostora

Zadatak 87. *Neka je* $X_1 := [0;1)$ *i* $X_2 := [1;2]$ *i* $(S,\lambda) := (X_1, \mu_{X_1}) \sqcup (X_2, \mu_{X_2})$. *Dokazati da važi* $\mu_S \subset \lambda$.

Zadatak 88. *Za svako* $t \in [0,1]$ *neka je* X_t *otvorena duž u* $\mathbb{R}^2$ *čiji su krajevi tačke* $(0,0)$ *i* $\mathrm{e}^{t\mathrm{i}}$ *i neka je* $\tau_t := \mu_{X_t}$. *Neka je* $(S,\lambda) := \bigsqcup_{t\in[0;1]} (X_t, \tau_t)$. *Dokazati da važi* $\mu_S \subset \lambda$.

Zadatak 89. *Neka je* $(S,\lambda) = \bigoplus_{i\in I}(X_i,\tau_i)$ *topološka suma familije prostora* $\big\{(X_i,\tau_i) \,:\, i \in I\big\}$. *Neka je, za svako* $i \in I$, $Y_i := X_i \times \{i\}$, $\lambda_i := \big\{U \times \{i\} \,:\, U \in \tau_i\big\}$, *i neka je preslikavanje* $k_i : X_i \to S$ *definisano sa* $k_i(x) := (x,i)$, $x \in X_i$. *Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) $\lambda_i = \mathrm{rel}_{Y_i}(\lambda)$;

(2) *Ako je* (Z,ν) *proizvoljan topološki prostor i* $f : S \to Z$, *onda je* f (λ,ν)-*neprekidno preslikavanje ako i samo ako je za svako* $i \in I$ *kompozicija* $f \circ k_i$ (τ_i,ν)-*neprekidno preslikavanje.*

Zadatak 90. *Naći topološki prostor* (Y,ν) *homeomorfan sumi* $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(X_i,\tau_i)$, *gde je* $(X_i,\tau_i) = (Y,\nu)$, *za svako* $i \in \mathbb{N}$.

Zadatak 91. *Neka je* (X,τ) *topološki prostor i* $A \subseteq X$ *podskup tako da je* $\{A, A^c\} \in \tau$.

(1) *Dokazati da su za proizvoljan skup* $S \subseteq X$ *sledeći uslovi ekvivalentni:*

- **(a)** $S \in \tau$;
- **(b)** $S \cap A \in \mathrm{rel}_A(\tau)$ *i* $S \cap A^c \in \mathrm{rel}_{A^c}(\tau)$;
- **(c)** *Postoje* $U \in \mathrm{rel}_A(\tau)$ *i* $V \in \mathrm{rel}_{A^c}(\tau)$ *tako da je* $S = U \cup V$.

(2) *Dokazati jednakost* $(X,\tau) = (A, \mathrm{rel}_A(\tau)) \sqcup (A^c, \mathrm{rel}_{A^c}(\tau))$.

Zadatak 92. *Neka je* (X,τ) *prostor iz* **P 2**, *gde je* $X = \mathbb{N}$, $a \notin X$ *i*

$$(S,\lambda) := \Big(\{a\}, \big\{\varnothing, \{a\}\big\}\Big) \sqcup (X,\tau)\,.$$

Dokazati da važi:

(1) *Ako je* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}(S)$ *proizvoljna neprazna familija* λ*-gustih skupova onda je* $\bigcap \mathcal{D} \neq \varnothing$*;*

(2) *Postoji niz* $(U_n : n \in \mathbb{N})$ *otvorenih, gustih skupova prostora* (S, λ) *takav da* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *nije gust skup tog prostora.*

Zadatak 93. *Neka je* $(S, \lambda) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (X_i, \tau_i)$*, gde je* $(X_i, \tau_i) = (\mathbb{R}, \mu_{\mathbb{R}})$*, za svako* $i \in \mathbb{N}$*, i neka je* $F := \{(0, i) : i \in \mathbb{N}\}$*. Ako su skupovi* $U_n \in \lambda$*,* $n \in \mathbb{N}$*, proizvoljni tako da je* $F \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$*, dokazati da postoji neki* λ*-otvoren skup* $V \supseteq F$ *takav da ne važi* $U_n \subseteq V$ *ni za jedno* $n \in \mathbb{N}$*.*

2.9 Količnik prostor

Zadatak 94. *Neka je* E *relacija ekvivalencije, a* τ *topologija na nepraznom skupu* X*.*

(1) *Dokazati da je* $A \subseteq X$ *otvoren i pravilan za* E *ako i samo ako važi*

$$\forall x \in A \forall y \in X \ \big(xEy \ \Rightarrow \ \exists U \in \tau \ (y \in U \subseteq A)\big)$$

(2) *Neka su* $(A_n : n \in \mathbb{N})$ *i* $(U_n : n \in \mathbb{N})$ *nizovi podskupova skupa* X*. Pretpostavimo da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $A_n \subseteq U_n \in \tau$ *i* $\bigcup_{x\in U_n} [x]_E \subseteq A_{n+1}$*. Dokazati da je skup* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *otvoren i pravilan za* E*.*

(3) *Neka su* $(A_n : n \in \mathbb{N})$ *i* $(U_n : n \in \mathbb{N})$ *nizovi podskupova skupa* X *tako da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $\bigcup_{x\in U_n} [x]_E = A_{n+1}$ *kao i* $U_n = \bigcup_{x\in A_n} W(x, n)$*, gde je* $x \in W(x, n)$ *za svako* $x \in A_n$*. Dokazati da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi:* $b \in U_n$ *ako i samo ako postoje tačke* $x_i \in A_i$ *i* $y_i \in W(x_i, i)$ *za* $i = \overline{1, n}$ *tako da je* $y_n = b$*, i ako* $n > 1$*, onda* $y_{i-1} \, E \, x_i$ *za svako* $i = \overline{2, n}$*.*

(4) *Neka je* $\mathcal{L} \subseteq \tau$ *baza za* τ *i* $C \in X_{/E}$ *proizvoljno. Dokazati da familija svih skupova oblika* $\left\{ [x]_E \,:\, x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\}$, *gde su* $(A_n \,:\, n \in \mathbb{N})$ *i* $(U_n \,:\, n \in \mathbb{N})$ *nizovi sa svojstvom navedenim pod* (3), *pri čemu je* $A_1 = C$ *i* $W(x,n) \in \mathcal{L}$ *za svako* $x \in A_n$, *predstavlja* $\mathrm{Factor}(\tau, E)$*-lokalnu bazu u strogom smislu u tački* C.

Zadatak 95. *Neka je* $(X,\tau) = \big([0;1], \mu_{[0;1]}\big)$ *i neka je* E *relacija ekvivalencije definisana na* X *sa:* xEy *ako i samo ako* $|x-y| \in \mathbb{Q}$, *za* $x, y \in [0;1]$.
(1) *Dokazati da je prirodna projekcija* $p : X \to X_{/E}$ *određena sa* E $(\tau, \mathrm{Factor}(\tau, E))$*-otvoreno preslikavanje, a da* E *nije* $\tau \times' \tau$*-otvoren podskup od* $X \times X$.
(2) *Dokazati da je* $\big(X_{/E}, \mathrm{Factor}(\tau, E)\big)$ *antidiskretan prostor.*

Zadatak 96. *Neka je funkcija* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\mathbb{N}\}$ *definisana sa*

$$g(x) = \begin{cases} x & \textit{ako} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \mathbb{N} & \textit{ako} \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ako je $E := \ker(g)$, *dokazati da prostor* $\big(\mathbb{R}_{/E}, \mathrm{Factor}(\mu_{\mathbb{R}}, E)\big)$ *ne zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Zadatak 97. **(1)** *Neka su* $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y)$, $h : (X, \tau_X) \xrightarrow{q^-} (Z, \tau_Z)$ *i* $g : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z)$ *preslikavanja za koja važi* $h = g \circ f$. *Dokazati da mora biti* $g : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{q^-} (Z, \tau_Z)$.

(2) *Neka* $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{q^-} (Y, \tau_Y)$. *Dokazati da za svaki prostor* (Z, τ_Z) *i svako preslikavanje* $g : Y \to Z$ *važi:*

$$\textit{ako je } g \circ f \ (\tau_X, \tau_Z) - \textit{neprekidno preslikavanje,}$$

$$\textit{onda je } g \ (\tau_Y, \tau_Z) - \textit{neprekidno preslikavanje.}$$

(3) *Neka* $f : X \to Y$, *neka su* τ_X *i* τ_Y *topologije na* X *i* Y, *respektivno, i neka je* $\lambda := \mathrm{Factor}\,(\tau_X, \ker(f))$. *Dokazati da ako je* f (τ_X, τ_Y)*-neprekidno preslikavanje, onda je* $f_\diamond$ (λ, τ_Y)*-neprekidno preslikavanje.*

Zadatak 98. *Neka je* $f : X \to Y$, *a* τ_X *i* τ_Y *topologije na* X *i* Y, *respektivno. Stavimo* $Y_0 := f^{\rightharpoonup} X$ *i* $\tau_{Y_0} := \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y)$. *Dokazati da su sledeća dva uslova ekvivalentna:*
(1) $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{q^-} (Y, \tau_Y)$;
(2) $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{q} (Y_0, \tau_{Y_0})$, *oba skupa* Y_0 *i* $Y \setminus Y_0$ *su* τ_Y*-otvorena i* $Y \setminus Y_0$ *je* τ_Y*-diskretan podskup od* Y.

Zadatak 99. *Neka je* $f : X \to Y$, *a* τ_X *i* τ_Y *topologije na* X *i* Y, *respektivno, i neka je* $\lambda := \mathrm{Factor}(\tau_X, \ker(f))$. *Dokazati da je* f (τ_X, τ_Y)*-količničko ako i samo ako je preslikavanje* $f_\diamond$ (λ, τ_Y)*-homeomorfizam.*

Zadatak 100. *Neka* $f : X \to Y$, *i neka su* τ_X *i* τ_Y *topologije na* X *i* Y, *respektivno. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) f *je* (τ_X, τ_Y)*-količničko;*
(2) f *je* (τ_X, τ_Y)*-neprekidno preslikavanje* **na** *skup* Y *i za svaki prostor* (Z, τ_Z) *i svako preslikavanje* $g : Y \to Z$ *važi:*

$$\textit{ako je } g \circ f \ (\tau_X, \tau_Z) - \textit{neprekidno, onda je } g \ (\tau_Y, \tau_Z) - \textit{neprekidno.}$$

Zadatak 101. *Neka je* $f : X \to Y$, *i neka su* τ_X *i* τ_Y *topologije na* X *i* Y, *respektivno. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) f *je* (τ_X, τ_Y)*-predkoličničko;*
(2) f *je* (τ_X, τ_Y)*-neprekidno preslikavanje i za svaki prostor* (Z, τ_Z) *i svako preslikavanje* $g : Y \to Z$ *važi:*

$$\textit{ako je } g \circ f \ (\tau_X, \tau_Z) - \textit{neprekidno, onda je } g \ (\tau_Y, \tau_Z) - \textit{neprekidno.}$$

Zadatak 102. *Neka su date relacije ekvivalencije* E_1 *i* E_2 *na skupu* X *tako da je* $E_1 \subseteq E_2$, τ *topologija na* X *i neka je preslikavanje* $f : X_{/E_1} \to X_{/E_2}$ *definisano sa* $f([x]_{E_1}) = [x]_{E_2}$. *Dokazati da je* f $(\mathrm{Factor}(\tau, E_1), \mathrm{Factor}(\tau, E_2))$*-količničko preslikavanje.*

Zadatak 103. **(1)** *Neka su dati topološki prostori* (X, τ_1) *i* (Y, τ_2). *Dalje neka je* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ *i neka je data kompatibilna familija preslikavanja* f_i :

$X_i \to Y_i$, $i \in I$ *tako da je* $f := \bigcup_{i \in I} f_i : (X, \tau_1) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_2)$. *Za* $i \in I$ *stavimo* $\tau_{1,i} := \mathrm{rel}_{X_i}(\tau_1)$, $Y_i := f_i^{\rightharpoonup} X_i$ *i* $\tau_{2,i} := \mathrm{rel}_{Y_i}(\tau_2)$. *Neka je* $J \subseteq I$ *tako da je* $f_i : (X_i, \tau_{1,i}) \xrightarrow{q} (Y_i, \tau_{2,i})$ *za svako* $i \in J$. *Dokazati da je* $f : (X, \tau_1) \xrightarrow{q} (Y, \tau_2)$ *ako važi* **bilo koji** *od naredna dva uslova:*
(1) *familija* $\{Y_i : i \in J\}$ *je* τ_2*-otvoren pokrivač skupa* Y*;*
(2) *familija* $\{Y_i : i \in J\}$ *je* τ_2*-zatvoren pokrivač skupa* Y *i* **indeksirana familija** $(Y_i : i \in J)$ *je* τ_2*-lokalno konačna.*

(2) *Neka* $f : (X, \tau_1) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_2)$ *i neka je* $X_0 \subseteq X$ *takvo da je* $f \restriction X_0 : (X_0, \mathrm{rel}_{X_0}(\tau_1)) \xrightarrow{q} (Y, \tau_2)$. *Dokazati da je tada* $f : (X, \tau_1) \xrightarrow{q} (Y, \tau_2)$.

Zadatak 104. *Neka je* $f : (X, \tau_1) \xrightarrow{q} (Y, \tau_2)$, $\varnothing \neq Y_0 \subseteq Y$, $X_0 := f^{\leftharpoonup} Y_0$, $\tau_{1,0} := \mathrm{rel}_{X_0}(\tau_1)$ *i* $\tau_{2,0} := \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_2)$. *Dokazati da ako važi* **bilo koji** *od sledećih uslova*
(1) Y_0 *je bilo* τ_2*-otvoren, bilo* τ_2*-zatvoren skup;*
(2) f *je bilo* (τ_1, τ_2)*-otvoreno bilo* (τ_1, τ_2)*-zatvoreno zatvoreno preslikavanje,*
onda mora biti $f \restriction X_0 : (X_0, \tau_{1,0}) \xrightarrow{q} (Y_0, \tau_{2,0})$.

Zadatak 105. *Neka je* $X := (0, 1/2] \cup \{1 + 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, $\tau := \mu_X$, E *relacija ekvivalencije na skupu* X *definisana sa* xEy *ako i samo ako* $(x = y \vee |x - y| = 1)$ *i neka je* $X_0 := \big[(0, 1/2] \setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}\}\big] \cup \{1\}$. *Ako je* $\lambda := \mathrm{Factor}(\tau, E)$ *i* $q : X \to X_{/E}$ *prirodna projekcija indukovana sa* E *dokazati da* $q \restriction X_0$ *nije* $(\mathrm{rel}_{X_0}(\tau), \mathrm{rel}_{q^{\rightharpoonup} X_0}(\lambda))$*-količničko preslikavanje.*

Zadatak 106. *Neka je* $q : (X, \tau) \xrightarrow{q} (Y, \theta)$ *i* $\varnothing \neq X_0 \subseteq X$. *Neka je*

$$Y_0 := q^{\rightharpoonup} X_0,\ \tau_0 := \mathrm{rel}_{X_0}(\tau),\ \theta_0 := \mathrm{rel}_{Y_0}(\theta),\ q_0 := q \restriction X_0 : X_0 \to Y_0,$$
$$E := \ker(q),\ \lambda := \mathrm{Factor}(\tau, E),$$
$$\pi : X \to X_{/E} \text{ prirodna projekcija indukovana sa } E,\ \lambda_0 := \mathrm{rel}_{\pi^{\rightharpoonup} X_0}(\lambda),$$
$$E_0 := E \cap (X_0)^2,\ \nu_0 := \mathrm{Factor}(\tau_0, E_0)$$

i neka je preslikavanje $f : X_{0/E_0} \to \pi^{\rightharpoonup} X_0$ *definisano sa* $f([x]_{E_0}) = [x]_E$, *za svako* $x \in X_0$.
(1) *Dokazati da je* $f : X_{0/E_0} \to \pi^{\rightharpoonup} X_0$ (ν_0, λ_0)*-neprekidna bijekcija.*

(2) *Dokazati da je* $f : X_{0/E_0} \to \pi^{\rightharpoonup} X_0$ (ν_0, λ_0)*-homeomorfizam ako i samo ako* $q_0 : (X_0, \tau_0) \xrightarrow{q} (Y_0, \theta_0)$.

Zadatak 107. *Neka je* (Z, τ_Z) *proizvoljan topološki prostor,* F *neka relacija ekvivalencije na skupu* Z *i* $\varnothing \neq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z$*. Dalje neka je, za* $i = \overline{1,2}$, $\tau_{Z_i} := \mathrm{rel}_{Z_i}(\tau_Z)$, $F_i := F \cap (Z_i)^2$, $\eta_i := \mathrm{Factor}\,(\tau_{Z_i}, F_i)$ *i neka je preslikavanje* $g : Z_{1/F_1} \to Z_{2/F_2}$ *definisano sa* $g\,([z]_{F_1}) = [z]_{F_2}$ *za svako* $z \in Z_1$*. Dokazati da je preslikavanje* g (η_1, η_2)*-neprekidno.*

Zadatak 108. *Za proizvoljan topološki prostor* (X, τ_X), $X_0 \subseteq X$ *i relaciju ekvivalencije* E *na skupu* X *neka je*

$\lambda := \mathrm{Factor}(\tau_X, E)$, $\pi : X \to X_{/E}$ *prirodna projekcija indukovana sa* E, $\lambda_0 := \mathrm{rel}_{\pi^{\rightharpoonup} X_0}(\lambda)$,

$\tau_{X_0} := \mathrm{rel}_{X_0}(\tau_X)$, $E_0 := E \cap (X_0)^2$, $\nu_0 := \mathrm{Factor}\,(\tau_{X_0}, E_0)$ *i* $f : X_{/E_0} \to \pi^{\rightharpoonup} X_0$ *preslikavanje definisano sa* $f([x]_{E_0}) = [x]_E$*. Dokazati da* f **nije** (ν_0, λ_0)*-homeomorfizam (iako na osnovu zadatka* 106. f *mora biti* (ν_0, λ_0)*-neprekidna bijekcija) ako je*

(1) $X = [0;4]$, $\tau_X = \mu_{[0;4]}$, $X_0 = [0;1) \cup (1;2) \cup (3;4]$, $E = \triangle_X \cup \{0,1,4\}^2$;

(2) $X = [0;1]$, $\tau_X = \mu_{[0;1]}$, $X_0 = [0;1] \setminus \mathbb{Q}$, $E = \ker(p)$ *gde je* $p : X \to X_0 \cup \{1\}$ *definisano sa* $p(x) = x$ *za* $x \in X_0$ *odnosno* $p(x) = 1$ *za* $x \in X \setminus X_0$;

(3) $X = \mathbb{R}^2$, $\tau_X = \mu_{\mathbb{R}^2}$, $X_0 = \{(x, x+1) : x \in [0;+\infty)\} \cup \{(x, x-1) : x \in (-\infty;0)\}$, $E = \ker(p)$ *gde je* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definisano sa* $p(x,y) = x$ *za* $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 109. *Neka je* $((X_i, \tau_i) : i \in I)$ *familija topoloških prostora,* $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ *i* $\tau := \{L \subseteq X : \forall i \in I\ (L \cap X_i \in \tau_i)\}$ *(videti zadatak* 69.*). Neka je* $(S, \tau_S) = \bigoplus_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ *topološka suma date familije prostora. Na skupu* $S = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$ *definišimo relaciju ekvivalencije* E *sa*

$$(a,i)E(b,j) \iff a = b\,.$$

Dokazati da je prostor $\big(S_{/E}, \mathrm{Factor}(\tau_S, E)\big)$ *homeomorfan sa prostorom* (X, τ).

Zadatak 110. *Neka je* $X := \big\{p \in {}^{[0;1]}\mathbb{R} \,:\, p \text{ je polinomska funkcija}\big\}$, $l, l_1 \in X$ *definisani sa* $l(t) := 1 + t^2$ *i* $l_1(t) := t - 1$ *za* $t \in [0;1]$, E *i* E_1 *relacije ekvivalencije na* X *definisane sa*

$$p\,E\,q \iff \exists r \in X\ (p - q = r \cdot l)$$

i

$$p\,E_1\,q \iff \exists r \in X\ (p - q = r \cdot l_1)$$

za $p, q \in X$, $d : X \times X \to [0; +\infty)$ *metrika na* X *definisana sa* $d(p,q) := \sup\limits_{t\in[0;1]} |p(t) - q(t)|$ *za* $p, q \in X$ *i* $\tau := \mathrm{Top_m}(d)$.

(1) *Dokazati da je* $\big(X_{/E}, (\mathrm{Factor}(\tau, E)\big)$ *antidiskretan prostor.*
(2) *Dokazati da je* $\big(X_{/E_1}, (\mathrm{Factor}(\tau, E_1)\big)$ *homeomorfan sa* $\big([0;1], \mu_{[0;1]}\big)$.

2.10 Aksiome separacije

Zadatak 111. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Ako je* X T_1 *prostor, onda* $x \in X$ *nije izolovana tačka prostora ako i samo ako je svaka okolina tačke* x *beskonačna;*
(2) *Ako je* X *konačan prostor, onda je* X *je* T_1 *prostor ako i samo ako je* X *je diskretan prostor.*

Zadatak 112. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Topološki prostor* (X, τ_X) *je* `Hausdorff`*-ov ako i samo ako je* Δ_X $\tau_X \times' \tau_X$*-zatvoren podskup skupa* X^2*;*
(2) *Ako* $f, g : X \xrightarrow{\mathsf{c}} Y$ *i ako je* Y `Hausdorff`*-ov prostor, onda je* $S := \{x \in X \ :\ f(x) = g(x)\}$ τ_X*-zatvoren skup;*
(3) *Ako se dve funkcije* $f, g : X \xrightarrow{\mathsf{c}} Y$, *gde je* Y `Hausdorff`*-ov prostor, poklapaju na nekom gustom skupu tačaka, onda je* $f = g$.

Zadatak 113. **(1)** *Dokazati da je prostor iz* **P 7** T_0 *prostor koji nije* T_1 *prostor i nije regularan.*
(2) *Dokazati da su prostori iz* **P 9** *i* **P 10** T_2 *prostori koji nisu regularni.*

Zadatak 114. *Ako je X beskonačan* `Hausdorff`*-ov prostor dokazati da postoji niz nepraznih po parovima disjunktnih otvorenih skupova.*

Zadatak 115. *Ako je A beskonačan podskup* `Hausdorff`*-ovog prostora X pokazati da postoji diskretan podskup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ prostora X takav da važi $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$.*

Zadatak 116. *Neka je X* `Hausdorff`*-ov prostor i $A \subseteq X$ zatvoren beskonačan diskretan podprostor. Dokazati da postoji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ takav da ni za jedan konačan skup $S \subseteq X$ ne važi $\bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap S \neq \varnothing\} = X$.*

Zadatak 117. *Neka je X* `Hausdorff`*-ov prostor i $A \subseteq X$ njegov retrakt. Dokazati da je A zatvoren skup.*

Zadatak 118. *Neka je X regularan i $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ diskretan podprostor gde $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. Dokazati da postoji niz $(U_n : n \in \mathbb{N})$ otvorenih skupova tako da $x_n \in U_n$ i $U_i \cap U_j = 0 \Leftarrow i \neq j$.*

Zadatak 119. *Dati su $f : X \to Y$, gde je Y regularan prostor, i τ_X-gust $S \subseteq X$ tako da za svako $x \in X$ važi $f_x : (S_x, \mathrm{rel}_{S_x}(\tau_X)) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y)$, gde je $S_x := S \cup \{x\}$ i $f_x := f \restriction S_x$. Dokazati da je f (τ_X, τ_Y)-neprekidno.*

Zadatak 120. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Ako su $A, B \subseteq X$ neprazni nul podskupovi prostora X takvi da je $A \cap B = \varnothing$, onda postoji neko $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ tako da $A = f^{\leftharpoondown}\{0\}$ i $B = f^{\leftharpoondown}\{1\}$;*
(2) *Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$ skup $F_n \subseteq X$ nul skup prostora X, onda je i $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ nul skup prostora X.*

Zadatak 121. *Dokazati da su za proizvoljan podskup $A \subseteq X$ sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) *A je nul skup;*
(2) *A je oblika $f^{\leftharpoondown}F$ za neki zatvoren skup $F \subseteq [0;1]$ i neko preslikavanje $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1]$;*

(3) *A je oblika* $f^{\leftharpoonup}\{0\}$ *za neko* $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$*;*
(4) *A je oblika* $f^{\leftharpoonup}F$ *za neki zatvoren* $F \subseteq \mathbb{R}$ *i neko* $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$*;*
(5) *Postoje savršeno normalan prostor* Y*, neki zatvoren skup* $F \subseteq Y$ *i neko preslikavanje* $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} Y$ *tako da je* $A = f^{\leftharpoonup}F$*.*

Zadatak 122. *Neka je* (X, τ) *proizvoljan prostor,*

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1],\ U \in \mu_{[0;1]} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R} \ \ i\ f^{\rightharpoonup}X \ \ \text{je ograničen podkup od } \mathbb{R},\ U \in \mu_{\mathbb{R}} \right\}$$

i

$$\mathcal{B}_3 := \left\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R},\ U \in \mu_{\mathbb{R}} \right\}$$

Dokazati da važi $\mathrm{Top}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{Top}(\mathcal{B}_2) = \mathrm{Top}(\mathcal{B}_3) \subseteq \tau$*.*

Zadatak 123. *Dokazati da su za proizvoljan prostor* (X, τ) *sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) (X, τ) *je potpuno regularan prostor;*
(2) $\tau = \mathrm{Top}\Big(\big\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f \in \mathcal{F},\ U \in \mu_{\mathbb{R}} \big\}\Big)$ *za neko* $\mathcal{F} \subseteq {}^{X}\mathbb{R}$*;*
(3) $\tau = \mathrm{Top}\Big(\big\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f \in \mathcal{F},\ U \in \mu_{\mathbb{R}} \big\}\Big)$ *za neku familiju* $\mathcal{F} \subseteq {}^{X}\mathbb{R}$ *ograničenih funkcija;*
(4) $\tau = \mathrm{Top}\Big(\big\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f \in \mathcal{F},\ U \in \mu_{[0;1]} \big\}\Big)$ *za neko* $\mathcal{F} \subseteq {}^{X}[0;1]$*;*
(5) $\tau = \mathrm{Top}\Big(\big\{ f^{\leftharpoonup}U \ : \ f \in \mathcal{F},\ U \in \mu_{[0;1]} \big\}\Big)$ *za* $\mathcal{F} = \big\{ f \in {}^{X}[0;1] \ : \ f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1] \big\}$*.*

Zadatak 124. *Ako je* X *normalan prostor i* $F \subseteq X$ *zatvoren* $\mathtt{G}_\delta$ *skup, onda je* F *nul skup. Dokazati.*

Zadatak 125. *Neka je* $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$*,* $L := \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}$*,* $p := (0, -1)$ *i* $X := Y \cup \{p\}$*.*

Ako je $z = (x, 0) \in L$ definišimo skupove $U_z := \{(x, t) :\ 0 < t \leq 2\}$, $V_z := \{(x + t, t) :\ 0 < t \leq 2\}$ i familiju $\mathcal{N}_z := \big\{\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T] :$ T je konačan skup$\big\}$.

Ako je $z \in Y \setminus L$ definišimo $\mathcal{N}_z := \big\{\{z\}\big\}$.

Za $n \in \mathbb{N}_0$ definišimo skupove $W_n := \{p\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > n,\ y \geq 0\}$ i familiju $\mathcal{N}_p := \big\{W_n :\ n \in \mathbb{N}_0\big\}$.

Jednostavno se proverava da familija $\big\{\mathcal{N}_z :\ z \in X\big\}$ zadovoljava uslove (1) i (2) iz zadatka 18. Označimo sa τ_X onu jedinstvenu topologiju τ na skupu X takvu da joj je za svako $x \in X$ familija $\mathcal{N}_x$ lokalna baza u tački x. Stavimo $\tau_Y := \mathrm{rel}_Y\big(\tau_X\big)$.

(1) *Dokazati da je svaki element familije $\mathcal{N}_z$ τ_X-zatvoren skup, za svako $z \in Y$. Dokazati da je (Y, τ_Y) potpuno regularan prostor.*
(2) *Neka su $f : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ i $z \in L$ takvi da je $f(z) = 0$. Dokazati da postoji prebrojiv $S \subseteq U_z \cup V_z$ tako da je $f(x) = 0$ za svako $x \in (U_z \cup V_z) \setminus S$.*
(3) *Neka su $f : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$, $z \in L$ i $S \subseteq U_z \cup V_z$ takvi da je S beskonačan i $f(x) = 0$ za svako $x \in S$. Dokazati da je $f(z) = 0$.*
(4) *Neka su $f : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ i $B' \subseteq (r; r + 1) \times \{0\}$ beskonačan skup takvi da je $f(z) = 0$ za svako $z \in B'$. Dokazati da postoji beskonačan skup $B'' \subseteq (r + 1; r + 2) \times \{0\}$ tako da je $f(z) = 0$ za svako $z \in B''$.*
(5) *Dokazati da važi $\mathrm{cl}_{\tau_X}(W_{n+2}) \subseteq W_n$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$.*
(6) *Dokazati da je (X, τ_X) regularan prostor koji nije potpuno regularan. Dokazati da (Y, τ_Y) nije normalan prostor.*

Zadatak 126. *Neka je X normalan prostor i $\{U_1, \ldots, U_n\}$ otvoren pokrivač od X. Dokazati da postoje zatvoreni skupovi $F_i \subseteq U_i$, $1 \leq i \leq n$, tako da je $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$.*

Zadatak 127. *Neka je $X := \mathbb{R}^2$ i $\tau := \tau_1 \times' \tau_1$, gde je τ_1 topologija iz* **P11**. *Dokazati da (X, τ) nije normalan prostor.*

Zadatak 128. *Svaki nuldimenzionalan prostor je potpuno regularan. Dokazati.*

Zadatak 129. *Neka je X potpuno regularan i ima bazu sačinjenu od prebrojivih skupova. Dokazati da je X nuldimenzionalan.*

Zadatak 130. *Dokazati da je prostor iz* **P 8** *metrizabilan nuldimenzionalan prostor.*

2.11 Pokrivačka svojstva

Zadatak 131. *Neka je $\mathcal{B}$ baza za (X, τ). Dokazati da je (X, τ)* `Lindelöf`*-ov ako i samo ako za svako $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ za koje je $\bigcup \mathcal{A} = X$ postoji prebrojiv $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $\bigcup \mathcal{A}' = X$.*

Zadatak 132. *Neka je $\mathcal{B}$ baza za (X, τ). Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) *Za svako $Y \subseteq X$ podprostor $(Y, \mathrm{rel}_Y(\tau_X))$ je* `Lindelöf`*-ov;*
(2) *Za svaki otvoren $Y \subseteq X$ podprostor $(Y, \mathrm{rel}_Y(\tau_X))$ je* `Lindelöf`*-ov;*
(3) *Za svako $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ postoji prebrojiva podfamilija $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}'$.*

Zadatak 133. *Svaki* `Lindelöf`*-ov, regularan prostor mora biti normalan. Dokazati.*

Zadatak 134. *Neka je X regularan,* `Lindelöf`*-ov prostor i $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač. Dokazati da postoji otvoren, lokalno konačan pokrivač $\mathcal{V}$ takav da za svaki $A \in \mathcal{V}$ postoji neki $B \in \mathcal{U}$ tako da važi $A \subseteq B$.*

Zadatak 135. *Svaki podprostor* `Sorgenfrey`*-eve prave iz* **P 11** *je* `Lindelöf`*-ov. Dokazati.*

Zadatak 136. `Sorgenfrey`*-eva prava iz* **P 11** *je primer normalnog prostora čiji kvadrat nije normalan. Dokazati.*

Zadatak 137. *Ako je $(\mathbb{R}, \tau)$* `Sorgenfrey`*-eva prava iz* **P 11**, *dokazati da ne postoji nijedno strogo linearno uređenje $\prec$ na skupu $\mathbb{R}$ tako da važi $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$.*

Zadatak 138. *Dokazati da je svaki kompaktan podskup* `Sorgenfrey`*-eve prave iz* **P 11** *prebrojiv.*

Zadatak 139. *Kompaktni podskupovi prostora* ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *imaju praznu unutrašnjost. Dokazati.*

Zadatak 140. *Definišimo, za* $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$*, skup*

$$\mathrm{Dr}(A) := \big\{x \upharpoonright \{1, \ldots, n\} \ : \ n \in \mathbb{N},\ x \in A\big\} \cup \{\emptyset\}$$

i, za $M \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$*, skup*

$$\mathrm{Gr}(M) := \big\{x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}\ (x \upharpoonright \{1, \ldots, n\} \in M)\big\}$$

Za skup $M \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ *kažemo da se konačno grana pri* $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ *ako je skup* $\Big\{k \in \mathbb{N} \ : \ s\,\hat{}\,\underline{(k)} \in M\Big\}$ *konačan; skup* M *se konačno grana ako se konačno grana pri svakom* $s \in M$ *i ako je skup* $\Big\{k \in \mathbb{N} \ : \ \underline{(k)} \in M\Big\}$ *konačan.*

(1) *Dokazati da za proizvoljan skup* $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *važi* $\mathrm{Gr}(\mathrm{Dr}(A)) = \overline{A}$*.*

(2) *Ako je* $K \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *zatvoren skup, dokazati da je* K *kompaktan ako i samo ako se skup* $\mathrm{Dr}(K)$ *konačno grana.*

Zadatak 141. *Dokazati da prostor* ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *nije* σ*-kompaktan.*

Zadatak 142. *Neka je* (X, d) *pseudometrički prostor,* $\tau := \mathrm{Top_m}(d)$ *i* $K \subseteq X$ τ*-kompaktan skup.*
(1) *Ako je* $a \in K^c$ *dokazati da postoji neko* $b \in K$ *tako da je* $d(a, b) = \mathrm{Dist}(\{a\}, K)$*.*
(2) *Ako je* $F \subseteq X$ τ*-zatvoren skup tako da važi* $K \cap F = \varnothing$ *dokazati da je* $\mathrm{Dist}(K, F) > 0$*.*

Zadatak 143. *Ako je* (X, d) *metrički prostor,* $\tau := \mathrm{Top_m}(d)$ *i* d_0 *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$ *dokazati da* **(1)⇒(2)⇒(3)** *ako:*
(1) (X, τ) *je kompaktan prostor;*
(2) *Svaka* $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$*-neprekidna funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *je* (d, d_0)*-ravnomerno neprekidna;*
(3) (X, d) *je kompletan metrički prostor.*

Zadatak 144. *Neka je* (X_1, d_1) *pseudometrički prostor takav da je topologija* $\tau_1 := \mathrm{Top_m}(d)$ *kompaktna. Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Za proizvoljan otvoren pokrivač* $\mathcal{U} \subseteq \tau_1$ *skupa* X *postoji realan broj* $\varepsilon > 0$ *takav da za svako* $x \in X$ *postoji neko* $U \in \mathcal{U}$ *tako da važi* $\mathrm{K}_{d_1}[x; \varepsilon) \subseteq U$*;*

(2) *Ako je* (X_2, d_2) *proizvoljan pseudometrički prostor i* $\tau_2 := \mathrm{Top_m}(d_2)$*, onda svaka* (τ_1, τ_2)*-neprekidna funkcija mora biti* (d_1, d_2)*-ravnomerno neprekidna.*

Zadatak 145. *Neka su* $F_s \subseteq X$*,* $s \in S$*, zatvoreni podskupovi topološkog prostora* (X, τ) *takvi da postoji neko* $s_0 \in S$ *za koje je* F_{s_0} *kompaktan skup. Ako je* $U \subseteq X$ *otvoren skup takav da je* $U \supseteq \bigcap\limits_{s \in S} F_s$*, onda postoji neprazan konačan skup* $P \subseteq S$ *tako da je* $U \supseteq \bigcap\limits_{s \in P} F_s$*. Dokazati.*

Zadatak 146. *Neka je* (X, τ) `Hausdorff`*-ov kompaktan prostor i* $F \subseteq X$ *zatvoren* $\mathtt{G}_\delta$ *skup. Dokazati da postoji neka prebrojiva familija* $\mathcal{V}$ *otvorenih skupova sa osobinom da za svaki otvoren skup* $U \supseteq F$ *postoji neko* $V \in \mathcal{V}$ *tako da je* $F \subseteq V \subseteq U$*.*

Zadatak 147. *Neka su* $K_i \subseteq X$*, za* $i = \overline{1, n}$*, neprazni, zatvoreni, kompaktni, po parovima disjunktni podskupovi potpuno regularnog prostora* (X, τ) *i neka je* $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$*. Dokazati da postoji preslikavanje* $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ *tako da važi* $f^{\rightharpoonup} K_i = \{r_i\}$ *za svako* $i = \overline{1, n}$*.*

Zadatak 148. *Opisati sve kompaktne podskupove prostora iz* **P 6***.*

Zadatak 149. *Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Ako za tačku* $x \in X$ *prostora* (X, τ) *postoji neki otvoren skup* $V \ni x$ *tako da je podprostor* $\big(\overline{V}, \mathrm{rel}_{\overline{V}}(\tau)\big)$ *potpuno regularan, onda za svaki zatvoren skup* $F \not\ni x$ *postoji preslikavanje* $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ *tako da važi* $f(x) = 0$ *i* $f^{\rightharpoonup} F \subseteq \{1\}$*;*

(2) *Svaki* `Hausdorff`*-ov lokalno kompaktan prostor je* `Tychonoff`*-ski;*

(3) *Ako je* (X, τ) `Hausdorff`*-ov lokalno kompaktan prostor i* $x \in U \in \tau$*, onda postoji neko* $V \in \tau$ *tako da je* $\overline{V}$ *kompaktan i pritom je* $x \in V \in \overline{V} \subseteq U$.

Zadatak 150. **(1)** *Dokazati da su za proizvoljan topološki prostor* (X, τ) *sledeća dva uslova ekvivalentna:*

(a) *Prostor je lokalno kompaktan,* σ*-kompaktan;*

(b) *Postoje otvoreni skupovi* U_n*, za* $n \in \mathbb{N}$*, tako da je* $\overline{U_n}$ *kompaktan skup za svako* $n \in \mathbb{N}$*, i tako da važi* $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

(2) *Neka je* (X, τ) *regularan prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i pretpostavimo da postoji niz* $(K_n : n \in \mathbb{N})$ *kompaktnih skupova sa osobinom da za svaki kompaktan skup* $A \subseteq X$ *postoji* $m \in \mathbb{N}$ *tako da je* $A \subseteq K_m$*. Dokazati da je prostor lokalno kompaktan,* σ*-kompaktan.*

Zadatak 151. *Dokazati da nijedan od prostora* ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Q}$ *nije lokalno kompaktan.*

Zadatak 152. *Dokazati da nijedan od prostora iz* **P 7** - **P 10** *nije lokalno kompaktan.*

Zadatak 153. *Neka je* $f : X \to Y$ (τ_X, τ_Y)*-zatvoreno preslikavanje tako da je skup* $f^{\leftharpoonup}\{y\}$ *kompaktan za svako* $y \in Y$*. Dokazati da je tada i* $f^{\leftharpoonup}K$ *kompaktan skup za svaki kompaktan skup* $K \subseteq Y$.

Zadatak 154. *Neka je* (X, τ_1) *kompaktan, a* (X, τ_2) `Hausdorff`*-ov prostor tako da je* $\tau_2 \subseteq \tau_1$*. Dokazati da je* $\tau_2 = \tau_1$.

Zadatak 155. *Ako su* X, $\prec$ *i* $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$ *kao u* **P 16** *dokazati da je* (X, τ) `Hausdorff`*-ov kompaktan prostor koji nije metrizabilan.*

Zadatak 156. *Neka je* (X, τ) *prostor iz* **P 14** *i*

$$K := \left\{ x \in X \ : \ \sup_{t \in [0;1]} |x(t)| \leq 1 \right\}.$$

Dokazati da K *nije kompaktan podskup prostora* (X, τ).

Zadatak 157. *Dokazati da prostor iz* **P 13** *nije lokalno kompaktan.*

Zadatak 158. *Dokazati da* $A := \{x \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \, : \, x : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}\}$ *nije kompaktan podskup prostora* ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

Zadatak 159. *Konstruisati kompaktifikaciju realne prave u kojoj je njen narast homeomorfan sa* $[0;1]^2$.

Zadatak 160. *Neka je* $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}$. *Dokazati da je prostor* $\big(X_{/E}, \mathrm{Factor}(\tau_X, E)\big)$ *homeomorfan sa prostorom* (Y, τ_Y) *ako je* $X = [0;1]^2$, $\tau_X = \mu_X$ *i*
(1) *relacija* $E \subseteq X^2$ *je definisana sa*

$$(x_1, y_2)E(x_1, y_2) \text{ ako i samo ako } x_1 = x_2 \ \wedge \ (y_1 = y_2 \ \vee \ \{y_1, y_2\} \subseteq \{0,1\})$$

$Y = [0;1] \times S$ *i* $\tau_Y = \mu_{[0;1]} \times' \mu_S$;
(2) $E \subseteq X^2$ *je ona jedinstvena relacija ekvivalencije na* X *koja ima tačno jednu četvoročlanu klasu –* $\{0,1\}^2$, *dvočlane klase –* $\{(u,0),(u,1)\}$ *za* $u \in (0;1)$ *i* $\{(0,v),(1,v)\}$ *za* $v \in (0;1)$ *i jednočlane klase –* $\{(u,v)\}$ *za* $(u,v) \in (0;1)^2$; $Y = S \times S$ *i* $\tau_Y := \mu_S \times' \mu_S$;
(3) *relacija* $E \subseteq X^2$ *je definisana kao u* (2); $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ *je skup koji se dobija rotiranjem jedinične kružnice*

$$\mathcal{K} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y = 0, \, (x-2)^2 + z^2 = 1\big\}$$

oko z*-ose* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = 0, \, y = 0\}$ *(uobičajeno je da se za skup* Y *koristi termin* torus) *i* $\tau_Y = \mu_Y$.

Zadatak 161. *Neka je* $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}$, $X := [0;1]$ *i* $\tau_X := \mu_X$.
(1) *Ako je* $E := \Delta_X \cup \{0,1\}^2$ *dokazati da je prostor* $\big(X_{/E}, \mathrm{Factor}(\tau_X, E)\big)$ *homeomorfan sa prostorom* (S, μ_S).
(2) *Neka je* F *relacija ekvivalencije na skupu* S *definisana sa*

$$(x_1, y_1)F(x_2, y_2) \iff \Big((x_1, y_1) = (x_2, y_2) \vee (x_1, y_1) = (-x_2, -y_2)\Big)$$

Dokazati da je prostor $\big(S_{/F}, \mathrm{Factor}(\mu_S, F)\big)$ *homeomorfan sa prostorom* (S, μ_S).

2.12 Povezanost

Zadatak 162. *Neka je (X,d) povezan metrički prostor, tj. takav da je $\big(X, \mathrm{Top_m}(d)\big)$ povezan topološki prostor. Ako su $a, b \in X$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$ proizvoljni dokazati da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in X$ tako da je $a = x_0$, $b = x_n$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ za $i = \overline{1, n}$.*

Zadatak 163. *Neka je (X,τ) proizvoljan topološki prostor.*

(1) *Neka su $A_i \subseteq X$, za $i \in I$, povezani skupovi takvi da postoji neko $i_0 \in I$ sa osobinom da za svako $i \in I$ mora biti $A_{i_0} \cap \overline{A_i} \neq \varnothing$ ili $\overline{A_{i_0}} \cap A_i \neq \varnothing$. Dokazati da skup $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ tada mora biti povezan.*

(2) *Ako je $A \subseteq X$ povezan skup i $B \subseteq X$ skup takav da je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, onda je i skup B povezan. Dokazati.*

Zadatak 164. *Neka je (X,τ) proizvoljan prostor. Za $x, y \in X$ definišemo da je $x \sim y$ ako postoji neki povezan podskup $S \subseteq X$ takav da važi $\{x, y\} \subseteq S$. Dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Ovako definisana relacija $\sim$ na skupu X je relacija ekvivalencije;*

(2) *Za svako $x \in X$ klasa ekvivalencije $[x]_\sim$ je komponenta povezanosti tačke x u prostoru X. Skup $[x]_\sim$ je maksimalan povezan podskup prostora X, tj. ako je $M \subseteq X$ povezan skup takav da je $[x]_\sim \subseteq M$, onda mora biti $M = [x]_\sim$;*

(3) *Ako je S maksimalan povezan podskup od X, onda mora biti $S = [x]_\sim$ za svako $x \in S$;*

(4) *Skup $[x]_\sim$ je zatvoren za svako $x \in X$.*

Zadatak 165. *Neka je (X,τ) proizvoljan prostor i neka je $C \subseteq X$ komponenta povezanosti prostora (X,τ). Dokazati da tada za proizvoljnu tačku $x \in X$ važi: $x \in C$ ako i samo je C komponenta povezanosti tačke x u prostoru (X,τ).*

Zadatak 166. *Neka je (X,τ) proizvoljan prostor. Dokazati da je za proizvoljnu tačku prostora, komponenta povezanosti te tačke podskup kvazikomponente povezanoste te tačke. Dokazati da je familija svih kvazikomponenti povezanosti tačaka datog prostora particija skupa X.*

Zadatak 167. *Ako je (X,τ) kompaktan* `Hausdorff`*-ov topološki prostor dokazati da se za proizvoljnu tačku prostora komponenta povezanosti te tačke i kvazikomponenta povezanosti te tačke poklapaju.*

Zadatak 168. *Neka je (X,τ) prostor iz* **P 7**, **P 9** *ili* **P 10**. *Ako $f : (X,\tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ dokazati da je f konstantna funkcija. Dokazati da je (X,τ) povezan prostor.*

Zadatak 169. *Ako je (X,τ) proizvoljan topološki prostor dokazati sledeća tvrđenja:*

(1) *Ako su $A, B \subseteq X$ zatvoreni skupovi takvi da je i $A \cup B$ i $A \cap B$ povezan skup, onda skupovi A i B moraju biti povezani;*

(2) *Ako je (X,τ) povezan prostor i $G \subseteq X$ otvoren skup takav da je skup* $\mathrm{bd}(G)$ *povezan, onda je skup $X \setminus G$ povezan.*

Zadatak 170. *Neka je (X,τ) povezan topološki prostor i Y proizvoljan skup. Pretpostavimo da je $f : X \to Y$ lokalno konstantno preslikavanje, tj. takvo da za svaku tačku $x \in X$ postoji neki otvoren skup $U \in \tau_X$ tako da je $x \in U$ i tako da je skup $f^{\rightharpoonup}U$ jednočlan. Dokazati da je preslikavanje f konstantno.*

Zadatak 171. *Neka je dato nekonstantno preslikavanje $f : (X,\tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y,\tau_Y)$, i neka je (X,τ_X) povezan prostor. Dokazati da skup $f^{\rightharpoonup}X$ ne može biti diskretan podskup prostora (Y,τ_Y). Ako je još i (Y,τ_Y)* T_1 *prostor, dokazati da je onda skup $f^{\rightharpoonup}X$ beskonačan i gust u sebi (tj. skup bez izolovanih tačaka).*

Zadatak 172. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n > 1$.*

(1) *Dokazati da ne postoji nijedno injektivno preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$.*

(2) *Dokazati da ni za jedno strogo linearno uređenje* $\prec$ *na skupu* $\mathbb{R}^n$ *ne može da važi* $\mu_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{lot}(\prec)$.

Zadatak 173. *Ako su* X, $\prec$ *i* $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$ *kao u* **P 16** *dokazati da je* (X, τ) *povezan prostor koji nije put-povezan.*

Zadatak 174. **(1)** *Dokazati da je skup* $A \subseteq \mathbb{R}$ *povezan ako i samo ako za svako* $x, y \in A$ *važi* $(x; y) \subseteq A$.

(2) *Dokazati da je skup* $A \subset \mathbb{R}$ *povezan ako i samo ako postoje* $x, y \in \mathbb{R}$ *tako da je* $x \leq y$ *i*

$$A = [x; y) \text{ ili } A = [x; +\infty) \text{ ili } A = (x; y] \text{ ili } A = (-\infty; y] \text{ ili } A = [x; y] \text{ ili } \\ A = (x; y) \text{ ili } A = (x; +\infty) \text{ ili } A = (-\infty; y).$$

Zadatak 175. *Dokazati da su za proizvoljan prostor* (X, τ) *sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) (X, τ) *je lokalno povezan prostor;*

(2) *Za svaku tačku* $x \in X$ *i svaku otvorenu okolinu* $U \in \tau$ *tačke* x *postoji neki povezan skup* $P \subseteq X$ *takav da je* $x \in \mathrm{int}(P) \subseteq P \subseteq U$;

(3) *Komponente povezanosti otvorenih podprostora prostora* (X, τ) *su otvoreni skupovi.*

Zadatak 176. **(1)** *Dokazati da su prostori iz* **P 7** *i* **P 10** *lokalno povezani.*
(2) *Dokazati da prostori iz* **P 8** *i* **P 9** *nisu lokalno povezani.*

Zadatak 177. *Dokazati da je svaki retrakt lokalno povezanog prostora i sam lokalno povezan.*

Zadatak 178. *Dokazati da za svaki neprazan otvoren skup* $U \subseteq \mathbb{R}$ *postoji prebrojiva familija* $\mathcal{I}$ *po parovima disjunktnih otvorenih intervala takva da je* $U = \bigcup \mathcal{I}$.

Zadatak 179. *Ako su* f *i* g *putevi u prostoru* (X, τ) *takvi da je* $f(1) = g(0)$, *onda je i* $f * g$ *put u prostoru* (X, τ). *Dokazati.*

Zadatak 180. *Pretpostavimo da je* (X, τ) *povezan prostor takav da za svaku tačku* $x \in X$ *postoji otvoren skup* $U \ni x$ *sa osobinom da za svaku tačku* $z \in U$ *postoji neki put* $f : [0;1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ *takav da je* $f(0) = x$ *i* $f(1) = z$. *Dokazati da je* (X, τ) *put povezan prostor.*

Zadatak 181. *Dokazati da su za otvoren skup* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) *Za svako* $u, v \in U$ *tako da je* $u \neq v$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b = (b_0, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$ *koje ne dozvoljava samopreseke tako da je* $b_0 = u$, $b_n = v$ *i* $\mathrm{PG}(b) \subseteq U$;
(2) *Za svako* $u, v \in U$ *tako da je* $u \neq v$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b = (b_0, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$ *koje definiše izlomljenu liniju tako da je* $b_0 = u$, $b_n = v$ *i* $\mathrm{PG}(b) \subseteq U$;
(3) U *je put povezan skup;*
(4) U *je povezan skup.*

Zadatak 182. *Ako je* $n \in \mathbb{N}$ *dokazati da je*

$$S_n := \left\{ b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n \,:\, b \text{ ne dozvoljava samopreseke} \right\}$$

otvoren podskup od $\left(\mathbb{R}^2\right)^n$.

Zadatak 183. *Ako je* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *otvoren, povezan,* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$ *koje ne dozvoljava samopreseke tako da je* $\mathrm{PG}(b) \subseteq U$, *dokazati da je i* $U \setminus \mathrm{PG}(b)$ *povezan.*

Zadatak 184. *Naći primer povezanog podskupa od* $\mathbb{R}^2$ *koji se može prikazati kao unija niza nepraznih po parovima disjunktnih zatvorenih podskupova od* $\mathbb{R}^2$.

Zadatak 185. *Neka je* $A := (0,0)$, $B := (0,1)$, $H := [0;1] \times \{0\}$ *i za svako* $n \in \mathbb{N}$ *neka je* $L_n := \{1/n\} \times [0;1]$. *Neka je*

$$C := \{B\} \cup H \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$$

i neka je $\tau := \mu_C$ *topologija koju skup* C *nasleđuje od uobičajene topologije na skupu* $\mathbb{R}^2$. *Dokazati da je* (C, τ) *povezan prostor koji nije put povezan.*

Zadatak 186. *Dokazati da za svako preslikavanje* $f : [0;1] \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1]$ *postoji neki broj* $t \in [0;1]$ *takav da je* $f(t) = t$.

Zadatak 187. *Neka je preslikavanje* $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ *takvo da ni za jedno* $x \in \mathbb{R}$ *ne važi* $f(x) = x$. *Dokazati da ni za jedno* $x \in \mathbb{R}$ *ne važi* $f(f(x)) = x$.

Zadatak 188. *Neka je* $X := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ *i* $\tau := \mu_X$. *Dokazati da je prostor* (X, τ) *put povezan.*

Zadatak 189. *Dokazati da je prostor* $\mathbb{C}_u[0;1]$ *iz* **P 14** *put povezan.*

Zadatak 190. *Neka je* $r \in \mathbb{R}$ *i* $C := \{x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} : \lim\limits_n x(n) = r\}$. *Dokazati da je* C *povezan skup prostora* ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$.

Zadatak 191. (1) *Neka* $q : (X, \tau_X) \xrightarrow{q} (Y, \tau_Y)$ *i neka je* $q^{\leftarrow}\{y\}$ τ_X*-povezan skup za svako* $y \in Y$. *Ako je* $B \subseteq Y$ **bilo** τ_Y*-otvoren* **bilo** τ_Y*-zatvoren skup takav da je* $q^{\leftarrow}B$ τ_X*-povezan skup, dokazati da onda* B *mora biti* τ_Y*-povezan.*

(2) *Dat je prostor* (X, τ) *i relacija ekvivalencije* E *na skupu* X *definisana sa*

$$xEy \iff \exists C \subseteq X \ (\{x, y\} \subseteq C \ \wedge \ C \text{ je } \tau \text{ povezan})$$

Dokazati da su komponente povezanosti prostora $\big(X_{/E}, \mathrm{Factor}(\tau, E)\big)$ *jednoelementni skupovi.*

2.13 Hiperprostori podskupova

Zadatak 192. *Neka je* $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ *i* $(\mathcal{A}, \lambda)$ $\mathcal{A}$*-hiperprostor nad* (X, τ).
(1) *Ako je* $\mathcal{A} := \{\{x\} : x \in X\}$ *dokazati da je preslikavanje* $f : X \to \mathcal{A}$ *definisano sa* $f(x) = \{x\}$ (τ, λ)*-homeomorfizam.*
(2) *Dokazati da je preslikavanje* $u : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ *definisano sa* $u(A, B) := A \cup B$ $(\lambda \times' \lambda, \lambda)$*-neprekidno.*

Zadatak 193. *Neka je* $(\mathcal{F}, \lambda)$ *hiperprostor zatvorenih skupova prostora* (X, τ).
(1) *Neka je relacija* $R \subseteq X \times \mathcal{F}$ *definisana sa* $(x, K) \in R$ *ako i samo ako* $x \in K$. *Dokazati da ako je* τ *regularna topologija, onda je ova relacija* $\tau \times' \lambda$*-zatvoren skup.*
(2) *Neka je relacija* $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *definisana sa* $(K, L) \in R$ *ako i samo ako* $K \subseteq L$. *Dokazati da ako je* τ *regularna topologija, onda je ova relacija* $\lambda \times' \lambda$*-zatvoren skup.*
(3) *Neka je* τ *normalna topologija i relacija* $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *definisana sa* $(K, L) \in R$ *ako i samo ako* $K \cap L \neq \varnothing$. *Dokazati da je relacija* R $\lambda \times' \lambda$*-zatvoren skup.*

Zadatak 194. *Neka je* $(\mathcal{K}_i, \lambda_i)$ *hiperprostor kompaktnih skupova prostora* (X_i, τ_i), *za* $i = \overline{1,2}$. *Neka je* $(\mathcal{K}, \lambda)$ *hiperprostor kompaktnih skupova prostora* $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times' \tau_2)$.
(1) *Ako je* $f : (X_1, \tau_1) \xrightarrow{\mathsf{c}} (X_2, \tau_2)$ *dokazati da je preslikavanje* $g : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ *definisano sa* $g(K) := f^{\rightharpoonup} K$ (λ_1, λ_2)*-neprekidno.*
(2) *Dokazati da je preslikavanje* $m : \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}$ *definisano sa* $m(K_1, K_2) := K_1 \times K_2$ $(\lambda_1 \times' \lambda_2, \lambda)$*-neprekidno.*

Zadatak 195. *Neka je* $X := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ je beskonačan}\}$, $Y := \mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus X$, (X, λ_1) X*-hiperprostor nad* $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$ *i* (Y, λ_2) Y*-hiperprostor nad* $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$.
(1) *Dokazati da je* $\lambda_1 = \tau$, *gde je* τ *topologija iz* **P 15**.
(2) *Dokazati da je* λ_2 *diskretna topologija.*

Zadatak 196. *Neka je* (X_1, τ_1) *hiperprostor nepraznih kompaktnih skupova prostora* (X, τ), *a* (X_2, τ_2) *hiperprostor nepraznih kompaktnih skupova prostora* (X_1, τ_1).
(1) *Ako je* $\mathcal{L} \in X_2$ *dokazati da je* $\bigcup \mathcal{L} \in X_1$.
(2) *Dokazati da je preslikavanje* $f : X_2 \to X_1$ *definisano sa* $f(\mathcal{L}) := \bigcup \mathcal{L}$ (τ_2, τ_1)*-neprekidno.*

Zadatak 197. *Neka je* $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ *i* $(\mathcal{A}, \lambda)$ $\mathcal{A}$*-hiperprostor nad prostorom* (X, τ).
(1) *Ako je* τ T_2 *topologija i* $U \in \tau$ *dokazati da je skup* $\{A \in \mathcal{A} : A \cap$

U je beskonačan$\}$ G_δ *skup prostora* $(\mathcal{A}, \lambda)$.
(2) *Ako je* τ T_3 *topologija koja zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti dokazati da je skup* $\{A \in \mathcal{A} : A$ *nema izolovanih tačaka*$\}$ G_δ *skup prostora* $(\mathcal{A}, \lambda)$.

Zadatak 198. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^2$ *i neka je* $(\mathcal{F}_0, \lambda)$ *hiperprostor nepraznih zatvorenih podskupova prostora* $(\mathbb{R}^2, \mu_{\mathbb{R}^2})$. *Neka je funkcija* $\rho : \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0 \to [0;1]$ *definisana sa*

$$\rho(A, B) := \min \{\mathrm{H}_d(A, B), 1\}$$

Dokazati da je $\lambda \setminus \mathrm{Top_m}(\rho) \neq \varnothing \neq \mathrm{Top_m}(\rho) \setminus \lambda$.

Zadatak 199. *Neka je* (X, d) *pseudometrički prostor,* $\tau := \mathrm{Top_m}(d)$ *i* $(\mathcal{C}_0, \lambda)$ *hiperprostor nepraznih, kompaktnih, zatvorenih skupova prostora* (X, τ). *Dokazati da je* $\mathrm{Top_m}\big(\mathrm{H}_{\mathcal{C}_0,d}\big) = \lambda$.

Zadatak 200. *Neka je* (X, τ) *hiperprostor nepraznih kompaktnih podskupova prostora* $(\mathbb{R}^2, \mu_{\mathbb{R}^2})$ *i* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^2$.
(1) *Ako je* A *zatvorena d-kugla i* $\mathcal{F} \neq \varnothing$ *konačan skup zatvorenih d-kugli u* $\mathbb{R}^2$ *tako da je* $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A$, *dokazati da postoji* $(\mu_{[0;1]}, \tau)$*-neprekidno preslikavanje* $h_{A;\mathcal{F}} : [0;1] \to X$ *tako da je* $h_{A;\mathcal{F}}(0) = A$, $h_{A;\mathcal{F}}(1) = \bigcup \mathcal{F}$ *i* $\varnothing \neq h_{A;\mathcal{F}}(t) \subseteq A$ *za svako* $t \in [0;1]$.
(2) *Neka je* (Y, λ) *proizvoljan topološki prostor,* $y \in Y$, $\mathcal{L}$ *lokalna baza u strogom smislu u tački* y *i* $m_i \in \mathbb{R}$ *za* $i \in \mathbb{N}$ *tako da je* $m_0 = 0$, $m_i < m_{i+1}$ *i* $\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} m_i = 1$. *Neka su dalje za* $i \in \mathbb{N}$ $r_i : [m_i; m_{i+1}] \to Y$ λ*-neprekidna preslikavanja tako da je* $r_i(m_{i+1}) = r_{i+1}(m_{i+1})$ *i tako da za svako* $U \in \mathcal{L}$ *postoji* $i_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $(r_i)^{\rightharpoonup}[m_i; m_{i+1}] \subseteq U$ *za svako* $i \geq i_0$. *Dokazati da je preslikavanje* $T : [0;1] \to X$, *gde* $T := \{(1, y)\} \cup \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} r_i$, λ*-neprekidno.*
(3) *Dokazati da je prostor* (X, τ) *put-povezan.*

2.14 Uniformni prostori

Zadatak 201. *Dokazati da postoje skup* $X \neq \varnothing$ *i neprazna familija refleksivnih relacija na skupu* X *koja ne zadovoljava uslov* (FB) *takva da je* *familija* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{R})$ *topologija na skupu* X.

Zadatak 202. *Neka je* $X \neq \varnothing$, $\mathcal{U}$ u-*baza na skupu* X *i* $\tau := \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$.
(1) *Ako je* $S \subseteq X$ *dokazati da je* $\mathrm{int}_\tau(S) = \{x \in S : \exists A \in \mathcal{U}\ (\mathrm{B}[x; A) \subseteq S)\}$.
(2) *Dokazati da za svako* $x \in X$ *i* $A \in \mathcal{U}$ *važi* $x \in \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[x; A))$, *kao i da je familija* $\{\mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[x; A)) : x \in X,\ A \in \mathcal{U}\}$ *baza topologije* τ.

Zadatak 203. *Neka je* $(X, \mathcal{U})$ *uniforman prostor,* $\tau := \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$ *i* $\lambda := \tau \times' \tau$.
(1) *Dokazati da ako je* $M \in \mathcal{U}$, *onda je i* $\mathrm{int}_\lambda(M) \in \mathcal{U}$ *i* $\mathrm{cl}_\lambda(M) \in \mathcal{U}$.
(2) *Dokazati da je familija* $\mathcal{V} := \left\{A \in \mathcal{U} : A \text{ je } \lambda - \text{otvoren i } A = A^{(-1}\right\}$ *baza uniformnosti* $\mathcal{U}$.
(3) *Dokazati da je familija* $\mathcal{V} := \left\{A \in \mathcal{U} : A \text{ je } \lambda - \text{zatvoren i } A = A^{(-1}\right\}$ *baza uniformnosti* $\mathcal{U}$.

Zadatak 204. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Ako je* $\mathcal{U}$ *uniformnost na skupu* $X \neq \varnothing$ *tako da je* $\Delta_X \in \mathcal{U}$, *onda je* $\mathcal{U} = \{\Delta_X\}_{\mathrm{u}}$ *i* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(X)$;
(2) *Ako su* $\mathcal{V}_1$ *i* $\mathcal{V}_2$ u-*baze na skupu* $X \neq \varnothing$ *tako da važi*

$$\forall A_1 \in \mathcal{V}_1 \exists A_2 \in \mathcal{V}_2\ (A_2 \subseteq A_1),$$

tada je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V}_1) \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{V}_2)$;
(3) *Ako je* $(X, \mathcal{U})$ *uniforman prostor, onda je* $\mathcal{U}$ `Hausdorff`*-ova uniformnost ako i samo ako je* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$ `Hausdorff`*-ova topologija;*
(4) *Ako je* $\varnothing \neq \Delta_X \subseteq E \subseteq X \times X$, *onda je* $\mathcal{U}_E := \{A \subseteq X \times X : E \subseteq A\} = \{E\}_{\mathrm{u}}$ *uniformnost na skupu* X *ako i samo ako je* E *relacija ekvivalencije na skupu* X. *U tom slučaju je* $S \in \mathrm{Top_u}(\mathcal{U}_E)$ *ako i samo ako je* S r*pravilan za* E *podskup od* X.

Zadatak 205. *Proveriti da li je* $\mathcal{V}_{\mathrm{u}}$ u-*baza na skupu* X *ako je:*
(1) $X = \mathbb{R}$ *i* $\mathcal{V} = \{R_\varepsilon : \varepsilon \in (0; +\infty)\}$, *gde je za* $\varepsilon \in (0; +\infty)$

$$R_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{Q} \ni |x - y| < \varepsilon\};$$

(2) *$X = \mathbb{R}$ i $\mathcal{V} = \{D_a : a \in \mathbb{R}\}$ gde je za $a \in \mathbb{R}$*

$$D_a = \Delta_{\mathbb{R}} \cup \{(x, y) : x > a, y > a\} ;$$

(3) *$X = \mathbb{R}$ i $\mathcal{V} = \{E\}$, gde je $E := \Delta_X \cup \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;*
(4) *$X = [0; 1]$ i $\mathcal{V} = \{E\}$, gde je $E := \Delta_X \cup \mathrm{Bd}_{\mu_{\mathbb{R}^2}}([0; 1]^2)$.*

Zadatak 206. (1) *Ako su skup X i familija $\mathcal{V}$ iz zadatka 205. pod (2), dokazati da je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$ diskretna topologija na skupu X.*
(2) *Ako su skup X i familija $\mathcal{V}$ iz zadatka 205. pod (3), dokazati da je $[0; +\infty)$ $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$-diskretan i $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$-gust skup.*

Zadatak 207. *Neka je $d : X \times X \to [0; +\infty)$ pseudometrika na skupu $X \neq \varnothing$ i neka je*

$$D_\varepsilon := \{(a, b) \in X^2 : d(a, b) < \varepsilon\}$$

za svako $\varepsilon \in (0; +\infty)$. Familija $\mathcal{V}_d := \{D_\varepsilon : \varepsilon \in (0; +\infty)\}$ je u-baza na skupu X, i to takva da je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V}_d) = \mathrm{Top_m}(d)$. Pritom je $\mathcal{V}_d \subseteq \mathrm{Top_m}(d) \times' \mathrm{Top_m}(d)$. Pseudometrika d je metrika ako i samo ako je $(\mathcal{V}_d)_\mathrm{u}$ `Hausdorff`-ova uniformnost. Dokazati.

Zadatak 208. *Ako su skup X i familija $\mathcal{V}$ iz zadatka 205. pod (1), dokazati da je $\mu_{\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$, kao i da postoji neka neprebrojiva celularna familija $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$.*

Zadatak 209. *Neka je $X := [0; 1]$, $\tau := \mu_{[0;1]}$, i*

$$\mathcal{O} := \{A \subseteq X \times X : \Delta_X \subseteq A \in \tau \times' \tau\} .$$

Dokazati da je $\mathcal{O}$ u-baza na skupu X i to takva da je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{O}) = \tau$.

Zadatak 210. *Neka je $X := \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}\}$. Za kompaktan skup $K \subseteq \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$ neka je*

$$D_{K,\varepsilon} := \left\{(f, g) \in X^2 : \sup_{t \in K} |f(t) - g(t)| < \varepsilon\right\}$$

Stavimo $\mathcal{V} := \{D_{K,\varepsilon} \,:\, K \subseteq \mathbb{R}$ *je kompaktan i* $\varepsilon \in (0;+\infty)\}$. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Familija* $\mathcal{V}$ *je* u*-baza na skupu* X*;*
(2) *Za svaki kompaktan skup* $K \subseteq \mathbb{R}$, *svako* $\varepsilon \in (0;+\infty)$ *i* $f \in X$, *skup* $\mathrm{B}[f; D_{K,\varepsilon})$ *je* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$*-otvoren;*
(3) *Za* $k \in \mathbb{N}$ *i* $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ *i* $U_i \in \mu_{\mathbb{R}}$, $i = \overline{1,k}$, *definišimo*

$$\mathrm{M}[a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k | U_1, \ldots, U_k] := \{f \in X \,:\, f^{\rightharpoonup}[a_i; b_i] \subseteq U_i \text{ za svako } i = \overline{1,k}\}\,.$$

Familija $\mathcal{B}$ *svih skupova ovog oblika predstavlja bazu topologije* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$.

Zadatak 211. *Neka je* $X \neq \varnothing$ *i* $\Delta_X \subseteq V_i \subseteq X^2$ *za* $i \in \mathbb{N}_0$, *gde* $V_0 = X \times X$, *tako da je za svako* $i \in \mathbb{N}_0$ *važi* $(V_{i+1})^{(3} \subseteq V_i$. *Takođe neka je* $f \in {}^{\mathbb{N}}(0;+\infty)$ *tako da za svako* $i \in \mathbb{N}$ *važi* $f(i)/2 \leq f(i+1) < f(i)$. *Definišimo funkciju* $d : X \times X \to [0;+\infty)$ *sa*

$$d(a,b) =$$

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} f(s_i) \,:\, k \in \mathbb{N} \text{ je takvo da postoje } x_0, \ldots, x_k \in X \text{ i } s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}_0 \right.$$

$$\left. \text{tako da } x_0 = a,\ x_k = b \text{ i } x_{i-1}\, V_{s_i}\, x_i \text{ za svako } i = \overline{1,k} \right\}$$

Zbog $V_0 = X \times X$ *ovako definisano* d *zaista jeste funkcija čiji je domen* $X \times X$.

(1) *Dokazati da za svako* $a, b, c \in X$ *važi* $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$.
(2) *Dokazati da za svako* $i \in \mathbb{N}_0$ *važi*

$$\big\{(a,b) \in X^2 \,:\, d(a,b) < f(i)\big\} \subseteq V_i \subseteq \big\{(a,b) \in X^2 \,:\, d(a,b) \leq f(i)\big\}$$

(3) *Ako za svako* $i \in \mathbb{N}_0$ *važi* $(V_i)^{(-1} = V_i$, *onda za svako* $a, b \in X$ *važi* $d(a,b) = d(b,a)$. *Ako je* $\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} V_i = \Delta_X$, *onda za svako* $a, b \in X$ *važi*

$$d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b\,.$$

Dokazati.
(4) *Ako je* $\lim\limits_{i\to+\infty} f(i) = 0$, *dokazati da je* $d(a, a) = 0$ *za svako* $a \in X$.
(5) *Neka je* $\mathcal{U}$ *uniformnost na skupu* X *tako da je* $V_i \in \mathcal{U}$ *za svako* $i \in \mathbb{N}$. *Ako je* $(V_i)^{(-1} = V_i$ *za svako* $i \in \mathbb{N}$ *i ako je* $\lim\limits_{i\to+\infty} f(i) = 0$, *dokazati da je* d $\mathrm{Top_u}(\mathcal{U}) \times' \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$-*neprekidna funkcija.*

Zadatak 212. *Dokazati da je svaka topologija koja je indukovana nekom uniformnošću potpuno regularna.*

Zadatak 213. *Neka je* (X, τ) *proizvoljan topološki prostor i neka su za* $\varepsilon \in (0; +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$ *i* $f_i : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, *definisane refleksivne relacije*

$$D_{f_1,\dots,f_k;\varepsilon} := \left\{(a, b) \in X \times X \,:\, \max_{i=\overline{1,k}} |f_i(a) - f_i(b)| < \varepsilon\right\}$$

Dokazati da je

$$\mathcal{F}(\tau) := \left\{D_{f_1,\dots,f_k;\varepsilon} \,:\, \varepsilon \in (0; +\infty), k \in \mathbb{N} \text{ i } f_i : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R} \text{ za } i = \overline{1, k}\right\}$$

u-*baza na skupu* X *i to takva da je* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau)) \subseteq \tau$. *Ako je* (X, τ) *potpuno regularan prostor dokazati da je* $\mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau)) = \tau$.

Zadatak 214. *Neka je* $(X, \mathcal{U})$ *uniforman prostor takav da je* $\tau := \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$ *kompaktna topologija. Dokazati da za proizvoljan* τ-*otvoren pokrivač* $\mathcal{A}$ *skupa* X *postoji* $R \in \mathcal{U}$ *tako da za svako* $(a, b) \in R$ *važi* $\{a, b\} \subseteq A$ *za neko* $A \in \mathcal{A}$.

2.15 Topološke grupe

U zadacima **215.-225.** $\mathbb{G} := (G, \cdot, \tau)$ je proizvoljna topološka grupa i $\mathfrak{e}$ njen jedinični element.

Zadatak 215. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Za svako* $x \in G$ *preslikavanja* $l_x : G \to G$ *i* $d_x : G \to G$ *definisana sa* $l_x(z) = xz$ *i* $d_x(z) = zx$ *za* $z \in G$ *su* (τ, τ)*-homeomorfizmi;*
(2) *Za svako* $A \subseteq G$ *i* $x, y \in G$ *važi*

$$(\overline{A})^{(-1)} = \overline{(A^{(-1)})} \qquad i \qquad \operatorname{int}(xAy) = x \cdot \operatorname{int}(A) \cdot y\,;$$

(3) *Za svako* $x, y \in G$ *važi* $\{A \in \tau : x \in A\} = \{xy^{-1}B : y \in B \in \tau\}$*;*
(4) *Za svako* $U \in \tau$*, gde* $\mathfrak{e} \in U$*, i svako* $n \in \mathbb{N}$ *postoji neko* $V \in \tau$ *tako da je* $V = V^{(-1)}$ *i* $\mathfrak{e} \in V \subseteq V^{(n)} \subseteq U$*.*

Zadatak 216. *Neka je* $\mathcal{B}$ *lokalna baza u strogom smislu u tački* $\mathfrak{e}$ *i* $A \subseteq G$*. Dokazati da važi* $\overline{A} = \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}\} = \bigcap\{UA : U \in \mathcal{B}\}$*.*

Zadatak 217. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) (G, τ) *je regularan prostor (ne obavezno* T_3*);*
(2) *Ako je* $A \in \tau$ *tako da je* $A^{(2)} \subseteq A$*, onda je* A *zatvoren skup.*

Zadatak 218. *Neka je* (G, τ) *povezan prostor i* $\mathfrak{e} \in \operatorname{int}(A)$ *za neki skup* $A \subseteq G$ *takav da je* $A = A^{(-1)}$*. Dokazati da je* $G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A^{(n)}$*.*

Zadatak 219. *Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(1) (G, τ) *je* T_0 *prostor;*
(2) (G, τ) *je* T_1 *prostor;*
(3) (G, τ) *je* T_2 *prostor;*
(4) (G, τ) *je* T_3 *prostor;*
(5) $\bigcap\{U \in \tau \mid \mathfrak{e} \in U\} = \{\mathfrak{e}\}$*.*

Zadatak 220. *Dokazati sledeća tvrđenja:*
(1) *Ako je* $(H, \cdot)$ *podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*, onda je i* $(\overline{H}, \cdot)$ *podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*;*
(2) *Ako je* $(H, \cdot)$ *normalna podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*, onda je i* $(\overline{H}, \cdot)$ *normalna podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*.*

Zadatak 221. *Ako je* $C \subseteq G$ *komponenta povezanosti tačke* $\mathfrak{e}$*, onda je* $(C, \cdot)$ *normalna podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*.*

Zadatak 222. *Neka je* (G, τ) T_0 *prostor.*
(1) *Dokazati da je centar grupe* $\mathbb{G}$ *zatvoren skup.*
(2) *Pretpostavimo da postoji gust skup* $S \subseteq G$ *takav da za svako* $a, b \in S$ *važi* $ab = ba$*. Dokazati da je* $(G, \cdot)$ *Abelova grupa.*

Zadatak 223. *Neka je* $(H, \cdot)$ *podgrupa grupe* $\mathbb{G}$ *i neka skup* H *ima bar jednu izolovanu tačku. Dokazati da je* H *diskretan skup prostora* (G, τ)*.*

Zadatak 224. *Neka je* (G, τ) *povezan* T_0 *prostor i* $H \subseteq G$ *diskretan podskup tako da je* $(H, \cdot)$ *normalna podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*. Dokazati da je* H *podskup centra grupe* $\mathbb{G}$*.*

Zadatak 225. *Neka je* τ T_0 *topologija i* $D \subseteq G$ *diskretan podskup tako da je* $(D, \cdot)$ *podgrupa grupe* $\mathbb{G}$*. Dokazati da je* D *zatvoren skup.*

Zadatak 226. *Neka su* $\mathbb{G}_1 := (G_1, \cdot, \tau_1)$ *i* $\mathbb{G}_2 := (G_2, \odot, \tau_2)$ *proizvoljne topološke grupe,* $\mathfrak{e}_1$ *jedinični element grupe* $\mathbb{G}_1$ *i* $f : G_1 :\to G_2$ *proizvoljan homomorfizam grupa* $(G_1, \cdot)$ *i* $(G_2, \odot)$*. Dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(1) *Preslikavanje* f *je* (τ_1, τ_2)*-neprekidno u tački* $\mathfrak{e}_1$*;*
(2) *Preslikavanje* f *je* (τ_1, τ_2)*-neprekidno u bar jednoj tački;*
(3) *Preslikavanje* f *je* (τ_1, τ_2)*-neprekidno.*

Zadatak 227. **(1)** *Ako je* (X, τ) *prostor iz* **P 8** *i* $x * y := x + y$*, za svako* $x, y \in X$*, dokazati da je* $(X, *, \tau)$ *topološka grupa;*
(2) *Ako je* (X, τ) *prostor iz* **P 11** *i* $x * y := x + y$*, za svako* $x, y \in X$*, dokazati da* $(X, *, \tau)$ *nije topološka grupa.*

Zadatak 228. *Dokazati da ne postoji operacija* $*$ *na skupu* X *tako da je* $(X, *, \tau)$ *topološka grupa ako je*
(1) (X, τ) *prostor iz* **P 2***;*
(2) $X := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ *i* $\tau := \mu_X$*.*

Zadatak 229. *Neka je* $X := \mathbb{P}(\mathbb{N})$ *i neka je za svako* $n \in \mathbb{N}$ *i* $S \subseteq \mathbb{N}$ *definisano* $\mathrm{V}(n, S) := \{A \in X \,:\, A \cap [1; n] = S \cap [1; n]\}$. *Ako je*

$$\tau := \mathrm{Top}\left(\{\mathrm{V}(n, S) \,:\, n \in \mathbb{N},\, S \subseteq \mathbb{N}\}\right)$$

i $A \triangle B$, *za* $A, B \in X$, *simetrična razlika skupova* A *i* B, *dokazati da je* $(X, \triangle, \tau)$ *kompaktna* `Hausdorff`*-ova topološka grupa.*

Zadatak 230. *Naći sve zatvorene, neprazne, netrivijalne podgrupe topološke grupe* $(\mathbb{R}, +, \mu_{\mathbb{R}})$.

Zadatak 231. *Neka je* $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$ *jedinična kružnica u* $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{T} := (S, \cdot, \mu_S)$ *grupa kompleksnih brojeva jediničnog modula sa klasičnim množenjem kompleksnih brojeva i topologijom koju* S *nasleđuje od uobičajene topologije na* $\mathbb{R}^2$. *Ako je* $(H, \cdot)$ *beskonačna podgrupa topološke grupe* $\mathbb{T}$, *dokazati da je* H μ_S*-gust skup.*

Zadatak 232. **(1)** *Neka je* $\mathbb{G} = (G, \cdot, \tau)$ *kompaktna topološka grupa (tj.* τ *je kompaktna topologija) i* $f : G \to \mathbb{R}$ τ*-neprekidan homomorfizam grupa* $\mathbb{G}$ *i* $(\mathbb{R}, \mu_{\mathbb{R}})$. *Dokazati da* f *mora biti trivijalan homomorfizam (tj.* $f(x) = 0$ *za svako* $x \in G$*).*
(2) *Neka je* $\mathbb{G} := (G, \cdot, \tau)$ T_0 *topološka grupa (tj.* τ *je* T_0 *topologija) tako da je svako* $x \in G$ *konačnog reda (tj.* $x^{n_x} = \mathfrak{e}$ *za neko* $n_x \in \mathbb{N}$, *gde je* $\mathfrak{e}$ *jedinični element grupe* $\mathbb{G}$*), i neka je* $\mathbb{T} := (S, \cdot, \mu_S)$ *topološka grupa iz zadatka* 231. *Ako je* $f : S \to G$ (μ_S, τ)*-neprekidan homomorfizam grupa* $\mathbb{T}$ *i* $\mathbb{G}$ *dokazati da* f *mora biti trivijalan homomorfizam.*

Zadatak 233. *Neka je* (X, τ) *iz* **P 12**, *gde je* $A = B$ *proizvoljan beskonačan skup, a* X *skup svih bijekcija iz* A *u* A, *i stavimo* $\mathbb{G} := (X, \circ, \tau)$ *gde je, za* $f, g \in X$, $f \circ g : A \to A$ *klasična kompozicija funkcija* g *i* f *definisana sa* $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ *za* $a \in A$.
(1) *Dokazati da je* $\mathbb{G}$ *topološka grupa.*
(2) *Dokazati da svaka netrivijalna normalna podgrupa grupe* $(X, \circ)$ *mora biti gust skup.*

Zadatak 234. *Neka je* $\mathbb{H} := (H, \cdot)$ *normalna podgrupa grupe* $\mathbb{G} = (G, \cdot, \tau)$, $\sim_H := \{(x, xh) : x \in X,\ h \in H\}$ *kongruencija na* $\mathbb{G}$ *određena sa* $\mathbb{H}$, $\lambda := \mathrm{Factor}(\tau, \sim_H)$ *i* $\pi : G \to G_{/\sim_H}$ *kanonski epimorfizam određen sa* $\mathbb{H}$, *tj.* $\pi(x) = xH$ *za* $x \in G$.
(1) *Dokazati da je* π (τ, λ)*-otvoreno i* (τ, λ)*-neprekidno preslikavanje.*
(2) *Dokazati da je* $\big(G_{/\sim_H}, \cdot, \lambda\big)$ *topološka grupa.*

Zadatak 235. *Neka su* $(S, \cdot, \mu_S)$ *topološka grupa iz zadatka* 231. *i* $(\mathbb{R}, +, \mu_{\mathbb{R}})$ *aditivna grupa realnih brojeva sa uobičajenom topologijom. Ako je* $\sim$ *kongruencija određena* (*normalnom*) *podgrupom* $(\mathbb{Z}, +)$ *grupe* $(\mathbb{R}, +)$ *dokazati da postoji neki* $(\mathrm{Factor}(\mu_{\mathbb{R}}, \sim), \mu_S)$*-topološki izomorfizam grupa* $\big(\mathbb{R}_{/\sim}, +\big)$ *i* $(S, \cdot)$.

Zadatak 236. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq {}^{\{1,\ldots,n\}^2}\mathbb{R}$ *skup svih invertibilnih kvadratnih matrica nad* $\mathbb{R}$ *reda* n, *"$\cdot$" uobičajeno množenje matrica i* τ *topologija koju* M *nasleđuje od* $\prod'_{s\in\{1,\ldots,n\}^2} \mu_{\mathbb{R}}$.
(1) *Dokazati da je* $(M, \cdot, \tau)$ *topološka grupa.*
(2) *Neka je* $H := \{A \in M : \det_n(A) = 1\}$ *i* $\sim_H$ *kongruencija na* $(X, \cdot)$ *određena podgrupom* $(H, \cdot)$ *dokazati da je topološka grupa*

$$\big(M_{/\sim_H}, \cdot, \mathrm{Factor}(\tau, \sim_H)\big)$$

topološki izomorfna sa topološkom grupom $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, \mu_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$.

Zadatak 237. *Neka je* $(G, \cdot, \tau)$ *topološka grupa. Dokazati da je* (G, τ) *potpuno regularan topološki prostor.*

Zadatak 238. *Neka je* (X, τ) *prostor iz* **P 13** *i neka je za svako* $t \in \mathbb{R}$ *preslikavanje* $p_t : X \to \mathbb{R}$ *definisano sa* $p_t(f) := f(t)$ *za* $f \in X$. *Pretpostavimo da je* $\nu : X \to \mathbb{R}$ $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$*-neprekidno preslikavanje za koje važi* $\nu(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha\nu(f) + \beta\nu(g)$ *za svako* $f, g \in X$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Dokazati da postoje* $k \in \mathbb{N}$ *i* $t_1, \ldots, t_k, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *tako da je* $\nu = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot p_{t_i}$.

Deo 3

Rešenja

1. Familija τ nije topologija jer važi $\{1,2,3\} \cup \{2,3,5\} = \{1,2,3,5\} \notin \tau$ iako je $\{1,2,3\}, \{2,3,5\} \in \tau$. $\square$

2. (1) Za $r, s \in \mathbb{R}$ je $(-\infty, r) \cap (-\infty, s) = (-\infty, \min\{r, s\})$. Ako je $T \subseteq \mathbb{R}$ neprazan ograničen odozgo i $r := \sup T \in \mathbb{R}$, onda je $\bigcup\{(-\infty, x) : x \in T\} = (-\infty, r)$. Ako je T neoganičen odozgo, onda je $\bigcup\{(-\infty, x) : x \in T\} = \mathbb{R}$.

(2) Ako je $(q_n : n \in \mathbb{N})$ bilo koji rastući niz racionalnih brojeva koji konvergira ka $\sqrt{2}$, onda imamo $(-\infty, q_n) \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$, dok $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, q_n) = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \notin \tau$. Dakle τ nije topologija. $\square$

3. Imamo $\varnothing \in \tau_0 \subseteq \tau$. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \tau$ proizvoljna familija. Ako je $\mathcal{A} \subseteq \tau_0$ onda, kako je τ_0 topologija, mora biti $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_0 \subseteq \tau$. Ako je $\mathcal{A} \nsubseteq \tau_0$ onda mora biti $X \in \mathcal{A}$ pa, obzirom da je $A \subseteq Y \subseteq X$ za svako $A \in \mathcal{A} \cap \tau_0$, imamo

$$\bigcup \mathcal{A} = X \cup \bigcup (\mathcal{A} \cap \tau_0) = X$$

Neka su sada $U, V \in \tau$. Ako je $X \in \{U, V\}$ onda je $U \cap V \in \{U, V\} \subseteq \tau$. Ako je $X \notin \{U, V\}$ onda je $U, V \in \tau_0$ pa, kako je τ_0 topologija, mora biti $U \cap V \in \tau_0 \subseteq \tau$. $\square$

4. Ako su $i, j \in \mathbb{N}$ tako da je $i \leq j$, onda imamo $A_i \cap A_j = A_j \in \tau$. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan neprazan skup. Ako je M beskonačan, onda važi $\bigcup\limits_{i \in M} A_i = X \in \tau$. Ako je M konačan i $k := \max M$, onda je $\bigcup\limits_{i \in M} A_i = A_k \in \tau$. $\square$

5. Neka je (X, τ) iz **P 1**. Imamo $[k; +\infty) \cap [l; +\infty) \cap \mathbb{N} = \big[\max\{k, l\}; +\infty\big) \cap \mathbb{N}$ za svako $k, l \in \mathbb{N}$. Ako je $M \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan neprazan skup, onda je $\bigcup\limits_{n \in M} [n; +\infty) = \big[\min\{k, l\}; +\infty\big)$.

Neka je (X, τ) iz **P 4**. Neka je $U, V \in \tau$. Ako $x_0 \notin U$ ili $x_0 \notin V$, onda je i $x_0 \notin U \cap V \in \tau$. U suprotnom su skupovi $X \setminus U$ i $X \setminus V$ konačni. Zato je i skup $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ konačan pa je $U \cap V \in \tau$.

Neka je $\mathcal{A} \subseteq \tau$. Ako važi $x_0 \notin A$ za svako $A \in \mathcal{A}$, onda je $x_0 \notin \bigcup \mathcal{A}$ pa je $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$. Ako postoji neko $A_0 \in \mathcal{A}$ tako da je $x_0 \in A_0$, onda je $X \setminus A_0$ konačan skup. Otduda je i skup $X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subseteq X \setminus A_0$ konačan, te je $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Da je uređeni par (X, τ) iz **P 5** topološki prostor dokazuje se na sličan način ako u prethodnom slučaju, a isto važi i za uređene parove (X, τ) iz **P 2** i **P 3**. $\square$

6. $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{A})$ važi po definiciji za proizvoljnu nepraznu familiju $\mathcal{A}$. Neka je najpre $\mathcal{B} \neq \varnothing$ topologija. Tada je $\mathcal{B}$ zapravo topologija na skupu $\bigcup \mathcal{B}$ pa je po definiciji $\operatorname{Top}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$, tj. $\operatorname{Top}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Ako je $\operatorname{Top}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ onda je $\mathcal{B}$ topologija jer $\operatorname{Top}(\mathcal{A})$ to jeste za proizvoljnu nepraznu familiju $\mathcal{A}$. $\square$

7. Stavimo $U := \bigcup \mathcal{U}$ i $V := \bigcup \mathcal{V}$. Podsetimo se najpre da su $\operatorname{Top}(\mathcal{U}) = \bigcap \{\tau \ : \ \tau$ je topologija na skupu U i $\mathcal{U} \subseteq \tau\}$ i $\operatorname{Top}(\mathcal{V}) = \bigcap \{\tau \ : \ \tau$ je topologija na skupu V i $\mathcal{V} \subseteq \tau\}$ topologije na skupovima U i V, respektivno. Primetimo da iz $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{V})$ sledi da je $U \in \operatorname{Top}(\mathcal{V})$ kao i da $U \subseteq V$.

Kako je $U \subseteq V$ to je $\operatorname{rel}_U(\operatorname{Top}(\mathcal{V})) = \{U \cap A \ : \ A \in \operatorname{Top}(\mathcal{V})\} =: \lambda$ topologija na U. A iz $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{V})$ i iz $A \in \mathcal{U} \Rightarrow U \cap A = A$ sledi još i da je $\mathcal{U} \subseteq \lambda$. Zbog toga na osnovu definicije zaključujemo $\operatorname{Top}(\mathcal{U}) \subseteq \lambda$. $U \in \operatorname{Top}(\mathcal{V})$ povlači $\lambda \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{V})$ te najzad i $\operatorname{Top}(\mathcal{U}) \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{V})$. $\square$

8. Označimo $\mathcal{A} := \bigcup_{\in I} \mathcal{A}_i$ i $\mathcal{B} := \bigcup_{\in I} \mathcal{B}_i$. Jasno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ pa na osnovu zadatka 7. važi $\operatorname{Top}(\mathcal{B}) \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{A})$. Za svako $i \in I$ imamo $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ pa je i $\mathcal{A}_i \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{B}_i) \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{B})$. Zato je $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Top}(\mathcal{B})$ odakle sledi $\operatorname{Top}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Top}(\operatorname{Top}(\mathcal{B})) = \operatorname{Top}(\mathcal{B})$, obzirom da je $\operatorname{Top}(\mathcal{B})$ topologija. $\Box$

9. Nek je $X := \bigcup \mathcal{B}$, $\tau := \operatorname{Top}(\mathcal{B})$ i $\lambda := \{\bigcup \mathcal{A} \ : \ \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})\}$. Kako je τ topologija to iz $\mathcal{B} \subseteq \tau$ najpre sledi $\operatorname{Pr}(\mathcal{B}) \subseteq \tau$, a onda i $\lambda \subseteq \tau$.

Ako je $U \in \mathcal{B}$ onda je $U = \bigcap\{U\} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$. Zato je $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$. Ako je $U \in \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$ onda je $U = \bigcup\{U\} \in \lambda$. Zato je $\operatorname{Pr}(\mathcal{B}) \subseteq \lambda$. Obzirom da je $\mathcal{B} \subseteq \lambda$ to će $\tau \subseteq \lambda$ slediti ukoliko pokažemo da je λ topologija na X.

Jasno $\operatorname{Pr}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{P}(X)$ i $\lambda \subseteq \mathbb{P}(X)$. Iz $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$ sledi $X = \bigcup \mathcal{B} \in \lambda$. Takođe je $\varnothing = \bigcup \varnothing \in \lambda$.

Ako su $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{B}$ konačni skupovi, onda je $(\bigcap \mathcal{F}_1) \cap (\bigcap \mathcal{F}_2) = \bigcap(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ i $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ je konačan podskup od $\mathcal{B}$. Zato ako je $U, V \in \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$, onda je i $U_1 \cap U_2 \in \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$.

Neka su $U_1, U_2 \in \lambda$. Dakle $U_i = \bigcup \mathcal{A}_i$, $i = \overline{1,2}$ za neke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$. Imamo $U_1 \cap U_2 = (\bigcup \mathcal{A}_1) \cap (\bigcup \mathcal{A}_2) = \bigcup \mathcal{L}$, gde je $\mathcal{L} := \{A_1 \cap A_2 \ : \ A_i \in \mathcal{A}_i, \ i = \overline{1,2}\}$. Ako $A_i \in \mathcal{A}_i \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$, $i = \overline{1,2}$, onda je $A_1 \cap A_2 \in \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$. Zato je $\mathcal{L} \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$ pa je i $U_1 \cap U_2 = \bigcup \mathcal{L} \in \lambda$.

Ako je $\mathcal{A} \subseteq \lambda$ onda za svako $U \in \mathcal{L}$ postoji $\mathcal{A}_U \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$ tako da je $U = \bigcup \mathcal{A}_U$. Zato je $\bigcup \mathcal{L} = \bigcup\{U \ : \ U \in \mathcal{L}\} = \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_U \ : \ U \in \mathcal{L}\} = \bigcup \mathcal{P} \in \lambda$, gde je $\mathcal{P} := \bigcup\{\mathcal{A}_U \ : \ U \in \mathcal{L}\} \subseteq \operatorname{Pr}(\mathcal{B})$. $\Box$

10. (1) Neka je $\tau_1 := \operatorname{Top}(\lambda \cup \{S\})$ i $\tau_2 := \{A \cup B \ : \ A \in \lambda \text{ i } B \in \operatorname{rel}_S(\lambda)\}$.

$A \in \lambda \subseteq \tau_1$ i $S \in \tau_1$ povlači $A \cap S \in \tau_1$. Zato je $\operatorname{rel}_S(\lambda) \subseteq \tau_1$. $A \in \lambda \subseteq \tau_1$ i $B \in \operatorname{rel}_S(\lambda) \subseteq \tau_1$ povlači $A \cup B \in \tau_1$. Zato je $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Kako je $\varnothing \in \lambda$ i $S \in \operatorname{rel}_S(\lambda)$ (obzirom da je $S \subseteq X \in \lambda$) to je $S \in \tau_2$. Kako je $\varnothing = \varnothing \cap S \in \operatorname{rel}_S(\lambda)$ to je $\lambda \subseteq \tau_2$. Sada iz $\lambda \cup \{S\} \subseteq \tau_2$ sledi $\tau_1 = \operatorname{Top}(\lambda \cup \{S\}) \subseteq \operatorname{Top}(\tau_2)$. Ako pokažemo da je τ_2 topologija tada imamo da je $\operatorname{Top}(\tau_2) = \tau_2$ te je konačno $\tau_1 = \tau_2$.

Primetimo najpre da ako $A \in \lambda$ i $B \in \operatorname{rel}_S(\lambda)$, onda je $A \cap B \in \operatorname{rel}_S(\lambda)$. Zaista, imamo $B = S \cap C$ za neko $C \in \lambda$ pa je $A \cap B = A \cap (S \cap C) =$

$S \cap (A \cap C) \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$, jer je $A \cap C \in \lambda$.

Neka je sada $U_1, U_2 \in \tau_2$. Tada je $U_i = A_i \cup B_i$ za neke $A_i \in \lambda$, $B_i \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$, $i = \overline{1,2}$. Imamo $U_1 \cap U_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$. Jasno $M := A_1 \cap A_2 \in \lambda$. Kako je $A_1 \cap B_2, B_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2 \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$ to je i $N := (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$. Zato je $U_1 \cap U_2 = M \cup N \in \tau_2$.

Neka je sada $U_i \in \tau_2$, $i \in I$. Tada je $U_i = A_i \cup B_i$ za neke $A_i \in \lambda$, $B_i \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$, $i \in I$. Imamo $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \in \tau_2$, obzirom da je $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \lambda$ i $\displaystyle\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$.

Napomena 1. Ukoliko je $\lambda = \{A_1, \ldots, A_n\}$ konačna topologija ovim je direktno dat algoritam za izlistavanje skupova iz $\tau := \mathrm{Top}\,(\lambda \cup \{S\})$. Da bi se izbegla neka nepotrebna ponavljanja pri ispisivanju elemenata ove topologije obično se koristi jednakost $\tau = \lambda \cup \theta \cup \eta$ gde je

$$\theta := \{A_i \cap S \ : \ 1 \le i \le n, \ \text{i } A_i \cap S \notin \lambda\} = \mathrm{rel}_S(\lambda) \setminus \lambda$$

i

$$\eta := \{A_i \cup B \ : \ 1 \le i \le n, \ B \in \theta \text{ i } A_i \cup B \notin \lambda \cup \theta\}.$$

Proverimo ovu jednakost. Iz $\theta \subseteq \mathrm{rel}_S(\lambda)$ sledi $\eta \subseteq \tau$. Kako je $\lambda \subseteq \tau$ i $\theta \subseteq \mathrm{rel}_S(\lambda) \subseteq \tau$ to je $\lambda \cup \theta \cup \eta \subseteq \tau$. Neka je sada $U \in \tau \setminus (\lambda \cup \theta)$. Ukoliko pokažemo da je $U \in \eta$ direktno bi sledila željena jednakost.

Imamo $U = A_i \cup B$ za neko $1 \le i \le n$ i neko $B \in \mathrm{rel}_S(\lambda)$. Kad bi bilo $B \in \lambda$, onda bi imali $U = A_i \cup B \in \lambda$, suprotno pretpostavci. Zato je $B \in \mathrm{rel}_S(\lambda) \setminus \lambda = \theta$. Kako je jasno $A_i \cup B = U \notin \lambda \cup \theta$ to je konačno $U \in \eta$.
(2) Koristeći se zadatkom 8. lako se dokazuje indukcijom po $i = \overline{1,n}$ da važi $\lambda_i = \mathrm{Top}\,(\{X, A_1, \ldots, A_i\})$. □

11. $\mathrm{Top}(\mathcal{B}) = \big\{\varnothing, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,5\}, \{2,3,4,5\}\big\}$. □

12. **(1)** Ovo sledi iz $\{x\} = [x-1; x] \cap [x; x+1]$.

(2) Ako su A, B, C i D četiri različite tačke prave p tako da duž sa krajevima A i B i duž sa krajevima C i D imaju prazan presek, onda je $\{p\} = s(A, B) \cap s(C, D) \in \tau$. Kako je svaki jednoelementan skup τ-otvoren to je τ diskretna topologija. $\square$

13. Ako je (X, τ) iz **P 6** onda tvrđenje sledi iz $k\mathbb{Z} \cap l\mathbb{N} = \mathrm{NZS}(k, l)\mathbb{N}$ i $k \in k\mathbb{N}$. Ako je (X, τ) iz **P 7** onda tvrđenje sledi iz $D_k \cap D_l \in \{\varnothing, D_{\mathrm{NZD}(k,l)}\}$ i $k \in D_k$.

Neka je (X, τ) iz **P 8** i neka su $l_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,2}$. Označimo $V := (l_1 + k_1\mathbb{Z}) \cap (l_2 + k_2\mathbb{Z})$. Tada je ili $V = \varnothing$ ili $V = m + k\mathbb{Z}$, gde je $k := \mathrm{NZS}(k_1, k_2)$ i $m \in V$ proizvoljno. Zaista, neka je $m \in V$. Tada je $m = l_i + k_i x_i,\ i = \overline{1,2}$, za neke $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Ako je $a \in V$ onda je $a - m \in k_1\mathbb{Z} \cap k_2\mathbb{Z}$, te $a - m \in k\mathbb{Z}$, pa je $a \in m + k\mathbb{Z}$. Ako je $a \in m + k\mathbb{Z}$ onda je $a = m + ky$ za neko $y \in \mathbb{Z}$, pa je $a = l_i + k_i x_i + k_i z_i y = l_i + k_i(x_i + z_i y),\ i = \overline{1,2}$, gde je $z_i = \dfrac{k}{k_i} \in \mathbb{Z}$, dakle $a \in V$.

Neka je sada (X, τ) iz **P 9** i neka su $l_i, k_i \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathrm{NZD}(l_i, k_i) = 1$, $i = \overline{1,2}$. Označimo $V := (l_1 + k_1\mathbb{Z}) \cap (l_2 + k_2\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$. Na osnovu prethodno dokazanog, ako nije $V = \varnothing$ onda je $V = (m+k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$, gde je $k := \mathrm{NZS}(k_1, k_2)$ i $m \in V$ proizvoljno. Kako je $m = l_i + k_i x_i,\ i = \overline{1,2}$, za neke $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, to iz $\mathrm{NZD}(l_i, k_i) = 1$, $i = \overline{1,2}$ sada sledi da je i $\mathrm{NZD}(m, k_i) = 1$, $i = \overline{1,2}$, pa je $\mathrm{NZD}(m, k) = 1$. Zato je $V \in \mathcal{B}$.

Što se tiče **P 11** primetimo da je $p \in \mathrm{V}[x|p(x)]$ za svako $p \in X$ i svako $x \in A$, kao i da

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}[a_1, \ldots, a_n | b_1, \ldots, b_n] \cap \mathrm{V}[a'_1, \ldots, a'_m | b'_1, \ldots, b'_m] \\ &= \mathrm{V}[a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_m | b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_m]. \end{aligned}$$

U **P 15**, za konačne $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$ i beskonačne $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{N}$, gde $\max A_i < \min B_i,\ i = \overline{1,2}$, stavimo $U := \mathrm{El}(A_1, B_1) \cap \mathrm{El}(A_2, B_2)$. Neka je $S \in U$. Primetimo da mora biti $A_1 \subseteq A_2$ ili $A_2 \subseteq A_1$. Zaista, pretpostavimo da postoje $m_1 \in A_1 \setminus A_2$ i $m_2 \in A_2 \setminus A_1$. Iz $m_1 \in A_1 \subseteq S \subseteq A_2 \cup B_2$ sledi da

$m_1 \in B_2$. Analogno $m_2 \in B_1$. Sada $\max A_2 < \min B_2$ povlači $m_2 < m_1$. Ali analogno mora biti i $m_1 < m_2$.

Za $T \subseteq \mathbb{N}$ imamo da je $(A_1 \subseteq T \subseteq A_1 \cup B_1) \wedge (A_2 \subseteq T \subseteq A_2 \cup B_2)$ ekvivalentno sa $A_1 \cup A_2 \subseteq T \subseteq (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)$. Ali u našem slučaju je

$$(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) = (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$$

te je $U = \mathrm{El}(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$. Iz $S \setminus (A_1 \cup A_2) \subseteq B_1 \cap B_2$ sledi da je $B_1 \cap B_2 \in X$. Takođe imamo $\max(A_1 \cup A_2) = \max\{\max A_1, \max A_2\} < \max\{\min B_1, \min B_2\} \leq \min(B_1 \cap B_2)$. Zato je $U \in \mathcal{B}$. $\square$

14. Neka je (X, τ) iz **P 10**, neka su $p_1 \neq p_2$ dva prosta broja i $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ proizvoljni tako da $l_i \notin p_i\mathbb{N}$, $i = \overline{1,2}$. Označimo $V := (l_1 + p_1\mathbb{Z}) \cap (l_2 + p_2\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$. Uočimo $m \in V$ (ovo je moguće jer je $\mathrm{NZD}(p_1, p_2) = 1$). Tvrdimo da ne postoji nijedno $U \in \mathcal{B}$ tako da je $m \in U \subseteq V$. Zaista, neka su $a \in \mathbb{N}$ i prost broj q takvi da je $U := (a + q\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} \subseteq V$. Na osnovu rešenja zadatka 13. znamo da je $V = (m + p_1p_2\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$. Iz $a \in U \subseteq V$ sledi da je $a = m + p_1p_2x_1$ za neko $x_1 \in \mathbb{Z}$. A iz $a + q \in U \subseteq V$ sada sledi da je $m + p_1p_2x_1 + q = m + p_1p_2x_2$, za neko $x_1 \in \mathbb{Z}$. No ovo znači da je $q = p_1p_2(x_2 - x_1)$, što protivureči izboru brojeva p_1, p_2 i q.

Pokažimo sada da je $\mathcal{B}'$ baza. Najpre indukcijom po $n \geq 2$ utvrđujemo da

$$\text{ako su } l_i, k_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,n}, \text{i } m \in \bigcap_{i=1}^{n}(l_i + k_i\mathbb{Z})$$
$$\text{onda je } \bigcap_{i=1}^{n}(l_i + k_i\mathbb{Z}) = m + \mathrm{NZS}(k_1, \ldots, k_n)\mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Za $n = 2$ ovo nam je već poznato, a da izvedemo indukcijski korak pretpostavimo da je $m \in \bigcap_{i=1}^{n+1}(l_i + k_i\mathbb{Z})$. Imamo $\bigcap_{i=1}^{n+1}(l_i + k_i\mathbb{Z}) = (l_1 + k_1\mathbb{Z}) \cap \bigcap_{i=2}^{n+1}(l_i + k_i\mathbb{Z}) = (l_1 +$

$k_1\mathbb{Z}) \cap (m + \mathrm{NZS}(k_2, \ldots, k_{n+1})\mathbb{Z}) = m + \mathrm{NZS}(k_1, \mathrm{NZS}(k_2, \ldots, k_{n+1}))\mathbb{Z} = m + \mathrm{NZS}(k_1, k_2, \ldots, k_{n+1})\mathbb{Z}$.

Da je $\mathcal{B}'$ baza za τ dokazaćemo tako što ćemo se uveriti u jednakost

$$\mathcal{B}' \setminus \{\varnothing\} = \Big\{\bigcap \mathcal{P} \,:\, \mathcal{P} \text{ je neprazan konačan podskup od } \mathcal{B}\Big\} \setminus \{\varnothing\} =: \mathcal{L}$$

(videti zadatak 9.).

Neka je sada $a \in \mathbb{N}$ i neka su $p_1, \ldots, p_n$ međusobno različiti prosti brojevi tako da $a \notin p_i\mathbb{Z}$ za $i = \overline{1,n}$. Imamo da je $(a+p_i\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} \in \mathcal{B}$, $i = \overline{1,n}$, a na osnovu (3.1) važi $(a+p_1\cdots p_n\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^{n}(a+p_i\mathbb{Z}) \in \mathcal{L}$, jer je $a \in (a+p_i\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$ za $i = \overline{1,n}$. S druge strane ako su $l_i, k_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, pri čemu su $k_1, \ldots, k_n$ takvi prosti brojevi da $k_i \not| \, l_i$, i ako je $m \in \mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^{n}(l_i+k_i\mathbb{Z})$, onda opet zbog (3.1) imamo da je $\mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^{n}(l_i+k_i\mathbb{Z}) = \mathbb{N} \cap (m + \mathrm{NZS}(k_1, \ldots, k_n)\mathbb{Z}) = (m + p_1\cdots p_s\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} =: U \in \mathcal{B}'$, gde su $p_1, \ldots, p_s$ međusobno različiti tako da je $\{k_1, \ldots, k_n\} = \{p_1, \ldots, p_s\}$. Kako je $m = l_i+k_ix_i$ za neke $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,n}$, to imajući u vidu da je $\mathrm{NZD}(l_i, k_i) = 1$, dobijamo da je $\mathrm{NZD}(m, p_1\cdots p_s) = 1$. Zato je $U \in \mathcal{B}' \setminus \{\varnothing\}$. $\square$

15. Konačna familija $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ je topologija na skupu X ako i samo ako važi:

- $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathcal{A}$,
- $P, Q \in \mathcal{A} \Rightarrow (P \cap Q \in \mathcal{A} \wedge P \cup A \in \mathcal{A})$.

Ako konačna familija $\tau \subseteq \mathbb{P}(X)$ zadovoljava ove uslove, na osnovu `De Morgan`-ovih zakona zadovoljava i konačna familija $\{A^c \,:\, A \in \tau\}$. $\square$

16. Neka je $U \in \mathcal{B}_0$ proizvoljno. Kako je U otvoren, a $\mathcal{B}$ baza, to postoji $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tako da je $U = \bigcup \mathcal{A}$. Slično, za svako $V \in \mathcal{A}$ postoji neko $\mathcal{L}_V \subseteq \mathcal{B}_0$

tako da je $V = \bigcup \mathcal{L}_V$. Jasno $U = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{\bigcup \mathcal{L}_V : V \in \mathcal{A}\} = \bigcup \bigcup \{\mathcal{L}_V : V \in \mathcal{A}\} = \bigcup \mathcal{L}$, gde smo stavili $\mathcal{L} := \bigcup\limits_{V \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_V$.

Ne može biti $U \notin \mathcal{L}$ jer bi tada $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0 \setminus \{U\} \supseteq \mathcal{L}$ bila baza sa manje elemenata od $\mathcal{B}_0$. Zaista, ako je W otvoren onda je $W = \bigcup \mathcal{F}$ za neko $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_0$. Ako već nije $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_1$, onda mora biti $U \in \mathcal{F}$ te i $W = U \cup \bigcup(\mathcal{F} \setminus \{U\}) = (\bigcup \mathcal{L}) \cup (\bigcup(\mathcal{F} \setminus \{U\})) = \bigcup(\mathcal{L} \cup (\mathcal{F} \setminus \{U\}))$ pri čemu $\mathcal{L} \cup (\mathcal{F} \setminus \{U\}) \subseteq \mathcal{B}_1$.

Dakle $U \in \mathcal{L}$ pa je $U \in \mathcal{L}_V$ za neko $V \in \mathcal{A}$. Otuda je $U \subseteq \bigcup \mathcal{L}_V = V \subseteq \bigcup \mathcal{A} = U$, tj. $U = V \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. □

17. Neka je $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N})$ proizvoljna familija skupova. Skup $S := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N},\ x = \inf A_n\}$ je prebrojiv pa postoji neko $r \in \mathbb{R} \setminus S$. $V := [r, r+1)$ je neprazan otvoren skup i još je $r \in V$. Kad bi za neko $n \in \mathbb{N}$ bilo $r \in A_n \subseteq V$, onda bi imali $r = \inf A_n \in S$, što nije moguće. □

18. Primetimo da je jedna od pretpostavki zadatka to da za svako $x \in X$ i svako $N \in \mathcal{N}_x$ važi $x \in N$. Neka je $\lambda := \big\{A \subseteq X : \forall x \in A \exists N \in \mathcal{N}_x\ (N \subseteq A)\big\}$. Jasno $\{\varnothing, X\} \subseteq \lambda \subseteq \mathbb{P}(X)$. Pokažimo da je λ topologija (na skupu X).

Neka su $A_1, A_2 \in \lambda$ i neka je $x \in A_1 \cap A_2$ proizvoljno. Za $i = \overline{1,2}$ postoje $N_i \in \mathcal{N}_x$ tako da je $N_i \subseteq A_i$. Prema uslovu **(1)** postoji neko $N \in \mathcal{N}_x$ tako da je $N \subseteq N_1 \cap N_2$. Sada imamo $x \in N \subseteq N_1 \cap N_2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Dakle $A_1 \cap A_2 \in \lambda$.

Neka je sada $A_i \in \lambda$ za svako $i \in I$. Ako je $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ proizvoljno neka je $i_0 \in I$ takvo da je $x \in A_{i_0}$; iz $A_{i_0} \in \lambda$ sledi da postoji neko $N \in \mathcal{N}_x$ tako da je $N \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Dakle $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \lambda$.

Ovim smo dokazali da je λ topologija na skupu X. Ako je $x \in X$ i $A \in \lambda$ tako da je $x \in A$, onda prema definiciji familije λ postoji neko $N \in \mathcal{N}_x$ tako da je $x \in N \subseteq A$. Odavde bismo mogli da zaključimo da je $\mathcal{N}_x$ lokalna baza topologije λ u tački x ukoliko bismo znali da važi $\mathcal{N}_x \subseteq \lambda$. No ovo je samo preformulacija uslova **(2)**.

Najzad ako je τ proizvoljna topologija na skupu X takva da je za svako $x \in X$ familija $\mathcal{N}_x$ τ-lokalna baza topologije τ u tački x, onda za svako $A \subseteq X$ važi

$$A \in \tau \iff \forall x \in A\ \exists N \in \mathcal{N}_x\ (x \in N \subseteq A)$$

tj. $\tau = \lambda$. $\square$

19. Neka je $\mathcal{B}$ prebrojiva baza čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi. Uočimo familije $\mathcal{A} := \{U \in \mathcal{B}\ :\ A \cap U \neq \varnothing \text{ i } U \cap B = \varnothing\}$ i $\mathcal{B} := \{U \in \mathcal{B}\ :\ U \cap A = \varnothing\}$ i poređajmo ih u nizove: $\mathcal{A} = \{U_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ i $\mathcal{B} = \{V_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

Definišemo $C := \bigcup \left\{ U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i\ :\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Neka je $x \in A$. B je zatvoren pa postoji neko $W \in \mathcal{B}$ tako da $x \in W$ i $W \cap B = \varnothing$; ovo povlači da je $W \in \mathcal{A}$, tj. $W = U_n$ za neko n. Kako $x \in A$ i $A \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \varnothing$ to $x \in U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subseteq C$. Zbog $C \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ i $\bigcup \mathcal{A} \cap B = \varnothing$ imamo $C \cap B = \varnothing$.

Neka je $x \notin C$. Tada je $x \notin A$ pa kako je A zatvoren to postoji neko $W \in \mathcal{B}$ tako da $x \in W$ i $W \cap A = \varnothing$. Imamo dakle $W \in \mathcal{B}$ pa je $W = V_j$ za neko $j \in \mathbb{N}$. V_j je disjunktan sa skupovima $U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ za $n \geq j$, pa je s tim skupovima disjunktan i $V_j \cap P$, gde je P ona otvorena okolina od x koja je disjunktna sa zatvorenim skupom $Q := \bigcup \left\{ U_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i\ :\ 1 \leq k \leq n-1 \right\}$ (a takva postoji jer je Q zatvoren i $x \notin Q$). Dakle C je zatvoren. $\square$

20. Neka je $\mathbb{Q} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, gde su U_n otvoreni u $\mathbb{R}$. Pokažimo da postoji neko $r \in \mathbb{Q} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Neka je $Q = \{q_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

Postoje nizovi $(a_n : n \in \mathbb{N})$ i $(b_n : n \in \mathbb{N})$, $a_n < b_n$, tako da važi:
- $q_n \notin [a_n; b_n]$;
- $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n] \subseteq U_n$.

Zaista, ova dva niza moguće je rekurzivno konstruisati na sledeći način: Skup $U_1 \setminus \{q_1\}$ je otvoren skup pa postoje $\varepsilon, u \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tako da $(u - \varepsilon; u + \varepsilon) \subseteq U_1 \setminus \{q_1\}$. Stavimo $a_1 := u - \frac{\varepsilon}{2}$, $b_1 := u + \frac{\varepsilon}{2}$. Pretpostavimo da su $a_n < b_n$ već konstruisani tako da važi $[a_n; b_n] \subseteq U_n$. U_{n+1} je otvoren gust (zbog $U_n \supseteq \mathbb{Q}$), a $(a_n; b_n) \setminus \{q_{n+1}\}$ je neprazan otvoren skup, pa je $V := U_{n+1} \cap [(a_n; b_n) \setminus \{q_{n+1}\}]$ otvoren i neprazan. Zato postoje neki $v, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takvi da je $(v - \delta; v + \delta) \subseteq V$. Uzmimo $a_{n+1} := v - \frac{\delta}{2}$ i $b_{n+1} := v + \frac{\delta}{2}$.

Nakon ove konstrukcije uočimo $r \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] \neq \varnothing$. Ako je $s \in \mathbb{Q}$ onda postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $s = q_n \notin [a_n; b_n]$ pa zbog $r \in [a_n; b_n]$ mora biti $s \neq r$. Ovo dokazuje da je $r \notin \mathbb{Q}$. S druge strane ako je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljno, imamo da je $r \in [a_m; b_m] \subseteq U_m$. Otuda je $r \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Napomena 2. Ova činjenica lako sledi iz sledeća dva poznata tvrđenja:
(1) svaki G_δ podprostor kompletno metrizabilnog topološkog prostora je kompletno metrizabilnan;
(2) za svaki kompletno metrizabilnan prostor bez izolovanih tačaka postoji podprostor homeomorfan `Cantor`-ovom skupu, tj. `Tychonoff`-skom stepenu ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ diskretne topologije na $\{0, 1\}$.

Zaista kad bi $\mathbb{Q}$ bio G_δ podprostor realne prave to bi i on poput nje bio kompletno metrizabilan na osnovu (1). No kako je $\mathbb{Q}$ prostor bez izolovanih tačaka to bi na osnovu (2) on sada morao da sadrži neki podskup moći kontinuum, kontradikcija. $\square$

21. Tvrđenje se direktno proverava korišćenjem definicija pojmova koji se u njemu pominju. $\square$

22. (1) Neka su $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{N}$ konačni i $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $n_i \geq \max B_i$, $i = \overline{1, 2}$ i neka je $P \in \mathrm{T}_{B_1, n_1} \cap \mathrm{T}_{B_2, n_2} \neq \varnothing$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $n_2 \geq n_1$. Pokažimo: $\mathrm{T}_{B_1, n_1} \cap \mathrm{T}_{B_2, n_2} = \mathrm{T}_{B_2, n_2}$.

Neka je $T \in \mathrm{T}_{B_2,n_2}$. Zbog $[1;n_1] \subseteq [1;n_2]$ imamo $T \cap [1;n_1] = (T \cap [1;n_2]) \cap [1;n_1] = (B_2 \cap [1;n_2]) \cap [1;n_1] = (P \cap [1;n_2]) \cap [1;n_1] = P \cap [1;n_1] = B_1$, tj. $T \in \mathrm{T}_{B_1,n_1}$.

Prelazimo na deo tvrđenja koji se tiče topologije τ_2. Neka su $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$ beskonačni i $P \in \mathrm{S}_{A_1} \cap \mathrm{S}_{A_2}$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $n_1 := \min A_1 \leq \min A_2 =: n_2$. Stavimo $A := (A_1 \cap [n_1;n_2]) \cup (P \cap [n_2;+\infty))$. Pokažimo da je $P \in \mathrm{S}_A \subseteq \mathrm{S}_{A_1} \cap \mathrm{S}_{A_2}$. Zbog $P \cap [n_1;n_2] \subseteq P \cap [n_1;+\infty) \subseteq A_1$ imamo $P \cap [\min A;+\infty) \subseteq (A_1 \cap [n_1;n_2]) \cup (P \cap [n_2;+\infty)) = A$. Dakle $P \in \mathrm{S}_A$. Dalje imamo $P \cap [n_2;+\infty) \subseteq P \cap [n_1;+\infty) = P \cap [\min A_1;+\infty) \subseteq A_1$ pa je $A \subseteq A_1$. Kako je još i $\min A = \min A_1 (= n_1)$ to je jasno da $\mathrm{S}_A \subseteq \mathrm{S}_{A_1}$. Preostaje da pokažemo da je $\mathrm{S}_A \subseteq \mathrm{S}_{A_2}$. Neka je $S \in \mathrm{S}_A$ i $m \in S \cap [\min A_2;+\infty) = S \cap [n_2;+\infty)$. Ako je $m = n_2 = \min A_2$ onda je jasno $m \in A_2$. Ako je $m > n_2$ onda $m \notin [n_1;n_2]$ pa zbog $m \in S \cap [n_1;+\infty) = S \cap [\min A;+\infty) \subseteq A = (A_1 \cap [n_1;n_2]) \cup (P \cap [n_2;+\infty))$ imamo $m \in P \cap [n_2;+\infty)$. Ali $P \in \mathrm{S}_{A_2}$ pa je $P \cap [n_2;+\infty) \subseteq A_2$. Zato je najzad $m \in A_2$.

(2) Neka je B konačan, a A beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ tako da je $\max B < \min A =: n$. Pokažimo da je $\mathrm{El}(B,A) = \mathrm{T}_{B,n-1} \cap \mathrm{S}_A$. Neka je $P \in \mathrm{El}(B,A)$, tj. neka $B \subseteq P \subseteq B \cup A$. Iz $B \subseteq P$ i $B \subseteq [1;n-1]$ sledi $B \subseteq P \cap [1;n-1]$. Dalje $P \cap [1;n-1] \supseteq (B \cup A) \cap [1;n-1] = (B \cap [1;n-1]) \cup (A \cap [1;n-1]) = B$ jer je $B \subseteq [1;n-1]$ i $A \cap [1;n-1] = \varnothing$. Dakle $P \cap [1;n-1] = B$, tj. $P \in \mathrm{T}_{B,n-1}$.

Imamo $P \cap [\min A;+\infty) = P \cap [n;+\infty) \subseteq (B \cup A) \cap [n;+\infty) = (B \cap [n;+\infty)) \cup (A \cap [n;+\infty)) \subseteq A$ jer je $B \cap [n;+\infty) = \varnothing$. Zato je $P \in \mathrm{S}_A$.

Obrnuto, neka su $B \subseteq \mathbb{N}$ konačan i $A \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan i $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\max B \leq n$ i neka je $P \in \mathrm{T}_{B,n} \cap \mathrm{S}_A$ proizvoljno. Stavimo $m_0 := \min\{i \in P \ : \ i > n\}$ i $U := \mathrm{El}(B, A_0)$ gde je $A_0 := P \cap [m_0;+\infty)$. Jasno $m_0 = \min A_0$. Kako je $P \cap [1;n] = B$ to je $B \subseteq P$. Neka je sada $i \in P$. Ako je $i \leq n$ onda je $i \in P \cap [1;n] = B$, tj. $i \in B$. Ako je $i > n$ onda po definiciji broja m_0 mora biti $m_0 \leq i$ te je $i \in P \cap [m_0;+\infty) = A_0$. Dakle $P \subseteq B \cup A_0$ pa je $P \in U$. Pokažimo sada da je $U \subseteq \mathrm{T}_{B,n} \cap \mathrm{S}_A$.

Neka je $R \in U$ proizvoljno. Iz $B \subseteq R \subseteq A_0 \cup B$ imamo $R \cap [1;n] \supseteq B \cap [1;n] = B$ i $R \cap [1;n] \subseteq (A_0 \cap [1;n]) \cup (B \cap [1;n]) = B$ jer $\min A_0 = m_0 > n$

povlači $A_0 \cap [1; n] = \varnothing$. Dakle $R \cap [1; n] = B$, tj. $R \in \mathrm{T}_{B,n}$. S druge strane $R \cap [\min A; +\infty) \subseteq A$ važi zbog $P \cap [\min A; +\infty) \subseteq A$ i $R \subseteq B \cup A_0 \subseteq P$. Dakle $R \in \mathrm{S}_A$. $\square$

23. Primetimo da ako su $M_1, M_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus X$ i $S_1, S_2 \in X$ proizvoljni i ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $S_1 \cap S_2 \cap (n, +\infty)_< = \varnothing$, onda mora biti $\mathrm{El}(M_1, S_1) \cap \mathrm{El}(M_2, S_2) = \varnothing$.

Takođe primetimo da za proizvoljne $L_1, L_2 \in X$ postoje $L'_1, L'_2 \in X$ takvi da $L'_i \subseteq L_i,\ i = \overline{1,2}$, $\min L_1 < \min L'_1$ i $L'_1 \cap L'_2 = \varnothing$.

Neka su dati $\langle P_n \ : \ n \in \mathbb{N}\rangle \in {}^{\mathbb{N}}(\mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus X)$ i $\langle S_n \ : \ n \in \mathbb{N}\rangle \in {}^{\mathbb{N}}X$ tako da je $\max P_n < \min S_n,\ n \in \mathbb{N}$. Stavimo $U_n := \mathrm{El}(P_n, S_n)$. Pokažimo da $\{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ nije baza za τ. Rekurzivno definišimo $A_i \in X,\ i \in \mathbb{N}_0$ i $B_i \in X,\ i \in \mathbb{N}$ tako da je $A_0 = \mathbb{N}$ i za $i \in \mathbb{N}_0$

$$A_{i+1} \subseteq A_i,\ B_{i+1} \subseteq S_{i+1},\ A_{i+1} \cap B_{i+1} = \varnothing \ \text{ i } \min A_i < \min A_{i+1}.$$

Neka je $t_n := \min A_n$ i $C := \{t_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Jasno $C \in X$. Označimo $W_n := \mathrm{El}(\{t_1, \ldots, t_n\}, T_n)$, gde je $T_n := \{t_j \ : \ j > n\}$.

Ako su $n, m \in \mathbb{N}$ proizvoljni i $i \in T_n$ takvo da je $i > t_m$, onda za neko $j > m$ imamo $i = t_j = \min A_j \in A_j \subseteq A_{j-1} \subseteq \cdots \subseteq A_m$. Ovo znači da je $T_n \cap (t_m, +\infty) \subseteq A_m$. Zato je $T_n \cap B_m \cap (t_m, +\infty) \subseteq A_m \cap B_m = \varnothing$. Dakle važi $\varnothing \neq \mathrm{El}(P_m, B_m) \subseteq \mathrm{El}(P_m, S_m) \setminus \mathrm{El}(\{t_1, \ldots, t_n\}, T_n) = U_m \setminus W_n$.

Ovim smo dokazali ne samo da $\{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ nije baza već da za lokalnu bazu $\{W_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ u tački $C \in X$ važi da je $\mathrm{int}\,(U_m \setminus W_n) \neq \varnothing$ za svako $n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

24. Neka je $\mathcal{B}_0 := \{(\leftarrow, x)_\prec \ : \ x \in A\} \cup \{(x, \rightarrow)_\prec \ : \ x \in A\}$. Tada je $\tau_1 := \mathrm{lot}(\prec) = \mathrm{Top}(\mathcal{B}_0 \cup \{A\})$. Označimo $\tau_2 := \mathrm{Top}(\mathcal{B} \cup \{A\})$.

Neka su $x, y \in A$ tako da je $x \prec y$. Kako je $(x, \rightarrow)_\prec,\ (\leftarrow, y)_\prec \in \tau_1$, $(x, y)_\prec = (x, \rightarrow)_\prec \cap (\leftarrow, y)_\prec$ i kako je τ_1 topologija, sledi da je $(x, y)_\prec \in \tau_1$. Time smo dokazali da je $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{lot}(\prec)$ te odatle direktno dobijamo inkluziju $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Pretpostavimo sada da ne postoji ni najveći ni najmanji element skupa A u odnosu na $\prec$. Neka je $y \in A$ proizvoljno. Jasno $(\leftarrow, y)_\prec \supseteq \bigcup\{(x, y)_\prec \ :$

$x \in A,\ x \prec y\}$. Ako je $z \in (\leftarrow, y)_\prec$ onda, kako z nije najmanji element skupa A, postoji neko $t \in A$ tako da je $t \prec z$, pa je $z \in (t, y)_\prec \subseteq \bigcup\{(x, y)_\prec : x \in A,\ x \prec y\}$. Zato je $(\leftarrow, y)_\prec \in \tau_2$. Slično iz činjenice da A nema ni najveći element sledi da je $(y, \rightarrow)_\prec \in \tau_2$. Dakle $\mathcal{B}_0 \subseteq \tau_2$ pa imamo da važi i obrnuta inkluzija $\tau_1 \subseteq \tau_2$. $\square$

25. Za svako $t \in [0;1]$ važi $\{(t, r) : r \in [0;1]\} = \big((t,0);(t,1)\big)_\prec \in \tau$. Familija $\mathcal{U} := \big\{\big((t,0);(t,1)\big)_\prec : t \in [0;1]\big\}$ zadovoljava tražene uslove. $\square$

26. (1) Skup $B \subseteq \mathbb{R}$ je τ-zatvoren ako i samo ako je $B = \varnothing$ ili $B = \mathbb{R}$ ili je $B = [x; +\infty)$ za neko $x \in \mathbb{R}$. Naravno $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$.

Neka je dat neprazan $A \subseteq \mathbb{R}$. Ako A nije ograničen odozdo, onda jedini zatvoren nadskup od A jeste $\mathbb{R}$ pa je $\mathrm{cl}(A) = \mathbb{R}$. Neka je sada A ograničen odozdo. Označimo $x := \inf A \in \mathbb{R}$. Jasno $A \subseteq [x; +\infty)$. Ako je $r \in \mathbb{R}$ i $A \subseteq [r; +\infty)$, onda mora biti $r \le x$. Dakle $\{F \subseteq \mathbb{R} : A \subseteq F$ i F je τ-zatvoren$\} = \{[r; +\infty) : r \le x\}$ pa je $\mathrm{cl}(A) = [\inf A; +\infty)$.

(2) Skupovi koji su τ-zatvoreni su $\varnothing$, $\mathbb{N}$ i skupovi oblika $\{1, \ldots, n\}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ako je $A \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan, onda jedini zatvoren nadskup od A jeste $\mathbb{N}$ pa je $\mathrm{cl}(A) = \mathbb{N}$. Ako je A neprazan konačan označimo $m := \max A$. Kako je $\{F \subseteq \mathbb{N} : A \subseteq F$ i $F^c \in \tau\} = \{\{1, \ldots, n\} : n \ge m\}$ to je $\mathrm{cl}(A) = \{1, \ldots, \max A\}$. $\square$

27. Neka je (X, τ) prostor iz **P 2** i neka je najpre $A \subseteq X$ konačan. Kako je $A^c \in \tau$ to je A zatvoren pa je $\mathrm{cl}(A) = A$. Neka je sada $A \subseteq X$ beskonačan. Jedini zatvoren nadskup od A je X pa je $\mathrm{cl}(A) = X$.

Za prostor iz **P 3** analognim rezonom se dobija $\mathrm{cl}(A) = X$ ako je $A \subseteq X$ neprebrojiv, odnosno $\mathrm{cl}(A) = A$ inače.

Neka je (X, τ) prostor iz **P 4** $B \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako je B konačan ili je $x_0 \in B$.

Ako je $A \subseteq X$ konačan, onda je A zatvoren pa je $\mathrm{cl}(A) = A$. Neka je sada A beskonačan. Ako je $x_0 \notin A$ onda svaki zatvoren $B \supseteq A$ mora biti beskonačan te mora i sadržati x_0. $A \cup \{x_0\}$ je takav dok sam A nije pa je

$\mathrm{cl}(A) = \bigcap\{F \subseteq X \ : \ A \subseteq A \text{ i } F \text{ je zatvoren}\} = A \cup \{x_0\}$. Ako je s druge strane $x_0 \in A$, onda ponovo imamo $\mathrm{cl}(A) = A = A \cap \{x_0\}$, obzirom da je u tom slučaju A zatvoren.

Za prostor iz **P 5** analognim rezonom se dobija $\mathrm{cl}(A) = A \cup \{x_0\}$ ako je $A \subseteq X$ neprebrojiv, odnosno $\mathrm{cl}(A) = A$ inače. $\square$

28. (1) Kako je $\mathcal{B}$ baza to imamo da je $y \in \mathrm{cl}(\{x\})$ ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $y \in m\mathbb{N} \Rightarrow m\mathbb{N} \cap \{x\} \neq \varnothing$. Iz $y \in m\mathbb{N} \Rightarrow y \in y\mathbb{N} \subseteq m\mathbb{N}$ sada sledi da je $y \in \mathrm{cl}(\{x\})$ ako i samo ako $y\mathbb{N} \cap \{x\} \neq \varnothing$, tj. $x \in y\mathbb{N}$. Dakle $\mathrm{cl}(\{x\}) = \{y \in \mathbb{N} \ : \ x \in y\mathbb{N}\}$ je skup svih delilaca broja x.

(2) Ako je $x \notin P$ i $x \neq 1$, onda je $P \cap x\mathbb{N} = \varnothing$ i pa je $x \notin \mathrm{cl}(P)$. Dakle $\mathrm{cl}(P) \subseteq P \cup \{1\}$. Kako iz $U \in \mathcal{B}$ i $1 \in U$ sledi $U = 1\mathbb{N} = \mathbb{N}$, i kako je $\mathcal{B}$ baza, to imamo da je $1 \in \mathrm{cl}(A)$ za svaki neprazan $A \subseteq \mathbb{N}$. Otuda zaključujemo da je $\mathrm{cl}(P) = P \cup \{1\}$. $\square$

29. (1) Ako je p prost broj onda $\{p\} = D_p \in \tau$. Kako svaki gust skup mora da sadrži sve izolovane tačke prostora to on mora da sadrži sve proste brojeve. Obrat sledi iz činjenice da je skup svih prostih brojeva gust: ako je $m \in X$ onda je $m \in p\mathbb{N}$ za neki prost broj p, tj. $p \in D_m$ (setimo se da je $\mathcal{B}$ baza).

(2) Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Ako je $y \in \mathrm{cl}(\{x\})$ onda zbog $y \in D_y \in \tau$ sledi da je $\{x\} \cap D_y \neq \varnothing$, tj. $y \in x\mathbb{N}$. Sa druge strane, ako su $n \in \mathbb{N}$ i $k \in X$ proizvoljni tako da $xn \in D_k$, onda iz $k \in xn\mathbb{N} \subseteq x\mathbb{N}$ sledi $x \in D_k \cap \{x\} \neq \varnothing$. Obzirom da je $\mathcal{B}$ baza ovim smo pokazali da je $xn \in \mathrm{cl}(\{x\})$. $\square$

30. (1) Neka su $k, l \in \mathbb{Z}$ proizvoljni pri čemu je $k \neq 0$. Ako je $x \notin l + k\mathbb{Z} =: U$ tada za $V := x + k\mathbb{Z} \in \tau$ važi $x \in V$ i $V \cap U = \varnothing$ te je $x \notin \mathrm{cl}(U) \supseteq \mathrm{acc}(U)$. Ako je $x \in U$ i $a, b \in \mathbb{Z}$, gde $b \neq 0$, tako da $x \in a + b\mathbb{Z} =: V$, onda je $U \cap V = x + \mathrm{NZS}(k, b)\mathbb{Z}$ beskonačan skup. Kako je $\mathcal{B}$ baza to je $x \in \mathrm{acc}(U)$.

(2) Za $l, k \in \mathbb{N} = X$ stavimo $\mathrm{M}(l,k) := (l + k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$. Pokažimo najpre da ako su $l_1, l_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ proizvoljni, onda

$$\mathrm{M}(l_1,k_1) \cap \mathrm{M}(l_2,k_2) \neq \varnothing \text{ ako i samo ako } d|\ l_1 - l_2$$

gde $d := \mathrm{NZD}(k_1,k_2)$. Ako je $l_1 - l_2 = md$ za neko $m \in \mathbb{Z}$ onda, kako $d = \alpha k_1 + \beta k_2$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, imamo $l_1 + (-m\alpha)k_1 = l_2 + (m\beta)k_2$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $x := l_1 + (-m\alpha)k_1 + nk_1k_2 = l_2 + (m\beta)k_2 + nk_1k_2 > 0$. Tada je $x \in \mathrm{M}(l_1,k_1) \cap \mathrm{M}(l_2,k_2)$. Obrnuto neka je $\mathrm{M}(l_1,k_1) \cap \mathrm{M}(l_2,k_2) \neq \varnothing$. Tada je $l_1 + m_1k_1 = l_2 + m_2k_2$, za neke $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Otuda je $l_1 - l_2 = m_2k_2 - m_1k_1 = d \cdot \left(m_2\dfrac{k_2}{d} - m_1\dfrac{k_1}{d}\right)$.

Neka su sada $m, l, k \in \mathbb{N}$. Da pokažemo da je $mk \in \mathrm{cl}\,(\mathrm{M}(l,k))$ uočimo proizvoljno $r \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathrm{NZD}(r, mk) = 1$. Tada je i $\mathrm{NZD}(r,k) = 1$ pa je (prema upravo dokazanom) $\mathrm{M}(mk,r) \cap \mathrm{M}(l,k) \neq \varnothing$. Ovi smo dokazali da je $mk \in \mathrm{cl}\,(\mathrm{M}(l,k))$, obzirom da je zbog

$$a \in \mathrm{M}(b,n) \iff \mathrm{M}(a,n) = \mathrm{M}(b,n)$$

i zadatka 13. familija $\{\mathrm{M}(mk,b) : a, b \in \mathbb{N}; \mathrm{NZD}(mk,b) = 1\}$ lokalna baza u strogom smislu u tački mk topologije τ. $\square$

31. (1) Neka je $x \in U \cap \mathrm{cl}(A)$. Znamo da je $x \in \mathrm{cl}(A)$ ekvivalentno sa time da $\forall V \in \tau_X$ $(x \in V \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing)$, pa kako je $x \in U \in \tau_X$ to mora biti $U \cap A \neq \varnothing$.

(2) Neka je $x \in \mathrm{cl}(U)$ i neka je $V \ni x$ otvoren skup. $U \cap V$ je otvorena okolina od x pa kako je S gust to postoji neko $y \in S \cap (U \cap V) = V \cap (S \cap U) \neq \varnothing$. Time je dokazano da je $x \in \mathrm{cl}\,(S \cap U)$.

(3) Neka je $V \ni x$ otvoren skup. $U \cap V$ je okolina tačke x pa iz $x \in \mathrm{cl}(A)$ sledi da postoji neko $y \in A \cap (U \cap V) = V \cap (U \cap A) \neq \varnothing$. Dakle mora biti $x \in \mathrm{cl}\,(U \cap A)$. $\square$

32. Za $p \notin X \setminus Pol_n$ stepena $m > n$ izaberimo proizvoljno $m+1$ različitih realnih brojeva $x_1, \dots, x_{m+1} \in \mathbb{R}$ i stavimo

$$W := \mathrm{V}[x_1, x_2, \dots, x_{m+1} | p(x_1), \dots, p(x_{m+1})]$$

W je otvoren skup koji sadrži p i za koji važi $W \cap Pol_n = \varnothing$. Zaista, pretpostavimo da postoji neko $q \in W \cap Pol_n$. Kako je q stepena ne većeg od n, a $n < m$, obzirom da $p \notin Pol_n$, to je $p-q$ polinomska funkcija stepena m koja ima $m+1$ različitih korena $x_1, \dots, x_{m+1}$, što nije moguće. $\square$

33. **(1)** $\mathcal{A} := \{\mathrm{V}[1|r] \ : \ r \in \mathbb{R}\}$ je jedna takva familija.

(2) Ako je $\mathcal{A}$ bilo koja familija iz dela **(1)** ovog zadatka i S gust skup, onda je svaki neprazan $u \in \mathcal{A}$ možemo izabrati po $s_U \in U \cap S$. $S_0 := \{s_U \ : \ U \in \mathcal{A}\}$ je podskup od S moći kontinuum, jer iz $s_U = s_V$ za neke $U, V \in \mathcal{A}$ sledi $s_U \in U \cap V \neq \varnothing$, što je nemoguće. Dakle S ne može biti prebrojiv.

Napomena 3. Iz prethodnog je jasno da ako u nekom topološkom prostoru postoji neprebrojiva celularna familija otvorenih skupova, onda on ne može biti separabilan. $\square$

(3) Neka je $p \in X$. Tada je $\{p\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \ \dots (*)$, gde je $U_n := \mathrm{V}[n|p(n)]$ za $n \in \mathbb{N}$. Zaista, neka je $q \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ i $t := p - q \in X$. Tada je $t(n) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je jedina polinomska funkcija koja ima beskonačno mnogo korena konstantna 0 funkcija, to mora biti $t(r) = 0$ za svako $r \in \mathbb{R}$, tj. $p = q$. Dakle $\{p\} \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Obzirom da očigledno imamo da je $p \in U_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, to je jednakost $(*)$ dokazana.

(4) Neka je $p \in X$ i neka su dati otvoreni skupovi $U_n \ni p$ za $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathcal{B}$ baza za τ to za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje $k_n \in \mathbb{N}$, $x_{n,i} \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le k_n)$ i $a_{n,i} \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le k_n)$ tako da je $p \in \mathrm{V}[x_{n,1}, \dots, x_{n,k_n} | a_{n,1} \dots, a_{n,k_n}] \subseteq U_n$. Neka je $r \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,i} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ 1 \le i \le k_n\}$ i neka je za svako $n \in \mathbb{N}$,

$q_n \in X$ polinomska funkcija takva da je $q_n(x_{n,i}) = p(x_{n,i})$ $(1 \le i \le k_n)$ i $q_n(r) = p(r)+1$ (ovakvo q_n postoji obzirom da je $r \neq x_{n,i}$ za svako $i = \overline{1, k_n}$). Stavimo $W := \mathrm{V}[r|p(r)]$. Jasno, W je otvoren i $p \in W$. S druge strane ako je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, onda je $q_n \in U_n \backslash W \neq \varnothing$ (što govori da $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ nije lokalna baza u tački p). Zaista, iz $p \in U_n$ sledi $p(x_{n,i}) = a_{n,i}$ $(1 \le i \le k_n)$. Ali $q_n(x_{n,i}) = p(x_{n,i}) = a_{n,i}$, te je $q_n \in \mathrm{V}[x_{n,1}, \ldots, x_{n,k_n}|a_{n,1} \ldots, a_{n,k_n}] \subseteq U_n$. Takođe imamo $q_n \notin W$, budući da $q_n(r) = p(r) + 1 \neq p(r)$. □

34. Pretpostavimo da je τ petočlana topologija na X koja zadovoljava (1)-(3).

Iz (1) sledi da je $\{2,3\} \in \tau$. Iz (2) sledi da postoji neko $U \in \tau$ tako da je $1 \in U \not\ni 5$. Iz (3) sledi da postoji neko $V \in \tau$ tako da je $1 \notin V \ni 5$. Stavimo $\theta := \{\varnothing, X, \{2,3\}, U, V\}$. Jasno je da je θ petočlan podskup od τ pa mora zapravo biti $\tau = \theta$.

Iz $U \cap V \in \tau \backslash \{X, U, V\}$ zaključujemo da je $U \cap V \in \{\varnothing, \{2,3\}\}$ ... $(*)$. Iz $U \cup \{2,3\} \in \tau \setminus \{\varnothing, \{2,3\}, X, V\}$ zaključujemo da je $U \cup \{2,3\} = U$, tj. $\{2,3\} \subseteq U$. Na potpuno isti način dobijamo $\{2,3\} \subseteq V$. Otuda iz $(*)$ sledi $U \cap V = \{2,3\}$.

Iz $U \cup V \in \tau \setminus \{\varnothing, \{2,3\}, U, V\}$ zaključujemo da je $U \cup V = X$.

Kako je $4 \in X = U \cup V$ to je $4 \in U \vee 4 \in V$.

Slučaj 1: $4 \in U$. Ovde mora biti $U = \{1,2,3,4\}$ jer je $\{4,1\} \subseteq U$, $\{2,3\} = U \cap V \subseteq U$ i $5 \notin U$. Iz $4 \in V$ bi sledilo $U \cap V = \{2,3,4\}$, a ovo nije tačno. Zato je $V = \{2,3,5\}$, obzirom da je $\{2,3\} = U \cap V \subseteq V$, $5 \in V$ i $\{1,4\} \cap V = \varnothing$. Dakle u ovom slučaju je

$$\tau = \{\varnothing, X, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{2,3,5\}\}.$$

Lako je videti da je ovo τ zaista topologija na skupu X kao i da zadovoljava (1)-(3).

Slučaj 2: $4 \in V$. U ovom slučaju se analognim razmatranjem dobija i jedino preostalo rešenje $\tau = \{\varnothing, X, \{2,3\}, \{1,2,3,\}, \{2,3,4,5\}\}$. □

35. Pretpostavimo da je τ jedna takva topologija na X. Neka je $x \in S$ proizvoljno. $S \setminus \{x\}$ nije gust pa postoji neprazan $U_x \in \tau$ tako da je

$U_x \cap \big(S \setminus \{x\}\big) = \varnothing$. No S je gust pa mora biti $U_x \cap S \neq \varnothing$. Otuda je $U_x \cap S = \{x\}$.

Ako su $x, y \in S$ tako da $x \neq y$, onda $\tau \ni U_x \cap U_y = (U_x \cap S^c) \cap (U_y \cap S^c) \subseteq S^c$ pa kako je S gust to mora biti $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Pošto je S^c gust to je $U_x \cap S^c \neq \varnothing$ za svako $x \in S$.

Na osnovu dosadašnje analize zaključujemo da je $\{U_x \cap S^c \ : \ x \in S\}$ familija od n po parovima disjunktnih nepraznih podskupova skupa S^c koji ima n elemenata. Ovo povlači da za neku bijekciju $f : S \to S^c$ imamo $U_x = \{x, f(x)\}$ za svako $x \in S$. Dakle

$$\theta := \left\{ \bigcup_{x \in P} U_x \ : \ P \text{ je konačan podskup od } S \right\} \subseteq \tau.$$

Pokažimo da mora biti $\theta = \tau$.

Neka je $V \in \tau$ proizvoljno i neka je $P := V \cap P$. Ako je $x \in P$ onda mora biti i $f(x) \in V$ jer bi u suprotnom imali $\tau \ni U_x \cap V = \{x\} \neq \varnothing$ i $\{x\} \cap S^c = \varnothing$, pa S^c ne bi bio gust. Dakle $U_x \subseteq V$ za svako $x \in P$, pa je $W := \bigcup_{x \in P} U_x \subseteq V$. Pokažimo da je $W = V$. Neka je $y \in V$. Ako je $y \in S$ onda $y \in P$ te i $y \in U_y \in W$. Ako $y \in S^c$ onda je $y = f(z)$ za neko $z \in S$. Kad bi bilo $z \notin V$, onda bi imali $\tau \ni U_z \cap V = \{y\} \neq \varnothing$ i $S \cap \{y\} = \varnothing$ pa S ne bi bio gust; dakle $z \in S \cap V = P$ pa je $y = f(z) \in U_z \in W$. Ovim je dokazano $V = W$ pa kako je očigledno $W \in \theta$ to smo zapravo dobili $V \in \theta$.

Kako je $V \in \tau$ u gornjem razmatranju bilo proizvoljno zaključujemo da je $\tau = \theta$.

Dakle tražene topologije moraju biti neke od familija

$$\lambda_f := \left\{ \bigcup_{x \in P} \{x, f(x)\} \ : \ P \text{ je konačan podskup od } S \right\}$$

za neku bijekciju $f : S \to S^c$. Lako se proverava da svaka ovakva familija jeste topologija na X koja zadovoljava tražene uslove. Dakle traženih topologija ima $n!$ (obzirom da je $\lambda_f \neq \lambda_g$ kad god su $f, g : S \to S^c$ različite bijekcije).

Ako je $n = 3$ da rešimo drugi deo zadatka treba zapravo naći odgovarajuće bijekcije $f : S \to S^c$ za koje bi λ_f zadovoljavale i dodatna dva uslova, ukoliko takve uopšte i postoje. Lako se proverava da je $\mathrm{cl}_{\lambda_f}\big(\{a\}\big) = \{f^{-1}(a), a\}$ za svako $a \in S^c$. Zato je: $1 \in \{f^{-1}(6), 6\} \iff f(1) = 6$. Slično: $2 \notin \mathrm{cl}_{\lambda_f}\big(\{5,6\}\big) = \mathrm{cl}_{\lambda_f}\big(\{5\}\big) \cup \mathrm{cl}_{\lambda_f}\big(\{6\}\big) = \{5, 6, f^{-1}(5), f^{-1}(6)\}$ tj. $f(2) \notin \{5,6\}$. Zaključujemo da je $f(2) = 4$. Preostaje $f(3) = 5$. Dakle λ_f za $f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ je jedina topologija na skupu $\{1,2,3,4,5,6\}$ koja zadovoljava sve tražene uslove. $\square$

36. **(1)** Iz $\forall s_0 \in S \left(A_{s_0} \subseteq \bigcup\limits_{s \in S} A_s \right)$ sledi $\forall s_0 \in S \left(\mathrm{cl}(A_{s_0}) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s \right) \right)$ te i $\bigcup\limits_{s \in S} \mathrm{cl}(A_s) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s \right)$. Pokažimo još i da za svako $x \in X$ važi $x \notin \bigcup\limits_{s \in S} \mathrm{cl}(A_s) \Rightarrow x \notin \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s \right)$.

Neka je $x \in X \setminus \bigcup\limits_{s \in S} \mathrm{cl}(A_s)$ i neka je $U \ni x$ otvoren skup tako da je skup $T := \{s \in S : A_s \cap U \neq \varnothing\}$ konačan. Za svako $s \in T$ izaberimo po neki otvoren skup $V_s \ni x$ tako da je $V_s \cap A_s = \varnothing$. Stavimo $W := U \cap \bigcap\limits_{s \in T} V_s$. Skup W je otvoren, $x \in W$ i još važi $\forall s \in S \ (W \cap A = \varnothing)$, tj. $W \cap \bigcup\limits_{s \in S} A_s = \varnothing$. Otuda je $x \notin \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s \right)$.

(2) Sledi direktno iz **(1)**. $\square$

37. Neka je $a \in \overline{F \cap U}$. Iz $a \in \overline{F} = F \subseteq U \cup V$ sledi da je $a \in F \cap U$ ili $a \in F \cap V$. Kad bi bilo $a \in F \cap V$, onda bi iz $a \in V \in \tau$ i $(F \cap U) \cap V \subseteq U \cap V = \varnothing$ sledilo da je $a \notin \overline{F \cap U}$. Dakle mora biti $a \in F \cap U$. $\square$

38. Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan. Jasno je da važi

$$U \text{ je otvoren podskup od } A \iff \mathrm{cpl}(U) \text{ je zatvoren nadskup od } \mathrm{cpl}(A).$$

Zato za familije $\mathcal{F}_1 := \{U \in \mathbb{P}(X) \ : \ U \in \tau,\ U \subseteq A\}$ i $\mathcal{F}_2 := \{T \in \mathbb{P}(X) \ : \ \mathrm{cpl}(T) \in \tau,\ T \supseteq \mathrm{cpl}(A)\}$ imamo da je $\mathcal{F}_2 = \{\mathrm{cpl}(U) \ : \ U \in \mathcal{F}_1\}$ pa je shodno tome

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup \mathcal{F}_1 = \mathrm{cpl}\left(\bigcap \{\mathrm{cpl}(U) \ : \ U \in \mathcal{F}_1\}\right) = \mathrm{cpl}\left(\bigcap \mathcal{F}_2\right) =$$

$$= \mathrm{cpl}\,(\mathrm{cl}\,(\mathrm{cpl}(A)))$$

obzirom da je $\mathrm{cl}\,(\mathrm{cpl}(A)) = \bigcap \mathcal{F}_2$.

Ovim je dokazana jednakost $\mathrm{int} = \mathrm{cpl} \circ \mathrm{cl} \circ \mathrm{cpl}$. Iz nje dalje sledi $\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl} = (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{cpl}) \circ \mathrm{cl} \circ (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{cpl}) = \mathrm{cl}$, jer očigledno važi $\mathrm{cpl} \circ \mathrm{cpl} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(X)}$. □

39. Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan i $B := \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}(A))$. Iz $B \subseteq \mathrm{cl}(B)$, obzirom da je B otvoren skup, sledi $B \subseteq \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}(B))$. Iz $B \subseteq cl(A)$ sledi $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A)$ pa je i $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}(B)) \subseteq B$. Dakle $B = \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}(B))$. Obzirom da je $A \subseteq X$ bio proizvoljan ovim smo dokazali da je $(\mathrm{int} \circ \mathrm{cl})^2 = \mathrm{int} \circ \mathrm{cl}$.

Jednakost $(\mathrm{cl} \circ \mathrm{int})^2 = \mathrm{cl} \circ \mathrm{int}$ se može analogno dokazati. U nastavku prikazujemo jedan čisto *algebarski* način da se ova jednakost pokaže. Koristeći se zadatkom 38. kao i činjenicom da je $\mathrm{cpl} \circ \mathrm{cpl} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(X)}$, gde je cpl kao u i tom zadatku operator komplementiranja, dobijamo

$$(\mathrm{cl} \circ \mathrm{int})^2 = (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl}) \circ \mathrm{int} \circ (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl}) \circ \mathrm{int} =$$

$$\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl}) \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} =$$

$$\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl}^2 = \mathrm{cpl} \circ (\mathrm{int} \circ \mathrm{cl}) \circ (\mathrm{int} \circ \mathrm{cl}) \circ \mathrm{cpl} = \mathrm{cpl} \circ (\mathrm{int} \circ \mathrm{cl}) \circ \mathrm{cpl}$$

$$= (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{int} \circ \mathrm{cpl}) \circ (\mathrm{cpl} \circ \mathrm{cl} \circ \mathrm{cpl}) = \mathrm{cl} \circ \mathrm{int}\,.$$

□

40. Primetimo najpre nekoliko jednostavnih činjenica.

Tvrđenje 1 Ako je $A_i \in \mathcal{S}(\tau)$ za svako $i \in I$, onda je i $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{S}(\tau)$. Ovo sledi iz

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A_i)) \subseteq \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathrm{int}(A_i)\Big).$$

Takođe, jasno je da je $\tau \subseteq \mathcal{S}(\tau)$.

Tvrđenje 2 Ako su $F, A \subseteq X$ tako da je $F = \mathrm{cl}(F)$ i $A \in \lambda(\tau)$, onda je $F \cap A \in \lambda(\tau)$. Da pokažemo ovo neka je $U \in \mathcal{S}(\tau)$ tako da je $F \cap A \subseteq U$. Prema **Tvrđenju 1** mora biti $F^c \cup U \in \mathcal{S}(\tau)$. Sada iz $A \in \lambda(\tau)$ i $A \subseteq F^c \cup U$ proizilazi $\mathrm{cl}(F \cap A) \subseteq \mathrm{cl}(A) \subseteq F^c \cup U$. No $\mathrm{cl}(F \cap A) \subseteq \mathrm{cl}(F) = F$ pa odavde dobijamo $\mathrm{cl}(F \cap A) \subseteq U$.

Tvrđenje 3 Za svako $A \subseteq X$ važi: $A \in \mathcal{S}(\tau) \iff \exists U \in \tau\ (U \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(U))$.

Zaista, ako je $A \in \mathcal{S}(\tau)$ onda je $\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$ i $\mathrm{int}(A) \in \tau$, a ako je $U \in \tau$ takvo da je $U \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(U)$ onda je, jasno, $U \subseteq \mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{cl}(U)$ te i $\mathrm{cl}(U) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(U))$ tj. $A \subseteq \mathrm{cl}(U) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$.

Prelazimo na dokaz tvrđenja zadatka. $\varnothing, X \in \lambda(\tau)$ sledi iz $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$ i $\mathrm{cl}(X) = X$. Preostaje da pokažemo da je familija $\lambda(\tau)$ sadrži unije svojih konačnih i preseke svojih proizvoljnih podfamilija.

Ako su $A_1, A_2 \in \lambda(\tau)$ i $U \in \mathcal{S}(\tau)$ takvi da je $A_1 \cup A_2 \subseteq U$, onda je $\mathrm{cl}(A_i) \subseteq U$ (jer je $A_i \subseteq U$) za $i \in \{1, 2\}$, pa je $\mathrm{cl}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{cl}(A_1) \cup \mathrm{cl}(A_2) \subseteq U$.

Neka je najzad $A_i \in \lambda(\tau)$ za svako $i \in I$ i $U \in \mathcal{S}(\tau)$ tako da je $P := \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq U$. Stavimo $B_i := A_i \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U))$ za svako $i \in I$. Prema **Tvrđenju 2** je $B_i \in \lambda(\tau)$ za svako $i \in I$. $P \subseteq U \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U))$ povlači

$$P = P \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U)) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U)) = \bigcap_{i\in I} \big(A_i \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U))\big) = \bigcap_{i\in I} B_i.$$

Dakle, $P = \bigcap_{i\in I} B_i$ i za svako $i \in I$ je $B_i \in \lambda(\tau)$ i $B_i \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U))$.

Fiksirajmo $i_0 \in I$. Imamo $\mathrm{int}(U) \subseteq \mathrm{int}(U) \cup B_{i_0} \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U))$ pa je $\mathrm{int}(U) \cup B_{i_0} \in \mathcal{S}(\tau)$. Iz $B_{i_0} \in \lambda(\tau)$ sada sledi $\mathrm{cl}(B_{i_0}) \subseteq \mathrm{int}(U) \cup B_{i_0}$.

Napokon

$$\mathrm{cl}(P) = \mathrm{cl}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{cl}(B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \big[\mathrm{int}(U) \cup B_i\big] = \mathrm{int}(U) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

$$= \mathrm{int}(U) \cup P \subseteq U.$$

$\square$

41. Neka je $S_0 \subseteq X$ prebrojiv gust skup i neka je, za svako $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ po jedna prebrojiva lokalna baza u tački x. Za $x \in X$ i neprazan $U \in \mathcal{B}_x$ uočimo po $s(x,U) \in U \cap S$ (ovakva tačka postoji jer je S gust). Pokažimo da je prebrojivi skup $D := \{s(x,U) \ : \ x \in S_0,\ U \in \mathcal{B}_x,\ U \neq \varnothing\} \subseteq S$ gust u X. Neka je $V \in \tau_X$ neprazan. Postoji neko $x \in S_0 \cap V$ jer je S_0 gust. Obzirom da je $\mathcal{B}_x$ lokalna baza u x za neko $U \in \mathcal{B}_x$ važi $x \in U \subseteq V$. Kako je $U \in \mathcal{B}_x$ neprazan to po konstrukciji imamo da je $s(x,U) \in U \subseteq V$. Ali $x \in S_0$, $U \in \mathcal{B}_x$ i $U \neq \varnothing$ pa je $s(x,U) \in D$, po defniciji skupa D. Dakle $s(x,U) \in D \cap V \neq \varnothing$. $\square$

42. **(1)** A^c je gust ako i samo ako $\forall U \in \tau_X \ (U \neq \varnothing \Rightarrow A^c \cap U \neq \varnothing)$ ako i samo ako

$$\forall U \in \tau_X \ \ (A^c \cap U = \varnothing \Rightarrow U = \varnothing)$$

ako i samo ako $\forall U \in \tau_X \ (U \subseteq A \Rightarrow U = \varnothing)$ ako i samo ako $\mathcal{F}_A := \{U \in \tau_X \ : \ U \subseteq A\} = \{\varnothing\}$ ako i samo ako $\varnothing = \bigcup \mathcal{F}_A = \mathrm{int}(A)$.

(2) Neka je A nigde gust podskup prostra X i $U \neq \varnothing$ otvoren skup. Kako je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$ to postoji neko $y \in U \setminus \mathrm{cl}(A) =: V$. V je otvoren neprazan skup, $V \subseteq U$ i zbog $V \cap \mathrm{cl}(A) = \varnothing$, još važi i $V \cap A = \varnothing$.

Da pokažemo obrat pretpostavimo da A ima navedenu osobinu i neka su $x \in \mathrm{cl}(A)$ i otvoren skup $U \ni x$ proizvoljni. U je neprazan otvoren skup pa po pretpostavci postoji neprazan otvoren $V \subseteq U$ tako da je $V \cap A = \varnothing \ \ldots (*)$. Ako je $z \in V$ proizvoljno onda iz $(*)$ sledi da je $z \notin \mathrm{cl}(A)$. Zato je $V \cap \mathrm{cl}(A) = \varnothing$. Dakle $\varnothing \neq V = V \setminus \mathrm{cl}(A) \subseteq U \setminus \mathrm{cl}(A)$ te nije $U \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

Obzirom da je U bila proizvoljna otvorena okolina tačke x, ovo znači da x nije unutrašnja tačka skupa $\mathrm{cl}(A)$. A iz proizvoljnosti tačke $x \in \mathrm{cl}(A)$ sada sledi $\mathrm{cl}(A) = \varnothing$.

Pokažimo najzad da je $\mathrm{bd}(U)$ nigde gust skup ako je $U \subseteq X$ otvoren. Ako je $z \in U$ onda iz $U \cap U^c = \varnothing$ i $U \in \tau_X$ sledi $z \notin \mathrm{cl}(U^c)$ te i $z \notin \mathrm{bd}(U)$. Zato je $U \cap \mathrm{bd}(U) = \varnothing \ \ldots (**)$. Kako je $\mathrm{bd}(U)$ zatvoren skup to je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{bd}(U))) = \mathrm{int}(\mathrm{bd}(U)) =: W$. Kad bi postojalo neko $x \in W$, onda bismo zbog $W \cap U = \varnothing$ (što sledi iz $(**)$ i $W \subseteq \mathrm{bd}(U)$) imali $x \notin \mathrm{cl}(U)$ (setimo se da je W otvoren). Ali s druge strane je $x \in W \subseteq \mathrm{bd}(U) \subseteq \mathrm{cl}(U)$, kontradikcija. Dakle $\varnothing = W = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{bd}(U)))$. □

43. (1) ⇒(2): Iz **(1)** sledi $U = \mathrm{int}(F)$ gde je $F := \mathrm{cl}(A)$ zatvoren skup.

(2)⇒(3): Koristeći zadatak 39. imamo da iz **(2)** sledi

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) = (\mathrm{int} \circ \mathrm{cl})\left((\mathrm{int} \circ \mathrm{cl})(F)\right) = (\mathrm{int} \circ \mathrm{cl})^2(F) = (\mathrm{int} \circ \mathrm{cl})(F)$$

$$= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(F)) = \mathrm{int}(F) = U\,,$$

obzirom da je $\mathrm{cl}(F) = F$.

(3)⇒(1): Ovo je jasno. □

44. Videti zadatak 43. □

45. Za prvi deo zadatka treba samo primetiti da je $M \subseteq X$ nigde gust ako i samo ako je zatvoren skup $\mathrm{cl}(M)$ nigde gust. Tvrđenje iz drugog dela zadatka sledi iz prvog dela primenom `De Morgan`-ovog zakona $\bigcup\limits_{i \in I} P_i = X \setminus \bigcap\limits_{i \in I}(X \setminus P_i)$. □

46. (1)⇒(2): Neka je $U \neq \varnothing$ otvoren. Kad bi U bio I kategorije, onda bi $S := U^c$ bio rezidualan skup koji očigledno nije gust (jer $S \cap U = \varnothing$, a U je neprazan otvoren skup). Zato je U II kategorije.

(2)⇒(3): Ako su $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, otvoreni, gusti, onda je $P := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ rezidualan skup (videti zadatak 45.), tj. P^c je I kategorije. Da pokažemo da je P gust uočimo neki neprazan otvoren U skup. Ne može biti $U \subseteq P^c$, jer bi onda U bio I kategorije, suprotno pretpostavci. Otuda je $U \cap P \neq \varnothing$.

(3)⇒(4): Neka su $F_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, zatvoreni prazne unutrašnjosti i $Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Skupovi $U_n := F_n^c$, za $n \in \mathbb{N}$, su otvoreni i gusti jer za proizvoljan podskup $A \subseteq X$ prostora važi da je $\operatorname{int}(A) = \varnothing$ ako i samo ako je A^c gust (ovo sledi iz $\operatorname{cl}(A^c) = X \setminus (\operatorname{int}(X \setminus A^c)) = X \setminus \operatorname{int}(A)$). Zato je po pretpostavci $P := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gust skup. Imamo $Q^c = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus F_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = P$. Kako je dakle Q^c gust to je $\operatorname{int}(Q) = \varnothing$.

(4)⇒(1): Neka je $A \subseteq X$ takav da je A^c I kategorije. Postoje zatvoreni F_n, $n \in \mathbb{N}$, prazne unutrašnjosti tako da važi $A^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n =: Q$. Po pretpostavci je $\operatorname{int}(Q) = \varnothing$, pa je i $\operatorname{int}(A^c) = \varnothing$. A ovo znači da je A gust. □

47. Neka su U_n, $n \in \mathbb{N}$, otvoreni gusti podskupovi od $\mathbb{R}$ i neka je $V \subseteq$ proizvoljan neprazan otvoren. Pokažimo da je $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \varnothing$. Ovo će značiti da je $\mathbb{R}$ `Baire`-ov na osnovu zadatka 46.

Rekurzivno konstruišimo $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, tako da je $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n] \subseteq V \cap U_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$: $U_1 \cap V$ je neprazan otvoren (jer je U_1 gust) skup pa postoje $\varepsilon, u \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tako da je $(u-\varepsilon; u+\varepsilon) \subseteq U_1 \cap V$; definišemo $a_1 := u - \frac{\varepsilon}{2}$ i $b_1 := u + \frac{\varepsilon}{2}$; ako su a_n i b_n već konstruisani tako da važi $[a_n; b_n] \subseteq V$, to obzirom da je $(a_n; b_n) \cap U_{n+1} =: W$ neprazan otvoren postoje $\delta, v \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, tako da je $(v-\delta; v+\delta) \subseteq W$; definišemo $a_{n+1} := v - \frac{\delta}{2}$ i $b_{n+1} := v - \frac{\delta}{2}$.

Nakon ove konstrukcije uočimo proizvoljno $r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n]$. Jasno je da je $r \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Napomena 4. Tvrđenje zadatka inače direktno sledi iz bilo koje od naredne dve opštije činjenice:
(a) svaki `Hausdorff`-ov lokalno kompaktan prostor je `Baire`-ov;
(b) ako je d kompletna metrika na skupu X, onda je $\big(X, \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d)\big)$ `Baire`-ov.

Dokazi ovih činjenica su neposredna imitacija rešenja ovog zadatka koje smo gore prezentovali.

Da pokažemo (a) neka je dakle X `Hausdorff`-ov lokalno kompaktan prostor i $(U_n : n \in \mathbb{N})$ niz gustih otvorenih skupova. Treba dokazati da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gust. Neka je V proizvoljan neprazan otvoren skup.

Konstruišimo rekurzivno niz $(P_n : n \in \mathbb{N})$ nepraznih otvorenih skupova tako da je $\mathrm{cl}(P_n)$ kompaktan i $\mathrm{cl}(P_{n+1}) \subseteq \mathrm{cl}(P_n) \subseteq V \cap U_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Možemo uočiti neko $x_1 \in V \cap U_1 \neq \varnothing$ (U_1 je gust). Prema zadatku 149. postoji neki otvoren P_1 takav da je $\mathrm{cl}(P_1)$ kompaktan i tako da je $x_1 \in P_1 \subseteq \mathrm{cl}(P_1) \subseteq V \cap U_1$.

Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ i da su konstruisani neprazni otvoreni skupovi P_i za $i = \overline{1,k}$ tako da za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ važi da je $\mathrm{cl}(P_i)$ kompaktan i da $\mathrm{cl}(P_i) \subseteq V \cap U_i$, i ako $k > 1$ tako da je $\mathrm{cl}(P_{i+1}) \subseteq \mathrm{cl}(P_i)$ za svako $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. P_k je neprazan otvoren pa možemo uočiti neko $x_{k+1} \in P_k \cap U_{k+1}$ (U_{k+1} je gust). Prema zadatku 149. postoji neki otvoren P_{k+1} takav da je $\mathrm{cl}(P_{k+1})$ kompaktan i tako da je $x_{k+1} \in P_{k+1} \subseteq \mathrm{cl}(P_{k+1}) \subseteq V \cap U_{k+1}$. Jasno $\mathrm{cl}(P_{k+1}) \subseteq \mathrm{cl}(P_k)$ i $\mathrm{cl}(P_{k+1}) \subseteq V \cap U_{k+1}$ (jer je $P_k \subseteq P_1 \subseteq V$).

Nakon što smo konstruisali ovaj niz primetimo da je $(P_n : n \in \mathbb{N})$ centrirana familija kompaktnih skupova, obzirom da je $P_n \neq \varnothing$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zato postoji neko $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}(P_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap V) = V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \varnothing$.

Da pokažemo (b) neka je d kompletna metrika na skupu X i $(U_n : n \in \mathbb{N})$ niz gustih otvorenih skupova. Treba dokazati da je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gust. Neka je V proizvoljan neprazan otvoren skup.

Konstruišimo rekurzivno niz $(P_n : n \in \mathbb{N})$ nepraznih otvorenih skupova tako da je $\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(P_n)) < \dfrac{2}{n}$ i $\operatorname{cl}(P_{n+1}) \subseteq \operatorname{cl}(P_n) \subseteq V \cap U_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Možemo uočiti neko $x_1 \in V \cap U_1 \neq \varnothing$ (U_1 je gust). Postoji $\varepsilon_1 \in (0;1)$ tako da je $\mathrm{K}_d[x_1;\varepsilon_1] \subseteq V \cap U_1$. Definišimo $P_1 := \mathrm{K}_d[x_1;\varepsilon_1)$. Jasno $\operatorname{cl}(P_1) \subseteq \mathrm{K}_d[x_1,\varepsilon_1] \subseteq V \cap U_1$ i $\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(P_1)) \leq \operatorname{diam}\big(\mathrm{K}_d[x_1;\varepsilon_1]\big) \leq 2\varepsilon_1 < 2$.

Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ i da su konstruisani neprazni otvoreni skupovi P_i za $i = \overline{1,k}$ tako da za svako $i \in \{1,\ldots,k\}$ važi da je $\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(P_i)) < \dfrac{2}{i}$ i da $\operatorname{cl}(P_i) \subseteq V \cap U_i$, i ako $k > 1$ tako da je $\operatorname{cl}(P_{i+1}) \subseteq \operatorname{cl}(P_i)$ za svako $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. P_k je neprazan otvoren pa možemo uočiti neko $x_{k+1} \in P_k \cap U_{k+1}$ (U_{k+1} je gust). Postoji $\varepsilon_{k+1} \in \left(0;\dfrac{1}{k+1}\right)$ tako da je $\mathrm{K}_d[x_{k+1};\varepsilon_{k+1}] \subseteq P_k \cap U_{k+1}$. Definišimo $P_{k+1} := \mathrm{K}_d[x_{k+1};\varepsilon_{k+1})$. Jasno $\operatorname{cl}(P_{k+1}) \subseteq \mathrm{K}_d[x_{k+1};\varepsilon_{k+1}] \subseteq V \cap U_{k+1}$ (jer je $P_k \subseteq P_1 \subseteq V$), $\operatorname{cl}(P_{k+1}) \subseteq \operatorname{cl}(P_k)$ i $\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(P_{k+1})) \leq \operatorname{diam}\big(\mathrm{K}_d[x_{k+1};\varepsilon_{k+1}]\big) \leq 2\varepsilon_{k+1} < \dfrac{2}{k+1}$.

Na ovaj način smo konstruisali $\subseteq$-opadajući niz $(P_n : n \in \mathbb{N})$ nepraznih zatvorenih skupova čiji d-dijametri teže nuli. d je kompletna metrika pa zato postoji neko $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}(P_n) \subseteq \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap V) = V \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \varnothing$. □

48. Za $A \subseteq \mathbb{R}$ označimo sa $\mathrm{m}(A)$ spoljnu `Lebesgue`-ovu meru skupa A.

Neka je $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Za svako $m \in \mathbb{N}$ definišimo otvoren gust skup

$$U_m := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - \frac{1}{m2^n}; q_n + \frac{1}{m2^n}\right)$$

Skup $R := \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} U_m$ je rezidualan i važi

$$\mathrm{m}(R) \leq \mathrm{m}(U_m) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2}{m2^n} = \frac{2}{m}$$

za svako $m \in \mathbb{N}$, pa je $\mathrm{m}(R) = 0$.

Za skup U_1 važi $\mathrm{m}(U_1) \leq 2$, pa kad bi $F := X \setminus U_1$ bio konačne `Lebesgue`-ove mere, onda bi i skup $\mathbb{R}$ bio takav, a to nije tačno. Dakle F je zatvoren, nigde gust skup beskonačne `Lebesgue`-ove mere. $\square$

49. (1) Dokazaćemo da su jedina $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidna preslikavanja $f : X \to \mathbb{R}$ konstantna preslikavanja. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ takvo da za neke $u_1, u_2 \in X$ i $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, gde $r_1 < r_2$, važi $f(u_i) = r_i$, $i = \overline{1, 2}$.

Neka je $r \in (r_1; r_2)$ proizvoljno. Pretpostavimo da je $U := f^{\leftharpoonup}(-\infty, r) \in \tau$. Onda je $X \setminus U$ konačan (jer $u_1 \in U \neq \varnothing$), pa kako je X beskonačan, to i U mora biti beskonačan. Za $V := f^{\leftharpoonup}(r, +\infty)$ važi $U \cap V = \varnothing$, tj. $U \subseteq X \setminus V$, pa je zato i $X \setminus V$ beskonačan. Ali iz $u_2 \in V$ sledi da je V neprazan te mora biti $V \notin \tau$. Dakle U i V ne mogu istovrememo biti τ-otvoreni, pa f nije neprekidno.

(2) Najpre pokažimo da ako je $f : X \to Y$ (τ, τ_Y)-neprekidno preslikavanje, onda mora da važi (bio X neprebrojiv ili ne):

ako su $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathrm{ran}(f)$, onda iz $n < m$ sledi da je $f^{\leftharpoonup}\{n\}$ konačan skup $\ldots(*)$

Zaista skup $U := f^{\leftharpoonup}(m\mathbb{N})$ je neprazan (zbog $m \in \mathrm{ran}(f)$) i τ-otvoren pa mora biti $X \setminus U$ konačan. Ali očigledno je $V := f^{\leftharpoonup}\{n\} \subseteq X \setminus U$ (zbog $n < m = \min m\mathbb{N}$) te je i V konačan.

Dokazaćemo da je **nekonstantno** $f : X \to Y$ u slučaju da je X neprebrojiv neprekidno ako i samo ako ispunjava sledeći uslov:
postoje $m, k \in \mathbb{N}$, *gde* $m > 1$, *delioci* $d_1, \ldots, d_k$ *od* m *i postoje neprazni konačni* $P_i \subseteq X$ $(i = \overline{1,k})$ *tako da važi* $P_i \cap P_j = \varnothing$ *kad god* $i \neq j$; $f^{\rightharpoonup} P_i = \{d_i\}$ $(i = \overline{1,k})$ *i* $f^{\rightharpoonup}\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = \{m\}$.

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno. Kad bi za svako $n \in \mathbb{N}$ skup $f^{\leftharpoonup}\{n\}$ bio konačan, onda bi iz $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{\leftharpoonup}\{n\}$ sledilo da je X prebrojiv kao unija prebrojivo mnogo konačnih skupova. Dakle mora postojati neko $m \in \mathbb{N}$ tako da je $f^{\leftharpoonup}\{m\}$ beskonačan.

Kad bi postojalo neko $m_1 \in \operatorname{ran}(f) =: Y_0$ tako da je $m < m_1$, onda bi na osnovu $(*)$ skup $f^{\leftharpoonup}\{m\}$ bio konačan, suprotno pretpostavci. Kako je očigledno $m \in Y_0$ to imamo $m = \max Y_0$. Otuda je $Y_0 \subseteq [1; m] \cap \mathbb{N}$. Otuda je skup $Y_0 \setminus \{m\}$ konačan, a kako je f nekonstantno to je on i neprazan. Označimo sa k broj elemenata tog skupa. Neka je $Y_0 \setminus \{m\} = \{d_1, \ldots, d_k\}$, gde su (nužno, po definiciji broja k) brojevi $d_1, \ldots, d_k$ međusobno različiti. Stavimo $P_i := f^{\leftharpoonup}\{d_i\}$. Jasno je da je $f^{\rightharpoonup} P_i = \{d_i\}$ (zbog $d_i \in \operatorname{ran}(f)$), $P_i \neq \varnothing$ kao i da je $P_i \cap P_j = \varnothing$ ako $i \neq j$ (zbog $d_i \neq d_j$). Iz $d_i < m \in \operatorname{ran}(f)$ prema $(*)$ imamo da je svaki P_i konačan skup. Iz $\operatorname{ran}(f) = \{d_1, \ldots, d_k, m\}$ sledi još i da je $f^{\rightharpoonup}\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = \{m\}$. Pokažimo da d_i deli m za svako $i = \overline{1,k}$. Zaista, skup $U := f^{\leftharpoonup}(d_i\mathbb{N})$ je neprazan (zbog $d_i \in d_i\mathbb{N} \cap \operatorname{ran}(f)$) i τ-otvoren pa je $X \setminus U$ konačan. Kako je $f^{\leftharpoonup}\{m\}$ beskonačan podskup od X to možemo uočiti neko $x \in f^{\leftharpoonup}\{m\} \cap U$. Odavde sledi $f(x) \in d_i\mathbb{N}$ i $f(x) = m$, te je $m \in d_i\mathbb{N}$.

Pretpostavimo sada da je $f : X \to Y$ preslikavanje opisanog oblika. Da proverimo neprekidnost od f potrebno je i dovoljno (obzirom da je $\{k\mathbb{N} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ baza za τ_Y) da pokažemo da je $f^{\leftharpoonup} k\mathbb{N} \in \tau$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Stavimo $U := f^{\leftharpoonup}(k\mathbb{N})$ i pretpostavimo da je $U \neq \varnothing$. Uočimo $x \in U$ i stavimo $n := f(x)$. Jasno $n \in k\mathbb{N}$, tj. $n\mathbb{N} \subseteq k\mathbb{N}$.

Ako je $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ onda je po pretpostavci $n = m$ te imamo da je $m \in k\mathbb{N}$ i otuda $m\mathbb{N} \subseteq k\mathbb{N}$.

Ako je $x \in P_{i_0}$ za neko $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$, onda je po pretpostavci $n = d_{i_0}$. Kako je d_{i_0} delilac broja m to je $m\mathbb{N} \subseteq d_{i_0}\mathbb{N} = n\mathbb{N} \subseteq k\mathbb{N}$.

Dakle u svakom slučaju važi $m \in m\mathbb{N} \subseteq k\mathbb{N}$ pa je $V := f^{\leftharpoonup}\{m\} \subseteq U$. Otuda je $X \setminus U \subseteq X \setminus V = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$, a obzirom da su skupovi P_i $(1 \leq i \leq k)$ konačni odavde dobijamo $U \in \tau$. $\square$

50. Neka su $x \in X$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Dokazujemo neprekidnost funkcije f_{max} u tački x. Stavimo $y := f_{max}(x)$. Neka je $i_0 \in T := \{1, \ldots, n\}$ takvo da je $f_{i_0}(x) = y$. Za svako $i \in T$ imamo $f_i(x) \leq f_{i_0}(x) < y + \varepsilon$ pa postoji neki otvoren $U_i \ni x$ tako da važi $f_i^{\rightharpoonup}U_i \subseteq (-\infty, y + \varepsilon)$ $\ldots(1)$. Iz $f_{i_0}(x) \in (y - \varepsilon, +\infty)$ sledi da postoji otvoren $V \ni x$ takav da $f_{i_0}^{\rightharpoonup}V \subseteq (y - \varepsilon, +\infty)$ $\ldots(2)$. Stavimo $W := V \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i \ni x$. Neka je $z \in W$ bilo koja tačka. Za svako $i \in T$ je $z \in U_i$ pa zbog (1) imamo $S_z := \{f_i(z) \;:\; i \in T\} \subseteq (-\infty, y + \varepsilon)$. Otuda je $f_{max}(z) = \max S_z < y + \varepsilon$. Zbog $z \in V$ i (2) imamo još i $f_{i_0}(z) > y - \varepsilon$ te je i $f_{max}(z) > y - \varepsilon$. Dakle $f^{\rightharpoonup}W \subseteq (y - \varepsilon; y + \varepsilon)$. $\square$

51. Neka je $B \subseteq Y$ proizvoljan λ-zatvoren [λ-otvoren] skup. Za svako $S \in \mathcal{F}$ skup $(g_S)^{\leftharpoonup}B$ je $\mathrm{rel}_S(\tau)$-zatvoren [$\mathrm{rel}_S(\tau)$-otvoren], pa kako je S τ-zatvoren [τ-otvoren] to je i $(g_S)^{\leftharpoonup}B$ τ-zatvoren [τ-otvoren]. Imamo

$$g^{\leftharpoonup}B = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} (g_S)^{\leftharpoonup}B\,,$$

pa kako je $\mathcal{F}$ lokalno konačna [proizvoljna] familija τ-zatvorenih [τ-otvorenih] skupova, to sledi da je i $g^{\leftharpoonup}B$ τ-zatvoren [τ-otvoren]. $\square$

52. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Stavimo $U := \{[x]\} = \{f(x)\}$ i $m := \min\{k \in \mathbb{Z} \ :\ x < k\}$ i $V := [x; m) \in \tau$. Tada ako je $y \in V$ jasno je da je $f(y) = [y] = [x]$, pa je $f^{\rightharpoonup}V \subseteq U$. Ovim smo dokazali da je f preslikavanje koje je (τ, λ)-neprekidno **za proizvoljnu topologiju** λ na skupu $\mathbb{R}$. $\square$

53. **(1)** Pretpostavimo da niz $(a_n \ :\ n \in \mathbb{N})$ konvergira ka nekoj tački $b \in \mathbb{R}$ u odnosu na topologiju τ.

Skup $F := \{a_n \ :\ n \in \mathbb{N}\} \setminus \{b\}$ je prebrojiv pa je $U := \mathbb{R} \setminus F \in \tau$. Kako je $b \in U$ to mora da postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U\big) \tag{3.2}$$

Pokažimo da je $a_n = b$ za svako $n \geq n_0$. Dakle neka je $n \geq n_0$. Iz $a_n \neq b$ bi sledilo $a_n \in F$, tj. $a_n \notin \mathbb{R} \setminus F = U$, što je u suprotnosti sa (3.2).

(2) Neka je (Y, τ_Y) proizvoljan topološki prostor i $f : \mathbb{R} \to Y$ bilo koje preslikavanje. Ako je $(x_n \ :\ n \in \mathbb{N})$ niz realnih brojeva koji konvergira ka nekoj tački $y \in \mathbb{R}$ u odnosu na topologiju τ, onda je $x_n = y$ počev od nekog indeksa pa na dalje. Otuda je $f(x_n) = f(y)$ počev od tog istog indeksa pa na dalje. Zato niz $(f(x_n) \ :\ n \in \mathbb{N})$ konvergira ka tački $f(y) \in \mathbb{R}$ u odnosu na topologiju τ. Dakle f je (τ, τ_Y)-nizovno neprekidno.

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno recimo iz razloga što je $(0; 1) \in \mu_{\mathbb{R}}$ dok jasno $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})^{\leftharpoonup}(0; 1) = (0; 1) \notin \tau$. $\square$

54. Dokazujemo odgovarajuće tvrđenje za zatvorena preslikavanja.

(1)⇒(2): Neka je $f : X \to Y$ zatvoreno preslikavanje, $A \subseteq Y$ i $U \in \tau_X$ tako da je $f^{\leftharpoonup}A \subseteq U$. Skup $F := f^{\rightharpoonup}(X \setminus U)$ je τ_Y-zatvoren pa je $V := Y \setminus F$ τ_Y-otvoren. Iz $(X \setminus U) \cap U = \varnothing$ i $f^{\leftharpoonup}A \subseteq U$ sledi $(X \setminus U) \cap f^{\leftharpoonup}A = \varnothing$. Zato je $F \cap A = \varnothing$, tj. $A \subseteq V$. Kako je $V \cap F = \varnothing$ to je $f^{\leftharpoonup}V \cap f^{\leftharpoonup}F = \varnothing$. Ali $X \setminus U \subseteq f^{\leftharpoonup}F$ sada povlači $f^{\leftharpoonup}V \cap (X \setminus U) = \varnothing$, tj. $f^{\leftharpoonup}V \subseteq U$.

(2)⇒(1): Neka važi uslov **(2)** i neka je $F \subseteq X$ τ_X-zatvoren skup. Označimo $G := f^{\rightharpoonup}F$ i $A := Y \setminus G$. $A \cap f^{\rightharpoonup}F = \varnothing$ povlači $f^{\leftharpoonup}A \cap F = \varnothing$, tj. $f^{\leftharpoonup}A \subseteq X \setminus F$. Imamo $X \setminus F \in \tau_X$ te po pretpostavci postoji neko $V \in \tau_Y$

tako da je $A \subseteq V$ i $f^{\leftharpoondown}V \subseteq X \setminus F$, tj. $f^{\leftharpoondown}V \cap F = \varnothing$. Odavde sledi $V \cap G = \varnothing$. Dakle $V \subseteq Y \setminus G = A \supseteq V$, tj. $Y \setminus G = V \in \tau_Y$, te je $f^{\rightharpoondown}F = G$ τ_Y-zatvoren. $\square$

55. **(1)**$\Rightarrow$**(2)**: Sledi na osnovu zadatka 54.

(2)$\Rightarrow$**(1)**: Neka važi uslov **(2)**, neka je $A \subseteq Y$ proizvoljan skup i $U \in \tau_X$ takav da $f^{\leftharpoondown}A \subseteq U$. Tada je $f^{\leftharpoondown}\{y\} \subseteq U$ za svako $y \in A$. Zato po pretpostavci za svako $y \in A$ postoji po τ_Y-otvoren skup $V_y \ni y$ takav da $f^{\leftharpoondown}V_y \subseteq U \ \ldots(*)$. Stavimo $V := \bigcup_{y \in A} V_y \in \tau_Y$. Jasno $A \subseteq V$ a takođe imamo i da je $f^{\leftharpoondown}V = \bigcup_{y \in A} f^{\leftharpoondown}V_y \subseteq U$ zbog $(*)$.

Kako je $A \subseteq Y$ bio proizvoljan to sada na osnovu zadatka 54. zaključujemo da f mora biti zatvoreno. $\square$

56. Pokažimo da za svaka tačka ima okolinu u kojoj se g poklapa sa nekim $(\tau_X, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidnim preslikavanjem. Dakle neka je $x \in X$ proizvoljno.

Izaberimo bilo koje $h \in \mathcal{L}$ i τ_X-otvoren $U \ni x$ tako da važi $h^{\rightharpoondown}U \subseteq (h(x) - 1, +\infty) \ \ldots(*)$. Indeksirana familija $(f^{\leftharpoondown}(h(x) - 1, +\infty) \ : \ f \in \mathcal{L})$ je lokalno konačna pa postoji neki τ_X-otvoren $V \ni x$ i neki konačan $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ tako da važi $f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \Rightarrow U \cap f^{\leftharpoondown}(h(x)_1, +\infty) = \varnothing$. Drugim rečima imamo

$$\text{ako } f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \text{ i } z \in V\,,\ \text{onda } f(z) \leq h(x) - 1 \ \ldots(**).$$

Neka je $z \in U \cap V$ proizvoljna tačka. Imamo $g(z) = \sup\{f(z) \ : \ f \in \mathcal{L}\} = \max\{a, b\} \ \ldots(***)$, gde je $a := \sup\{f(z) \ : \ f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0\}$ i $b := \sup\{f(z) \ : \ f \in \mathcal{L}_0 \cup \{h\}\}$. Iz $z \in V$ i $(**)$ sledi $a \leq h(x) - 1$. Iz $z \in U$ i $(*)$ sledi $h(x) - 1 < h(z) \leq b$. Ovo znači da je $a < b$. Zato iz $(***)$ imamo $g(z) = b = \max\{f(z) \ : \ f \in \mathcal{L}_0 \cup \{h\}\}$. $\mathcal{L}_0 \cup \{h\}$ je konačan skup neprekidnih funkcija pa je po zadatku 50. funkcija $l : X \to \mathbb{R}$ definisana sa $l(y) = \max\{f(y) \ : \ f \in \mathcal{L}_0 \cup \{h\}\}$ neprekidna. Dakle na otvorenom skupu $U \cap V \ni x$ funkcija g se poklapa sa neprekidnom funkcijom $l : X \to \mathbb{R}$. $\square$

57. **(1)** Kad bi postojala (τ_X, τ_Y)-neprekidna ekstenzija $h \supseteq f$, $h : X \to Y$, onda bi zbog $f = h \restriction X_0$, gde je $X_0 = \{1, 4\}$, f bilo $(\mathrm{rel}_{X_0}(\tau_X), \tau_Y)$-neprekidno preslikavanje. No ovo nije tačno jer $\{a\} \in \tau_Y$ dok $f^{\leftarrow}\{a\} = \{1\} \notin \mathrm{rel}_{X_0}(\tau_X)$.

(2) Neka je $U \in \mathbb{P}(X) \setminus \tau_X$ i $\lambda := \tau_X \cup \{U\}$. Pretpostavimo da je λ topologija i $g \supseteq f$, tako da $g : (X, \lambda) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y)$. Zbog $f \subseteq g$ mora biti

$$1 \in g^{\leftarrow}\{a\} \not\ni 4 \quad \ldots (*) \quad \text{i} \quad 1 \notin g^{\leftarrow}\{b, c\} \ni 4 \quad \ldots (**)$$

Kako ni postoji nijedan $A \in \tau_X$ takav da je $1 \notin A \ni 4$ to zbog $(**)$ mora biti $g^{\leftarrow}\{b, c\} \in \lambda \setminus \tau_X = \{U\}$, tj. $g^{\leftarrow}\{b, c\} = U$. Zbog $g^{\leftarrow}\{a\} \neq g^{\leftarrow}\{b, c\} = U$ imamo $g^{\leftarrow}\{a\} \in \tau_X$. Sada zbog $(*)$ mora biti $g^{\leftarrow}\{a\} = \{1, 2\}$. Specijalno $g(2) = a$. Imamo $\{a\} \cap \{b, c\} = \varnothing$ pa je $g^{\leftarrow}\{a\} \cap g^{\leftarrow}\{b, c\} = \varnothing$, tj. $U \subseteq \{3, 4\}$. Zbog $4 \in U$ odavde sledi $U \in \{\{4\}, \{4, 3\}\}$. Ako je $U = \{4, 3\}$ onda zbog $\{3, 4\} \cap \{1, 2, 4\} = \{4\} \notin \lambda$, familija λ nije topologija. Dakle mora biti $U = \{4\}$. Specijalno $3 \notin g^{\leftarrow}\{b, c\}$. Kako $3 \notin \{1, 2\} = g^{\leftarrow}\{a\}$ to zaključujemo da je $g(3) = d$.

Prema tome ukoliko postoji rešenje datog problema to mora biti par (λ, g) dat sa

$$\lambda = \{\varnothing, X, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{4\}\},$$
$$g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}.$$

Lako se proverava da par (λ, g) zadovoljava tražene uslove. $\square$

58. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je E_0 I kategorije. Kako je unija dva (pa i prebrojivo mnogo) skupa I kategorije ponovo skup I kategorije to iz $E = E_0 \cup (E \setminus E_0)$, obzirom da je E skup II kategorije, sledi da je $E \setminus E_0$ II skup kategorije. Imamo $E \setminus E_0 = \{x \in E \ : \ |f(x)| > 0\}$ pa je $E \setminus E_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, gde su $E_n := \{x \in E \ : \ |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Kad bi za svako $n \in \mathbb{N}$ skup E_n bio nigde gust, onda bi $E \setminus E_0$ bio skup I kategorije. Zato postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E_{n_0})) \neq \varnothing$. Otuda postoji neprazan otvoren skup U tako da za svaki neprazan otvoren $W \subseteq U$ važi $W \cap E_{n_0} \neq \varnothing$ (videti zadatak 42.). Pošto je S gust možemo uočiti neko

$q \in S \cap U$. Iz $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in E}} f(x) = 0$ sledi da postoji neki otvoren $V \ni q$ tako da za svako $x \in E \cap (V \setminus \{q\})$ važi $|f(x)| < \dfrac{1}{n_0}$. Znamo da mora da postoji neko $y \in E_{n_0} \cap V$. Iz $y \in E_{n_0} \subseteq E$ i $q \in S \subseteq E^c$ sledi da je $y \neq q$, pa je $y \in E \setminus (V \setminus \{q\})$. Zato važi $|f(y)| < \dfrac{1}{n_0}$. Ali zbog $y \in E_{n_0}$ mora biti $|f(y)| > \dfrac{1}{n_0}$, kontradikcija. $\square$

59. (1) Ako je $A = \varnothing$ onda ovo važi po definiciji. Neka je $A \neq \varnothing$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$. Ako su $u, v \in \mathrm{cl}(A)$ onda postoje $x, y \in A$ tako da je $d(u, x) < \varepsilon$ i $d(v, y) < \varepsilon$. Zato je $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) < 2\varepsilon + \mathrm{diam}(A)$. Kako su $u, v \in \mathrm{cl}(A)$ bili proizvoljni to odavde sledi da je $\mathrm{diam}(\mathrm{cl}(A)) \leq 2\varepsilon + \mathrm{diam}(A)$. Kako je $\varepsilon \in (0; +\infty)$ bilo proizvoljno ovo znači da je $\mathrm{diam}(\mathrm{cl}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$. Iz $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ sledi $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{cl}(A))$.

(2) Neka je $a \in A$ proizvoljna tačka. Imamo

$$\mathrm{Dist}\big(\{u\}, A\big) \leq d(u, a) \leq d(u, v) + d(v, a)$$

tj.

$$\mathrm{Dist}\big(\{u\}, A\big) - d(u, v) \leq d(v, a)\,.$$

Kako ova nejednakost važi za proizvoljnu tačku $a \in A$, to iz nje sada sledi da je

$$\mathrm{Dist}\big(\{u\}, A\big) - d(u, v) \leq \mathrm{Dist}\big(\{v\}, A\big)$$

tj.

$$\mathrm{Dist}\big(\{u\}, A\big) - \mathrm{Dist}\big(\{v\}, A\big) \leq d(u, v)\,.$$

Zamenjujući uloge tačkama u i v dobijamo i

$$\mathrm{Dist}\big(\{v\}, A\big) - \mathrm{Dist}\big(\{u\}, A\big) \leq d(u, v)\,.$$

$\square$

60. Neka je $d(x, y) < \varepsilon$. Za proizvoljno $z \in X$ imamo da važi

$$d(x, z) < \varepsilon \;\Rightarrow\; d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\} < \varepsilon$$

i

$$d(y,z)<\varepsilon \ \Rightarrow\ d(x,z)\le \max\{d(x,y),d(y,z)\}<\varepsilon$$

Tvrđenje zadatka direktno sledi. □

61. Za svako $n\in\mathbb{N}$ stavimo $I_n := \left[1-\dfrac{1}{n+1};1-\dfrac{1}{n+2}\right]$, uočimo neko $r_n\in\left(1-\dfrac{1}{n+1};1-\dfrac{1}{n+2}\right)$ i proizvoljnu funkciju $h_n:[0;1]\xrightarrow{\mathsf{c}}[0;1]$ takvu da je $h_n(t)=0$, za svako $t\in[0;1]\setminus I_n$, i $f_n(r_n)=1$. Lako se proverava da je $d_{\sup}(f,g)=1$ za svako $n,m\in\mathbb{N}$, tako da je $n\neq m$.

Neka je $S\subseteq X$ proizvoljan konačan skup. Pretpostavimo da za svako $n\in\mathbb{N}$ postoji neko $s_n\in S$ tako da je $d_{\sup}(s_n,f_n)\le\dfrac{1}{3}$. Tada mora biti $s_n\neq s_m$ kad god je $n\neq m$; zaista, pretpostavka da je $s_n=s_m$ povlači

$$1=d_{\sup}(f_n,f_m)\le d_{\sup}(f_n,s_n)+d_{\sup}(s_n,f_m)=d_{\sup}(f_n,s_n)+d_{\sup}(s_m,f_m)\le\frac{2}{3}\,.$$

No ovo sad znači da je skup S beskonačan. □

62. **(1)** Neka je $d(a,b)=0$ i neka je $c\in X$ proizvoljna tačka. Imamo

$$d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c)=d(b,c)\text{ i }d(b,c)\le d(a,b)+d(a,c)=d(a,c)$$

tj. $d(a,c)=d(b,c)$.

Obrnuto, ako za svako $c\in X$ važi $d(a,c)=d(b,c)$, onda specijalno imamo i da je $d(a,b)=d(b,b)=0$.

(2) Pretpostavka da važi $d(a,b)=0$ i $d(b,c)=0$ povlači da je $d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c)=0$, tj. $d(a,c)=0$.

(3) Neka je (x,x_0), $(y,y_0)\in E$. Na osnovu **(1)** imamo $d(x,y)=d(x_0,y)=d(x_0,y_0)$, pa ovako definisano preslikavanje ρ ne zavisi od izbora predstavnika.

Da je ρ pseudometrika proverava se neposredno. Neka su $A,B\in X_{/E}$ tako da je $\rho(A,B)=0$. Izaberimo proizvoljne $a\in A$ i $b\in B$. Tada imamo

$0 = \rho(A,B) = d(a,b)$, tj. $a\,E\,b$, odnosno $A = [a]_{/E} = [b]_{/E} = B$. Dakle preslikavanje ρ je metrika.

Najzad neka je $x \in X$ proizvoljno. Ako je $y \in \mathrm{K}_d[x;\varepsilon)$ onda važi $\rho\big([x]_{/E},[y]_{/E}\big) = d(x,y) < \varepsilon$, tj. $[y]_{/E} \in \mathrm{K}_\rho\Big[[x]_{/E};\varepsilon\Big)$. Obrnuto, ako je $B \in \mathrm{K}_\rho\Big[[x]_{/E};\varepsilon\Big)$ i ako uočimo proizvoljnu tačku $y \in B$, onda imamo $d(x,y) = \rho\big([x]_{/E},[y]_{/E}\big) < \varepsilon$, tj. $y \in \mathrm{K}_d[x;\varepsilon)$ i $B = [y]_{/E}$. $\square$

63. Neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon \in (0;+\infty)$ proizvoljni. Kako dati niz funkcija ravnomerno konvergira ka funkciji g to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\forall x \in X \ \left(d\big(f_{n_0}(x),g(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Zbog $f_{n_0} : X \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(Y,\mathrm{Top_m}(d)\big)$ možemo naći $\mathrm{Top_m}(d)$-otvoren $U \ni x_0$ tako da je

$$\forall x \in U \ \left(d\big(f_{n_0}(x),f_{n_0}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}\right) .$$

Tada ako je $x \in U$ imamo

$$d\big(g(x_0),g(x)\big) \le d\big(g(x_0),f_{n_0}(x_0)\big)+d\big(f_{n_0}(x_0),f_{n_0}(x)\big)+d\big(f_{n_0}(x),g(x)\big) < \varepsilon.$$

Dakle $g^{\rightharpoonup}U \subseteq \mathrm{K}_d[g(x_0);\varepsilon)$. Ovim je dokazano da je g neprekidna u tački x_0. $\square$

64. Za $P,Q \subseteq \mathbb{R}^2$ stavimo $\delta(P,Q) := \sup\limits_{p\in P}\inf\limits_{q\in Q} d(p,q)$.

(1) Imamo $\delta(K,L) = d\,(B,(0,0)) = 3$, $\delta(L,K) = d\,(D,(0,0)) = 4$ pa je $\mathrm{H}_d(K,L) = 4$.

(2) Imamo $\delta(K,L) = d\,((-2,0),(1,0)) = 3$, $\delta(L,K) = d\,((7,0),(2,0)) = 5$ pa je $\mathrm{H}_d(K,L) = 5$.

(3) Neka je $A := (-2,0) \in K$, $O := (0,0)$ i neka je $E \in \mathbb{R}^2$ tako da $\{E\} = \mathrm{Seg}[O,C] \cap K$. Imamo $\delta(K,L) = d(A,D) = \sqrt{10}$, $\delta(L,K) =$

$d(C,E) = d(C,O) - d(E,O) = \sqrt{13} - 2 < \sqrt{10}$, pa je $\mathrm{H}_d(K,L) = \sqrt{10}$.

(4) Neka je O centar kružnice K, $D \in \mathbb{R}^2$ tako da $\{D\} = \mathrm{Seg}[O,A] \cap K$ i neka je $E \in \mathrm{Seg}[A,C]$ podnožje normale iz tačke D na pravu koja sadrži tačke A i C. Tada je $\delta(L,K) = d(A,D)$, $\delta(K,L) = d(D,E) < d(A,D)$, pa je $\mathrm{H}_d(K,L)$ zapravo dužina poluprečnika kružnice K. U našem konkretnom slučaju je $\mathrm{H}_d(K,L) = 1$. $\square$

65. Stavimo $h := \mathrm{H}_{d'}$ i $g := \mathrm{G}_d$. Familije $\{\mathrm{K}_h[A;\varepsilon) : \varepsilon \in (0;1)\}$ i $\{\mathrm{K}_g[A;\varepsilon) : \varepsilon \in (0;1)\}$ su lokalne baze u strogom smislu topologija $\mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(h)$ i $\mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(g)$, respektivno, u tački $A \in \mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$.

Primetimo da ako su $S \neq \varnothing$ i $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ proizvoljni, a $\rho' : S \times S \to \mathbb{R}$ definisana sa $\rho'(x,y) := \min\{\rho(x,y), 1\}$, onda za svako $\varepsilon \in (0;1)$ i $x,y \in S$ važi $\rho(x,y) < \varepsilon \iff \rho'(x,y) < \varepsilon$. Zato za svako $A,B \in \mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ i $\varepsilon_0 \in (0;1)$ važi

$$\forall a \in A \exists b \in B \ d(a,b) < \varepsilon_0 \ \wedge \ \forall b \in B \exists a \in A \ d(b,a) < \varepsilon_0$$

ako i samo ako

$$\forall a \in A \exists b \in B \ d'(a,b) < \varepsilon_0 \ \wedge \ \forall b \in B \exists a \in A \ d'(b,a) < \varepsilon_0$$

Dakle ako je $A \in \mathbb{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ i $\varepsilon \in (0;1)$, onda imamo

$$\mathrm{K}_g[A;\varepsilon) = \{\varnothing \neq B \subseteq X : \mathrm{G}_d(A,B) < \varepsilon\} = \{\varnothing \neq B \subseteq X : \mathrm{H}_d(A,B) < \varepsilon\} =$$

$$\{\varnothing \neq B \subseteq X : \exists \varepsilon_0 \in (0;\varepsilon) \ [A,B,\varepsilon_0]_d\}$$
$$= \{\varnothing \neq B \subseteq X : \exists \varepsilon_0 \in (0;\varepsilon) \ [A,B,\varepsilon_0]_{d'}\} =$$
$$\{\varnothing \neq B \subseteq X : \mathrm{H}_{d'}(A,B) < \varepsilon\} = \mathrm{K}_h[A;\varepsilon)$$

$\square$

66. *Slučaj 1:* za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji neko $f(n) \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m \in \mathbb{N}$ važi

$$m > f(n) \implies \left(d(x_n, y_m) > \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ d(x_m, y_n) > \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Stavimo $l_1 := 1$ i rekurzivno izaberimo $l_n \in \mathbb{N}$ za $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $l_{n+1} > \max\big\{l_n, f(l_n)\big\}$. Da pokažemo da je $R := \{l_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ kakav se traži primetimo najpre da zbog $l_i < l_j \Leftarrow i < j$ skup R mora biti beskonačan. Prema definiciji je $l_2 > f(l_1)$; ako je $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$, takvo da je $l_j > f(l_i)$ za svako $i = \overline{1, j-1}$, onda imamo i da je $l_{j+1} > f(i)$ za svako $i = \overline{1, j}$ zbog $l_{j+1} > l_j$ i $l_{j+1} > f(l_j)$. Induktivnim rasuđivanjem zaključujemo da važi $l_j > f(l_i) \;\Leftarrow\; i < j$. Zato ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i < j$, onda mora biti $d(x_{l_i}, y_{l_j}) > \dfrac{\varepsilon}{3}$ i $d(x_{l_j}, y_{l_i}) > \dfrac{\varepsilon}{3}$. Kako je još $d(x_{l_i}, y_{l_i}) > \varepsilon > \dfrac{\varepsilon}{3}$ za svako $i \in \mathbb{N}$ to R zaista ispunjava tražene uslove.

Slučaj 2: ne važi pretpostavka iz prvog slučaja. Drugim rečima, postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$ i beskonačan $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da za svako $m \in S$ važi

$$d(x_{n_0}, y_m) \leq \frac{\varepsilon}{3} \;\vee\; d(x_m, y_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Neka je $A := \Big\{m \in S \;:\; d(x_{n_0}, y_m) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}\Big\}$ i $B := \Big\{m \in S \;:\; d(x_m, y_{n_0}) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}\Big\}$. Kako je $S = A \cup B$ i S beskonačan, to bar jedan od skupova A i B mora biti beskonačan. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je to A (preostali slučaj se razmatra na identičan način).

Neka su $k, l \in A$ proizvoljni. Imamo $d(y_k, y_l) \leq d(x_{n_0}, y_k) + d(x_{n_0}, y_l) \leq \dfrac{2}{3}\varepsilon$ pa je zato

$$\varepsilon < d(x_k, y_k) \leq d(x_k, y_l) + d(y_k, y_l) \leq d(x_k, y_l) + \frac{2}{3}\varepsilon$$

tj. $\dfrac{\varepsilon}{3} < d(x_k, y_l)$. Ovo dokazuje da je A onakav kao što se traži. □

67. (1) Neka je $U_1 \in \mathrm{rel}_{X_1}(\mathrm{rel}_{X_2}(\tau))$. Tada postoji $U_2 \in \mathrm{rel}_{X_2}(\tau)$ tako da je $U_1 = U_2 \cap X_1$, a zatim i $U \in \tau$ tako da je $U_2 = U \cap X_2$. Obzirom da je $X_1 \subseteq X_2$ imamo $U \cap X_1 = U \cap X_2 \cap X_1 = U_2 \cap X_1 = U_1$ pa je $U_1 \in \mathrm{rel}_{X_1}(\tau)$.

Obrnuto, neka je $U_1 \in \mathrm{rel}_{X_1}(\tau)$. Tada postoji $U \in \tau$ tako da je $U_1 = U \cap X_1$. Imamo $U \cap X_2 \in \mathrm{rel}_{X_2}(\tau)$ pa je, zbog $(U \cap X_2) \cap X_1 = U_1$, $U_1 \in \mathrm{rel}_{X_1}(\mathrm{rel}_{X_2}(\tau))$.

(2) Ovo sledi direktno iz činjenice da je presek dva otvorena [zatvorena] skupa otvoren [zatvoren] skup.

(3) Kako je $x \in X_2$ i $X_1 \subseteq X_2$ to za proizvoljan $K \subseteq X$ imamo da važi $X_1 \cap K = (X_2 \cap K) \cap X_1$ kao i $x \in K \iff x \in X_2 \cap K$. Zato je

$$x \in \mathrm{cl}_\tau(X_1)$$

ako i samo ako

$$\forall V \in \tau \ \ (x \in V \Rightarrow X_1 \cap V \neq \varnothing)$$

ako i samo ako

$$\forall V \in \tau \, (x \in X_2 \cap V \Rightarrow (X_2 \cap V) \cap X_1 \neq \varnothing)$$

ako i samo ako

$$\forall W \in \mathrm{rel}_{X_2}(\tau) \, (x \in W \Rightarrow W \cap X_1 \neq \varnothing)$$

ako i samo ako $x \in \mathrm{cl}_{\mathrm{rel}_{X_2}(\tau)}(X_1)$. □

68. (1) Stavimo $f_0 := f \restriction X_0$. Za svako $A \subseteq Y$ važi $(f_0)^{\leftharpoonup} A = X_0 \cap f^{\leftharpoonup} A$. Dakle, ako je $f^{\leftharpoonup} A \in \tau_X$ onda je $(f_0)^{\leftharpoonup} A \in \mathrm{rel}_{X_0}(\tau_X)$.

(2) Ovo sledi iz činjenice da za svako $A \subseteq Y$ važi

$$f^{\leftharpoonup} A = f^{\leftharpoonup}\big(A \cap f^{\rightharpoonup} X\big) = f^{\leftharpoonup}(A \cap Y_0)\,,$$

jer je $f^{\rightharpoonup} X \subseteq Y_0$. □

69. (1) Neka su $L, M \in \tau$ i $i \in I$. Iz $L \cap X_i,\ M \cap X_i \in \tau_i$ sledi i $(L \cap M) \cap X_i = (L \cap X_i) \cap (M \cap X_i) \in \tau_i$.

Neka je sada $\mathcal{L} \subseteq \tau$ i $i \in I$. Imamo $\bigcup \mathcal{L} \cap X_i = \bigcup \{L \cap X_i |\ L \in \mathcal{L}\} \in \tau_i$ jer je $L \in \tau_i$ za svako $L \subseteq \mathcal{L}$.

Kako je još za svako $i \in I$ naravno $X \cap X_i = X_i$ i $\varnothing \cap X_i = \varnothing$ to je τ topologija na X.

(2) Pretpostavimo najpre da je $f \restriction X_i : X_i \to Y$ (τ_i, τ_Y)-neprekidno preslikavanje za svako $i \in I$. Ako je $V \in \tau_Y$ onda je $\tau_i \ni \big(f \restriction X_i\big)^{\leftharpoonup} V = X_i \cap \big(f^{\leftharpoonup} V\big)$ za svako $i \in I$ pa je $f^{\leftharpoonup} V \in \tau$. Dakle f je (τ, τ_Y)-neprekidno preslikavanje.

Obrnuto, ako je f je (τ, τ_Y)-neprekidno i $V \in \tau_Y$, onda je $f^{\leftharpoonup} V \in \tau$, tj. $\big(f \restriction X_i\big)^{\leftharpoonup} V = X_i \cap \big(f^{\leftharpoonup} V\big) \in \tau_i$ za svako $i \in I$. Dakle $f \restriction X_i : X_i \to Y$ je (τ_i, τ_Y)-neprekidno preslikavanje za svako $i \in I$.

(3) Ako je $U \in \tau_X$ onda je prema samoj definiciji pojma "*nasleđena topologija*" $U \cap X_i \in \tau_i$ za svako $i \in I$, a ovo u prevodu znači $U \in \tau$.

(4) Za svako $i \in I$ stavimo $\tau_i' := \mathrm{rel}_{X_i}(\tau)$. Neka je $i \in I$ i $A \in \tau_i'$. Ovo znači da je postoji neko $L \in \tau$ tako da je $A = L \cap X_i$. Ali $L \in \tau$ povlači da je $L \cap X_i \in \tau_i$. Ovim je dokazano da je $\tau_i' \subseteq \tau_i$.

(5) Neka važi "*zatvorena*" verzija dodatnog uslova (dokaz tvđenja u slučaju "*otvorene*" verzije je analogan). Neka su $i, j \in I$ i $L \subseteq X_i$ proizvoljni gde je L τ_i-zatvoren. Za označimo sa $\tau_{i,j}$ topologiju na skupu $X_i \cap X_j$ nasleđenu od τ_i. Skup $L \cap X_j = L \cap (X_i \cap X_j)$ je $\tau_{i,j}$-zatvoren jer je L τ_i-zatvoren. Ali iz $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ sledi da je $L \cap X_i$ i $\tau_{j,i}$-zatvoren. Dakle $L \cap X_j$ je $\tau_{j,i}$-zatvoren podskup od $X_i \cap X_j$, a $X_i \cap X_j$ je τ_j-zatvoren podskup od X_j. Zato je $L \cap X_j$ τ_j-zatvoren. Kako je $j \in I$ bilo proizvoljno to možemo zaključiti da je L τ-zatvoren. Uzimajući specijalno $L = X_i$ dobijamo da je X_i τ-zatvoren. Ako je $N \subseteq X_i$ proizvoljan τ_i-zatvoren skup, onda je kako smo to videli N i τ zatvoren te je zbog $N = X_i \cap N$ skup N i τ_i'-zatvoren. Dakle sledi da je $\tau_i \subseteq \tau_i'$. □

70. Kako je $\mathcal{B}$ baza prostora (X, τ) to je jasno $\mathcal{B}_0 := \{U \cap X_0 : U \in \mathcal{B}\}$ baza prostora $(X_0, \mathrm{rel}_{X_0}(\tau))$. Pokažimo da je svaki element ove baze $\mathrm{rel}_{X_0}(\tau)$-zatvoren.

Neka je dakle $U_0 \in \mathcal{B}$ i $x \in \mathrm{cl}_{\mathrm{rel}_{X_0}(\tau)}(X_0 \cap U_0) = \mathrm{cl}_\tau(X_0 \cap U_0) \cap X_0 \subseteq \mathrm{cl}_\tau(U_0)$ (videti zadatak 31. pod (4)). Zbog je $U_0 \in \mathcal{B}$, a prema definiciji skupa X_0 važi $X_0 \cap (\mathrm{cl}_\tau(U_0) \setminus U_0) = \varnothing$ pa zbog $x \in X_0$ mora biti $x \notin (\mathrm{cl}_\tau(U_0) \setminus U_0)$. No $x \in \mathrm{cl}_\tau(U_0) = (\mathrm{cl}_\tau(U_0) \setminus U_0) \cup U_0$, te zaključujemo da je $x \in U_0$. Dakle $x \in X_0 \cap U_0$. Ovim smo dokazali da je $X_0 \cap U_0$ $\mathrm{rel}_{X_0}(\tau)$-zatvoren. □

71. Neka je $U \neq \varnothing$ otvoren podskup prostora X i neka su $V_n \in \mathrm{rel}_U(\tau_X) =: \tau_U$, za $n \in \mathbb{N}$, skupovi gusti u odnosu na topologija τ_U.

Za svako $n \in \mathbb{N}$ skup $V'_n := W \cup V_n$ je otvoren i gust u odnosu na τ_X, gde je $W := \mathrm{int}(X \setminus U)$. Zaista, iz $V_n \in \tau_U$ i $U \in \tau_X$ sledi $V_n \in \tau_X$. Da pokažemo da je V'_n skup koji je τ_X-gust uočimo proizvoljan neprazan $A \in \tau_X$. Razlikujemo sledeća dva slučaja. Neka je najpre $A \cap U = \varnothing$. Onda je $A \subseteq \mathrm{int}(U^c) = W$ te iz $A \neq \varnothing$ sledi $\varnothing \neq A \cap W \subseteq A \cap V'_n$. Neka je sada $A \cap U \neq \varnothing$. Skup $A \cap U \in \tau_U$ je neprazan pa kako je V_n τ_U- gust to mora biti $\varnothing \neq A \cap U \cap V_n \subseteq A \cap V'_n$.

Prostor X je `Baire`-ov te je skup $S := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V'_n = W \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n\right)$ gust u odnosu na τ_X. Pokažimo da je $P := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ gust u odnosu na τ_U. Neka je $A \in \tau_U$ neprazan. Kako je $U \in \tau_X$ to je i $A \in \tau_X$, pa iz $A \neq \varnothing$ sledi da postoji neko $x \in A \cap S$ (setimo se da je S τ_X-gust). Dakle imamo $x \in A \cap W \cap P$. Iz $W \subseteq U^c$ i $x \in A \subseteq U$ zaključujemo $x \notin W$. Zato je $x \in A \cap P \neq \varnothing$. Na ovaj način je dokazano da je podprostor (U, τ_U) i sam `Baire`-ov. □

72. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan. Treba dokazati da je $(S, \mathrm{rel}_S(\tau))$ separabilan prostor.

Stavimo $S_0 := \{x \in S \ : \ \exists \varepsilon_x > 0 \ (x; x+\varepsilon_x) \cap S = \varnothing\}$. Ako su $x, y \in S_0$ onda je lako videti da važi implikacija $x \neq y \Rightarrow (x; x+\varepsilon_x) \cap (y; y+\varepsilon_y) = \varnothing$. Zato je S_0 prebrojiv.

Definišimo $P := \left\{(q, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \ : \ \exists s \in S \quad |s - q| < \dfrac{1}{n}\right\}$ i za svako

$(q,n) \in P$ fiksirajmo po $t(q,n) \in S$ tako da važi $|t(q,n) - q| < \dfrac{1}{n}$. Stavimo $S_1 := \{t(q,n) \ : \ (q,n) \in P\}$. $S' := S_0 \cup S_1$ je prebrojiv podskup od S. Pokažimo da je on gust u odnosu na topologiju $\mathrm{rel}_S(\tau)$.

Neka je $U \in \mathrm{rel}_S(\tau)$ neprazan skup. Tada postoji $V \in \tau$ tako da je $U = S \cap V$. Neka je $s \in U$ proizvoljno. Postoji $r \in \mathbb{R}$, $r > s$ tako da je $[s;r) \subseteq V \ \ldots (*)$.

Ako je $s \in S_0$ onda je $s \in S'$ i $s \in [s;r) \cap S \subseteq V \cap S = U$, obzirom na $(*)$, pa je i $U \cap S' \neq \varnothing$.

Ako je $s \notin S_0$ onda postoji neko $s_1 \in (s;r)$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takvo da $\left(s_1 - \dfrac{2}{n}; s_1 + \dfrac{2}{n}\right) \subseteq (s;r)$ i neka je $q \in \left(s_1 - \dfrac{1}{n}; s_1 + \dfrac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}$. Tada je $|s_1 - q| < \dfrac{1}{n}$ pa zbog $s_1 \in S$ i $q \in \mathbb{Q}$ imamo $(q,n) \in P$. Za $s_2 := t(q,n)$ važi $s_2 \in S_1 \subseteq S'$ i $s_2 \in \left(q - \dfrac{1}{n}; q + \dfrac{1}{n}\right) \cap S \subseteq \left(s_1 - \dfrac{2}{n}; s_1 + \dfrac{2}{n}\right) \cap S \subseteq [s;r) \cap S \subseteq V \cap S = U$ pa je $U \cap S' \neq \varnothing$. $\square$

73. Označimo

$\mathcal{L}_1 := \{(\leftarrow, x)_\prec \ : \ x \in X\} \cup \{(x, \rightarrow)_\prec \ : \ x \in X\}$, $\mathcal{L}_2 := \{(\leftarrow, x)_{\prec_Y} \ : \ x \in Y\} \cup \{(x, \rightarrow)_{\prec_Y} \ : \ x \in Y\}$. Tada je $\tau_1 := \mathrm{lot}(\prec) = \mathrm{Top}(\mathcal{L}_1 \cup \{X\})$ i $\tau_2 := \mathrm{lot}(\prec_Y) = \mathrm{Top}(\mathcal{L}_2 \cup \{Y\})$.

(1) Da pokažemo $\tau_2 \subseteq \mathrm{rel}_Y(\tau_1)$ dovoljno je dokazati $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathrm{rel}_Y(\tau_1)$. Neka je $x \in Y$. Imamo $(x, \rightarrow)_{\prec_Y} = \{y \in Y \ : \ x \prec_Y y\} = \{y \in Y \ : \ x \prec y\} = Y \cap (x, \rightarrow)_\prec \in \mathrm{rel}_Y(\tau_1)$, jer je $(x, \rightarrow)_\prec \in \mathcal{L}_1 \subseteq \tau_1$. Analogno se dobija i $(\leftarrow, x)_{\prec_Y} \in \mathrm{rel}_Y(\tau_1)$.

(2) Stavimo $L = (1/3, 0)$ i $D = (2/3, 0)$ i $S := (L, D)_\prec \cap Y \in \mathrm{rel}_Y(\tau_1)$. Lako je videti da je $S = \{(t,1) \ : \ t \in \mathbb{R}, \ \dfrac{1}{3} \leq t < \dfrac{2}{3}\}$. Tvrdimo da je $S \notin \tau_2$. Pretpostavimo suprotno. Tada (videti zadatak 9.) razlikujemo tri slučaja:

- postoje $k, l \in \mathbb{N}$ i $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l \in Y$ tako da važi

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right) \in \left(\bigcap_{i=1}^{k} (P_i, \rightarrow)_{\prec_Y}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{l} (\leftarrow, Q_j)_{\prec_Y}\right) = (P, Q)_{\prec_Y} \subseteq S$$

gde je P najveći element skupa $\{P_1, \ldots, P_k\}$, a Q najmanji element skupa $\{Q_1, \ldots, Q_l\}$ u odnosu na $\prec_Y$. Neka je $P = (p, 1)$ i $Q = (q, 1)$. Iz $P \prec_Y (1/3, 1) \prec_Y Q$ sledi $q < 1/3 < p$. Ako je $r \in (q; 1/3)$ proizvoljan realan broj, onda za $R := (r, 1)$ važi $R \in (P, Q)_{\prec_Y} \setminus S \neq \varnothing$, kontradikcija;

- postoje $k \in \mathbb{N}$ i $P_1, \ldots, P_k \in Y$ tako da važi

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right) \in \bigcap_{i=1}^{k} (P_i, \rightarrow)_{\prec_Y} = (P, \rightarrow)_{\prec_Y} \subseteq S$$

gde je P najveći element skupa $\{P_1, \ldots, P_k\}$ u odnosu na $\prec_Y$. No ovo nije moguće jer bi tada moralo biti $(1, 1) \in S$;

- postoje $l \in \mathbb{N}$ i $Q_1, \ldots, Q_l \in Y$ tako da važi

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right) \in \left(\bigcap_{j=1}^{l} (\leftarrow, Q_j)_{\prec_Y}\right) = (\leftarrow, Q)_{\prec_Y} \subseteq S$$

gde je Q najmanji element skupa $\{Q_1, \ldots, Q_l\}$ u odnosu na $\prec_Y$. No ovo nije moguće jer bi tada moralo biti $(0, 1) \in S$. $\square$

74. Neka je $(m, n) \in \mathbb{N}^2 \setminus R$. Kako m ne deli n, to ni mk ne deli n ni za jedno $k \in \mathbb{N}$, tj. važi

$$(m, n) \in U \subseteq \mathbb{N}^2 \setminus R$$

za $U := m\mathbb{N} \times \{n\} \in \tau \times' \mathbb{P}(\mathbb{N})$. Dakle $P = \mathrm{cl}_\lambda(R)$.

Skup $\mathbb{N}^2 \setminus R$ je λ-gust. Zaista, ako je $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ proizvoljna tačka i $U \in \lambda$ tako da je $(m, n) \in U$, onda postoji neko $k \in \mathbb{N}$ tako da je $(m, n) \in k\mathbb{N} \times \{n\} \subseteq U$ pa imamo da je $(2kn, n) \in (\mathbb{N}^2 \setminus R) \cap U \neq \varnothing$.

Iz gore izloženog sledi da je $\mathrm{bd}_\lambda(R) = R$. $\square$

75. Za svako $i \in \mathbb{N}$ neka je $\pi_i : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ projekcija definisana sa $\pi_i(x) := x(i)$ za svako $x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Stavimo $\mathcal{B} := \{a\mathbb{N} \,:\, a \in \mathbb{N}\}$ i

$$\mathcal{L} := \left\{ S \cap \bigcap_{i=1}^{m} (\pi_i)^{\leftharpoonup}\Big([l_i; +\infty) \cap \mathbb{N}\Big) \,:\, m, l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Neka je $\{p_i \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ skup svih prostih brojeva, gde $i < j \Rightarrow p_i < p_j$ za svako $i, j \in \mathbb{N}$. Definišimo preslikavanje $f : S \to \mathbb{N}$ sa

$$f(x) := \prod_{i=1}^{k_x} p_i^{x(i)-1},$$

gde je k_x najmanji prirodan broj $s \in \mathbb{N}$ za koji važi $x(n) = 1$ za svako $n \geq s$. Jasno, f je bijekcija. Takođe je jasno da ako je $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m} \in \mathbb{N}$, za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0$, onda važi

$$f^{\leftharpoonup}(a\mathbb{N}) = S \cap \bigcap_{i=1}^{m} (\pi_i)^{\leftharpoonup}\Big([\alpha_i + 1; +\infty) \cap \mathbb{N}\Big)$$

Slično, ako su $m, l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}$, onda je

$$S \cap \bigcap_{i=1}^{m} (\pi_i)^{\leftharpoonup}\Big([l_i; +\infty) \cap \mathbb{N}\Big) = f^{\leftharpoonup}(a\mathbb{N}),$$

gde je $a := p_1^{l_1-1} \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m-1}$. Ovim smo pokazali da važi

$$\{f^{\leftharpoonup}U \,:\, U \in \mathcal{B}\} = \mathcal{L}.$$

Kako je familija $\mathcal{L}$ baza topologije $\mathrm{rel}_S(\tau_2)$, a familija $\mathcal{B}$ baza topologije τ_1, odavde sledi da je preslikavanje f $\big(\mathrm{rel}_S(\tau_2), \tau_1\big)$-homeomorfizam. $\square$

76. Neka je $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ proizvoljno i stavimo $z := xy = f(x, y)$. Da pokažemo neprekidnost preslikavanja f u tački (x, y) uočimo proizvoljno $U \in \tau$ tako da je $z \in U$. Kako je $\mathcal{B}$ baza za τ to postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $z \in k\mathbb{N} \subseteq U$. Stavimo $V := x\mathbb{N} \times y\mathbb{N} \in \tau$. Jasno $(x, y) \in V$. Proverimo još i da je $f^{\rightharpoonup}V \subseteq U$. Neka je $(x_0, y_0) \in V$. Tada je $x_0 \in x\mathbb{N}$ i $y_0 \in y\mathbb{N}$ pa je $f(x_0, y_0) = x_0 y_0 \in xy\mathbb{N} = z\mathbb{N} \subseteq k\mathbb{N} \subseteq U$, obzirom da je $z \in k\mathbb{N}$. $\square$

77. Označimo sa π_n $(n \in \mathbb{N})$ projekciju $\pi_n : X \to I_n$ definisanu sa $\pi_n(x) = x(n)$. Neka je $x \in X$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Uočimo $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Za $n = \overline{1,k}$ definišimo $U_n := \pi_n^{\leftharpoonup} \left[I_n \cap \left(x(n) - \frac{\varepsilon}{2k}; x(n) + \frac{\varepsilon}{2k} \right) \right] \in \tau$. Neka je $V := \displaystyle\bigcap_{n=1}^{k} U_i \in \tau$. Jasno $x \in V$. Pokažimo da je $f^{\rightharpoonup}V \subseteq (f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon)$. Neka je $y \in V$. Tada je $|y(n) - x(n)| < \dfrac{\varepsilon}{2k}$ $(n = \overline{1,k})$ pa imamo

$$|f(y) - f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{k} (y(n) - x(n)) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} y(n) - \sum_{n=k+1}^{+\infty} x(n) \right| \leq$$

$$\sum_{n=1}^{k} |y(n) - x(n)| + \sum_{n=k+1}^{+\infty} (|y(n)| + |x(n)|) <$$

$$k\frac{\varepsilon}{2k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

78. Stavimo $P := \mathrm{El}(\{1\}, 2\mathbb{N}) \in \tau$. Pokažimo da je $\mathrm{int}_{\lambda_0}(f^{\rightharpoonup}P) = \varnothing$. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $s \in \{0,1\}^n$ proizvoljni. Definišimo $y_0 \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ sa $y_0(i) = s(i)$ za $i \in \mathbb{N} \cap [1; n]$, odnosno $y_0(i) = 1$ za $i \in \mathbb{N} \setminus [1; n]$. Jasno $y_0 \in [s\rangle_{\{0,1\}}$. Ako je $A \in P$ proizvoljno onda, zbog $A \subseteq \{1\} \cup 2\mathbb{N}$ i $2n+1 \notin \{1\} \cup 2\mathbb{N}$, imamo $2n+1 \notin A$ pa je $f(A)(2n+1) = 0$; no zbog $2n+1 > n$ je $y_0(2n+1) = 1$ pa mora biti $f(A) \neq y_0$. Zaključujemo da je $y_0 \notin f^{\rightharpoonup}P$. Skup $A_0 := (y_0)^{\leftharpoonup}\{1\} \supseteq \mathbb{N} \cap [n+1; +\infty)$ je beskonačan, tj. $A_0 \in X$ i očigledno imamo $f(A_0) = y_0$ pa je $y_0 \in f^{\rightharpoonup}X$. Dakle $y_0 \in \left[f^{\rightharpoonup}X \cap [s\rangle_{\{0,1\}} \right] \setminus f^{\rightharpoonup}P \neq \varnothing$. Kako je familija $\left\{ f^{\rightharpoonup}X \cap [s\rangle_{\{0,1\}} : n \in \mathbb{N},\ s \in \{0,1\}^n \right\}$ baza topologije λ_0 ovim smo dokazali da je $\mathrm{int}_{\lambda_0}(f^{\rightharpoonup}P) = \varnothing$.

Za $n \in \mathbb{N}$ i $s \in \{0,1\}^n$ imamo da važi $f^{\leftharpoonup}[s\rangle_{\{0,1\}} = \mathrm{El}(S, \mathbb{N} \setminus [1;n])$, gde je $S := s^{\leftharpoonup}\{1\} = \{i \in \mathbb{N} \cap [1;n] \; : \; s(i) = 1\}$. Da je f (τ, λ)-neprekidno, odavde neposredno sledi. $\square$

79. Stavimo $X := {}^{[0;1]}\mathbb{N}$. Neka je $g \in X$ proizvoljno. Dokažimo da je preslikavanje T (λ, τ)-neprekidno u tački g. Neka je $a \in \mathbb{R}$ tako da važi $T(g) \in (a; +\infty)$. Treba pokazati da postoji $U \in \lambda$ tako da je $T(f) \in (a; +\infty)$ za svako $f \in U$. Kako je $T(f) \geq 0$, za svako $f \in X$, to ako je $a < 0$ možemo uzeti $U := X$. Pretpostavimo zato da je $a \geq 0$.

Dakle imamo da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sup\bigl(\{0\} \cup g^{\leftharpoonup}\{n\}\bigr)}{2^n} > a$$

pa postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{\sup\bigl(\{0\} \cup g^{\leftharpoonup}\{n\}\bigr)}{2^n} > a \tag{3.3}$$

Neka je $S := \bigl\{n \in [1;k] \cap \mathbb{N} \; : \; \sup\bigl(\{0\} \cup g^{\leftharpoonup}\{n\}\bigr) \neq 0\bigr\}$. Tada se (3.3) svodi na

$$r := \sum_{n \in S} \frac{\sup g^{\leftharpoonup}\{n\}}{2^n} > a \tag{3.4}$$

jer za $n \in S$ važi $g^{\leftharpoonup}\{n\} \neq \varnothing$ i $\sup\bigl(\{0\} \cup g^{\leftharpoonup}\{n\}\bigr) = \sup g^{\leftharpoonup}\{n\}$. Zbog $r > a \geq 0$ sledi da je $S \neq \varnothing$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ broj elemenata skupa S i $\varepsilon \in (0; +\infty)$ takvo da $r - m\varepsilon > a$. Za svako $n \in S$ postoji $x_n \in g^{\leftharpoonup}\{n\}$ tako da je $\sup g^{\leftharpoonup}\{n\} - \varepsilon < x_n$. Neka je, za svako $t \in [0;1]$, $p_t : X \to \mathbb{N}$ projekcija definisana sa $p_t(f) := f(t)$, za $f \in X$. Skup

$$U := \{f \in X \; : \; f(x_n) = n \; \text{ za svako } n \in S\} = \bigcap_{n \in S} (p_{x_n})^{\leftharpoonup}\{n\}\,,$$

je λ-otvoren i važi $g \in U$ (jer je $x_n \in g^{\leftharpoonup}\{n\}$).

Neka je $f \in U$ proizvoljna funkcija. Za svako $n \in S$ važi $f(x_n) = n$ pa je $x_n \in f^{\leftharpoonup}\{n\}$. Zato imamo

$$T(f) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{\sup\bigl(\{0\} \cup f^{\leftharpoonup}\{n\}\bigr)}{2^n} \geq \sum_{n \in S} \frac{\sup f^{\leftharpoonup}\{n\}}{2^n} \geq \sum_{n \in S} \frac{x_n}{2^n} >$$

$$\sum_{n \in S} \frac{\sup g^{\leftharpoonup}\{n\} - \varepsilon}{2^n} = r - \sum_{n \in S} \frac{\varepsilon}{2^n} \geq r - m\varepsilon > a$$

□

80. Jasno je da je g bijekcija između skupa X i skupa f. Ako sa $\pi_1 : X \times Y \to X$ označimo projekciju na X definisanu sa $\pi_1(x,y) = x$, imamo da je $g^{-1} = \pi_1 \restriction f$. Kako je π_1 $(\tau_X \times' \tau_Y, \tau_X)$-neprekidno preslikavanje to je njegova restrikcija g^{-1} $(\mathrm{rel}_f(\tau_X \times' \tau_Y), \tau_X)$-neprekidna. S druge strane, obzirom da je $\mathrm{ran}(g) = f \subseteq X \times Y$, preslikavanje g je $(\tau_X, \mathrm{rel}_f(\tau_X \times' \tau_Y))$-neprekidno ako i samo ako je $(\tau_X, \tau_X \times' \tau_Y)$-neprekidno. A ovo poslednje će važiti ako i samo ako su obe kompozicije $\pi_1 \circ g$ i $\pi_2 \circ g$ neprekidne: prva u odnosu na par (τ_X, τ_X), a druga u odnosu na par (τ_X, τ_Y). Naravno $\pi_1 \circ g = \mathrm{id}_X$ i $\pi_2 \circ g = f$, a f je po pretpostavci (τ_X, τ_Y)-neprekidno. □

81. Neka je $(g_0, r_0) \in X \times [0;1]$ proizvoljna tačka. Pokažimo da je T neprekidno u njoj. Dakle neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Kako je $g_0 : [0;1] \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ to postoji $\delta > 0$ tako da je $g_0(t) \in (g_0(r_0) - \frac{\varepsilon}{2}; g_0(r_0) + \frac{\varepsilon}{2})$ za svako $t \in (r_0 - \delta; r_0 + \delta) \cap [0;1]$. Neka je $U := \mathrm{B}\left[g_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)_d \in \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d)$ i $V := (r_0 - \delta; r_0 + \delta) \cap [0;1]$. Tada je $U \times V \in \mathrm{Top}_{\mathrm{m}}(d) \times \mu_{[0;1]}$. Pokažimo da je $T^{\rightharpoonup}(U \times V) \subseteq (T(g_0, r_0) - e; T(g_0, r_0) + \varepsilon)$. Zaista, ako je $(g, r) \in U \times V$ onda imamo

$$|T(g,r) - T(g_0, r_0)| = |g(r) - g_0(r_0)| \leq |g(r) - g_0(r)| + |g_0(r) - g_0(r_0)| \leq$$

$$\leq \sup\{|g(t) - g_0(t)| \ : \ t \in [0;1]\} + \frac{\varepsilon}{2} = d(g, g_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

82. Neka je za svako $n \in \mathbb{N}$ preslikavanje $\pi_n : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n-ta projekcija definisana sa $\pi_n(x) = x(n)$, $x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Ako je $\lambda := \prod'_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathbb{N})$ preslikavanje f je (τ_X, λ)-neprekidno ako i samo ako je za svako n kompozicija $f_n := \pi_n \circ f$ $(\tau_X, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$-neprekidna. Lako je videti da je f_n karakteristična funkcija skupa U_n u odnosu na skup X. Otuda je $f_n^{\leftarrow} A = U_n$ ako $1 \in A \not\ni 0$, $f_n^{\leftarrow} A = X \setminus U_n$ ako $1 \notin A \ni 0$, $f_n^{\leftarrow} A = X$ ako $\{0,1\} \subseteq A$ i $f_n^{\leftarrow} A = \varnothing$ ako $\{0,1\} \cap A = \varnothing$. U svakom slučaju je $f_n^{\leftarrow} A \in \tau_X$, obzirom da su skupovi U_n otvoreno-zatvoreni u X. $\square$

83. Neka je dat realan broj $\varepsilon > 0$ i $(x_0, y_0), (x, y) \in X^2$. Iz $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y)$ sledi $d(x, y) - d(x_0, y_0) \leq d(x, x_0) + d(y_0, y)$. Ovim smo dokazali da važi i $d(x_0, y_0) - d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y_0, y)$ pa je zapravo $|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y_0, y)$. Zato ako je $(x, y) \in \mathrm{K}_d\left[x_0; \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \mathrm{K}_d\left[y_0; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, onda mora biti $|d(x, y) - d(x_0, y_0)| < \varepsilon$. $\square$

84. **(1)** $\Longleftrightarrow$ **(2)** je samo specijalan slučaj sledećeg jednostavnog zapažanja: ako su λ_1 i λ_2 dve topologija na istom skupu Y, onda je id_Y (λ_1, λ_2)-neprekidno ako i samo ako važi $\lambda_2 \subseteq \lambda_1$.

(2)$\Rightarrow$(3): Iz (2) sledi $\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_X : (X, \tau \times' \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(X^2, \mathrm{Top_m}(d) \times' \mathrm{Top_m}(d)\big)$. Na osnovu zadatka 83. je $d : \big(X^2, \mathrm{Top_m}(d) \times' \mathrm{Top_m}(d)\big) \xrightarrow{\mathsf{c}} (\mathbb{R}, \mu_{\mathbb{R}})$. Otuda je $d = d \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_X)$ $(\tau \times' \tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno.

(3)$\Rightarrow$(1): Dovoljno je dokazati da za svako $x \in X$ i svaki realan broj $\varepsilon > 0$ važi $\mathrm{K}_d[x; \varepsilon) \in \tau$. Fiksirajmo $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Imamo $\mathrm{K}_d[x; \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\} = h^{\leftarrow}(-1; \varepsilon)$ gde je $h : X \to \mathbb{R}$ definisano sa $h(y) = d(y, x)$, te ako pokažemo da $h : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ imaćemo da je $\mathrm{K}_d[x; \varepsilon) \in \tau$. Važi $h = d \circ h_0 \ \ldots (*)$, gde je $h_0 : X \to X^2$ definisano sa $h_0(y) = (y, x)$. Neka je $g_x : X \to X$ konstantno preslikavanje definisano sa $g_x(y) = x$ za $y \in X$. Iz $\mathrm{id}_X : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ i $g_x : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ sledi $h_0 = \mathrm{id}_X \triangle\, g_x : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (X^2, \tau \times' \tau)$. Kako po pretpostavci još važi i $d : (X^2, \tau \times' \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ to iz $(*)$ konačno dobijamo $h : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$. $\square$

85. Za svako $i \in \mathbb{N}$ definišimo preslikavanje $f_i : X^2 \to \mathbb{R}$ sa $f_i(z) := d_i(a_i, b_i)$, gde je $z = (a, b)$ za $a = (a_i : i \in \mathbb{N}) \in X$ i $b = (b_i : i \in \mathbb{N}) \in X$. Pokažimo da su f_i $(\tau \times' \tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidna preslikavanja.

Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$. Neka su $\pi_1, \pi_2 : X^2 \to X$ projekcije definisane sa $\pi_1(a,b) := a$ i $\pi_2(a,b) := b$ za svako $a, b \in X$. Znamo da su π_1 i π_2 $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidna preslikavanja. Za svako $j \in \mathbb{N}$ neka je $p_j : X \to X_j$ projekcija definisana sa $p_j(a) := a_j$ za svako $a \in X$; znamo da je p_j (τ, τ_j)-neprekidno preslikavanje. Kako je očigledno

$$f_i = d_i \circ \Big[\big(p_i \circ \pi_1\big) \triangle \big(p_i \circ \pi_2\big) \Big]$$

i kako je d_i $(\tau_j \times' \tau_j, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno preslikavanje (jer je $\mathrm{Top_m}(d_i) \subseteq \tau_i$), to sledi da je f_i $(\tau \times' \tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno preslikavanje.

Obzirom da za svako $z \in X^2$ važi

$$D(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{f_i(z)}{2^i}$$

kao i

$$\left| \frac{f_i(z)}{2^i} \right| \leq \frac{1}{2^i}$$

za svako $i \in \mathbb{N}$, to prema zadatku 63. i preslikavanje D mora biti $(\tau \times' \tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno. Sada na osnovu zadatka 84. sledi da je $\mathrm{Top_m}(D) \subseteq \tau$.

Da pokažemo obrnutu inkluziju, neka je $a \in U \in \tau$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ i $V_i \in \tau_i$, za $i = \overline{1,n}$, tako da je $a \in \bigcap_{i=1}^{n} (p_i)^{\leftharpoonup} V_i \subseteq U$. Dakle za svako $i = \overline{1,n}$ je $a_i \in V_i$ pa, zbog $\tau_i \subseteq \mathrm{Top_m}(d_i)$, postoji $\varepsilon_i \in (0; +\infty)$ tako da je $a_i \in \mathrm{K}_{d_i}[a_i; \varepsilon_i) \subseteq V_i$. Neka je $\varepsilon := \min \left\{ \frac{\varepsilon_i}{2^i} \ : \ i = \overline{1,n} \right\}$. Pokažimo da je $a \in \mathrm{K}_D[a; \varepsilon) \subseteq U$. Neka je $b \in \mathrm{K}_D[a; \varepsilon)$ proizvoljno. Za svako $i = \overline{1,n}$ je $\frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} \leq D(a,b) < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ pa sledi $b_i \in \mathrm{K}_{d_i}[a_i; \varepsilon_i) \subseteq V_i$. Ovo znači da je $b \in \bigcap_{i=1}^{n} (p_i)^{\leftharpoonup} V_i \subseteq U$.

Ovim smo dokazali da je $\tau \subseteq \mathrm{Top_m}(D)$. □

86. Neka je d_i pseudometrika na skupu X_i i neka je $\tau_i := \mathrm{Top_m}(d)$ za $i = \overline{1,n}$. Stavimo $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ i $\tau := \tau_1 \times' \cdots \times' \tau_n$. Definišimo $D : X \times X \to \mathbb{R}$ sa

$$D(a,b) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(a_i,b_i)^2}$$

za $a = (a_1,\ldots,a_n) \in X$, $b = (b_1,\ldots,b_n) \in X$.

Tada je D metrika na skupu X i to takva da je $\mathrm{Top_m}(D) = \tau$. Ovo se dokazuje na skoro isti način kao i tvrđenje zadatka 85.

Sada samo treba uzeti $X_i = \mathbb{R}$ i $d_i(u,v) = |u-v|$ za $u, v \in \mathbb{R}$ i $i = \overline{1,n}$.
$\square$

87. Jasno $S = [0;2]$. Da je $\mu_S \subseteq \lambda$ sledi iz sledećeg opštijeg razmatranja: ako je $A \subseteq X$ i $U \in \tau_X$, onda je $U \cap A \in \mathrm{rel}_A(\tau_X)$ i $U \cap A^c \in \mathrm{rel}_{A^c}(\tau_X)$, pa je U otvoren skup disjunktne sume $\big(A, \mathrm{rel}_A(\tau_X)\big) \sqcup \big(A^c, \mathrm{rel}_{A^c}(\tau_X)\big)$.

Da je $\mu_S \neq \lambda$ sledi iz $[1;2] = X_2 \in \lambda \setminus \mu_S$. $\square$

88. Da je $\mu_S \subseteq \lambda$ sledi iz zadatka 69.

Za svako $t \in [0,1]$ neka je U_t otvorena duž u $\mathbb{R}^2$ čiji su krajevi tačke $(0,0)$ i $\mathrm{e}^{t\mathrm{i}}$, ako je $t \in \mathbb{Q}$, odnosno otvorena duž u $\mathbb{R}^2$ čiji su krajevi tačke $(0,0)$ i $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t\mathrm{i}}$, ako je $t \notin \mathbb{Q}$. Stavimo $V := \bigcup\limits_{t \in [0;1]} U_t \subseteq S$. Jasno $U_t \in \tau_t$ za svako $t \in [0;1]$ pa je $V \in \lambda$.

Neka je $r \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$ proizvoljno. Pokažimo da je $T := \frac{1}{2}\mathrm{e}^{r\mathrm{i}}$ tačka skupa V koja nije μ_S-unutrašnja tačka tog skupa, odakle bi sledilo da je $V \notin \mu_S$. Neka je $\varepsilon \in (0;+\infty)$ proizvoljno. Funkcija $f : [0;1]^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa

$$f(p,t) := p\mathrm{e}^{r\mathrm{i}} = (p\cos t, p\sin t)$$

je neprekidna i važi $f(1/2, r) = T$, pa postoji $\delta \in (0;1/2)$ tako da za svako $p \in (1/2-\delta; 1/2+\delta)$ i svako $t \in (r-\delta; r+\delta) \cap [0;1]$ važi $f(p,t) \in \mathrm{K}_d\big[T;\varepsilon)$, gde je d euklidska metrika na skupu $\mathbb{R}^2$. Ako je $s \in (r-\delta; r+\delta) \cap [0;1]$ iracionalan i $p \in (1/2; 1/2+\delta)$ proizvoljan broj, onda imamo da je $f(p,s) \in S \setminus V$ i pritom je $f(p,t) \in \mathrm{K}_d[T;\varepsilon)$. Dakle $\Big(S \cap \mathrm{K}_d[T;\varepsilon)\Big) \setminus V \neq \varnothing$. $\square$

89. **(1)** Po definiciji je $(S,\lambda) = \bigsqcup_{i\in I}(Y_i,\lambda_i)$ te je $\lambda = \{A \subseteq S : A \cap Y_i \in \lambda_i$ za svako $i \in I\}$. Kako za svako $i,j \in I$ važi $Y_i \cap Y_j = \varnothing$, kad god je $i \neq j$, to tvrđenje pod **(1)** sledi direktno iz zadatka 69.

(2) Prema zadatku 69., preslikavanje f je (λ,ν)-neprekidno ako i samo ako je preslikavanje $f \restriction Y_i : Y_i \to Z$ (λ_i,ν)-neprekidno za svako $i \in I$, tj. ako i samo ako je kompozicija $(f \restriction Y_i) \circ k_i : X_i \to Z$ (τ_i,ν)-neprekidna za svako $i \in I$, obzirom da je preslikavanje $k_i : X_i \to Y_i$ (τ_i,λ_i)-homeomorfizam (prema samoj definiciji topologije λ_i) za svako $i \in I$. Jasno $(f \restriction Y_i) \circ k_i = f \circ k_i$, za svako $i \in I$. $\square$

90. Ako je $(X_i,\tau_i) = \big(\mathbb{N},\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)$ za svako $i \in \mathbb{N}$, lako je videti da je topološka suma $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(X_i,\tau_i)$ diskretan, prebrojivo bekonačan prostor, te kao takav homeomorfan sa prostorom $\big(\mathbb{N},\mathbb{P}(\mathbb{N})\big)$. $\square$

91. **(1)** Implikacija **(a)**$\Rightarrow$**(b)** je trivijalna, a takva je i implikacija **(b)**$\Rightarrow$**(c)**, zbog $S = (S \cap A) \cup (S \cap A^c)$.

(c)$\Rightarrow$**(a)**: Imamo $U = A \cap U_1$ i $V = A^c \cap V_1$ za neke τ-otvorene skupove U_1 i V_1. Zbog $A, A^c \in \tau$ sada sledi $U, V \in \tau$, te konačno i $S = U \cup V \in \tau$.

(2) Ovo je direktna posledica dela pod **(1)**. $\square$

92. Tačka a je izolovana tačka prostora (S,λ) pa pripada svakom gustom skupu ovog prostora. Iz ovoga direktno proizilazi **(1)**.

Neka je $V_n := \mathbb{N} \cap [n;+\infty)$ i $U_n := \{a\} \cup V_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Pokažimo da je skup U_n λ-gust. Neka je $A \in \lambda$ neprazan skup. Imamo $A = A_1 \cup A_2$ za neke $A_1 \in \big\{\varnothing\{a\}\big\}$ i $A_2 \in \tau$. Ako je $A_0 = \{\}$

onda je $a \in U_n \cap A \neq \varnothing$. Ako je $A_0 = \varnothing$ onda mora biti $A_1 \neq \varnothing$, pa je skup $A - 1$, prema definiciji topologije τ, beskonačan, a ovo znači da je postoji neko $m \in V_n \cap A_2 \subseteq U_n \cap A$.

Najzad, imamo $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{a\}$, a ovaj skup nije λ-gust jer je recimo $a \notin X \in \lambda$. □

93. Stavimo $\lambda_i := \big\{W \times \{i\} \ : \ W \in \mu_{\mathbb{R}}\big\}$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Imamo $(0, i) \in F \subseteq U_i \in \lambda$ pa je $(0, i) \in U_i \cap \big(X_i \times \{i\}\big) \in \lambda_i$. Otuda je $U_i \cap \big(X_i \times \{i\}\big) = W_i \times \{i\}$ za neko $W_i \in \mu_{\mathbb{R}}$. Kako je $0 \in W_i$ to je $W_i \neq \varnothing$, pa zbog $W_i \in \mu_{\mathbb{R}}$ možemo izabrati neko $a_i \in W_i \setminus \{0\}$. Imamo $(0, i) \in V_i$, gde je $V_i := \big(\mathbb{R} \setminus \{a_i\}\big) \times \{i\} \in \lambda_i$, kao i $(a_i, i) \in U_i$ i $(a_i, i) \notin V_i$.

Definišimo $V := \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} V_i \in \lambda$. Jasno $F \subseteq V$. Ako je $i \in \mathbb{N}$ proizvoljno onda, obzirom da je $V \cap (X_i \times \{i\}) = V_i \not\ni (a_i, i)$, imamo da je $(a_i, i) \in U_i \setminus V \neq \varnothing$.

Čitaocu se prepušta da uopšti tvrđenje zadatka na slučaj kad je za svako $i \in \mathbb{N}$ (X_i, τ_i) T_1 prostor bez izolovanih tačaka koji ima bar dve različite tačke. □

94. (1) Neka je $A \subseteq X$, $x \in A$ i $y \in X$ tako da je xEy. Ako je A pravilan skup za E, onda je $y \in A$, a ako je još i $A \in \tau$, onda je $y \in U \subseteq A$ za $U := A \in \tau$.

Obrnuto, ako $A \subseteq X$ zadovoljava dati uslov, onda $A \in \tau$ direktno sledi iz refleksivnosti relacije E, dok to da je A pravilan za E trivijalno sledi iz datog uslova.

(2) Kako je očigledno $S := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \tau$ zapravo treba dokazati samo da je S pra-vilan. Ako je $x_0 \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onda je $x_0 \in A_m$ za neko $m \in \mathbb{N}$, pa zbog $A_m \subseteq U_m$ imamo $[x_0]_E \subseteq \bigcup\limits_{x \in U_m} [x]_E \subseteq A_{m+1} \subseteq S$.

(3) Tvrđenje dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ ovo je preformulacija činjenice $U_1 = \bigcup_{x \in A_1} W(x,1)$. Pretpostavimo sada da je $m \in \mathbb{N}$ takvo da skup U_m ima alternativan opis kako se tvrdi. Imamo $b \in U_{m+1}$ ako i samo ako $b \in W(a, m+1)$ za neko $a \in A_{m+1}$. Zbog $A_{m+1} = \bigcup_{x \in U_m} [x]_E$ sada imamo $b \in U_{m+1}$ ako i samo ako postoje $u \in U_m$ i $a \in A_{m+1}$ tako da je $u\,E\,a$ i $b \in W(a, m+1)$. Prema indukcijskoj hipotezi je sada $b \in U_{m+1}$ ako i samo ako postoje tačke $x_i \in A_i$ i $y_i \in W(x_i, i)$ za $i = \overline{1,m}$ tako da je $y_m = u$, i ako $m > 1$ onda $y_{i-1}\,E\,x_i$ za svako $i = \overline{2,m}$, i pritom još postoji $a \in A_{m+1}$ tako da je $u\,E\,a$ i $b \in W(a, m+1)$. Dakle $b \in U_{m+1}$ ako i samo ako postoje tačke $x_i \in A_i$ i $y_i \in W(x_i, i)$ za $i = \overline{1, m+1}$ tako da je $y_{m+1} = b$ i $y_{i-1}\,E\,x_i$ za svako $i = \overline{2, m+1}$.

(4) Pretpostavimo sada da je $\mathcal{L}$ baza za τ. Neka su $C \in X_{/E}$ i $N \in \mathrm{Factor}(\tau, E)$ proizvoljni tako da je $C \in N$. Definisanje odgovarajućih nizova $(A_n : n \in \mathbb{N})$ i $(A_n : n \in \mathbb{N})$ se svodi na adekvatan izbor skupova $W(x,n)$ jer su njima i uslovima $U_n = \bigcup_{x \in A_n} W(x,n)$ i $A_{n+1} = \bigcup_{x \in U_n} [x]_E$ ovi nizovi u potpunosti određeni.

Kako je $\bigcup N \in \tau$, a $\mathcal{L}$ baza za τ, to za svako $x \in \bigcup N$ možemo fiksirati po neko $O_x \in \mathcal{L}$ tako da je $x \in O_x \subseteq \bigcup N$.

Neka je $A_1 := C$. Zbog $C \in N$ je $A_1 = C \subseteq \bigcup N$. Za svako $x \in A_1$ je zato $x \in \bigcup N$ pa možemo uzeti $W(x,1) := O_x$. Stavimo $U_1 := \bigcup_{x \in A_1} W(x,n)$. Jasno $U_1 \subseteq \bigcup N$.

Ako je $n \in \mathbb{N}$ i ako su skupovi A_i i U_i za $i = \overline{1,n}$ konstruisani tako da važi $U_i = \bigcup_{x \in A_i} W(x,i)$ za neke $W(x,i) \in \mathcal{L}$, gde $x \in W(x,i) \subseteq \bigcup N$ za $x \in A_i$, i, ako $n > 1$ onda za svako $i = \overline{2,n}$ važi $A_i = \bigcup_{x \in U_{i-1}} [x]_E$. Prema pretpostavci je $U_n \subseteq \bigcup N$, pa kako je $\bigcup N$ pravilan za E, to za $A_{n+1} := \bigcup_{x \in U_n} [x]_E$ važi $A_{n+1} \subseteq \bigcup N$. Ako je $x \in A_{n+1}$ onda je $x \in \bigcup N$ pa možemo uzeti $W(x, n+1) := O_x$. Ako stavimo $U_{n+1} := \bigcup_{x \in A_n} W(x, n+1)$, onda je jasno $U_{n+1} \subseteq \bigcup N$.

Nakon što smo završili ovu rekurzivnu konstrukciju imamo da je skup $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ τ-otvoren i pravilan za E i da važi $S \subseteq \bigcup N$. Zato za skup $M := \{[x]_E : x \in S\}$ imamo da je Factor(τ, E)-otvoren i da je $M \subseteq N$. A iz $X_{/E} \ni C \subseteq S$ naravno sledi $C \in M \subseteq N$. $\square$

95. Stavimo $\lambda :=$ Factor(τ, E). **(1)** Neka je $0 \leq a < b \leq 1$. Za proizvoljno $x \in [0; 1]$, obzirom da je skup $[x]_E = [0; 1] \cap (x + \mathbb{Q})$ τ-gust skup, postoji neko $y \in [x]_E \cap (a; b)$ te je $[x]_E = [y]_E \in p^{\rightarrow}(a; b)$. Ovo znači da je $p^{\rightarrow}(a; b) = X_{/E} \in \lambda$. Zbog toga je

$$X_{/E} \supseteq p^{\rightarrow}[0; b) \supseteq p^{\rightarrow}(0; b) = X_{/E} \quad \text{i} \quad X_{/E} \supseteq p^{\rightarrow}(a; 1] \supseteq p^{\rightarrow}(a; b) = X_{/E}$$

tj. $p^{\rightarrow}[0; b) = p^{\rightarrow}(a; 1] = X_{/E}$.

Ovim smo dokazali da je p (τ, λ)-otvoreno preslikavanje.

Ako je $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$ i $0 \leq b_1 < b_2 \leq 1$, onda jasno postoje $u \in (a_1; a_2)$ i $v \in (b_1; b_2)$ tako da je $|u - v| \notin \mathbb{Q}$ Ovo znači da je $X^2 \setminus E$ $\tau \times' \tau$-gust podskup od X^2. Otuda kako je $E \subseteq X^2$ neprazan to sledi da E ne može biti $\tau \times' \tau$-otvoren.

(2) Neka je $U \in \lambda$ (drugim rečima neka je $U \subseteq X_{/E}$ tako da je $\bigcup U \in \tau$) i $U \neq X_{/E}$. Tada je $[x]_E \notin U$ za neko $x \in [0; 1]$. Ovo znači da je $[x]_E \cap \bigcup U = \varnothing$. No $[x]_E$ je τ-gust pa kako je $\bigcup U$ τ-otvoren ovo znači da mora biti $\bigcup U = \varnothing$. Zato je $U = \varnothing$ (elementi skupa U su kao klase ekvivalencije na nepraznom skupu neprazni skupovi).

Ovim smo dokazali da je $\lambda = \{\varnothing, X_{/E}\}$. $\square$

96. Zapravo možemo dokazati još opštije tvrđenje:

Neka je (X, τ) T_1 prostor u kom postoji niz otvorenih skupova $(V_n : n \in \mathbb{N})$ i niz tačaka $(z_n : n \in \mathbb{N})$ tako da važi $z_n \in V_n$, $z_n \in \mathrm{cl}\,(X \setminus \{z_n\})$ (tj.

z_n nije izolovana tačka skupa X) i $n \neq m \Rightarrow V_n \cap V_m = \varnothing$ za svako $n, m \in \mathbb{N}$. Neka je $F := \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ i E relacija ekvivalencije na skupu X definisana sa $xEy \iff (x = y \vee \{x, y\} \subseteq F)$. Prostor $\big(X_{/E}, \mathrm{Factor}(\tau, E)\big)$ ne zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

Da pokažemo ovo stavimo $\lambda := \mathrm{Factor}(\tau, E)$. Imamo $F = [x]_E \in X_{/E} = \{F\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus F\}$ za svako $x \in F$, pa je F tačka prostora $(X_{/E}, \lambda)$. Neka je $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \lambda$ proizvoljno tako da $F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dokazaćemo da $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ nije λ-lokalna baza u tački F. Ako je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno, onda je $F \subseteq \bigcup A_n \in \tau$ (što je drugi način da se kaže da je A_n pravilan za E i τ-otvoren i da je $F \in A_n$) pa je $z_n \in V_n \cap \bigcup A_n \in \tau$; prema pretpostavci mora da postoji neko $y_n \in (V_n \cap \bigcup A_n) \setminus \{z_n\}$; (X, τ) je T_1 prostor pa je $(V_n \cap \bigcup A_n) \setminus \{y_n\} =: W_n \in \tau$, a jasno je da $z_n \in W_n$. Tada je $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ pravilan za E i τ-otvoren nadskup od F, pa je $B := \{[x]_E : x \in D\}$ λ-otvorena okolina tačke F. Takođe imamo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $y_n \notin D$: po konstrukciji je $y_n \notin W_n$, a ako je $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$, onda je $y_n \in V_n$, $W_m \subseteq V_m$ i važi $V_n \cap V_m = \varnothing$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno fiksirano. Iz $y_n \in \bigcup A_n$ sledi da je $[y_n]_E \in A_n$. S druge strane iz $y_n \notin D$, obzirom da je D pravilan, sledi da je $[y_n]_E \notin B$. Dakle $[y_n]_E \in A_n \setminus B$.

Skup B dakle svedoči o tome da $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ nije λ-lokalna baza u tački F. $\square$

97. (1) Neka je $U \subseteq Z$ tako da je $g^{\leftarrow}U \in \tau_Y$. Kako je f (τ_X, τ_Y)-neprekidno to sledi da je $(g \circ f)^{\leftarrow}U = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}U) \in \tau_X$. Dakle $h^{\leftarrow}U \in \tau_X$, a h je (τ_X, τ_Z)-predkoličničko pa mora biti $U \in \tau_Z$. Obzirom da je g (τ_Y, τ_Z)-neprekidno ovim smo dokazali da je g (τ_Y, τ_Z)-predkoličničko.

(2) Neka su prostor (Z, τ_Z) i preslikavanje $g : Y \to Z$ proizvoljni tako da je $g \circ f$ (τ_X, τ_Z)-neprekidno i neka je $C \in \tau_Z$. Imamo $f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}C\big) = (g \circ f)^{\leftarrow}C \in \tau_X$. Obzirom da $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}^-} (Y, \tau_Y)$, ovo znači da je $g^{\leftarrow}C \in \tau_Y$.

(3) Imamo $f_\diamond \circ \pi = f$, znamo da je prirodna projekcija $\pi : X \to X_{/\ker(f)}$ indukovana sa $\ker(f)$ (τ_X, λ)-količničko preslikavanje i dato je da je f (τ_X, τ_Y)-neprekidno. Otuda sad na osnovu dela pod **(2)** sledi da $f_\diamond$ mora biti (λ, τ_Y)-neprekidno. $\square$

98. **(2)⇒(1)**: Neka je $B \subseteq Y$. Kako je f (τ_X, τ_Y)-neprekidno dovoljno je dokazati da $f^{\leftharpoonup} B \in \tau_X \Rightarrow B \in \tau_Y$. Dakle neka je $f^{\leftharpoonup} B \in \tau_X$. Kako je $f^{\leftharpoonup} B = f^{\leftharpoonup}(B \cap Y_0)$ i $B \cap Y_0 \subseteq Y_0$, to zbog $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}} (Y_0, \tau_{Y_0})$ sledi $B \cap Y_0 \in \tau_{Y_0} = \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y)$. $Y \setminus Y_0$ je τ_Y-diskretan pa je $B \setminus Y_0 \in \mathrm{rel}_{Y \setminus Y_0}(\tau_Y)$. Kako je još $\{Y_0, Y \setminus Y_0\} \subseteq \tau_Y$ to sada imamo (videti zadatak 91.) $B = (B \cap Y_0) \cup (B \setminus Y_0) \in \tau_Y$.

(1)⇒(2): Imamo $f^{\leftharpoonup} Y_0 = X \in \tau_X$, kao i $f^{\leftharpoonup} A = \varnothing \in \tau_X$ za svaki $A \subseteq Y \setminus Y_0$, pa zato iz (1) sledi $Y_0 \in \tau_Y$ i $Y_0 \in \mathbb{P}(Y \setminus Y_0) \subseteq \tau_Y$. Dakle $\{Y_0, Y \setminus Y_0\} \subseteq \tau_Y$ i $Y \setminus Y_0$ je τ_Y-diskretan.

Neka $B \subseteq Y_0$. Zbog $Y_0 \in \tau_Y$ važi $B \in \tau_{Y_0} \iff B \in \tau_Y$. Zato i zbog (1) imamo $f^{\leftharpoonup} B \in \tau_X \iff B \in \tau_Y \iff B \in \tau_{Y_0}$. Kako je $f^{\rightharpoonup} X = Y_0$ to smo ovim dokazali $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}} (Y_0, \tau_{Y_0})$. $\square$

99. Neka je $\pi : X \to X_{/\ker(f)}$ prirodna projekcija indukovana sa $\ker(f)$.

Pretpostavimo najpre da je $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to Y$ je (λ, τ_Y)-homeomorfizam. Specijalno $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to Y$ je (λ, τ_Y)-količničko preslikavanje. Kako je π (τ_X, λ)-količničko preslikavanje to sada iz $f = f_\diamond \circ \pi$ direktno sledi da je f (τ_X, τ_Y)-količničko.

Obrnuto, neka je f (τ_X, τ_Y)-količničko preslikavanje. Znamo da je $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to f^{\rightharpoonup} X$ bijekcija kao i da važi $f = f_\diamond \circ \pi$. Prema pretpostavci f je preslikavanje **na** skup Y, tj. $f^{\rightharpoonup} X = Y$, pa je zapravo $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to Y$ bijekcija. Da se sada uverimo u to da je $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to Y$ je (λ, τ_Y)-homeomorfizam (potrebno i) dovoljno je da pokažemo da za svako $B \subseteq Y$ važi $B \in \tau_Y \iff \left(f_\diamond\right)^{\leftharpoonup} B \in \lambda$. Dakle neka je $B \subseteq Y$ proizvoljno. Zbog $f^{\leftharpoonup} B = \pi^{\leftharpoonup}\left(\left(f_\diamond\right)^{\leftharpoonup} B\right)$ imamo

$$B \in \tau_Y \iff f^{\leftharpoonup} B \in \tau_X \iff \pi^{\leftharpoonup}\left(\left(f_\diamond\right)^{\leftharpoonup} B\right) \in \tau_X \iff \left(f_\diamond\right)^{\leftharpoonup} B \in \lambda$$

gde smo koristili činjenicu da je f (τ_X, τ_Y)-predkoličničko, a π (τ_X, λ)-predkoličničko preslikavanje. $\square$

100. (1)⇒(2): Ovo direktno proizilazi iz zadatka 97. pod (2).

Da pokažemo obrat pretpostavimo da važi **(2)**. Znamo da je $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to f^{\rightharpoonup}X$ bijekcija kao i da važi $f = f_\diamond \circ \pi$. Kako je f preslikavanje **na** skup Y, tj. $f^{\rightharpoonup}X = Y$, to je zapravo $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to Y$ bijekcija te postoji njemu inverzno $\left(f_\diamond\right)^{-1} : Y \to X_{/\ker(f)}$. Stavimo $\lambda := \mathrm{Factor}\,(\tau_X, \ker(f))$. Prirodna projekcija $\pi : X \to X_{/\ker(f)}$ indukovana sa $\ker(f)$ je (τ_X, λ)-neprekidna, $\left(f_\diamond\right)^{-1} \circ f = \pi$ pa iz (2) sledi da preslikavanje $\left(f_\diamond\right)^{-1}$ mora biti (τ_Y, λ)-neprekidno.

f je (τ_X, τ_Y)-neprekidno pa, je prema zadatku 97. pod (3), $f_\diamond$ (λ, τ_Y)-neprekidno. Dakle $f_\diamond : X_{/\ker(f)} \to Y$ je (λ, τ_Y)-homeomorfizam. Na osnovu zadatka 99. sada možemo zaključiti da je f (τ_X, τ_Y)-količničko. $\square$

101. (1)⇒(2): Ovo direktno proizilazi iz zadatka 97. pod (2).

(2)⇒(1): Neka je $Y_0 := f^{\rightharpoonup}X$ i $\tau_{Y_0} := \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y)$. Pokažimo najpre da je $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}} (Y_0, \tau_{Y_0})$. Koristimo se zadatkom 100. Neka je (Z, τ_Z) proizvoljan prostor i $g : Y_0 \to Z$ proizvoljno preslikavanje tako da je $g \circ f$ (τ_X, τ_Z)-neprekidno. Fiksirajmo proizvoljno $z_0 \in Z$ i definišimo $g_1 : Y \to Z$ sa

$$g_1(y) = \begin{cases} g(y) & \text{ako } \; y \in Y_0, \\ z_0 & \text{ako } \; y \in Y \setminus Y_0 \end{cases}$$

za $y \in Y$. Imamo $g_1 \circ f = g \circ f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z)$ pa prema (2) mora biti da $g_1 : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z)$. Zato je i $g = (g_1) \restriction Y_0 : (Y_0, \tau_{Y_0}) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z)$.

Pokažimo sada da je $\{Y_0, Y \setminus Y_0\} \subseteq \tau_Y$ kao i da je $Y \setminus Y_0$ τ_Y-diskretan skup. To će zajedno sa ovim što smo upravo dokazali, na osnovu zadatka 98., značiti da $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{q}^-} (Y, \tau_Y)$. Neka je $(Z, \tau_Z) = (Y_0, \tau_{Y_0}) \bigsqcup \big(Y \setminus Y_0, \mathbb{P}(Y \setminus Y_0)\big)$ topološka suma datih prostora, $y_0 \in Y_0$ proizvoljno fiksirano

($X \neq \varnothing$ povlači da je $Y_0 \neq \varnothing$) i neka je $g : Y \to Z$ definisano sa

$$g(y) = \begin{cases} (y_0, 1) & \text{ako} \quad y \in Y_0, \\ (y, 2) & \text{ako} \quad y \in Y \setminus Y_0 \end{cases}$$

Imamo $(g \circ f)(x) = (y_0, 1)$ za svako $x \in X$ pa $g \circ f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z)$. Zato prema (2) mora biti $g : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Z, \tau_Z)$. Kako je $Y_0 \times \{1\} \in \tau_Z$ to je $\tau_Y \ni g^{\leftarrow}\big(Y_0 \times \{1\}\big) = Y_0$. Ako je $A \subseteq Y \setminus Y_0$, onda je $A \times \{2\} \in \tau_Z$ pa je $\tau_Y \ni g^{\leftarrow}\big(A \times \{2\}\big) = A$. Dakle $\{Y_0, Y \setminus Y_0\} \subseteq \tau_Y$ i $Y \setminus Y_0$ je τ_Y-diskretan. $\square$

102. Neka je za $i = \overline{1,2}$ $\pi_i : X \to X_{/E_i}$ prirodna projekcija indukovana sa E_i. π_1 je $(\tau, \mathrm{Factor}(\tau, E_1))$-neprekidno, π_2 je $(\tau, \mathrm{Factor}(\tau, E_2))$-količničko preslikavanje i važi $\pi_2 = f \circ \pi_1$ pa tvrđenje sledi iz zadatka 97. pod (1).

Inače tvrđenje zadatka je prilično očigledno jer zbog $E_1 \subseteq E_2$ za svako $A \subseteq X_{/E_2}$ mora da važi $\bigcup A = \bigcup f^{\leftarrow} A$ obzirom na definiciju preslikavanja f, a s druge strane znamo da je

$$A \in \mathrm{Factor}(\tau, E_2) \iff \bigcup A \in \tau$$

kao i

$$f^{\leftarrow} A \in \mathrm{Factor}(\tau, E_1) \iff \bigcup f^{\leftarrow} A \in \tau\,.$$

$\square$

103. **(1)** Neka važi uslov (2) (ako važi uslov (1) dokaz ide slično). Neka je $B \subseteq Y$ tako da je $f^{\leftarrow} B$ τ_1-zatvoren skup. Tada je za svako $i \in J$ skup $f^{\leftarrow} B \cap X_i$ $\mathrm{rel}_{X_i}(\tau_1)$-zatvoren, drugim rečima $(f_i)^{\leftarrow}(B \cap Y_i)$ je $\tau_{1,i}$-zatvoren, pa kako je f_i $(\tau_{1,i}, \tau_{2,i})$-količničko preslikavanje, to $B \cap Y_i$ mora biti $\tau_{2,i}$-zatvoren. Ako je $i \in J$ onda je po pretpostavci Y_i τ_2-zatvoren, pa kako je $B \cap Y_i$ $\mathrm{rel}_{Y_i}(\tau_2)$-zatvoren, to je i $B \cap Y_i$ τ_2-zatvoren.

Dato je da je $Y = \bigcup\limits_{i \in J} Y_i$ pa imamo $B = B \cap Y = \bigcup\limits_{i \in J} (B \cap Y_i)$. Kako je indeksirana familija $(Y_i : i \in J)$ τ_2-lokalno konačna, i kako je za svako $i \in J$ $B \cap Y_i \subseteq Y_i$, to je i indeksirana familija $(B \cap Y_i : i \in J)$ τ_2-lokalno konačna. Za svako $i \in J$ $B \cap Y_i$ je τ_2-zatvoren pa (videti zadatak 36. pod (2)) sledi da je B τ_2-zatvoren skup.

Dato je da je f (τ_1, τ_2)-neprekidno preslikavanje pa treba još samo proveriti da je f preslikavanje **na** skup Y. No $Y = \bigcup_{i \in J} Y_i = \bigcup_{i \in J} f^{\rightharpoonup} X_i \subseteq f^{\rightharpoonup} X$.

(2) Ovo sledi iz **(1)** ako uzmemo $I := \{0, 1\}$, $J := \{0\}$, $f_1 := f$ i $f_0 := f \upharpoonright X_0$. □

104. Stavimo $f_0 := f \upharpoonright X_0$. Znamo da je f_0 $(\tau_{1,0}, \tau_{2,0})$-neprekidno (videti zadatak 68.) i da je **na** skup Y_0.

Pretpostavimo najpre da je Y_0 τ_2-otvoren [τ_2-zatvoren] skup i neka je $B \subseteq Y_0$ tako da je $(f_0)^{\leftharpoonup} B$ $\tau_{1,0}$-otvoren [$\tau_{1,0}$-zatvoren]. f je (τ_1, τ_2)-neprekidno pa je $X_0 = f^{\leftharpoonup} X_0$ τ_1-otvoren [τ_1-zatvoren]. Zato je $(f_0)^{\leftharpoonup} B$ τ_1-otvoren [τ_1-zatvoren] pa kako je f (τ_1, τ_2)-količničko, i jasno $(f_0)^{\leftharpoonup} B = f^{\leftharpoonup} B$ (zbog $X_0 = f^{\leftharpoonup}$ i $B \subseteq Y_0$), to B mora biti τ_2-otvoren [τ_2-zatvoren]. Specijalno zbog $B \subseteq Y_0$ skup B je $\tau_{2,0}$-otvoren [$\tau_{2,0}$-zatvoren].

Pretpostavimo sada da je f (τ_1, τ_2)-otvoreno [(τ_1, τ_2)-zatvoreno] preslikavanje. Neka je $B \subseteq Y_0$ tako da je $(f_0)^{\leftharpoonup} B$ $\tau_{1,0}$-otvoren [$\tau_{1,0}$-zatvoren]. Tada je $(f_0)^{\leftharpoonup} B \cup M$ τ_1-otvoren [τ_1-zatvoren] za neko $M \subseteq X \setminus X_0$. Skup $A := f^{\rightharpoonup}((f_0)^{\leftharpoonup} B \cup M) = f^{\rightharpoonup}((f_0)^{\leftharpoonup} B) \cup f^{\rightharpoonup} M$ je τ_2-otvoren [τ_2-zatvoren]. Zbog $(f_0)^{\leftharpoonup} B \subseteq X_0$ i $f_0 = f \upharpoonright X_0$ je $f^{\rightharpoonup}((f_0)^{\leftharpoonup} B) = (f_0)^{\rightharpoonup}((f_0)^{\leftharpoonup} B)$ pa kako je f_0 preslikavanje **na** skup Y_0, a $B \subseteq Y_0$, to je $f^{\rightharpoonup}((f_0)^{\leftharpoonup} B) = B$. Dakle $A = B \cup f^{\rightharpoonup} M$. Zbog $M \cap f^{\leftharpoonup} Y_0 = \varnothing$ imamo $f^{\rightharpoonup} M \subseteq Y \setminus Y_0$ pa je $B = A \cap Y$. Odavde sledi da je B $\tau_{2,0}$-otvoren [$\tau_{2,0}$-zatvoren] jer je A τ_2-otvoren [τ_2-zatvoren]. □

105. Najpre primetimo da je $X_{/E} = \{\{1/n, 1 + 1/n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{x\} : x \in X_0\}$ kao i da je $\mathrm{rel}_{X_0}(\tau) = \mu_{X_0}$. Stavimo $\lambda_0 := \mathrm{rel}_{q^{\rightarrow} X_0}(\lambda)$. Za $x \in X_0$ imamo $q(x) = \{x\}$ pa je $q_0 := q \upharpoonright X_0 : X_0 \to q^{\rightarrow} X_0$ bijekcija. Zato je q_0 (μ_{X_0}, λ_0)-količničko preslikavanje ako i samo ako je q_0 (μ_{X_0}, λ_0)-homeomorfizam, a da ovo drugo nije slučaj sledi iz činjenice da je 1 izolovana tačka prostora (X_0,μ_{X_0}) (što je očigledno) dok $q_0(1)=\{1\}$ nije izolovana tačka prostora $(q^{\rightarrow}X_0,\lambda_0)$:

neka je $U_0\in\lambda_0$ tako da je $\{1\}\in U_0$. Imamo $U_0=U\cap\{\{x\}:x\in X_0\}$ za neko $U\in\lambda$. $\bigcup U$ je μ_X otvoren i $1\in\bigcup U$ te postoji neko $n_0\in\mathbb{N}$ tako da je $(1;1+2/n_0)\cap X\subseteq\bigcup U$. Kako je $1+1/n_0\in(1;1+2/n_0)\cap X$ to je $1+1/n_0\in\bigcup U$. No $\bigcup U$ je pravilan za E pa je $\{1/n_0;1+1/n_0\}=[1+1/n_0]_E\subseteq\bigcup U$. Sada iz $1/n_0\in\bigcup U\in\mu_X$ sledi da za neki realan broj $\varepsilon>0$ važi $(1/n_0-\varepsilon;1/n_0)\subseteq\bigcup U$. Ako je $x_0\in(1/n_0-\varepsilon;1/n_0)\cap X_0$ proizvoljno (a takvo x_0 jasno postoji), onda imamo $x_0\in\bigcup U$ te iz $q(x_0)=[x_0]_E=\{x_0\}\in U\cap q^{\rightarrow}X_0=U_0$. Naravno $\{x_0\}\neq\{1\}$. $\square$

106. (1) Primetimo da je $E_0=\ker(\pi\restriction X_0)$ i $(\pi\restriction X_0)_\diamond=f$. Kako je $\pi\restriction X_0$ (τ_0,λ_0)-neprekidno preslikavanje to je $(\pi\restriction X_0)_\diamond=f$ (ν_0,λ_0)-neprekidno prema zadatku 97. pod (3).

(2) Kako je $E_0=\ker(\pi\restriction X_0)$ i $f=(\pi\restriction X_0)_\diamond$ to prema zadatku 99. važi

$$\pi\restriction X_0 \text{ je } (\tau_0,\lambda_0)-\text{količničko} \iff f \text{ je } (\nu_0,\lambda_0)-\text{homeomorfizam}$$

Jedna trivijalna konstatacija: ako su dati prostori (Z_i,η_i), $i\in\{0,1,2\}$, i preslikavanja $f_i:Z_0\to Z_i$, $i\in\{1,2\}$, i ako za neki (η_1,η_2)-homeomorfizam $h:Z_1\to Z_2$ važi $f_2=h\circ f_1$, onda je

f_1 $(\eta_0,\eta_1)-$količničko (-predkoličničko, -neprekidno, -otvoreno, -zatvoreno)

ako i samo ako je

f_2 $(\eta_0,\eta_2)-$količničko (-predkoličničko, -neprekidno, -otvoreno, -zatvoreno)

$q_\diamond\restriction(\pi^{\rightharpoonup}X_0):\pi^{\rightharpoonup}X_0\to Y_0$ je (λ_0,θ_0)-homeomorfizam (jer je $q_\diamond:X_{/E}\to Y$ (λ,θ)-homeomorfizam, obzirom da je q (τ,θ)-količničko), te u svetlu upravo navedenog zapažanja imamo da važi

$$\pi\restriction X_0 \text{ je } (\tau_0,\lambda_0)-\text{količničko} \iff q_0 \text{ je } (\tau_0,\theta_0)-\text{količničko}$$

$\square$

107. Ovo je u suštini preformulacija dela pod (1) zadatka 106. - sve što treba uraditi je identifikovati objekte koji se tamo javljaju. Neka je $X := Z_2$, $X_0 := Z_1$, $\tau := \tau_{Z_2}$, $Y := Z_{2/F_2}$, $\theta := \mathrm{Factor}\,(\tau_{Z_2}, F_2) = \eta_2$ i neka je $q : X \to Y$ prirodna projekcija indukovan sa F_2.

Imamo $E := \ker(q) = F_2$, $E_0 := E \cap (X_0)^2 = F_1$, $\lambda := \mathrm{Factor}(\tau, E) = \eta_2$, $\tau_0 := \mathrm{rel}_{X_0}(\tau) = \mathrm{rel}_{Z_1}(\mathrm{rel}_{Z_2}(\tau_Z)) = \mathrm{rel}_{Z_1}(\tau_Z) = \tau_{Z_1}$ i najzad $\nu_0 := \mathrm{Factor}(\tau_0, E_0) = \eta_1$. Ako je $\pi : X \to X_{/E}$ prirodna projekcija indukovana sa E (dakle $\pi = q$) i $f : X_{0/E_0} \to \pi^{\rightharpoonup} X_0$ preslikavanje definisano sa $f\left([x]_{E_0}\right) = [x]_E$, onda je zapravo $f = g$. Sada kako je naše q očigledno (τ, θ)-količničko to je prema zadatku 106. pod (1) f (ν_0, λ_0)-neprekidno, gde je $\lambda_0 := \mathrm{rel}_{\pi^{\rightharpoonup} X_0}(\lambda)$. Jasno $g^{\rightharpoonup}(Z_{1/F_1}) = \{[z]_{F_2} : z \in Z_1\} = \pi^{\rightharpoonup} X_0$ pa je g u prevodu $\left(\eta_1, \mathrm{rel}_{g^{\rightharpoonup}(Z_{1/F_1})}(\eta_2)\right)$-neprekidno, a ovo znači isto što i to da je g (η_1, η_2)-neprekidno.

Prvenstveno radi jačanja osećaja za pojmove *nasleđena topologija* i *faktor topologija*, sada ćemo ovaj zadatak uraditi i "direktno". Zaista neka je $V \in \eta_2$. Treba dokazati da je $g^{\leftharpoonup} V \in \eta_1$.

Imamo da je $\bigcup V$ τ_{Z_2}-otvoren. Pokažimo da je $\bigcup g^{\leftharpoonup} V = Z_1 \cap \bigcup V$ odakle bi sledilo $\bigcup g^{\leftharpoonup} V \in \mathrm{rel}_{Z_1}(\tau_{Z_2}) = \tau_{Z_1}$, tj. $g^{\leftharpoonup} V \in \eta_1$.

Neka je $z \in \bigcup g^{\leftharpoonup} V$. Imamo da je $z \in C$ za neko $C \in g^{\leftharpoonup} V \subseteq Z_{1/F_1}$. Specijalno $z \in C \subseteq \bigcup g^{\leftharpoonup} V \subseteq Z_1$. Z_{1/F_1} je particija skupa Z_1, $z \in C \cap [z]_{F_1} \neq \varnothing$ i $\{C, [z]_{F_1}\} \subseteq Z_{1/F_1}$ te zaključujemo $[z]_{F_1} = C \in g^{\leftharpoonup} V$ pa je $g\left([z]_{F_1}\right) \in V$. Znači $z \in [z]_{F_1} \subseteq [z]_{F_2} = g\left([z]_{F_1}\right) \in V$, tj. $z \in [z]_{F_2} \in V$ pa je $z \in Z_1 \cap \bigcup V$.

Obrnuto neka je $z \in Z_1 \cap \bigcup V$. Tada je $z \in C$ za neko $C \in V \subseteq Z_{2/F_2}$. Imamo $C \in Z_{2/F_2}$, $[z]_{F_2} \in Z_{2/F_2}$ (jer je $z \in Z_1 \subseteq Z_2$), $z \in C \cap [z]_{F_2} \neq \varnothing$ i Z_{2/F_2} je particija, pa iz svega ovog zaključujemo da je $g\left([z]_{F_1}\right) = [z]_{F_2} = C \in V$, te je $z \in [z]_{F_1} \in g^{\leftharpoonup} V$, tj. $z \in \bigcup g^{\leftharpoonup} V$. $\square$

108. (1) Ključni deo argumenta ovde se zapravo može apstrahovati u jedno opštije zapažanje kako sledi:

ako je $A \subseteq X_{0/E_0}$ tako da postoje neko $x_0 \in \bigcup A$ i neko $x_1 \in [x_0]_E$ tako da je $x_1 \in \mathrm{cl}_{\tau_X}(X_0 \setminus \bigcup A)$, onda ne može biti $f^{\rightharpoonup} A \in \lambda_0 = \mathrm{rel}_{\pi^{\rightharpoonup} X_0}(\lambda)$.

Zaista, pretpostavimo da uprkos datoj premisi, suprotno ovom što se tvrdi, važi $f^{\rightharpoonup} A \cup M \in \lambda = \mathrm{Factor}(\tau_X, E)$ za neko $M \subseteq (X_{/E}) \setminus \pi^{\rightharpoonup} X_0$. Dakle $\bigcup (f^{\rightharpoonup} A \cup M) = \pi^{\leftharpoonup}(f^{\rightharpoonup} A \cup M)$ je τ_X-otvoren, pa kako je $x_1 \in [x_0]_E \subseteq \bigcup (f^{\rightharpoonup} A \cup M)$ (jer je $f^{\rightharpoonup} A = \{[x]_E : x \in \bigcup A\}$) to prema pretpostavci postoji neko $m \in (X_0 \setminus \bigcup A)$ tako da je $m \in \bigcup (f^{\rightharpoonup} A \cup M) = \bigcup (f^{\rightharpoonup} A) \cup \bigcup M$. Imamo

$$\bigcup f^{\rightharpoonup} A = \bigcup \left\{ [x]_E \,:\, x \in \bigcup A \right\} =$$

$$\bigcup \left\{ [x]_E \cap X_0 \,:\, x \in \bigcup A \right\} \cup \bigcup \left\{ [x]_E \setminus X_0 \,:\, x \in \bigcup A \right\}$$

$$\subseteq \bigcup A \;\cup\; (X \setminus X_0)$$

jer je očigledno $[x]_E \cap X_0 = [x]_{E_0}$ za svako $x \in X_0$, a $\bigcup A$ je pravilan za E_0. Kako je $m \in (X_0 \setminus \bigcup A)$ to odavde sledi da je $m \notin f^{\rightharpoonup} A$, te mora biti $m \in \bigcup M$. Dakle imamo $m \in C$ za neko $C \in M \subseteq X_{/E}$. No znamo da je zapravo $m \in [m]_E \in X_{/E}$, te kako je $X_{/E}$ particija dobijamo $[m]_E = C \in M$. Zato iz $\varnothing = M \cap \pi^{\rightharpoonup} X_0 = M \cap \{[x]_E : x \in X_0\}$ sledi $m \notin X_0$. Ovo protivureči izboru tačke m.

U našem konkretnom primeru uzmimo $A := \{\{x\} : x \in (0;1) \cup (3;4)\} \cup \{\{0,4\}\} \subseteq X_{0/E_0}$, $x_0 := 0 \in \bigcup A$, $x_1 := 1 \in [0]_E = \{0,1,4\}$. Očigledno je $1 \in \mathrm{cl}_{\tau_X}(X_0 \setminus \bigcup A) = \mathrm{cl}_{\mu_{[0;4]}}((1;2)) = [1;2]$ pa imamo $f^{\rightharpoonup} A \notin \lambda_0$. S druge strane je naravno $\bigcup A = [0;1) \cup (3;4] \in \tau_{X_0}$, tj. $A \in \mathrm{Factor}(\tau_{X_0}, E_0) = \nu_0$, pa f ne može biti (ν_0, λ_0)-homeomorfizam.

(2) Primetimo najpre da je $X_{/E} = \{\{x\} : x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{J\}$, gde je $J := [0;1] \cap \mathbb{Q}$, i $X_{0/E_0} = \{\{x\} : x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}\} = \pi^{\rightharpoonup} X_0$. Neka je $A := \{\{x\} : x \in (0;1/2) \setminus \mathbb{Q}\} \subseteq X_{0/E_0}$. Kako je $\bigcup A = (0;1/2) \setminus \mathbb{Q} \in \tau_{X_0}$ to je $A \in \mathrm{Factor}(\tau_{X_0}, E_0) = \nu_0$. Pokažimo da skup $f^{\rightharpoonup} A = A$ (ovde je inače $f = \mathrm{id}_{X_{0/E_0}}$) nije λ_0-otvoren. Neka je $M \subseteq X_{/E} \setminus \pi^{\rightharpoonup} X_0$ proizvoljno. $X_{/E} \setminus \pi^{\rightharpoonup} X_0 = \{J\}$ pa je $M \in \{\varnothing, J\}$. Otuda je $f^{\rightharpoonup} A \cup M$ jedan od skupova $S_1 := \{\{x\} : x \in (0;1/2) \setminus \mathbb{Q}\}$ ili $S_2 := \{\{x\} : x \in (0;1/2) \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{J\}$. Ali nijedan od skupova $\bigcup S_1 = (0;1/2) \setminus \mathbb{Q}$ i $\bigcup S_2 = (0;1/2) \cup ([0;1] \cap \mathbb{Q})$ nije τ_X-otvoren, te $f^{\rightharpoonup} A \cup M \notin \lambda$.

(3) Neka je $A := \{[(x,x+1)]_{E_0} : x \in [0;1)\} = \{\{(x,x+1)\} : x \in [0;1)\} \subseteq X_{0/E_0}$. Imamo $\bigcup A = \{(x,x+1) : x \in [0;1)\} = U \cap X_0 \in \tau_X$ za $U := \mathbb{R} \times (0;2) \in \tau_X$ pa je $A \in \mathrm{Factor}(\tau_{X_0}, E_0) = \nu_0$.

S druge strane je

$$\pi^{\rightarrow} A = \{[(x,x+1)]_E : x \in [0;1)\} = \{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in [0;1)\}$$

i $\bigcup \pi^{\rightarrow} A = [0;1) \times \mathbb{R} \notin \tau_X$, kako je $\pi^{\rightarrow} X_0 = X_{/E}$, a u skladu s tim i $\lambda_0 = \mathrm{rel}_{X_{/E}}(\lambda) = \lambda = \mathrm{Factor}(\tau_X, E)$, pa zaključujemo da je $\pi^{\rightarrow} A \notin \lambda$.

Da se na drugi način uverimo u to da je $\pi^{\rightarrow} A \notin \lambda$ možemo iskoristiti isti rezon kao i u delu **(1)** uz zapažanje da $z_0 := (0;1) \in \bigcup A$, $z_1 := (0;-1) \in [z_0]_E = \{0\} \times \mathbb{R}$ i

$$z_1 \in \mathrm{cl}_{\tau_X}\left(\{(x,x-1) : x \in (-\infty;0)\}\right) \subseteq \mathrm{cl}_{\tau_X}\left(X_0 \setminus \bigcup A\right)$$

$\square$

109. Neka je $f : S \to X$ definisano sa $f(a,i) = a$. Kako je očigledno $E = \ker(f)$ to je dovoljno dokazati da je f (τ_S, τ)-količničko preslikavanje (videti zadatak 99.). Neka je $U \subseteq X$ proizvoljno. Primetimo da je

$$f^{\leftharpoonup} U \cap (X_i \times \{i\}) = (U \cap X_i) \times \{i\}$$

Zato je $f^{\leftharpoonup} U \in \tau_S$ ako i samo ako za svako $i \in I$ važi $(U \cap X_i) \times \{i\} \in \{V \times \{i\} : V \in \tau_i\}$, odnosno ako i samo ako za svako $i \in I$ važi $U_i \cap X_i \in \tau_i$, drugim rečima ako i samo ako $U \in \tau$. Kako je f očigledno preslikavanje **na** skup X ovo upravo znači da je f (τ_S, τ)-količničko. $\square$

110. **(1)** Dovoljno je dokazati da je za svako $q \in X$ klasa $[q]_E$ τ_X-gust skup (videti rešenje zadatka 95.). Dakle neka su $p, q \in X$ i realan broj $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Kako je $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ definisana sa $h(t) := \dfrac{p(t) - q(t)}{l(t)}$

neprekidna funkcija to postoji neko $g \in X$ tako da je $\sup\limits_{t\in[0;1]} |h(t)-g(t)| < \varepsilon/2$. Sada imamo

$$\sup_{t\in[0;1]} |p(t) - (q(t) + l(t)g(t))| = \sup_{t\in[0;1]} |(h(t) - g(t))l(t)| \leq$$

$$\sup_{t\in[0;1]} |h(t) - g(t)| \cdot \sup_{t\in[0;1]} |1 + t^2| < \varepsilon$$

tj. $q + l \cdot g \in [q]_E \cap \mathrm{K}_d[p; \varepsilon)$.

(2) Za $p, q \in X$ imamo $p\, E_1\, Q \iff p(1) = q(1)$. Zato je preslikavanje $f : [0; 1] \to X_{/E_1}$ definisano sa $f(x) := [c_x]_{E_1}$, gde je $c_x \in X$ konstantna funkcija $c_x(t) := x$ za svako $t \in [0; 1]$, **bijekcija**. Pokažimo da je f $\big(\mu_{[0;1]}, \mathrm{Factor}(\tau, E_1)\big)$-homeomorfizam. Neka je $\pi_1 : X \to X_{/E_1}$ prirodna projekcija indukovana sa E_1.

Primetimo da je $g := f^{-1} \circ \pi : X \to [0; 1]$ dato sa $g(p) = p(1)$ za $p \in X$. Pokažimo da je g $(\tau, \mu_{[0;1]})$-neprekidno preslikavanje (što je ekvivalentno tome da je f^{-1} $\big(\mathrm{Factor}(\tau, E_1), \mu_{[0;1]}\big)$-neprekidno - videti zadatak 97. pod (2)). Ako je $p \in X$ i $\varepsilon > 0$ realan broj, onda je $f^{\rightharpoonup}\mathrm{K}_d[p; \varepsilon) \subseteq (p(1) - \varepsilon; p(1) + \varepsilon)$. Zaista za $q \in X$ imamo $\varepsilon > d(p, q) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |p(t) - q(t)| > |p(1) - q(1)|$, tj. $g(q) \in (p(1) - \varepsilon; p(1) + \varepsilon)$.

Pokažimo sada da je f $\big(\mu_{[0;1]}, \mathrm{Factor}(\tau, E_1)\big)$-homeomorfizam. Neka je $x_0 \in [0; 1]$ i $N \in \mathrm{Factor}(\tau, E_1)$ tako da je $f(x) \in N$. Imamo dakle da je $c_{x_0} \in \bigcup N \in \tau_X$ pa je $\mathrm{K}_d[c_{x_0}; \varepsilon) \subseteq \bigcup N$ za neki realan broj $\varepsilon > 0$. Pokažimo da je $f^{\rightharpoonup}(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subseteq N$. Ako je $y \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, onda je $d(c_y, c_{x_0}) = |y - x_0| < \varepsilon$, tj. $y \in \mathrm{K}_d[c_{x_0}; \varepsilon) \subseteq \bigcup N$ pa mora biti $f(y) = [c_y]_{E_1} \in N$. $\square$

111. (1) Neka je $x \in \mathrm{acc}(X)$ i $U \ni x$ otvoren skup. Kad bi U bio konačan skup, onda bi i $F := U \setminus \{x\}$ bio konačan te i zatvoren, obzirom da je X T_1 prostor. Zato je $\{x\} = U \setminus F$ otvoren skup, tj. $x \notin \mathrm{acc}(U)$, kontradikcija.

(2) Neka je X konačan T_1 prostor i $A \subseteq X$. A mora biti konačan te i zatvoren. Dakle svaki podskup od X je zatvoren, tj. X je diskretan. $\square$

112. (1) Neka je X `Hausdorff`-ov prostor. Neka je $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta_X$. Tada je $x \neq y$ pa postoje otvoreni $U_x \ni x$ i $U_y \ni y$ tako da je $U_x \cap U_y = \varnothing$. Jasno $U_x \times U_y \in \tau_X \times' \tau_X$. Ako je $(a, b) \in U_x \times U_y$ onda iz $a \in U_x$, $b \in U_y$ i $U_x \cap U_y = \varnothing$ sledi $a \neq b$, tj. $(a, b) \in X^2 \setminus \Delta_X$. Dakle $(a, b) \in U_x \times U_y \subseteq X^2 \setminus \Delta_X$. Ovim smo dokazali da je Δ_X $\tau_X \times' \tau_X$-zatvoren podskup od X^2.

Obrnuta implikacija se izvodi skoro identično te se prepušta čitaocu.

(2) Kako $f, g : X \xrightarrow{\mathsf{c}} Y$ to $h := f \triangle g : X \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y, \tau_Y \times' \tau_Y)$. Y je `Hausdorff`-ov pa je na osnovu (1) Δ_Y $\tau_Y \times' \tau_Y$-zatvoren. Obzirom da je h neprekidno preslikavanje to je $S = h^{\leftharpoonup} \Delta_Y$ zatvoren u X.

(3) Ovo sledi direktno iz (2). $\square$

113. (1) Ako su $n, m \in X$ tako da je $n < m$, onda je $n \in D_n \in \tau$ a $m \notin D_n$. Zato je (X, τ) T_0 prostor. S druge strane za $m \in X$ imamo $\mathrm{cl}(\{m\}) = m\mathbb{N} \neq \{m\}$ (videti zadatak 29.) pa prostor nije T_1.

Neka su $U, V \in \tau$ i $u \in U$, $v \in V$ tako da $U \cap V = \varnothing$ (recimo $U = D_6 \ni 6 = u$ i $V = D_{35} \ni 5 = v$). Ne može biti $u \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U$ i $v \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V$ za neke $U_1, V_1 \in \tau$ jer bi imali $uv \in \mathrm{cl}(\{u\}) \cap \mathrm{cl}(\{v\}) \subseteq \overline{U_1} \cap \overline{V_1} \subseteq U \cap V \neq \varnothing$. Odavde se lako može zaključiti da prostor nije regularan, obzirom da je $3 \notin \mathrm{cl}(\{2\}) = 2\mathbb{N} \neq \varnothing$, recimo.

(2) Neka je (X, τ_9) prostor iz **P 9**, a (X, τ_{10}) prostor iz **P 10**. Neka su $a, b \in X$ tako da je $a \neq b$. Ako je $p > \max\{a, b\}$ proizvoljan prost broj, $U := \mathbb{N} \cap (a + p\mathbb{Z})$, $V := \mathbb{N} \cap (b + p\mathbb{Z})$, onda je $U, V \in \tau_{10}$, $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \varnothing$. Dakle τ_{10} je T_2 topologija. Kako je jasno $\tau_{10} \subseteq \tau_9$ ovim smo dokazali da je i τ_9 T_2 topologija.

Ako su $l_1, k_1, l_2, k_2 \in \mathbb{N} = X$ onda na osnovu zadatka 30. imamo

$$k_1 k_2 \in \mathrm{cl}_{\tau_9}\left((l_1 + k_1\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}\right) \cap \mathrm{cl}_{\tau_9}\left((l_2 + k_2\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}\right) \subseteq$$

$$\mathrm{cl}_{\tau_{10}}\left((l_1 + k_1\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}\right) \cap \mathrm{cl}_{\tau_{10}}\left((l_2 + k_2\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}\right) \neq \varnothing$$

(jer $\tau_{10} \subseteq \tau_9$).

Neka je sada $\tau \in \{\tau_9, \tau_{10}\}$ i neka su $U, V \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ tako da $U \cap V = \varnothing$ (recimo $U = \mathbb{N} \cap (1 + 3\mathbb{Z})$, $V = \mathbb{N} \cap (2 + 3\mathbb{Z})$). Ne može biti $\mathrm{cl}_\tau(U_1) \subseteq U$ i $\mathrm{cl}_\tau(V_1) \subseteq V$ za neke $U_1, V_1 \in \mathcal{L} := \{(l + k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} : l, k \in \mathbb{N}\}$ jer bi imali $\varnothing \neq \mathrm{cl}_\tau(U_1) \cap \mathrm{cl}_\tau(V_1) \subseteq U \cap V$. Kako postoji τ-baza koja je podfamilija od $\mathcal{L}$ (videti zadatke 13. i 14.), a kako je $2 \notin \mathrm{cl}_\tau(\{3\}) = \{3\} \neq \varnothing$ recimo, odavde se lako može zaključiti da prostor (X, τ) nije regularan. □

114. *Slučaj* 1: Skup P izolovanih tačaka prostora je beskonačan. Tada je $(\{x_n\} \ : \ n \in \mathbb{N})$ traženi niz ako su x_n izolovane tačke i $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$.

Slučaj 2: Postoji samo konačno mnogo izolovanih tačaka. Označimo sa Z taj konačan skup izolovanih tačaka. Z je zatvoren obzirom da se radi o T_1 prostoru. Stavimo $Y := X \setminus Z$. Y je skup tačaka koje nisu izolovane.

Postoje $y_1 \in X$ i $y_2 \in Y$ tako da je $y_1 \neq y_2$ (u suprotnom bi X bio konačan). Neka su $U_1 \ni y_1$ i $U_2' \ni y_2$ otvoreni skupovi tako da je $U_1 \cap U_2' = \varnothing$. y_2 nije izolovana tačka pa postoji neko $y_3 \in U_2' \setminus Z$ tako da je $y_3 \neq y_2$. Jasno $y_3 \in Y$. Takođe postoje otvoreni $U_2 \ni y_2$ i $U_3' \ni y_3$ tako da je $U_2 \cup U_3' \subseteq U_2'$ kao i $U_2 \cap U_3' = \varnothing$.

Pretpostavimo da smo konstruisali neprazne po parovima disjunktne otvorene skupove $U_1, \ldots,\ U_n, U_{n+1}'$ i $y_{n+1} \in U_{n+1}' \cap Y$. Kako y_{n+1} nije izolovana tačka to postoji neko $y_{n+2} \in U_{n+1}' \setminus Z$ tako da je $y_{n+1} \neq y_{n+2}$. Jasno $y_{n+2} \in Y$. Takođe postoje otvoreni $U_{n+1} \ni y_{n+1}$ i $U_{n+2}' \ni y_{n+2}$ tako da je $U_{n+1} \cup U_{n+2}' \subseteq U_{n+1}'$ i $U_{n+1} \cap U_{n+2}' = \varnothing$. Tada su $U_1, \ldots, U_{n+1}, U_{n+2}'$ po parovima disjunktni i $y_{n+2} \in U_{n+2}' \cap Y$.

Na ovaj način smo rekurzivno definisali niz $(U_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ po parovima disjunktnih skupova. □

115. Neka je $B = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ tako da je $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$.

Neka su $U_1 \ni x_1,\ U_2 \ni x_2$ otvoreni skupovi tako da je $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Kako je B beskonačan i $U_1^c \cup U_2^c = X$ to je za neko $i_1 \in \{1, 2\}$ skup $B \setminus U_{i_1}$ beskonačan. Stavimo $V_1 := U_{i_1}$.

Pretpostavimo da smo definisali prirodne brojeve $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ kao i otvorene skupove $V_s \ni x_{i_s},\ s = \overline{1, k}$, tako da za svako $s_0 = \overline{1, k}$ važi

$V_{s_0} \cap \{x_{i_s} \ : \ s = \overline{1,k} \ \text{ i } \ s \neq s_0\} = \varnothing$ i tako da je skup $B \setminus \bigcup_{s=1}^{k} V_s$ beskonačan. Koristeći ovu poslednju činjenicu možemo izabrati $n_1 > n_2 > i_k$ i za $j = \overline{1,2}$ tačke $x_{n_j} \in B \setminus \bigcup_{s=1}^{k} V_s$ kao i otvorene $U_{n_j} \ni x_{n_j}$, tako da je $U_{n_1} \cap U_{n_2} = \varnothing$. Kao i ranije, postoji $l \in \{1,2\}$ tako da je skup $\left[B \setminus \bigcup_{s=1}^{k} V_s\right] \cap U_{n_l}^c$ beskonačan; definišimo $i_{k+1} := n_l$ i $V_{k+1} := U_{n_l} \setminus \{x_{i_s} \ : \ s = \overline{1,k}\}$. Tada imamo $x_{i_{k+1}} \in V_{k+1}$, $V_{k+1} \cap \{x_s \ : \ s = \overline{1,k}\} = \varnothing$ i $x_{i_{k+1}} \notin \bigcup_{s=1}^{k} V_s$, što zajedno sa indukcijskom hipotezom povlači $V_{s_0} \cap \{x_{i_s} \ : \ s = \overline{1,k} \ \text{ i } \ s \neq s_0\} = \varnothing$ za svako $s_0 = \overline{1,k+1}$. Takođe, po konstrukciji skup $B \setminus \bigcup_{s=1}^{k+1} V_s$ je beskonačan.

Na ovaj način smo rekurzivno konstruisali skup $\{x_{i_s} \ : \ s \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ koji je (očigledno) beskonačan i diskretan: $x_{i_k} \in V_k \not\ni x_{i_s}$ kad god su $k, s \in \mathbb{N}$ i $k \neq s$.

Drugi način da se ovo tvrđenje pokaže jeste ovaj. Kako je X `Hausdorff`-ov prostor to je (A, τ_A) takođe `Hausdorff`-ov, gde je $\tau_A := \mathrm{rel}_A(\tau_X)$. A je beskonačan pa prema zadatku 114. postoji niz $(U_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ tako da za svako $n, m \in \mathbb{N}$ važi $U_n \in \tau_A$ i $n \neq m \Rightarrow U_n \cap U_m = 0$. Izaberimo za svako $n \in \mathbb{N}$ po neko $u_n \in U_n$ i po neko $V_n \in \tau_X$ tako da je $U_n = V_n \cap A$. Zbog $n \neq m \Rightarrow U_n \cap U_m = 0$ skup $H := \{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ je beskonačan. Takođe za $n, m \in \mathbb{N}$ takve da $n \neq m$ imamo $u_n \in V_n$ kao i $u_m \notin V_n$ (jer $u_m \in A$ i $u_m \notin U_n = A \cap V_n$). Drugim rečima zaključujemo da je A diskretan podskup prostora X. $\square$

116. Stavimo $I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\{n\} \times \{1, \ldots, n\}]$ i neka je $B := \{x_{n,i} \ : \ (n,i) \in I\} \subseteq A$ takav da ako $(n,m), (m,j) \in I$ i $(n,i) \neq (m,j)$, onda $x_{n,i} \neq x_{m,j}$. B je zatvoren u A, pa kako je A zatvoren u X to je i B zatvoren u X. Obzirom da je A diskretan to je i B diskretan. Za svako $(n,i) \in I$ skup

$B_{n,i} := \{x_{m,j} \ : \ (m,j) \in I \setminus \{(n,i)\}\}$ je zatvoren u B (jer je B diskretan) pa je zatvoren i u X. Kako je X `Hausdorff`-ov prostor to za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje otvoreni $U'_{n,i} \ni x_{n,i}$, $i = \overline{1,n}$, tako da $1 \leq i < j \leq n \Rightarrow U'_{n,i} \cap U'_{n,j} = \varnothing$. Za svako $(n,i) \in I$ definišimo $U_{n,i} := U'_{n,i} \setminus B_{n,i}$. Jasno $U_{n,i}$ je otvorena okolina tačke $x_{n,i}$. Pokažimo da je $\mathcal{U} := \{U_{n,i} \ : \ (n,i) \in I\} \cup \{X \setminus B\}$ traženi otvoren pokrivač.

Pretpostavimo, suprotno onom što treba dokazati, da postoji neki konačan $S \subseteq X$ tako da za svako $x \in X$ postoji neko $V \in \mathcal{U}$ tako da je $x \in V$ i $V \cap S \neq \varnothing$. Napišimo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$. Za svako $i = \overline{1, k+1}$ postoji neko $V_i \in \mathcal{U}$ tako da je $x_{k+1,i} \in V_i$ i $V_i \cap S \neq \varnothing$. Kako jedini član pokrivača $\mathcal{U}$ koji sadrži tačku $x_{k+1,i}$ jeste $U_{k+1,i}$, to je $V_i = U_{k+1,i}$ te i $U_{k+1,i} \cap S \neq \varnothing$. Za svako $i = \overline{1, k+1}$ izaberimo po neko $p_i \in \{1, \ldots, k\}$ tako da je $s_{p_i} \in U_{k+1,i}$. Postoje $i, j \in \{1, \ldots, k+1\}$ tako da je $i \neq j$ i $p_i = p_j$; tada je $s_{p_i} = s_{p_j} \in U_{k+1,i} \cap U_{k+1,j} \neq \varnothing$. Ali skupovi $U_{k+1,1}, \ldots, U_{k+1,k+1}$ su po parovima disjunktni - kontradikcija. □

117. Neka je $f : X \to A$ retrakcija na podprostor $A \subseteq X$ i $x \in X \setminus A$. Iz $f(x) \in A \not\ni x$ sledi $x \neq f(x)$ pa kako je X `Hausdorff`-ov prostor to postoje otvoreni skupovi $V \ni x$ i $W \ni f(x)$ tako da je $V \cap W = \varnothing$. Imamo $f(x) \in W \cap A \in \mathrm{rel}_A(\tau_X)$ pa kako je f $\big(\tau_X, \mathrm{rel}_A(\tau_X)\big)$-neprekidno preslikavanje to postoji neki otvoren $V' \ni x$ tako da je $f^{\rightharpoonup} V' \subseteq W$. Jasno, $U := V' \cap V$ je otvorena okolina tačke x. Pokažimo da je $U \subseteq X \setminus A$. Neka je $y \in U$. Iz $y \in V'$ sledi $f(y) \in W$. Iz $y \in V$ i $V \cap W = \varnothing$ sledi $y \notin W$. Zato je $y \neq f(y)$. S druge strane $y \in A$ bi povlačilo $y = f(y)$. Dakle $y \notin A$.

Da uradimo zadatak na drugačiji način primetimo da je $A = \{x \in X \ : \ f_0(x) = \mathrm{id}_X(x)\}$, gde je $f_0 : X \to X$ definisano sa $f_0(x) = f(x)$, $x \in X$, (τ_X, τ_X)-neprekidno preslikavanje. Otuda je A zatvoren skup u X na osnovu (2) iz zadatka 112. □

118. Stavimo $F_n := \{x_m \ : \ m > n\}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji po otvoren $V_n \ni x_n$ tako da je $V_n \cap F_n = \varnothing$. Zato je $x_n \notin \overline{F_n}$ te postoje otvoreni $U'_n \ni x_n$ i $U''_n \supseteq F_n$ takvi da je $U'_n \cap U''_n = \varnothing$. Definišimo $U_1 := U'_1$ i $U_n := U'_n \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} U''_i$ za $n > 1$. Jasno, skupovi U_n su otvoreni. Važi $x_1 \in U'_1 = U_1$, a za $n > 1$

imamo $x_n \in F_i \subseteq U_i''$, $1 \leq i \leq n-1$, te $x_n \in U_n' \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i'' = U_n$.

Ako $n < m$ onda je $U_m \subseteq U_n''$, $U_n \subseteq U_n'$ i $U_n' \cap U_n'' = \varnothing$ te mora biti i $U_n \cap U_m = \varnothing$. □

119. Čitaocu se savetuje da se najpre podseti činjenica navedenih pod (2) i pod (4) u zadatku 31.

Neka su $x \in X$ kao i τ_Y-otvoren $V \ni f(x)$ proizvoljno dati - dokazujemo neprekidnost u tački x. Zbog regularnosti prostora Y imamo da postoji τ_Y-otvoren skup $W \ni f(x)$ tako da je $\mathrm{cl}(W) \subseteq V$. Kako je f_x neprekidno, u odnosu na odgovarajuće topologije, $x \in \mathrm{dom}(f_x)$ i $f_x(x) = f(x) \in W$ to postoji otvoren $U \in \tau_X$ tako da važi $(f_x)^{\rightharpoonup}(U \cap S_x) \subseteq W$.

Neka je $y \in U$ proizvoljno. Kako je $y \in U \subseteq \overline{U} = \mathrm{cl}(U \cap S)$ (obzirom da je U otvoren, a S gust u X), a s druge strane je $y \in S_y$ i $U \cap S \subseteq S_y$, te odavde dobijamo $y \in \mathrm{cl}_{\mathrm{rel}_{S_y}(\tau_X)}(U \cap S)$. Sada iz neprekidnosti funkcije f_y sledi da $f_y(y) \in \mathrm{cl}((f_y)^{\rightharpoonup}(U \cap S))$. No kako je $U \cap S \subseteq S_x$ to imamo $(f_y)^{\rightharpoonup}(U \cap S) = f^{\rightharpoonup}(U \cap S) = (f_x)^{\rightharpoonup}(U \cap S) \subseteq (f_x)^{\rightharpoonup}(U \cap S_x) \subseteq W$. Dakle $f(y) = f_y(y) \in \mathrm{cl}(W) \subseteq V$. Time smo dokazali da je $f^{\rightharpoonup}U \subseteq V$. □

120. (1) Neka su $a, b : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1]$ takve funkcije da $A = a^{\leftharpoonup}\{0\}$ i $B = b^{\leftharpoonup}\{0\}$. Formulom $f(x) = \dfrac{a(x)}{a(x) + b(x)}$ je korektno definisana funkcija $f : X \to [0;1]$: obzirom da je $a^{\rightharpoonup}X \cup b^{\rightharpoonup}X \subseteq [0;+\infty)$ to imamo $a(x)+b(x) = 0 \iff a(x) = b(x) = 0 \iff x \in A \cap B = \varnothing$. Takođe, ona je neprekidna i važi $f(x) = 1$ ako i samo ako $b(x) = 0$ i $f(x) = 0$ ako i samo ako $a(x) = 0$. Dakle $A = f^{\leftharpoonup}\{0\}$ i $B = f^{\leftharpoonup}\{1\}$.

(2) Neka su $f_n : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1]$ takve da je $F_n = (f_n)^{\leftharpoonup}\{0\}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\left|\dfrac{f_n(x)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, to je sa $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f_n(x)}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ korektno definisana funkcija $h : X \to [0;1]$ i pri tom je $h : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0;1]$ na osnovu zadatka 63. obzirom da su funkcije f_n za svako $n \in \mathbb{N}$ neprekidne (pa su neprekidne i sume od po konačno mnogo njih). Takođe imamo $h(x) = 0$ ako i samo ako $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(f_n(x) = 0\big)$ ako i samo ako $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. $\square$

121. **(5)⇒(1)**: Kako je u savršeno normalnom prostoru svaki zatvoren skup nul skup, to postoji neko $g : Y \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$ tako da je $F = g^{\leftharpoonup}\{0\}$. Tada $h := f \circ g : X \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$ i $h^{\leftharpoonup}\{0\} = F$.

(1)⇒(2): Jasno.

(2)⇒(3): Kako je $[0;1]$ metrizabilan to je on i savršeno normalan. Dakle zadovoljen je uslov **(5)** a on, kao što smo to dokazali, povlači **(1)**. Zato je $A = g^{\leftharpoonup}\{0\}$ za neko $g : X \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$, pri čemu znamo da je $g : X \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$ isto što i $g : X \overset{c}{\longrightarrow} \mathbb{R}$.

(3)⇒(4): Jasno.

(4)⇒(5): Treba jednostavno primetiti da je $\mathbb{R}$ kao metrizabilan prostor savršeno normalan. $\square$

122. Ako je $U \in \mu_{[0;1]}$ i $f : X \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$, onda za neko $V \in \mu_{\mathbb{R}}$ imamo $U = V \cap [0;1]$ pa je $f^{\leftharpoonup}U = f^{\leftharpoonup}V \in \mathcal{B}_2$ $\big($zbog $f^{\rightharpoonup}X \subseteq [0;1]\big)$, jer je očigledno $f : X \overset{c}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ i $f^{\rightharpoonup}X$ ograničen podskup od $\mathbb{R}$. Odavde sledi $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$. Takođe jasno je da je $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_3 \subseteq \tau$. Zbog toga je $\mathrm{Top}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathrm{Top}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathrm{Top}(\mathcal{B}_3) \subseteq \tau$.

Da pokažemo $\mathrm{Top}(\mathcal{B}_3) \subseteq \mathrm{Top}(\mathcal{B}_1)$ neka je $U \in \mu_{\mathbb{R}}$, $f : X \overset{c}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ i $x_0 \in f^{\leftharpoonup}U$. Za neko $\varepsilon \in (0;+\infty)$ važi $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subseteq U$. Neka je $h : \mathbb{R} \to [0;1]$ definisano sa $h(y) = \min\left\{\left|\dfrac{t - x_0}{\varepsilon}\right|, 1\right\}$ za $t \in \mathbb{R}$. Jasno $h : \mathbb{R} \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$. Imamo $x_0 \in (h \circ f)^{\leftharpoonup}[0;1) = f^{\leftharpoonup}(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subseteq f^{\leftharpoonup}U$. Kako je $h \circ f : X \overset{c}{\longrightarrow} [0;1]$ kao i $[0;1) \in \mu_{[0;1]}$ to je $(h \circ f)^{\leftharpoonup}[0;1) \in \mathcal{B}_1$. Obzirom da je tačka $x_0 \in f^{\leftharpoonup}U$ bila proizvoljna ovim smo dokazali da važi $f^{\leftharpoonup}U \in \mathrm{Top}(\mathcal{B}_1)$. $\square$

123. (2)⇒(1): Primetimo najpre da (2) implicira $f : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ za svako $f \in \mathcal{F}$.

Neka je $x_0 \in V \in \tau$. Prema pretpostavci postoje $k \in \mathbb{N}$ i $U_i \in \mu_{\mathbb{R}}$ i $f_i \in \mathcal{F}$ za $i = \overline{1,k}$ tako da je $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} (f_i)^{\leftharpoonup} U_i \subseteq V$.

Fiksirajmo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Postoji $\varepsilon_i \in (0; +\infty)$ tako da je $\big(f_i(x_0) - \varepsilon_i; f_i(x_0) + \varepsilon_i\big) \subseteq U_i$. Imamo $g_i : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ gde je funkcija g_i definisana sa

$$g_i(z) = \min \left\{ 1, \left| \frac{f_i(z) - f_i(x_0)}{\varepsilon_i} \right| \right\}$$

za $z \in X$. Takođe je $g_i(x_0) = 0$ kao i

$$\big(f_i\big)^{\leftharpoonup} \big(f_i(x_0) - \varepsilon_i; f_i(x_0) + \varepsilon_i\big) = \big(g_i\big)^{\leftharpoonup} [0; 1) \ .$$

Stavimo $h := \max\limits_{i=\overline{1,k}} g_i$. Jasno $h : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ kao i $h(x_0) = 0$.

Pokažimo da je $h^{\rightharpoonup}(X \setminus V) \subseteq \{1\}$. Neka je $z \in X \setminus V$. Tada je $z \in X \setminus (f_{i_0})^{\leftharpoonup} U_{i_0}$ za neko $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$. Iz $f_{i_0}(z) \in \mathbb{R} \setminus \big(f_{i_0}(x_0) - \varepsilon_{i_0}; f_{i_0}(x_0) + \varepsilon_{i_0}\big)$ sada sledi $\left| \frac{f_{i_0}(z) - f_{i_0}(x_0)}{\varepsilon_{i_0}} \right| \geq 1$, pa je $g_{i_0}(z) = 1$. Kako važi $g_j(z) \in [0; 1]$ za $j = \overline{1,k}$, to je $h(z) = 1$.

(1)⇒(5): Jasno $\mathcal{B} := \big\{ f^{\leftharpoonup} U \ : \ f \in \mathcal{F}, \ U \in \mu_{[0;1]} \big\} \subseteq \tau$, pa je $\mathrm{Top}(\mathcal{B}) \subseteq \tau$. Neka je $x_0 \in U \in \tau$. Kako je (X, τ) potpuno regularan prostor to postoji neko $f \in \mathcal{F}$ tako da je $f(x_0) = 0$ i $f^{\rightharpoonup}(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Imamo $x_0 \in f^{\leftharpoonup}[0; 1) \subseteq U$ pri čemu je $f^{\leftharpoonup}[0; 1) \in \mathcal{B}$. Kako je $x_0 \in U$ bilo proizvoljno ovo znači da je $U \in \mathrm{Top}(\mathcal{B})$.

Lanac implikacija **(5)⇒(4)⇒(3)⇒(2)** je očigledno tačan. $\square$

124. Neka je $F = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$ gde su U_n otvoreni skupovi. Za svako $n \in \mathbb{N}$ uočimo po neprekidnu $f_n : X \to [0; 1]$ takvu da $f_n^{\rightharpoonup} F \subseteq \{0\}$ i $f_n^{\rightharpoonup}(U_n^c) \subseteq \{1\}$ - ovo je moguće uraditi jer su F i U_n^c zatvoreni disjunktni skupovi, a X je normalan prostor. Sa $h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n(x)}{2^n}$ je korektno definisana neprekidna funkcija $h : X \to [0;1]$. Pokažimo da je $F = h^{\leftharpoonup}\{0\}$. Neka je $x \in X$ proizvoljno. Kako je $f_n(x) \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ to je $h(x) = 0$ ekvivalentno sa $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(f_n(x) = 0\big)$. Dakle ako je $h(x) = 0$, onda mora biti $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(x \notin (U_n)^c\big)$ tj. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = F$. Obrnuto, ako je $x \in F$, onda je po konstrukciji $f_n(x) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. □

125. Za $z \in \mathbb{R}^2$ pisaćemo $z = (z(1), z(2))$. Primetimo najpre da je za svako $z \in Y$ familija $\mathcal{N}_z$ τ_Y-lokalna baza u tački z (jer je $\mathcal{N}_z$ τ_X-lokalna baza u tački z i usto je $M \subseteq Y$ za svako $M \in \mathcal{N}_z$).

(1) Neka je najpre $z \in Y \setminus L$. Treba dokazati da je $X \setminus \{z\}$ τ_X -otvoren skup. Neka je $w \in X \setminus \{z\}$. Ako $w \in Y \setminus L$ onda je $w \in M := \{b\} \in \tau_X$ i $M \cap \{z\} = \varnothing$. Ako je $w \in L$ onda je $w \in M := \{w\} \cup [(U_w \cup V_w) \setminus \{z\}] \in \tau_X$ i $M \cap \{z\} = \varnothing$. Ako je $w = p$ onda je $W_n \cap \{z\} = \varnothing$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ takvo da je $n > z(2)$.

Neka je sada $z \in L$ i neka je T proizvoljan konačan skup. Treba dokazati da je $X \setminus \big[\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T]\big]$ τ_X-otvoren skup. Neka je $w \in X \setminus \big[\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T]\big]$. Ako je $w \in Y \setminus L$ onda je $w \in M := \{w\} \in \tau_X$ i $M \cap \big[\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T]\big] = \varnothing$. Ako je $w \in L$ onda je $S := (U_w \cup V_w) \cap [\{z\} \cup (U_z \cup V_z)]$ najviše jednočlan skup pa imamo $w \in M := \{w\} \cup [(U_w \cup V_w) \setminus S] \in \tau_X$ i $M \cap \big[\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T]\big] = \varnothing$. Ako je $w = p$ onda je $W_n \cap \big[\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T]\big] = \varnothing$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ takvo da je $n > z(1) + 2$.

Da pokažemo da je (Y, τ_Y) regularan prostor neka je $F \subseteq Y$ τ_Y-zatvoren skup i $z \in Y \setminus F$. Kako je $\mathcal{N}_z$ τ_Y-lokalna baza u tački z to je $z \in M \subseteq Y \setminus F$ za neko $M \in \mathcal{N}_z$. M je (kako smo to upravo dokazali) otvoreno-zatvoren u odnosu na τ_X pa je zbog $M \subseteq Y$ on otvoreno-zatvoren i u odnosu na τ_Y. Otuda je funkcija $f : Y \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(w) = 0$ ako $w \in Y \setminus M$ odnosno $f(w) = 1$ ako $w \in M$ $(\tau_Y, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidna i pritom je $f(z) = 1$ i $f^{\rightharpoonup}F \subseteq f^{\rightharpoonup}(Y \setminus M) \subseteq \{0\}$.

(2) Kako je $\mathcal{N}_z$ τ_Y-lokalna baza u tački z to za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji po konačan T_n tako da je $f^{\rightharpoonup}\big[(U_z \cup V_z) \setminus T_n\big] \subseteq \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$. $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ je prebrojiv podskup od $U_z \cup V_z$ i važi $f^{\rightharpoonup}\big[(U_z \cup V_z) \setminus S\big] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

(3) Ako je T proizvoljan konačan skup mora biti $\big[(U_z \cup V_z) \setminus T\big] \cap S \neq \varnothing$ jer bi u suprotnom (zbog $S \subseteq U_z \cup V_z$) sledilo da je S konačan. Kako je $\mathcal{N}_z$ τ_Y-lokalna baza u tački z ovo znači da je $z \in \mathrm{cl}_{\tau_Y}(S)$ pa je $f(z) \in \mathrm{cl}_{\mu_\mathbb{R}}\big(f^{\rightharpoonup} S\big) = \mathrm{cl}_{\mu_\mathbb{R}}\{0\} = \{0\}$.

(4) Neka je $B \subseteq B'$ prebrojiv i beskonačan. Za svako $z \in B$ neka je $S_z \subseteq V_z$ takav prebrojiv skup da važi $f(x) = 0$ za svako $x \in V_z \setminus S_z$.

Stavimo $I := \bigcup_{z\in B} \big\{x(1) : x \in S_z\big\}$ i $B'' := \big((r+1; r+2) \setminus I\big) \times \{0\}$. Kako je B prebrojiv to je i I prebrojiv pa je B'' beskonačan (i to neprebrojiv). Pokažimo da je $f(z) = 0$ za svako $z \in B''$.

Neka je $z_0 \in B''$ proizvoljno. Ako je $y \in B$ onda je $V_y \cap U_{z_0} = \{x_y\}$ za neko $x_y \in Y$. $z_0 \in B''$ povlači $x_y(1) = z_0(1) \neq v(1)$ za svako $v \in \bigcup_{z\in B} S_z$, pa je $x_y \notin \bigcup_{z\in B} S_z$. Specijalno $x_y \notin S_y$ (jer je $y \in B$) pa je $x_y \in V_y \setminus S_y$. Zato je $f(x_y) = 0$. Dakle $P := \{x_y : y \in B\} \subseteq U_{z_0} \subseteq U_{z_0} \cup V_{z_0}$ i važi $f(a) = 0$ za svako $a \in P$. Ako je $y_1, y_2 \in B$ tako da $y_1 \neq y_2$, onda jasno mora biti $x_{y_1} \neq x_{y_2}$. Obzirom da je B beskonačan ovo znači da je i P beskonačan. Sada iz **(3)** sledi da je $f(z_0) = 0$.

(5) Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i $z \in X \setminus W_n$. Jasno $z \in Y$. Ako $z \notin L$ onda je $z \in \{z\} \in \tau_X$ i $\{z\} \cap W_{n+2} = \varnothing$, jer $z \notin W_n \subseteq W_{n+2}$. Kako je $\big\{\{z\}\big\}$ τ_X-lokalna baza u tački z ovo znači da je $z \notin \mathrm{cl}_{\tau_X}(W_{n+2})$. Neka je sada $z \in L$. Iz $z \notin W_n$ sledi $z(1) < n$. Ako je $w \in U_z \cup V_z$ onda je $w(1) \leq z(1)+2 < n+2$ pa je $w \notin W_{n+2}$. Dakle $\big[\{z\} \cup [(U_z \cup V_z) \setminus T]\big] \cap W_{n+2} = \varnothing$ (zbog $z \notin W_n \subseteq W_{n+2}$)

za svaki konačan T. Kako je $\mathcal{N}_z$ τ_X-lokalna baza u tački z ovo znači da je opet $z \notin \mathrm{cl}_{\tau_X}(W_{n+2})$.

(6) Da pokažemo da je (X, τ_X) regularan prostor neka su $x \in X$ i $F \subseteq X$ τ_X-zatvoren skup takvi da $x \notin F$.

Ako je $x = p$ onda je (obzirom da je $\mathcal{N}_p$ τ_X-lokalna baza u tački p) za neko $n \in \mathbb{N}_0$ $W_n \cap F = \varnothing$. Prema delu **(5)** sada imamo $\mathrm{cl}_{\tau_X}(W_{n+2}) \cap F = \varnothing$, tj $x \in W_{n+2} \subseteq \mathrm{cl}_{\tau_X}(W_{n+2}) \subseteq X \setminus F$ i $W_{n+2} \in \tau_X$.

Neka je sada $x \neq p$ i neka je $M \in \mathcal{N}_x$ takvo da je $M \cap F = \varnothing$. Kako je jasno $x \in Y$ to je prema delu **(1)** M otvoreno-zatvoren u odnosu na na τ_X pa je $x \in M = \mathrm{cl}_{\tau_X}(M) \subseteq X \setminus F$ i $M \in \tau_X$.

Pokažimo sada da (X, τ_X) nije potpuno regularan. Imamo $F := (0;1) \times \{0\} \not\ni p$, a lako se proverava da je F τ_X-zatvoren. Neka je $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ takvo da je $f^{\rightharpoonup} F = \{0\}$. Koristeći tvrđenje pod **(4)** induktivnim rasuđivanjem zaključujemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji po beskonačan $B_n \subseteq (n; n+1) \times \{0\}$ takav da je $f^{\rightharpoonup} B_n = \{0\}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je $\varnothing \neq B_n \subseteq W_n \cap f^{\leftharpoonup}\{0\}$, pa kako je $\mathcal{N}_p$ τ_X-lokalna baza u tački p zaključujemo da je $p \in \mathrm{cl}_{\tau_X}\big(f^{\leftharpoonup}\{0\}\big) = f^{\leftharpoonup}\{0\}$ (jer je f $(\tau_X, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno), tj. $f(p) = 0$. Ovim smo dokazali da ne postoji $h : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ takvo da je $h^{\rightharpoonup} F = \{0\}$ i $h(p) = 1$.

Da se uverimo da (Y, τ_Y) nije normalan prostor primetimo da su $F_1 := (0;1) \times \{0\}$ i $F_2 := f(1;2) \times \{0\}$ τ_Y-zatvoreni (čak τ_X-zatvoreni) međusobno disjunktni podskupovi od Y takvi da ako je $f : (Y, \tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ takvo da je $f^{\rightharpoonup} F_1 = \{0\}$, onda je $f(x) = 0$ za beskonačno mnogo tačaka $x \in F_2$ (prema delu **(4)**) te svakako ne može važiti $f^{\rightharpoonup} F_2 = \{1\}$. $\square$

126. Za $n = 1$ stvar je očigledna, a za $n = 2$ tvrđenje je preformulacija same definicije normalnosti prostora. Neka je $n \geq 2$ takav prirodan broj da tvrđenje važi za svaki normalan prostor X i svaki otvoren pokrivač $\{U_1, \ldots, U_n\}$ prostora X. Za dat otvoren pokrivač $\{V_1, \ldots, V_{n+1}\}$ normalnog prostora

Y stavimo $W := \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Iz $Y = W \cup V_{n+1}$ kako smo to već konstatovali sledi da postoje zatvoreni $F \subseteq W$ i $G \subseteq V_{n+1}$ takvi da je $F \cup G = Y$. Kako je Y normalan, a F zatvoren to je i podprostor $(F, \mathrm{rel}_F(\tau_Y))$ normalan. Imamo $\{V_1 \cap F, \ldots, V_n \cap F\} \subseteq \mathrm{rel}_F(\tau_Y)$ kao i $\bigcup_{i=1}^{n}(V_i \cap F) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cap F = W \cap F = F$. Otuda na osnovu indukcijske hipoteze postoje $\mathrm{rel}_F(\tau_Y)$-zatvoreni $F_i \subseteq F \cap V_i$, $1 \leq i \leq n$, tako da je $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Skup F je τ_Y-zatvoren, a skupovi F_i su $\mathrm{rel}_F(\tau_Y)$-zatvoreni. Zato su F_i i τ_Y-zatvoreni. Ako stavimo $F_{n+1} := G$ imamo $Y = F \cup F_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \cup F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$. Dakle $F_1, \ldots, F_{n+1}$ su traženi.

Napomena 5. Gore je indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazana tačnost tvđenja $T(n)$:"*za svaki normalan prostor* X i *proizvoljan otvoren pokrivač* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *prostora* X *postoje zatvoreni* $F_i \subseteq U_i$, $1 \leq i \leq n$, takvi da je $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$".

Umesto toga možemo fiksirati normalan prostor X i indukcijom dokazati tačnost tvđenja $S(X, n)$:"*za proizvoljan otvoren pokrivač* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *prostora* X *postoje zatvoreni* $F_i \subseteq U_i$, $1 \leq i \leq n$, *takvi da je* $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$". Slučajevi $n = 1$ i $n = 2$ slede kao i prethodno, a da izvedemo indukcijski korak pretpostavimo da je tvrđenje $S(X, n)$ tačno za neko $n \geq 2$ i pretpostavimo da je dat otvoren pokrivač $U_1, \ldots, U_{n+1}$ prostora X.

Na otvoren pokrivač$\{U'_1 \ldots, U'_{n-1}, U'_n\}$ prostora X, gde je $U'_i = U_i$ za $1 \leq i \leq n-1$ i $U'_n = U_n \cup U_{n+1}$, primenimo indukcijsku hipotezu kako bi dobili zatvorene $F'_i \subseteq U'_i$, $1 \leq i \leq n$, tako da je $X = \bigcup_{i=1}^{n} F'_i$. Kako je skup $M := F'_n \cap (U_n)^c$ je zatvoren i $M \subseteq U_{n+1}$ (jer $M \subseteq F'_n \subseteq U'_n = U_n \cup U_{n+1}$ i $M \cap U_n = \varnothing$) to, obzirom da je X normalan, postoji otvoren V tako da je $M \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U_{n+1}$. Stavimo $F_i := F_i' \subseteq U_i' = U_i$ za $1 \leq i \leq n-1$, $F_{n+1} := \overline{V}$ i $F_n := F_n' \cap V^c$. Jasno ovako definisani skupovi F_i su zatvoreni. Imamo $M \subseteq V$ i $F_n \subseteq V^c$ pa je $M \cap F_n = \varnothing$. Zato iz $F_n \subseteq F_n' \subseteq (F_n' \cap U_n) \cup (F_n' \cap (U_n)^c) \subseteq U_n \cup M$ sledi $F_n \subseteq U_n$. Takođe je $F_{n+1} \subseteq \overline{V} \subseteq U_{n+1}$. Najzad $X = \overline{V} \cup V^c$ povlači $F_n' = (F_n' \cap \overline{V}) \cup (F_n' \cap V^c) = F_{n+1} \cup F_n$ pa je

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i' = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i' \right) \cup F_n' = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \right) \cup F_n \cup F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i. \qquad \square$$

127. Označimo $C := \{(x, -x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} \subseteq X$, $C_1 := C \cap \mathbb{Q}^2$, $C_2 := C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$. Lako je videti da je C τ-zatvoren diskretan podprostor od (X, τ) (tj. da $\mathrm{rel}_C(\tau) = \mathbb{P}(C)$) kao i da je $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Za $i \in \{1, 2\}$ imamo da je C_i $\mathrm{rel}_C(\tau)$-zatvoren skup, pa kako je C τ-zatvoren to mora biti i C_i τ-zatvoren. Pokažimo da ako su $U_1, U_2 \in \tau$ tako da $C_i \subseteq U_i$ $(i = \overline{1,2})$, onda mora biti $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, što bi značilo da (X, τ) nije normalan prostor. Neka su suprotno pretpostavci $U_1, U_2 \in \tau$ tako da je $C_i \subseteq U_i$ $(i = \overline{1,2})$ i tako da je $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Za svako $x \in \mathbb{R}$ neka je $\varepsilon_x > 0$ takav realan broj da važi $(x, -x) \in I_x \subseteq U_i$, gde je $I_x := [x; x + \varepsilon_x)^2$ i $i = 1$ ako $x \in \mathbb{Q}$, odnosno $i = 2$ ako $x \notin \mathbb{Q}$.

Kako je $I_x \cap I_y = \varnothing$ kad god je $x \in \mathbb{Q}$ i $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to mora da važi $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} \varepsilon_y = 0$ za svako $x \in \mathbb{Q}$. $(\mathbb{R}, \mu_{\mathbb{R}})$ je `Baire`-ov prostor (videti zadatak 47.) pa je (zbog $\varnothing \neq \mathbb{R} \in \mu_{\mathbb{R}}$) skup $\mathbb{R}$ II kategorije u odnosu na $\mu_{\mathbb{R}}$ (videti zadatak 46.). Kad bi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bio I kategorije u odnosu na $\mu_{\mathbb{R}}$, onda bi, obzirom da je $\mathbb{Q}$ I kategorije, i $\mathbb{R}$ bio I kategorije, a to kao što smo videli nije tako. Zato je skup $E := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ II kategorije. Uzimajući $S := \mathbb{Q}$ vidimo da E i S zadovoljavaju uslove zadatka 58., gde je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $f(x) = \varepsilon_x$ za $x \in \mathbb{R}$. Otuda skup $E_0 := \{x \in E \ : \ f(x) = 0\}$ mora biti II kategorije. Specijalno $E_0 \neq \varnothing$ pa je $\varepsilon_x = 0$ za neko $x \in \mathbb{R}$ (preciznije za neko $x \in E$, ali to je za ovaj argument potpuno nebitno), što je nemoguće.

Napomena 6. U gornjoj analizi nije nužno pribegavati toliko opštem tvrđenju kao što je ono iz zadatka 58. Naime dovoljno je, bez korišćenja pojma *kategorija*, dokazati da:

ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *takva funkcija da važi* $\forall q\in\mathbb{Q}\ \left(\lim\limits_{\substack{x\to q\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x)=0\right)\ \ldots(*)$, *onda postoji* $y\in\mathbb{R}$, *preciznije* $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *tako da je* $f(y)=0$.

Primetimo da ako je $f:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$, onda na osnovu ove činjenice ne može važiti $(*)$ te se rešenje zadatka 127. završava konstatacijom da "*ako* $U_1\cap U_2=\varnothing$ *onda je za svako* $x\in\mathbb{Q}$ $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}\varepsilon_y=0$".

A gore navedena implikacija se inače lako dokazuje ako se primeti da, pod datom pretpostavkom, mora da važi:
ako su $\theta,a,b,x\in\mathbb{R}$ *tako da je* $a<b$ *i* $\theta>0$, *onda postoje* $a',b'\in\mathbb{R}$ *takvi da je* $a<a'<b'<b$, $x\notin[a';b']$ *i tako da za svaki iracionalan broj* $r\in[a';b']$ *važi* $|f(r)|<\theta$.

Zaista uočimo proizvoljan racionalan broj $q\in(a;b)$ i $\delta>0$ tako da je $J:=(q-\delta;q)\subseteq(a,b)$ i $|f(r)|<\theta$ za svako $r\in J\setminus\mathbb{Q}$ (ovakvo δ postoji na osnovu $(*)$). Sada a' i b' mogu da budu proizvoljni brojevi iz J tako da je $a'<b'$ i $x\notin[a';b']$.

Nakon ovog zapažanja jasno je da se rekurzivno mogu konstruisati realni brojevi $a_n<b_n$ za $n\in\mathbb{N}$ tako da za svako $n\in\mathbb{N}$ važi:
– $[a_{n+1};b_{n+1}]\subseteq[a_n;b_n]$;
– za svako $r\in[a_n;b_n]\setminus\mathbb{Q}$ važi $|f(r)|<\dfrac{1}{n}$;
– $q_n\notin[a_n;b_n]$.

Ako je $y\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n;b_n]$ proizvoljno, onda je $y\in[a_n;b_n]\not\ni q_n$ za svako n, te je y iracionalan broj; takođe mora biti $|f(y)|<\dfrac{1}{n}$ za svako n, odnosno $f(y)=0$.

Napomena 7. Moguće je dokazati da inače *ako separabilan prostorX sadrži zatvoren diskretan podprostor moći kontinuum onda* X *ne može biti normalan*, iz čega direktno sledi tvrđenje zadatka 127.

Da pokažemo ovo označimo kardinalnosti skupova $\mathbb{R}$ i $\mathbb{N}$ sa $\mathfrak{c}$ i $\aleph_0$, kao što je to i uobičajeno. Neka je $D \subseteq X$ zatvoren diskretan podprostor od X tako da je $\mathrm{card}(D) = \mathfrak{c}$, gde ćemo sa $\mathrm{card}(A)$ privremeno označavati kardinalnost skupa A, i neka je $S \subseteq X$ prebrojiv gust podskup od X. Još jedna privremena konvencija: za dva prostora Y i Z sa $\mathsf{C}(Y, Z)$ ćemo označavati skup svih (τ_Y, τ_Z)-neprekidnih preslikavanja iz Y u Z.

Neka je suprotno tvrđenju prostor X normalan. Neka je, za svako $f \in \mathsf{C}(X, \mathbb{R})$, $R(f) := f \restriction S$. Kako je $\mathbb{R}$ `Hausdorff`-ov prostor, a S gust u X to je $R : \mathsf{C}(X, \mathbb{R}) \to {}^S\mathbb{R}$ injektivno preslikavanje. Zato je $\mathrm{card}\,(\mathsf{C}(X, \mathbb{R})) \leq \mathrm{card}({}^S\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})^{\mathrm{card}(S)} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Dakle $\mathrm{card}\,(\mathsf{C}(X, \mathbb{R})) \leq \mathfrak{c}\ \ldots (**)$. Kako je D zatvoren podprostor normalnog prostora X to za svako $g \in \mathsf{C}(D, \mathbb{R})$ postoji neko $E(g) \in \mathbb{C}(X, \mathbb{R})$ tako da je $E(g) \restriction D = g$. Iz same definicije sledi da je $E : \mathbb{C}(D, \mathbb{R}) \to (X, \mathbb{R})$ injektivno preslikavanje. Zato je $\mathrm{card}\,(\mathsf{C}(D, \mathbb{R})) \leq \mathrm{card}\,(C(X, \mathbb{R}))$. Ali kako je D diskretan to je $\mathsf{C}(D, \mathbb{R}) = {}^D\mathbb{R}$ te imamo da je $\mathrm{card}\,(\mathsf{C}(X, \mathbb{R})) \geq \mathrm{card}\left({}^D\mathbb{R}\right) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. Dakle, koristeći $(**)$, sledi $2^{\mathfrak{c}} \leq \mathrm{card}\,(\mathsf{C}(X, \mathbb{R})) \leq \mathfrak{c}$, a ovo je nemoguće. $\square$

128. Neka je $x \in X$ i $x \notin F$ gde je $F \subseteq X$ zatvoren skup. Na osnovu pretpostavke zadatka postoji neki otvoreno-zatvoren $U \ni x$ tako da je $U \subseteq F$. Funkcija $f : X \to [0; 1]$ definisana sa $f(y) = 0$ ako $y \in U$ odnosno $f(y) = 1$ ako $y \in X \setminus U$, je neprekidna (jer je U otvoreno-zatvoren). Takođe imamo $f(x) = 0$ (jer $x \in U$) i $f^{\rightharpoonup}F \subseteq f^{\rightharpoonup}(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. $\square$

129. Neka je $x \in U$ gde je $U \subseteq X$ otvoren. Po pretpostavci postoji neki prebrojiv otvoren $U' \ni x$ tako da je $U' \subseteq U$. Obzirom da je X potpuno regularan prostor to postoji neko $f : X \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ tako da je $f(x) = 0$ i $f^{\rightharpoonup}(X \setminus U') \subseteq \{1\}$. Kako je U' prebrojiv i kako $f^{\rightharpoonup}X = f^{\rightharpoonup}U' \cup f'(X \setminus U') \subseteq f^{\rightharpoonup}U' \cup \{1\}$ to je i $f^{\rightharpoonup}X$ prebrojiv. Uočimo $r \in [0; 1] \setminus f^{\rightharpoonup}X$ i stavimo $V := f^{\leftharpoonup}[0; r)$. Kako je $[0; r) \in \mu_{[0;1]}$, a f neprekidna funkcija to je V otvoren podskup od X. Iz $f^{\leftharpoonup}[0; r] = f^{\leftharpoonup}[0; r) \cup f^{\leftharpoonup}\{r\} = f^{\leftharpoonup}[0; r) = V$ (jer $r \notin f^{\rightharpoonup}X$) sledi da je V i zatvoren. Ako je $y \in V$ onda je $f(y) < r \leq 1$, a ako $y \in X \setminus U'$ onda je $f(y) = 1$. Otuda $V \cap (X \setminus U') = \varnothing$ tj. $V \subseteq U'$.

Najzad kako je $f(x)=0$ to je $x\in V$. Dakle pronašli smo otvoreno-zatvoren skup $V\subseteq X$ tako da je $x\in V\subseteq U$. $\square$

130. Neka su (X,τ) i $\mathcal{B}$ iz **P 8**. Na osnovu zadatka 13. $\mathcal{B}$ je baza za τ pa je zato na osnovu zadatka 30. pod (1) (X,τ) nuldimenzionalan. Otuda je (X,τ) potpuno regularan prostor (videti zadatak 128.).

Ako su $n,m\in\mathbb{Z}$ tako da je $n\neq m$, onda je $n\in n+(|m-n|+1)\,\mathbb{Z}=: U\in\tau$, $m\in m+(|m-n|+1)\,\mathbb{Z}=: V\in\tau$ i $U\cap V=\varnothing$. Ovo znači da je τ T_2 topologija. Dakle (X,τ) je `Tychonof`-ski prostor. Baza $\mathcal{B}$ je očigledno prebrojiva pa je (X,τ) homeomorfan nekom podprostoru $\mathbb{N}$-stepena metrizabilnog prostora $[0;1]$. Prebrojiv stepen metrizabilnog prostora je i sam metrizabilan; podprostor metrizabilnog prostora je i sam metrizabilan. Zato je (X,τ) metrizabilan. Drugi način da vidimo da je reč o metrizabilnom prostoru jeste da iskoristimo sledeću poznatu karakterizaciju metrizabilnosti prostora: (Y,τ_Y) je metrizabilan prostor ako i samo ako je on T_3 prostor za koji postoji neka τ_Y-baza oblika $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ gde je za svako $n\in\mathbb{N}$ familija $\mathcal{A}_n$ τ_Y-lokalno konačna. $\square$

131. Neka važi dati uslov i neka je $\mathcal{U}\subseteq\tau_X$ otvoren pokrivač za X. Stavimo $\mathcal{A}:=\{U\in\mathcal{B}\ :\text{postoji } V\in\mathcal{U} \text{ tako da je } U\subseteq V\}$. Tvrdimo da je $\bigcup\mathcal{A}=X$. Zaista, neka je $x\in X$. Kako je $\mathcal{U}$ pokrivač to postoji neko $V\in\mathcal{U}$ tako da je $x\in V$. Skup V je otvoren, a familija $\mathcal{B}$ je baza pa postoji neko $U\in\mathcal{B}$ tako da je $x\in U\subseteq V$. Otuda je $U\in\mathcal{A}$ i $x\in U$. Dakle $\bigcup\mathcal{A}=X$. Po pretpostavci postoji neka prebrojiva familija $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$ tako da je $\bigcup\mathcal{A}'=X$. Iz $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$ sledi da za svaki $U\in\mathcal{A}'$ možemo izabrati po neki $V_U\in\mathcal{U}$ tako da je $V_U\subseteq U$. Familija $\mathcal{U}_0:=\{V_U\ :\ U\in\mathcal{A}'\}\subseteq\mathcal{U}$ je prebrojiva jer je familija $\mathcal{A}'$ takva. Pokažimo da je ona i pokrivač. Za $x\in X$ postoji neko $U\in\mathcal{A}'$ tako da je $x\in U$ jer je $\mathcal{A}'$ pokrivač. Imamo $x\in U\subseteq V_U\in\mathcal{U}_0$. $\square$

132. (1)$\Rightarrow$(2): Jasno.

(2)$\Rightarrow$(1): Neka su $Y\subseteq X$ i $\mathcal{U}\subseteq\tau_Y:=\mathrm{rel}_Y(\tau_X)$ tako da je $\bigcup\mathcal{U}=Y$ proizvoljni. Za svako $U\in\mathcal{U}$ postoji po $f(U)\in\tau_X$ tako da je $U=Y\cap f(U)$. Skup $Y_0:=\bigcup\mathcal{V}$, gde je $\mathcal{V}:=\{f(U)\ :\ U\in\mathcal{U}\}$, je τ_X-otvoren, a $\mathcal{V}\subseteq$

$\mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_X)$ je pokrivač skupa Y_0. Na osnovu (2) podprostor $(Y_0, \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_X))$ je `Lindelöf`-ov, pa zato postoji prebrojiv $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ tako da je $Y_0 = \bigcup \mathcal{V}_0$. Stavimo $\mathcal{U}_0 := \{W \cap Y \ : \ W \in \mathcal{V}_0\}$. $\mathcal{U}_0$ je prebrojiv jer je $\mathcal{V}_0$ prebrojiv. Pokažimo da je $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$. Neka je $V \in \mathcal{U}_0$. Imamo da je $V = W \cap Y$ za neko $W \in \mathcal{V}_0$. Kako je $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ to je $W = f(U)$ za neko $U \in \mathcal{U}$. Zato je $V = Y \cap W = Y \cap f(U) = U \in \mathcal{U}$. Dakle $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$. Takođe je $\bigcup \mathcal{U}_0 = \bigcup \{Y \cap W \ : \ W \in \mathcal{V}_0\} = Y \cap \bigcup \mathcal{V}_0 = Y \cap Y_0 = Y$ jer je $Y = \bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \{f(U) \ : \ U \in \mathcal{U}\} = \bigcup \mathcal{V} = Y_0$, obzirom da je jasno $U \subseteq f(U)$ za svako $U \in \mathcal{U}$.

(2)⇒(3): Neka je dat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Skup $Y := \bigcup \mathcal{A}$ je otvoren pa je (Y, τ_Y), gde je $\tau_Y := \mathrm{rel}_Y(\tau_X)$, po pretpostavci `Lindelöf`-ov. Kako je $\mathcal{A} \subseteq \tau_Y$ (jer je čak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau_X$) i $\bigcup \mathcal{A} = Y$ to postoji neki prebrojiv $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ pokrivač skupa Y. Drugim rečima $\bigcup \mathcal{A}' = Y = \bigcup \mathcal{A}$.

(3)⇒(2): Neka je $Y \subseteq X$ proizvoljan τ_X-otvoren skup. Dokazaćemo da je prostor $(Y, \mathrm{rel}_Y(\tau_X))$ `Lindelöf`-ov koristeći se zadatkom 131. Kako je $U \in \tau_X$ to je $\mathcal{B}_0 := \{U \in \mathcal{B} \ : \ U \subseteq Y\} \subseteq \mathcal{B}$ baza prostora $(Y, \mathrm{rel}_Y(\tau_X))$. Neka je $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_0$ proizvoljan tako da je $\bigcup \mathcal{A}_0 = Y$. Pošto je $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}$ to na osnovu **(3)** imamo da postoji neki prebrojiv $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$ tako da je $\bigcup \mathcal{A}_1 = \bigcup \mathcal{A}_0$. Dakle $\mathcal{A}_1$ je prebrojiv, i važi $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$ i $\bigcup \mathcal{A}_1 = \bigcup \mathcal{A}_0 = Y$. Na osnovu zadatka 131. je $(Y, \mathrm{rel}_Y(\tau_X))$ `Lindelöf`-ov. □

133. Neka su $F, G \subseteq X$ zatvoreni disjunktni skupovi. Kako je X regularan to za svako $x \in F$ (tj. svako $y \in G$) postoji otvoren $U_x \ni x$ (tj. otvoren $V_y \ni y$) tako da je $\overline{U_x} \cap G = \varnothing$ (tj. $\overline{V_y} \cap F = \varnothing$). X je `Lindelöf`-ov pa je i njegov **zatvoren** podprostor F (tj. podprostor G) `Lindelöf`-ov. Obzirom da je $\{U_x \cap F \ : \ x \in F\}$ (tj. $\{V_y \cap G \ : \ y \in G\}$) $\mathrm{rel}_F(\tau_X)$-otvoren (tj. $\mathrm{rel}_G(\tau_X)$-otvoren) pokrivač `Lindelöf`-ovog podprostora F (tj. podprostora G) to postoji neki niz $(x_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ (tj. neki niz $(y_n \ : \ n \in \mathbb{N})$) tačaka skupa F (tj. skupa G) tako da važi $F \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_{x_n}$ (tj. $G \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} V_{y_n}$). Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $A_n := U_{x_n} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}} \right)$, $B_n := V_{y_n} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \right)$ i definišimo (očigledno) otvorene skupove $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Pokažimo da je $F \subseteq A$. Neka je $x \in F$ proizvoljno. Kako je $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n}$ to postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in U_{x_n}$. S druge strane imamo po konstrukciji da je $F \cap \overline{V_{y_i}} = \varnothing$ za $1 \le i \le n$. Dakle $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}}$ te je $x \in A$. Analogno se dokazuje da mora biti $G \subseteq B$.

Pokažimo još da je $A \cap B = \varnothing$. Ovo će direktno slediti ako pokažemo da važi $A_n \cap B_m = \varnothing$ za svako $n, m \in \mathbb{N}$. Za $m \le n$ imamo $A_n \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}}\right)^c \subseteq \left(\overline{V_{y_m}}\right)^c \subseteq (V_{y_m})^c$ i $B_m \subseteq V_{y_m}$ te mora biti $A_n \cap B_m = \varnothing$. Analogno je $B_m \cap A_n = \varnothing$ za $n \le m$. Sledi željeno tvrđenje. $\square$

134. Stavimo $\mathcal{V} := \left\{V \in \tau_X \ : \ \exists U \in \mathcal{U} \left(\overline{V} \subseteq U\right)\right\}$. Pokažimo da je $\mathcal{V}$ (otvoren) pokrivač. Neka je dato $x \in X$. Postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $x \in U$. X je regularan pa postoji neki otvoren $V \ni x$ tako da je $\overline{V} \subseteq U$. Jasno $x \in V \in \mathcal{V}$.

Kako je X `Lindelöf`-ov to postoji niz $(V_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ elemenata pokrivača $\mathcal{V}$ tako da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \ \ldots \ (*)$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ po konstrukciji možemo izabrati po neko $U_n \in \mathcal{U}$ tako da je $\overline{V_n} \subseteq U_n$. Definišimo $A_1 := U_1$ i $A_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{V_i}$ za $n \ge 2$.

Pokažimo da je $\mathcal{A} := \{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ lokalno konačna familija. Neka je dato $x \in X$. Zbog $(*)$ mora biti $x \in V_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Neka je $m > n$ proizvoljan prirodan broj. Iz $A_m \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \overline{V_i}\right)^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} V_i\right)^c \subseteq (V_n)^c$ sledi $V_n \cap A_m = \varnothing$. Dakle $x \in V_n \in \tau_X$ i za svako $B \in \mathcal{A} \setminus \{A_1, \ldots, A_n\}$ važi $V_n \cap B = \varnothing$. Kako je tačka $x \in X$ u prethodnom razmatranju bila proizvoljna ovo upravo znači da je $(A_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ lokalno konačna indeksirana familija.

Pokažimo da je $\mathcal{A}$ pokrivač. Neka $x \in X$. Skup $S := \{n \in \mathbb{N} \ : \ x \in U_n\}$

je neprazan. Neka je $n_0 := \min S$. Ako je $n_0 = 1$ onda je $x \in U_1 = A_1 \in \mathcal{A}$. Ako je $n_0 > 1$ onda je $A_{n_0} = U_{n_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0-1} \overline{V_i}$, $x \in U_{n_0}$ i $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n_0-1} U_i\right)^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n_0-1} \overline{V_i}\right)^c$ (jer $\overline{V_m} \subseteq U_m$ za svako $m \in \mathbb{N}$) te mora biti $x \in A_{n_0} \in \mathcal{A}$. Jasno $\mathcal{A} \subseteq \tau_X$. Obzirom da još važi i $A_m \subseteq U_m \in \mathcal{U}$ to je tvrđenje zadatka dokazano. □

135. Koristićemo se zadatkom 132. Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ (gde je $\mathcal{B}$ naravno baza definisana u **P 11**) proizvoljna neprazna familija i $S := \bigcup \mathcal{A}$. Definišimo $U := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{int}_{\mu_{\mathbb{R}}}(A) \in \mu_{\mathbb{R}}$. Kako je $\mu_{\mathbb{R}}$ II probrojiva topologija to je i $\mu_U = \mathrm{rel}_U(\mu_{\mathbb{R}})$ II prebrojiva topologija pa je (U, μ_U) `Lindelöf`-ov prostor. Zato, obzirom da je $\{\mathrm{int}_{\mu_{\mathbb{R}}}(A) \ : \ A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mu_U$ pokrivač skupa U, postoji prebrojiv $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ tako da je $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} \mathrm{int}_{\mu_{\mathbb{R}}}(A)$.

Za svako $x \in S \setminus U$ izaberimo po neko $I_x \in \mathcal{A}$ tako da je $x \in I_x$. Neka su $x, y \in \mathcal{A}$ tako da je $x < y$. Imamo $I_x = [a; b)$ i $I_y = [c; d)$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tako da je $a < b$ i $c < d$. Iz $y \notin U \supseteq \mathrm{int}_{\mu_{\mathbb{R}}}(I_y) = (c; d)$ i $y \in I_y$ sledi $y = c$. Zato kad bi postojalo neko $s \in I_x \cap I_y$ dobili bi da $a \leq x < y = c \leq s < b$. tj. $y \in (a; b) = \mathrm{int}_{\mu_{\mathbb{R}}}(I_x) \subseteq U$, što je nemoguće. Dakle za svako $x, y \in S \setminus U$ važi $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \varnothing$. Otuda je skup $S \setminus U$ prebrojiv podskup od $S = \bigcup \mathcal{A}$. Zato postoji neka prebrojiva familija $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}$ takoda je $S \setminus U \subseteq \bigcup \mathcal{A}''$

Stavimo $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$. Jasno $\mathcal{A}_0$ je prebrojiva podfamilija od $\mathcal{A}$. Takođe je $S \subseteq U \cup (S \setminus U) \subseteq \bigcup \mathcal{A}' \cup \bigcup \mathcal{A}'' = \bigcup \mathcal{A}_0 \subseteq \bigcup \mathcal{A} = S$, tj. $\bigcup \mathcal{A}_0 = \bigcup \mathcal{A}$. □

136. Lako je videti da je `Sorgenfrey`-eva prava (X, τ) nuldimenzionalan prostor $\big($za $x < y$ imamo $\{[x; y), \mathbb{R} \setminus [x; y)\} \subseteq \tau\big)$. Otuda je na osnovu zadatka 128. ona potpuno regularan prostor. Na osnovu zadatka 135. ona je i `Lindelöf`-ov prostor. Zato je prema zadatku 133. ona normalan prostor. S druge strane to da $(X^2, \tau \times' \tau)$ nije normalan prostor ustanovljeno je zadatkom 127. □

137. Znamo da je `Sorgenfrey`-eva prava $(\mathbb{R}, \tau)$ `Lindelöf`-ov, I prebrojiv prostor koji nije II prebrojiv (videti zadatke 17. i 135.) i $\mathbb{Q}$ je očigledno τ-gust.

Neka je suprotno onom što treba dokazati $\prec$ strogo linearno uređenje na skupu $\mathbb{R}$ tako da je $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$. Neka je $\mathcal{F} := \big\{\{x, y\} \subseteq \mathbb{R} \ : \ x \prec y \text{ i } (x; y)_\prec = \varnothing\big\}$. Za $A \in \mathcal{F}$ neka su $l_A \in \mathbb{R}$ i $r_A \in \mathbb{R}$ definisani sa $A = \{l_A, r_A\}$ i $l_A \prec r_A$.

Kako τ nema izolovanih tačaka to za svako $u \in \mathbb{R}$ mora biti $A_1 \neq A_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$ za svako $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Pokažimo da je $\mathcal{F}$ prebrojiv, što je na osnovu prethodnog zapažanja ekvivalentno tome da je $\{r_A \ : \ A \in \mathcal{F}\}$ prebrojiv.

Pretpostavimo da to nije tačno. Neka su $W_n \in \tau \times' \tau$, za $n \in \mathbb{N}$, takvi da je $F := \{(x, x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ $\big($kako je F $\mu_{\mathbb{R}^2}$-zatvoren, a $\mu_{\mathbb{R}^2}$ metrizabilna topologija to F mora biti G_δ skup te topologije, tj. $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ za neke $W_n \in \mu_{\mathbb{R}^2} = \mu_\mathbb{R} \times' \mu_\mathbb{R} \subseteq \tau \times' \tau\big)$. Za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ možemo uočiti po neki $U_n(x) \in \tau$ takav da je $\forall u, v \in U_{n_0}(x)$ $\big((u; v)_\prec \subseteq U_{n_0}(x)\big)$ i tako da važi $(x, x) \in U_n(x) \times U_n(x) \subseteq W_n$. Neka je $\mathcal{U}_n := \{U_n(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Svaki $\mathcal{U}_n$ je τ-otvoren pokrivač skupa $\mathbb{R}$ pa postoji po prebrojiv $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ tako da je $\bigcup \mathcal{V}_n = \mathbb{R}$. Stavimo $R := \{a \in \mathbb{R} \ : \ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists V \in \mathcal{V}_n$ (a je $\prec$-najmanji element skupa V) $\}$. Kako je R prebrojiv, a za $\{r_A \ : \ A \in \mathcal{F}\}$ smo pretpostavili da nije takav, to postoji neko $A \in \mathcal{F}$ tako da $r_A \notin R$. Imamo $(l_A, r_A) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ pa je $(l_A, r_A) \notin W_{n_0}$ za neko $n_0 \in \mathbb{N}$. Kako je $\bigcup \mathcal{V}_{n_0} = X$ to je $r_A \in U_{n_0}(x)$ za neko $x \in \mathbb{R}$. Iz $l_A \in U_{n_0}(x)$ bi sledilo $(l_A, r_A) \in U_{n_0}(x) \times U_{n_0}(x) \subseteq W_{n_0}$, što je nemoguće. Dakle mora biti $l_A \notin U_{n_0}(x)$. Na osnovu izbora skupa $U_{n_0}(x)$ sada specijalno sledi da ne postoji nikakvo $u \in U_{n_0}(x)$ takvo da je $u \prec l_A$ jer bi zbog $r_A \in U_{n_0}(x)$ to povlačilo da je $l_A \in (u; r_A)_\prec \subseteq U_{n_0}(x)$. Drugim rečima $r_A \in U_{n_0}(x) \subseteq (l_A; \rightarrow)_\prec = [r_A; \rightarrow)_\prec$ pa je r_A $\prec$-najmanji element skupa $U_{n_0}(x)$, što znači da je $r_A \in R$, suprotno izboru broja r_A.

Dakle dokazali smo da $\mathcal{F}$ mora biti prebrojiv. Za svako $z \in \bigcup_{A\in\mathcal{F}} \{l_A, r_A\}$

fiksirajmo po prebrojivu lokalnu bazu $\mathcal{L}_z$ topologije τ u tački z. Sa

$$\mathcal{P} := \bigcup\Big\{\big\{(q_1;q_2)_\prec, (\leftarrow;q_2)_\prec, (q_1;\rightarrow)_\prec\big\} : \ q_1,q_2\in\mathbb{Q}\Big\} \cup \bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{L}_{l_A} \cup \bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{L}_{r_A}$$

je definisana jedna prebrojiva familija τ-otvorenih skupova. Pokažimo da je $\mathcal{P}$ baza topologije τ, što će protivurečiti činjenici da τ nije II prebrojiva topologija. Neka su $x\in\mathbb{R}$ i $V\in\tau$ takvi da je $x\in V$.
Slučaj 1. $x\in\{l_A,r_A\}$ za neko $A\in\mathcal{F}$: u ovom slučaju je $x\in G\subseteq V$ za neko $V\in\mathcal{L}_z\subseteq\mathcal{P}$.
Slučaj 2. $x\notin\{l_A,r_A\}$ za svako $A\in\mathcal{F}$: u ovom slučaju za svako $u\in\mathbb{R}$ važi $u\prec x\Rightarrow(u;x)_\prec\neq\varnothing$ i $x\prec u\Rightarrow(x;u)_\prec\neq\varnothing$. Ako je $x\in(\leftarrow;b)_\prec\subseteq V$ za neko $b\in\mathbb{R}$, onda zbog $\tau\ni(x;b)_\prec\neq\varnothing$ i činjenice da je $\mathbb{Q}$ τ gust, postoji neko $q\in(x;b)_\prec$, i tada je $x\in(\leftarrow;q)_\prec\subseteq(\leftarrow;b)_\prec\subseteq V$ i $(\leftarrow;q)_\prec\in\mathcal{P}$. Ako je $x\in(a;\rightarrow)_\prec\subseteq V$ za neko $a\in\mathbb{R}$, onda zbog $\tau\ni(a;x)_\prec\neq\varnothing$ postoji neko $q\in(a;x)_\prec$, i tada je $x\in(q;\rightarrow)_\prec\subseteq(a;\rightarrow)_\prec\subseteq V$ i $(q;\rightarrow)_\prec\in\mathcal{P}$. Ako je $x\in(a;b)_\prec\subseteq V$ za neke $a,b\in\mathbb{R}$, onda zbog $\tau\supseteq\big\{(a;x)_\prec,(x;b)_\prec\big\}\not\ni\varnothing$ postoje neki $q_1\in(a;x)_\prec$ i $q_2\in(x;b)_\prec$, i tada je $x\in(q_1;q_2)_\prec\subseteq(a;b)_\prec\subseteq V$ i $(q_1;q_2)_\prec\in\mathcal{P}$. $\square$

138. Ovo je praktično direktna posledica sledeće jednostavne činjenice:

Tvrđenje *Ako su $a,b\in\mathbb{R}$ tako da je $a<b$ i $S\subseteq(a;b)$ neprebrojiv, onda postoji $c\in(a;b)$ tako da je i $S\cap(a;c)$ i $S\cap(c;b)$ neprebrojiv.*

Da ovo pokažemo pretpostavimo da za neke $a,b\in\mathbb{R}$ tako da je $a<b$ i neki neprebrojiv $S\subseteq(a;b)$ ovo nije tačno. Ako je $a<u<v<b$ tako da je $v-u=2^{-n}$ i tako da je $S\cap[u;v]$ neprebrojiv, onda je za tačno jedan od segmenata $\big[u;(u+v)/2\big]$ i $\big[(u+v)/2;v\big]$ njegov presek sa S neprebrojiv $\big($jer bi u suprotnom i $S\cap\big(a;(u+v)/2\big)$ i $S\cap\big((u+v)/2;b\big)$ bili neprebrojivi, što protivureči našoj pretpostavci$\big)$; ako sa J označimo upravo taj segment, onda imamo da je J dužine 2^{-n-1}, da je $\big([u;v]\setminus J\big)\cap S$ prebrojiv, a $J\cap S$ neprebrojiv. Koristeći ovo jednostavno je da se rekurzivno konstruiše niz zatvorenih segmenata $(I_n\ :\ n\in\mathbb{N}_0)$ tako da za svako $n\in\mathbb{N}_0$ važi
- $I_n\subseteq[a;b]=I_0$ i $I_{n+1}\subseteq I_n$;
- dužina od I_n je 2^{-n};
- $S\cap(I_n\setminus I_{n+1})$ je prebrojiv, a $S\cap I_n$ je neprebrojiv.

Sada imamo $[a;b]\cap S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\big[(I_n\setminus I_{n+1})\cap S\big]\cup\left[S\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}I_n\right]$. Kako je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}I_n$ singlton, a $(I_n\setminus I_{n+1})\cap S$ prebrojiv za svako $n\in\mathbb{N}_0$ ovo povlači da je $[a;b]\cap S$ prebrojiv suprotno pretpostavljenom.

Vratimo se sada našem zadatku. Označimo sa τ topologiju `Sorgenfrey`-eve prave i neka je $K\subseteq\mathbb{R}$ τ-kompaktan podskup. Kako je $\mu_{\mathbb{R}}\subseteq\tau$ to K mora biti i $\mu_{\mathbb{R}}$-kompaktan pa zato postoje $l,d\in\mathbb{R}$ tako da je $l<d$ i $K\subseteq(l;d)$. Neka je suprotno onom što treba dokazati skup K neprebrojiv. Stavimo $x_0:=l$ i neka je $x_1\in(x_0;d)$ takav da je i $K\cap(x_0;x_1)$ i $K\cap(x_1;d)$ neprebrojiv. Ako su $l=x_0<x_1<\cdots<x_n<d$ konstruisani tako da je $K\cap(x_n;d)$ neprebrojiv, neka je $x_{n+1}\in(x_n;d)$ takav da je i $K\cap(x_n;x_{n+1})$ i $K\cap(x_{n+1};d)$ neprebrojiv. Na ovaj način konstruisan je niz $(x_n\ :\ n\in\mathbb{N}_0)\in{}^{\mathbb{N}_0}\mathbb{R}$ tako da je $K\cap(x_n;x_{n+1})\neq\varnothing$ za svako $n\in\mathbb{N}_0$ i tako da je $K\subseteq[l;d)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}[x_n;x_{n+1})$. No jasno je da za $\mathcal{U}:=\big\{[x_n;x_{n+1})\ :\ n\in\mathbb{N}_0\big\}\subseteq\tau$ ne može biti $K\subseteq\bigcup\mathcal{U}_0$ ni za jedan konačan $\mathcal{U}_0\subseteq\mathcal{U}$ - kontradikcija. $\square$

139. Stavimo $X:={}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. (Skoro) prema samoj definiciji $\mathbb{N}$-stepena topologije $\mathbb{P}(\mathbb{N})$, familija $\big\{[s\rangle\ :\ n\in\mathbb{N},\ s\in\mathbb{N}^n\big\}$ je jedna baza te topologije.

Za svako $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$ skup $[s\rangle$ je zatvoren. Zaista, ako je $n\in\mathbb{N}$ i $s\in\mathbb{N}^n$ onda ovo sledi iz

$$X\setminus[s\rangle=\bigcup_{t\in\mathbb{N}^n;\,t\neq s}[t\rangle\,,$$

a ako je $s=\varnothing$ iz $[\varnothing\rangle=X$.

Za svako $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$ familija $\left\{s\,\hat{}\,\underline{(n)}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ je otvoren pokrivač skupa $[s\rangle$ koji nema konačan podpokrivač tog skupa, pa skup $[s\rangle$ nije kompaktan.

Neka je sada $F\subseteq X$ proizvoljan kompaktan skup. Pretpostavimo da je $\mathrm{int}(F)\neq\varnothing$. Tada postoji $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$ tako da je $[s\rangle\subseteq F$. Kako je $[s\rangle$ zatvoren skup, a F kompaktan skup, to odavde sledi da je i skup $[s\rangle$ kompaktan – kontradikcija. $\square$

140. (1) Neka je $A \subseteq X := {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ i $x \in X$. Imamo

$$x \in \mathrm{Gr}\big(\mathrm{Dr}(A)\big)$$

ako i samo ako

$$\forall n \in \mathbb{N} \,\Big(x \restriction \{1, \ldots, n\} \in \mathrm{Dr}(A)\Big)$$

ako i samo ako

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists a \in A \,\Big(x \restriction \{1, \ldots, n\} = a \restriction \{1, \ldots, n\}\Big)$$

ako i samo ako

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall s \in \mathbb{N}^n \,\Big(x \restriction \{1, \ldots, n\} = s \;\Rightarrow\; \exists a \in A \,\big(a \restriction \{1, \ldots, n\} = s\big)\Big)$$

ako i samo ako

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall s \in \mathbb{N}^n \,\Big(x \in [s\rangle \;\Rightarrow\; \exists a \in A \,\big(a \in [s\rangle\big)\Big)$$

ako i samo ako

$$\forall s \in \mathbb{N}^{<\omega} \,\Big(x \in [s\rangle \;\Rightarrow\; [s\rangle \cap A \neq \varnothing\Big)$$

ako i samo ako

$$x \in \overline{A}\,,$$

obzirom da je familija $\Big\{[s\rangle \,:\, s \in \mathbb{N}^{<\omega},\ x \in [s\rangle\Big\}$ lokalna baza u tački x.

(2) Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $p_n : X \to \mathbb{N}$, gde je $X := {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, n-ta projekcija data sa $p_n(x) := x(n)$ za svako $x \in X$. Ako je τ $\mathbb{N}$-stepen topologije $\mathbb{P}(\mathbb{N})$, onda je p_n $(\tau, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$-neprekidno preslikavanje za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo da za **zatvoren** skup $A \subseteq X$ važi:

skup A je kompaktan ako i samo ako postoji neko $y \in X$ tako da je $x(n) \leq y(n)$ za svako $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$

Zaista, neka je $A \subseteq X$ kompaktan skup. Za svako $n \in \mathbb{N}$ skup $(p_n)^{\rightharpoonup}A \subseteq \mathbb{N}$ je kompaktan skup prostora $\big(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N})\big)$, kao neprekidna slika kompaktnog skupa, pa zato mora biti konačan. Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji neko $y(n) \in \mathbb{N}$ tako da je $(p_n)^{\rightharpoonup}A \subseteq [1; y(n)]$. Ovako definisan niz $y \in X$ je očigledno onakav kakav se traži.

Obrnuto, pretpostavimo da je $A = \overline{A}$ takav da za neko $y \in X$ važi $x(n) \leq y(n)$ za svako $x \in$ i $n \in \mathbb{N}$. Stavimo $P_n := \big\{1, \ldots, y(n)\big\}$, za svako $n \in \mathbb{N}$, i označimo sa λ_n diskretnu topologiju na skupu P_n. Stavimo $B := \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} P_n$. Topologija $\prod'_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$ je kompaktna, jer je λ_n takva za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako za svako $n \in \mathbb{N}$ stavimo $\tau_n := \mathbb{P}(\mathbb{N})$, onda je $\tau = \prod'_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ pa zato imamo

$$\mathrm{rel}_B(\tau) = {\textstyle\prod'_{n \in \mathbb{N}}} \mathrm{rel}_{P_n}(\tau_n) = {\textstyle\prod'_{n \in \mathbb{N}}} \lambda_n$$

Dakle $B \subseteq X$ je kompaktan podskup prostora (X, τ), pa kako je očigledno $A \subseteq B$ i A zatvoren skup tog prostora, to i A mora biti kompaktan.

Sada ćemo pokazati da za proizvoljan skup $A \subseteq X$ važi:

$$\text{Dr}(A) \text{ se konačno grana ako i samo ako postoji neko } y \in X \text{ tako da je}$$
$$x(n) \leq y(n) \text{ za svako } n \in \mathbb{N}$$

Pretpostavimo da se $\mathrm{Dr}(A)$ konačno grana. To specijalno znači da za neko $y(1) \in \mathbb{N}$ važi $k \leq y(1)$ za svaki broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\underline{(k)} \in \mathrm{Dr}(A)$. Zato ako je $x \in A$, onda je $\underline{(x(1))} \in \mathrm{Dr}(A)$ pa mora biti $x(1) \leq y(1)$.

Pretpostavimo sada da smo definisali brojeve $y(i) \in \mathbb{N}$ za $i = \overline{1, k}$ tako da važi

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} \forall x \in A \ \big(x(i) \leq y(i)\big)$$

Skup $S := \prod\limits_{i=1}^{k} \big\{1, \ldots, y(i)\big\}$ je konačan. Kako se $\mathrm{Dr}(A)$ konačno grana to je za svako $s \in \mathrm{Dr}(A) \cap S$ skup $\Big\{k \in \mathbb{N} : s\,\hat{}\,\underline{(k)} \in \mathrm{Dr}(A)\Big\}$ konačan pa postoji neko $m_s \in \mathbb{N}$ takvo da je $k \leq m_s$ za svako $k \in \mathbb{N}$ za koje važi $s\hat{\ }\underline{(k)} \in \mathrm{Dr}(A)$. Skup $\mathrm{Dr}(A) \cap S$ je konačan pa možemo definisati

$$y(k+1) := \max\{m_s \,:\, s \in \mathrm{Dr}(A) \cap S\} \ .$$

Neka je $x \in A$ proizvoljno. Pokažimo da mora biti $x(k+1) \leq y(k+1)$. Prema indukcijskoj hipotezi je $s := x \restriction \{1, \ldots, k\} \in S$. Jasno, $s \in \mathrm{Dr}(A)$ i $s\hat{\ }\underline{(x(k+1))} = x \restriction \{1, \ldots, k+1\} \in \mathrm{Dr}(A)$ pa je $x(k+1) \leq m_s \leq y(k+1)$.

Na ovaj način smo rekurzivno kostruisali niz $y \in X$ kakav se traži.

Obrnuto, neka je $y \in X$ takav broj da je $x(n) \leq y(n)$ za svako $x \in A$ i $n \in \mathbb{N}$. Kako se skup $B := \prod_{n\in\mathbb{N}} \{1, \ldots, y(n)\}$ očigledno konačno grana, a važi $A \subseteq B$, to i skup A mora da se konačno grana. $\Box$

141. Neka su $K_n \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} =: X$ kompaktni skupovi za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji neko $y_n \in X$ takvo da važi $x(m) \leq y_n(m)$ za svako $x \in K_n$ i $m \in \mathbb{N}$ (videti rešenje zadatka 140. pod (2)). Definišimo $z \in X$ sa $z(n) := y_n(n) + 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je očigledno $z \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. $\Box$

142. (1) Ako je $g : (Z, \tau_Z) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ i τ_Z kompaktna topologija, onda je $\inf g^{\rightharpoonup} Z \in \mathbb{R}$, $\sup g^{\rightharpoonup} Z \in \mathbb{R}$ i postoje $u, v \in Z$ tako da je $g(u) = \inf g^{\rightharpoonup} Z$ i $g(v) = \sup g^{\rightharpoonup} Z$. Zaista, prva činjenica sledi iz toga što je $S := g^{\rightharpoonup} Z$ $\mu_{\mathbb{R}}$-kompaktan skup, a $\{(-m; m) \cap S \,:\, m \in \mathbb{N}\}$ μ_S-otvoren pokrivač skupa S. Preostali deo tvrđenja sledi iz $\{\inf S, \sup S\} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(S)$ i činjenice da je S $\mu_{\mathbb{R}}$-zatvoren skup (kao kompaktan podskup `Hausdorff`-ovog prostora).

Definišimo $f : X \to [0; +\infty)$ sa $f(x) := d(a, x)$. Znamo da je f τ-neprekidna funkcija (videti zadatak 83.). Dakle $f \restriction K$ je $\mathrm{rel}_K(\tau)$-neprekidna funkcija, a $\mathrm{rel}_K(\tau)$ kompaktna topologija pa postoji neko $b \in K$ tako da je $f(b) = \inf f^{\rightharpoonup} K$. No $\inf f^{\rightharpoonup} K = \inf_{x\in K} d(a, x) = \mathrm{Dist}(\{a\}, K)$ i $f(b) = d(a, b)$.

(2) Za svako $x \in K \subseteq X \setminus F$ postoji neko $\varepsilon_x \in (0; +\infty)$ tako da je $\mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x) \subseteq X \setminus F$. Kako je K τ-kompaktan skup to postoji neki konačan skup $T \subseteq K$ tako da je $K \subseteq \bigcup_{x \in T} \mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x/2)$. Stavimo $\delta := \min\{\varepsilon_x/2 : x \in T\}$.

Ako je $b \in F$ i $x \in K$, onda postoji neko $y \in T$ tako da je $d(y,x) < \varepsilon_y/2$ pa bi iz $d(x,b) \leq \delta$ sledilo $d(y,b) \leq d(y,x) + d(x,b) < \varepsilon_y$, tj. $F \ni b \in \mathrm{K}_d[y; \varepsilon_y) \subseteq X \setminus F$ – kontradikcija. Dakle mora biti $d(x,b) > \delta$ za svako $(x,b) \in K \times F$. □

143. (1)⇒(2): Pretpostavimo da postoji neko τ-neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$ koje nije (d, d_0)-ravnomerno neprekidno. Tada postoje nizovi $(x_n : n \in \mathbb{N})$ i $(y_n : n \in \mathbb{N})$ tačaka prostora X i broj $\varepsilon \in (0; +\infty)$ tako da važi $d(x_n, y_n) < 1/n$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je (X, τ) kompaktan i metrizabilan prostor, to je on i nizovno kompaktan pa postoji rastući niz prirodnih brojeva $(k_i : i \in \mathbb{N})$ i neka tačka $a \in X$ tako važi $\lim\limits_{i \to +\infty} d(x_{k_i}, a) = 0$. Obzirom da važi $d(y_{k_i}, a) \leq d(y_{k_i}, x_{k_i}) + d(x_{k_i}, a)$ za svako $i \in \mathbb{N}$, to sledi da je $\lim\limits_{i \to +\infty} d(y_{k_i}, a) = 0$. Dakle nizovi $(x_{k_i} : i \in \mathbb{N})$ i $(y_{k_i} : i \in \mathbb{N})$ konvergiraju u odnosu na topologiju τ ka tački a, pa kako je f τ-neprekidno preslikavanje, to nizovi $\big(f(x_{k_i}) : i \in \mathbb{N}\big)$ i $\big(f(y_{k_i}) : i \in \mathbb{N}\big)$ konvergiraju ka $f(a)$. Ovo specijalno povlači da za neko $j \in \mathbb{N}$ mora da važi $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| < \varepsilon$ – kontradikcija.

(2)⇒(3): Pretpostavimo da postoji neki `Cauchy`-jev niz $x = (x_n : n \in \mathbb{N})$ tačaka koji nije konvergentan. Tada nijedan podniz ovog niza ne konvergira. Specijalno skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je beskonačan pa postoje $k_i, l_i \in \mathbb{N}$, za svako $i \in \mathbb{N}$, takvi da su skupovi $L := \{x_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$ i $L := \{x_{l_i} : i \in \mathbb{N}\}$ beskonačni i disjunktni. Nijedan od skupova L i D nema tačaka nagomilavanja, jer bi u suprotnom postojao konvergentan podniz niza x. Dakle L i D su zatvoreni i diskretni skupovi. Zato je i $L \cup D$ zatvoren i diskretan. Specijalno, funkcija $f : L \cup D \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(z) = 0$ ako $z \in L$ i $f(z) = 1$ ako $z \in D$ je $\mathrm{rel}_{L \cup D}(\tau)$-neprekidna (zbog $L \cap D = \varnothing$ ona je korektno definisana). Kako je $L \cup D$ zatvoren skup, a (X, τ) normalan prostor, to postoji neko preslikavanje $g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ takvo da važi $g(z) = f(z)$ za svako $z \in L \cup D$. Prema **(2)** imamo da je g (d, d_0)-ravnomerno neprekidno preslikavanje. Zato postoji neko $\delta \in (0;+\infty)$ tako da važi

$$d(u,v) < \delta \;\Rightarrow\; |g(u) - g(v)| < 1$$

za svako $u, v \in X$. Niz x je `Cauchy`-jev pa postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $m_1, m_2 \geq n_0$ važi $d(x_{m_1}, x_{m_2}) < \delta$. Skupovi L i D su beskonačni pa postoji neko $i_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $k_{i_0}, l_{i_0} > n_0$. Sada je $d\big(x_{k_{i_0}}, x_{l_{i_0}}\big) < \delta$ dok je $|g(x_{k_{i_0}}) - g(x_{l_{i_0}})| = |f(x_{k_{i_0}}) - f(x_{l_{i_0}})| = 1$ – kontradikcija. $\square$

144. (1) Za svako $x \in X_1$ postoji neko $\delta_x \in (0;+\infty)$ tako da je $\mathrm{K}_{d_1}[x;2\delta_x) \subseteq U$ za bar jedno $U \in \mathcal{U}$. Kako je (X_1, τ_1) kompaktan prostor, to postoji neki neprazan konačan skup $T \subseteq X_1$ takav da je $X_1 = \bigcup\limits_{x \in T} \mathrm{K}_{d_1}[x;\delta_x)$. Stavimo $\varepsilon := \min\{\delta_x \,:\, x \in T\}$ i pokažimo da je ε broj kakav se traži. Neka je $z \in X_1$ proizvoljno. Postoji neko $x \in T$ tako da je $z \in \mathrm{K}_{d_1}[x;\delta_x)$. Neka je $U \in \mathcal{U}$ tako da je $\mathrm{K}_{d_1}[x;2\delta_x) \subseteq U$.

Ako je $y \in \mathrm{K}_{d_1}[z;\varepsilon)$ proizvoljno, onda imamo $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y) < \delta_x + \varepsilon \leq 2\delta_x$, pa je $y \in \mathrm{K}_{d_1}[x;2\delta_x) \subseteq U$. Ovim smo pokazali da je $\mathrm{K}_{d_1}[z;\varepsilon) \subseteq U$.

(2) Ako je $\varepsilon \in (0;+\infty)$ proizvoljno, onda je $\{f^{\leftharpoonup}\mathrm{K}_{d_2}[x;\varepsilon/2) \,:\, x \in X_2\}$ otvoren pokrivač prostora (X_1, τ_1) pa postoji neko $\delta \in (0;+\infty)$ takvo da za svako $u \in X_1$ postoji neko $x \in X_2$ sa osobinom da je $\mathrm{K}_{d_1}[u;\delta) \subseteq f^{\leftharpoonup}\mathrm{K}_{d_2}[x;\varepsilon/2)$. Neka su $u, v \in X_1$ proizvoljne tačke takve da je $d_1(u,v) < \delta$. Postoji neko $x \in X_2$ takvo da je $v \in \mathrm{K}_{d_1}[u;\delta) \subseteq f^{\leftharpoonup}\mathrm{K}_{d_2}[x;\varepsilon/2)$, pa je $\big\{f(u), f(v)\big\} \subseteq \mathrm{K}_{d_1}[x;\varepsilon/2)$, te i $d_2\big(f(u), f(v)\big) \leq d_2\big(f(u), x\big) + d_2\big(x, f(v)\big) < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$. $\square$

145. Pretpostavimo da za svaki neprazan konačan skup $T \subseteq S$ važi $\bigcap\limits_{s \in T} F_s \nsubseteq U$. Sa $\mathcal{F} := \{F_{s_0} \setminus U\} \cup \{F_s \cap F_{s_0} \,:\, s \in S\}$ je definisana jedna familija zatvorenih skupova kompaktnog prostora $\big(F_{s_0}, \mathrm{rel}_{F_{s_0}}(\tau)\big)$. Za svaki neprazan konačan skup $T \subseteq S$ važi

$$(F_{s_0} \setminus U) \cap \bigcap_{s \in T} F_s = U^c \cap \bigcap_{s \in T \cup \{s_0\}} F_s \neq \varnothing$$

Dakle $\mathcal{F}$ je centrirana familija, pa sledi da postoji neka tačka

$$a \in \bigcap \mathcal{F} = U^c \cap \bigcap_{s \in S} F_s$$

što znači da je $\bigcap_{s \in S} F_s \nsubseteq U$, suprotno pretpostavci zadatka. □

146. Neka je $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ za neke otvorene skupove U_n. Neka je $U \supseteq F$ proizvoljan otvoren skup. Kako je (X, τ) normalan prostor, kao `Hausdorff`-ov kompaktan, to za svako $n \in \mathbb{N}$, obzirom da je $F = \overline{F} \subseteq A_n \in \tau$, postoji neki otvoren skup V_n takav da je $F \subseteq V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq A_n$. Skupovi $\overline{V_n}$ su kompaktni, kao zatvoreni skupovi kompaktnog prostora, i važi

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = F \subseteq U \in \tau$$

Zato prema zadatku 145. postoji neki neprazan konačan skup $T \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $\bigcap_{n \in T} \overline{V_n} \subseteq U$. Dakle važi $F \subseteq \bigcap_{n \in T} V_n \subseteq U$.

Ovim smo pokazali da je prebrojiva familija

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{n \in S} V_n \ : \ \varnothing \neq S \subseteq \mathbb{N} \text{ je konačan skup} \right\}$$

kakva se traži. □

147. (I) Ako je A zatvoren skup, a B kompaktan skup, i ako važi $A \cap B = \varnothing$, onda postoji preslikavanje $h : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ takvo da je $h^{\rightharpoonup} A \subseteq \{0\}$ i $h^{\rightharpoonup} B \subseteq \{1\}$. Pokažimo ovo. Ako je $B = \varnothing$ onda je konstantna nula funkcija tražena. Zato pretpostavimo da je $B \neq \varnothing$.

Za svaku tačku $b \in B$ postoji neko preslikavanje $f_b : (X, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ takvo da je $(f_b)^{\rightharpoonup} A \subseteq \{0\}$ i $f_b(b) = 1$. Familija $\{(f_b)^{\leftharpoonup}(1/2; 1] : b \in B\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa B pa postoji neki konačan skup

$T \subseteq B$ takav da je $B \subseteq \bigcup_{b\in T} (f_b)^{\leftharpoonup}(1/2;1]$. Funkcija $f : X \to [0;1]$ definisana sa $f(x) := \max\{f_b(x) : b \in T\}$ je neprekidna i zadovoljava

$$f^{\rightharpoonup}A \subseteq \{0\} \text{ i } f^{\rightharpoonup}B \subseteq (1/2;1]$$

Neka je $g : [0;1] \xrightarrow{c} [0;1]$ proizvoljna funkcija takva da je $g(0) = 0$ i $g^{\rightharpoonup}(1/2;1] = \{1\}$. Tada je kompozicija $g \circ f$ traženo preslikavanje.

(II) Prelazimo na dokaz tvrđenja zadatka. Za svako $i = \overline{1,n}$ prema delu **(I)** postoji neko preslikavanje $f_i : (X,\tau) \xrightarrow{c} [0;1]$ takvo da je

$$(f_i)^{\rightharpoonup} \bigcup_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} K_j \subseteq \{0\} \text{ i } (f_i)^{\rightharpoonup}K_i \subseteq \{1\}\,.$$

Preslikavanje $\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i$ je traženo. □

148. $K \subseteq \mathbb{N}$ je kompaktan ako i samo ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} a_i\mathbb{N}$$

Zaista, neka je $\subseteq \mathbb{N}$ kompaktan skup. Familija $\{k\mathbb{N} : k \in K\}$ je otvoren pokrivač skupa K pa postoje $m \in \mathbb{N}$ i $a_1,\ldots,a_m \in K$ tako da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} a_i\mathbb{N}$, pa vidimo da je skup K kakav se i tvrdi da jeste.

Obrnuto, pretpostavimo da postoje $m \in \mathbb{N}$ i $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} a_i\mathbb{N}$$

Kako je familija $\mathcal{B} := \{k\mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$ baza prostora iz **P 6**, da se uverimo u to da je K kompaktan skup dovoljno je pokazati da za proizvoljnu familiju $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ takvu da je $K \subseteq \bigcup\mathcal{U}$ postoji neka konačna podfamilija $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tako da je $K \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Dakle neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \bigcup\limits_{k \in M} k\mathbb{N}$. Zbog $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq K$, za svako $i = \overline{1, m}$ postoji $k_i \in M$ tako da je $a_i \in k_i\mathbb{N}$, tj. tako da je $a_i\mathbb{N} \subseteq k_i\mathbb{N}$. Sada imamo

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} a_i\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} k_i\mathbb{N}$$

$\square$

149. (1) Neka je $F \subseteq X$ proizvoljan τ-zatvoren skup i $x \in X \setminus F$. Po pretpostavci postoji neki τ-otvoren skup $V \ni x$ takav da je podprostor (A, τ_1) `Tychonoff`-ski, gde je $A = \mathrm{cl}_\tau(V)$ i $\tau_1 = \mathrm{rel}_A(\tau)$. Skup $G := \mathrm{bd}_\tau(V) \cup (\mathrm{cl}_\tau(V) \cap F)$ je τ-zatvoren, te i τ_1-zatvoren. Kako je $V \in \tau$ to je $V \cap \mathrm{bd}_\tau(V) = \varnothing$, pa sledi $x \notin \mathrm{bd}_\tau(V)$. Kako je još $x \notin F$ to sledi da je $x \in A \setminus G$. (A, τ_1) je `Tychonoff`-ski prostor pa postoji neko preslikavanje $f : (A, \tau_1) \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ takvo da je $f(x) = 0$ i $f^{\rightharpoonup}G \subseteq \{1\}$. Neka je $g : X \setminus V \to [0; 1]$ konstantno preslikavanje definisano sa $g(z) = 1$ za svako $z \in X \setminus V$. Imamo $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cl}_\tau(V)$ i $\mathrm{dom}(g) = X \setminus V$, pa kako je $V \in \tau$, sledi da je $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \mathrm{bd}_\tau(V)$, te je $f(z) = 1 = g(z)$ za svako $z \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$. Zato je na osnovu zadatka 51. preslikavanje $h := f \cup g$ τ-neprekidno i $h : X \to [0; 1]$. Jasno $h(x) = f(x) = 0$. Neka je $z \in F$ Ako je $z \in \mathrm{cl}_\tau(V)$ onda je $z \in G \subseteq \mathrm{dom}(f)$ pa je $h(z) = f(z) = 1$. Ako je $z \in X \setminus \mathrm{cl}_\tau(V) \subseteq X \setminus V = \mathrm{dom}(g)$, onda je $h(z) = g(z) = 1$.

(2) Ovo sledi iz dela pod **(2)** i činjenice da je svaki `Hausdorff`-ov kompaktan prostor `Tychonoff`-ski.

(3) Neka je $x \in U \in \tau$ i neka je $W \ni x$ otvoren skup takav da je skup $\overline{W}$ kompaktan. Obzirom da je (X, τ) regularan prostor prema delu pod **(2)**, postoji $V \in \tau$ tako da je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cap W$. Kako je $\overline{V}$ zatvoren podskup kompaktnog skupa $\overline{W}$, to $\overline{V}$ mora biti kompaktan. $\square$

150. (1) (a)$\Rightarrow$(b): Pretpostavimo da je (X, τ) lokalno kompaktan prostor takav da je $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$ za neke kompaktne skupove $K_n \subseteq X$. Za svaku tačku $x \in X$ postoji neki otvoren skup $V_x \ni x$ takav da je $\overline{V_x}$ kompaktan skup. Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $K_n \subseteq \bigcup_{x \in X} V_x$ pa mora da postoji neki konačan skup $T_n \subseteq X$ takav da je $K_n \subseteq \bigcup_{x \in T_n} V_x =: U_n$. Jasno $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Takođe, imamo $\overline{U_n} = \bigcup_{x \in T_n} \overline{V_x}$ (jer je T_n konačan skup), pa je skup $\overline{U_n}$ kompaktan kao unija konačno mnogo kompaktnih skupova.

(b)⇒(a): Pretpostavimo da postoje otvoreni skupovi U_n, za $n \in \mathbb{N}$, tako da je $\overline{U_n}$ kompaktan skup za svako $n \in \mathbb{N}$, i tako da važi $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Ako je $x \in X$ proizvoljna tačka, onda postoji neko $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in U_n$; pritom je $U_n \in \tau$ i skup $\overline{U_n}$ je kompaktan. Dakle (X, τ) je lokalno kompaktan. Da je prostor σ-kompaktan sledi direktno iz $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$.

(2) Neka, suprotno onom što treba pokazati, postoji neka tačka $x \in X$ takva da ni za jedan otvoren skup $W \ni x$ skup $\overline{W}$ nije kompaktan. Po pretpostavci postoji neka stroga lokalna baza $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ u tački x. Za svako $n \in \mathbb{N}$ stavimo $V_n := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ i fiksirajmo neki otvoren skup $W_n \ni x$ takav da je $\overline{W_n} \subseteq V_n$ (prostor je po pretpostavci regularan); kako $\overline{W_n}$ nije kompaktan skup, to ne može biti $\overline{W_n} \subseteq K_n$, te možemo izabrati neku tačku $z_n \in \overline{W_n} \setminus K_n$.

Niz $(z_n : n \in \mathbb{N})$ konvergira ka tački x. Zaista, ako je $G \ni x$ proizvoljan otvoren skup, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $U_n \subseteq G$; tada za proizvoljan prirodan broj $m \geq n$ važi

$$z_m \in \overline{W_m} \subseteq V_m \subseteq U_n \subseteq G\,.$$

Otuda je skup $\{x\} \cup \{z_n : n \in \mathbb{N}\} =: A$ kompaktan pa po pretpostavci postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $A \subseteq K_m$. Ovo povlači da je $z_m \in K_m$. No ovo je nemoguće jer je $z_m \in \overline{W_m} \setminus K_m$, kontradikcija. □

151. Da prostor ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ nije lokalno kompaktan direktno sledi iz zadatka 139.

Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ gust skup za koji je i S^c gust skup, pokažimo da (S, μ_S) ne može biti lokalno kompaktan prostor.

Neka je $s_0 \in S$ proizvoljna tačka. Pretpostavimo da postoji $V \in \mu_S$ tako da je $s_0 \in V$ i tako da je $\mathrm{cl}_{\mu_S}(V)$ kompaktan skup prostora (S, μ_S) (što je isto što i reći da je on kompaktan skup prostora $\mathbb{R}$). Postoji neko $U \in \mu_{\mathbb{R}}$ tako da je $V = U \cap S$. Kako je S^c gust skup to je familija $\{(a; b) \,:\, a, b \in S^c\}$ baza prostora $\mathbb{R}$. Zato postoje $a, b \in S^c$ tako da je $s_0 \in (a; b) \subseteq U$. Sada imamo

$$\mathrm{cl}_{\mu_S}\big((a;b) \cap S\big) = \mathrm{cl}_{\mu_{\mathbb{R}}}\big((a;b)\big) \cap S = [a;b] \cap S = (a;b) \cap S\,.$$

Kako je S gust skup to $(a; b) \cap S$ ne može biti kompaktan skup. Dakle skup $\mathrm{cl}_{\mu_S}\big((a;b) \cap S\big)$ nije kompaktan. S druge strane je

$$\mathrm{cl}_{\mu_S}\big((a;b) \cap S\big) \subseteq \mathrm{cl}_{\mu_S}\big(U \cap S\big) = \mathrm{cl}_{\mu_S}(V)\,.$$

Odavde sledi da je $\mathrm{cl}_{\mu_S}\big((a;b) \cap S\big)$ kompaktan skup, kao μ_S-zatvoren podskup kompaktnog skupa prostora (S, μ_S) – protivurečnost. $\square$

152. Neka je (X, τ) prostor iz **P 7**. Neka je $\varnothing \neq A = \overline{A} \subseteq X$. Možemo izabrati neko $a \in A$. Imamo $\mathrm{cl}\,(\{a\}) = a\mathbb{N} \subseteq \overline{A} = A$ (videti zadatak 29.) pa je A beskonačan skup. Otuda je $\{A \cap D_k \,:\, k \in A\}$ $\mathrm{rel}_A(\tau)$-otvoren pokrivač skupa A koji nema konačan podpokrivač. Dakle nijedan neprazan zatvoren skup nije kompaktan. Specijalno, (X, τ) nije lokalno kompaktan prostor.

Neka su (X, τ) i $\mathcal{B}$ iz **P 8** i $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Neka su $m_i \in \mathbb{Z}$ za $i \in \mathbb{N}$ proizvoljni tako da je $U := a + b\mathbb{Z} = \{m_i \,:\, i \in \mathbb{N}\}$. Za $i \in \mathbb{N}$ neka su $p_i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takvi da je $i \neq j \Rightarrow \mathrm{NZD}(p_i, p_j) = 1$ i $\mathrm{NZD}(p_i, b) = 1$ za svako $i, j \in \mathbb{N}$. $\mathcal{U} := \{U \cap (m_i + p_i\mathbb{Z}) \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ je $\mathrm{rel}_U(\tau)$-otvoren pokrivač skupa U. Da pokažemo da on nema konačan podpokrivač neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Postoji $x_0 \in \mathbb{Z}$ tako da je $x_0 \equiv_b a$ i $x_0 \equiv_{p_i} m_i + 1$ za $i = \overline{1, k}$. Tada je $x_0 \in U$ i $x_0 \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} (m_i + p_i\mathbb{Z})$. Ovim smo dokazali da U nije kompaktan. Kako je $\mathcal{B}$ baza prostora i $\overline{U} = U$ za svako $U \in \mathcal{B}$ (videti zadatke 13. i 30.) to smo dokazali da (X, τ) nije lokalno kompaktan.

Prostori iz **P 9** i **P 10** su `Hausdorff`-ovi, a nisu regularni (videti zadatak 113.), pa ne mogu biti lokalno kompaktni na osnovu zadatka 149. $\square$

153. Neka je $K \subseteq Y$ kompaktan skup i $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ tako da je $f^{\leftharpoonup}K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Za svako $y \in K$ skup $f^{\leftharpoonup}\{y\} \subseteq f^{\leftharpoonup}K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ je kompaktan pa postoji neka konačna podfamilija $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}$ takva da je $f^{\leftharpoonup}\{y\} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_y$, a zatim, kako je f (τ_X, τ_Y)-zatvoreno preslikavanje, postoji i skup $V_y \in \tau_Y$ takav da je $y \in V_y$ i $f^{\leftharpoonup}V_y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_y$. Skup K je kompaktan i $K \subseteq \bigcup\limits_{y \in K} V_y$, pa postoji neki konačan skup $T \subseteq K$ takav da je $K \subseteq \bigcup\limits_{y \in T} V_y$. Skup $\bigcup\limits_{y \in T} \mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}$ je konačan i pokriva skup $f^{\leftharpoonup}K$. Zaista, ako je $x \in f^{\leftharpoonup}K$, onda postoji neko $z \in K \subseteq \bigcup\limits_{y \in T} V_y$ tako da je $x \in f^{\leftharpoonup}\{z\}$. Za neko $y_0 \in T$ tako da je $z \in V_{y_0}$. Otuda je

$$x \in f^{\leftharpoonup}\{z\} \subseteq f^{\leftharpoonup}V_{y_0} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{y_0} \subseteq \bigcup \left(\bigcup_{y \in T} \mathcal{U}_y \right)$$

$\square$

154. Ako je $f : (A, \tau_A) \xrightarrow{\mathsf{c}} (B, \tau_B)$ i ako je prostor (A, τ_A) kompaktan, a prostor (B, τ_B) `Hausdorff`-ov, onda f mora biti (τ_A, τ_B)-zatvoreno. Zaista ako je $F \subseteq A$ τ_A-zatvoren skup, onda je on kompaktan skup prostora (A, τ_A) pa, kako je f (τ_A, τ_B)-neprekidno, skup $f^{\rightharpoonup}F$ mora biti kompaktan podskup prostora (B, τ_B); (B, τ_B) je `Hausdorff`-ov prostor, te ovo znači da je $f^{\rightharpoonup}F$ τ_B-zatvoren.

Vratimo sa sada našem zadatku. Pod datim uslovima preslikavanje id_X je (τ_1, τ_2)-neprekidno, pa prema ovom što smo upravo pokazali ono mora biti i zatvoreno. Kako je id_X bijekcija ovo znači da je id_X (τ_1, τ_2)-homeomorfizam. Otuda je $\left(\mathrm{id}_X\right)^{-1} = \mathrm{id}_X$ (τ_2, τ_1)-neprekidno preslikavanje, tj. $\tau_1 \subseteq \tau_2$. $\square$

155. Pokažimo da ako je $\prec$ **proizvoljno** strogo linearno uređenje na nekom skupu X i $\tau := \mathrm{lot}(\prec)$, onda je (X, τ) kompaktan prostor ako i samo ako X

ima $\prec$-najmanji element i svaki neprazan podskup od X ima $\prec$-supremum.

Pokažimo da ako je dat uslov zadovoljen tada τ mora biti kompaktna topologija. Označimo sa r $\prec$-najmanji element skupa X. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \tau$ proizvoljno tako da je $X = \bigcup \mathcal{U}$. Postoji neko $U \in \mathcal{U}$ tako da je $r \in U$. Kako ni za jedno $a \in X$ ne može biti $r \in (a; \to)_\prec$ to postoji $b \in X$ tako da je $r \in (\leftarrow; b)_\prec \subseteq U$. Kako je zapravo $(\leftarrow; b)_\prec = [r; b)_\prec$ to je $b \in S := \{y \in X \ : \ \text{postoji konačan } \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U} \ \text{ tako da je } \ [r; y)_\prec \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0\}$ pa je dakle S neprazan. Zato po pretpostavci postoji $\prec$-supremum $s := \sup_\prec S$ skupa S. Neka je $V \in \mathcal{U}$ tako da je $s \in V$.

Ako je $s \in (\leftarrow; x)_\prec \subseteq V$ za neko $x \in X$, onda iz $(\leftarrow; x)_\prec = [r; x)_\prec$ sada sledi $x \in S$; no $x \succ s = \sup_\prec S$ - kontradikcija.

Ako je $s \in (x; \to)_\prec \subseteq V$ za neko $x \in X$, onda iz $x \prec s = \sup_\prec S$ sledi da postoji neko $y \in S$ tako da je $x \prec y$ te i neki konačan $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tako da je $[r; y)_\prec \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$; sada imamo $X = [r; y)_\prec \cup (x; \to)_\prec \subseteq \left(\bigcup \mathcal{U}_0\right) \cup V = \bigcup \left(\mathcal{U}_0 \cup \{V\}\right)$, i pritom je $\mathcal{U}_0 \cup \{V\}$ konačan podskup od $\mathcal{U}$.

Ako postoje $x_1, x_2 \in X$ tako da je $s \in (x_1; x_2)_\prec \subseteq V$, onda kao i u pthodnom slučaju zaključujemo da postoje $y \in S$ i konačan $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tako da je $x_1 \prec y$ i $[r; y)_\prec \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$; zbog $x_1 \prec y$ sada imamo $[r; x_2)_\preceq \subseteq [r; y)_\preceq \cup (x_1; x_2)_\prec \subseteq \left(\bigcup \mathcal{U}_0\right) \cup V$ te je $x_2 \in S$; ali $x_2 \succ s = \sup_\prec S$ - kontradikcija.

Ako je najzad $s \in X \subseteq V$, onda je $X = V \in \mathcal{U}$ i $\{X\} \subseteq \mathcal{U}$ je konačan podpokrivač skupa X.

Pretpostavimo sada da je $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$ kompaktna topologija. X mora da ima najmanji element jer bi u suprotnom familija $\{(x; \to)_\prec \ : \ x \in X\}$ bila τ-otvoren pokrivač skupa X koji nema konačan podpokrivač. Neka je dat $\varnothing \neq A \subseteq X$. Označimo sa M skup svih $\prec$-majoranti skupa A. Kad bi bilo $M = \varnothing$ onda bi $\{(\leftarrow; a)_\prec \ : \ a \in A\}$ bio τ-otvoren pokrivač skupa X koji nema konačan podpokrivač. Dakle $M \neq \varnothing$. Stavimo $\mathcal{V} := \{(\leftarrow; a)_\prec \ : \ a \in A\} \cup \{(b; \to)_\prec \ : \ b \in M\} \subseteq \tau$. Ako M nema $\prec$-najmanji element, onda mora biti $\bigcup \mathcal{V} = X$: zaista ako je $x \in X$ tako da je $x \notin (\leftarrow; a)_\prec$ za svako $a \in A$, onda je zapravo $x \in M$ pa prema pretpostavci postoji neko $b \in M$

tako da je $b \prec x$, tj. $x \in (b;\rightarrow)_{\prec} \in \mathcal{V}$. Dakle ako A nema $\prec$-supremum, onda je $\mathcal{V}$ τ-otvoren pokrivač skupa X, pa postoje $k, l \in \mathbb{N}$ tako da je $X = \left(\bigcup_{i=1}^{k}(\leftarrow; a_i)_{\prec}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l}(b_i;\rightarrow)_{\prec}\right)$; za $b := \min_{i=\overline{1,l}} b_i$ važi $b \notin \bigcup_{i=1}^{l}(b_i;\rightarrow)_{\prec}$ pa mora biti $b \in (\leftarrow; a_{i_0})_{\prec}$ za neko $i_0 \in \{1,\ldots,k\}$, tj. $b \prec a_{i_0}$; ali $a_{i_0} \in A$ i $b \in M$ - kontradikcija. Ovim je polazno tvrđenje dokazano.

Sada ako su X, $\prec$ i $\tau = \mathrm{lot}(\prec)$ kao u **P 16** da pokažemo da je (X,τ) kompaktan prostor, obzirom da je $(0,0)$ $\prec$-najmanji element skupa X, dovoljno je da pokažemo da svaki neprazan podskup od X ima $\prec$-supremum. Dakle neka je $\varnothing \neq A \subseteq X$. Za $a \in \mathbb{R}^2$ pisaćemo $a = (a(1), a(2))$. Neka je $x_0 := \sup\{a(1) \ : \ a \in A\}$.

Slučaj 1: Za svako $a \in A$ važi $a(1) < x_0$. Pokažimo da je $(x_0, 0) = \sup_{\prec} A$. Jasno je da je $(x_0, 0)$ majoranta skupa A. Neka je $(u,v) \in X$ takođe majoranta skupa A. Kad bi bilo $(u,v) \prec (x_0,0)$ sledilo bi $u < x_0$ (jer $v \in [0;1]$) pa bi postojalo neko $a \in A$ tako da je $u < a(1)$; no ovo bi značilo da je $(u,v) \prec a$ što nije moguće jer je (u,v) majoranta skupa A.

Slučaj 2: Postoji neko $a \in A$ tako da je $a(1) = x_0$. Tada je skup $S := \{a(2) \ : a \in A \text{ i } a(1) = x_0\}$ neprazan podskup od $[0;1]$. Označimo $y_0 := \sup S$. Tvrdimo $(x_0, y_0) = \sup_{\prec} A$. Ako je $a \in A$ proizvoljno onda je ili $a(1) < x_0$, u kom slučaju je $a \prec (x_0, y_0)$, ili $a(1) = x_0$, u kom slučaju je $a \in S$ pa zbog $y_0 = \sup S$ mora biti $a(2) \leq y_0$ te je $a \preceq (x_0, y_0)$. Ovo znači da je (x_0, y_0) $\prec$-majoranta skupa A. Da pokažemo da je najmanja neka je $(u,v) \in X$ proizvoljna $\prec$-majoranta skupa A. Pretpostavimo da je $(u,v) \prec (x_0, 0)$. Ako je $u < x_0$ onda bi za neko $a \in A$ bilo $u < a(1)$ te i $(u,v) \prec a$ - a ovo nije moguće. Ako je $u = x_0$ i $v < y_0$ onda postoji neko $a \in S$ tako da je $a(2) > v$; dakle $a(1) = x_0 = u$ i $a(2) > v$ pa je $a \succ (u,v)$, što je nemoguće zbog $a \in A$.

Poznata je činjenica da je metrizabilan prostor `Lindelöf`-ov ako i samo ako je separabilan. (X,τ) je jasno kao kompaktan i `Lindelöf`-ov prostor. Kad bi on bio metrizabilan, onda bi dakle on bio i separabilan, a ovo nije moguće na osnovu zadatka 25. i napomene u rešenju dela pod (2) zadatka 33.

Da je (X,τ) `Hausdorff`-ov sledi iz toga što je $(a;b)_{\prec} \neq \varnothing$ za svako $a,b \in X$ takvo da je $a \prec b$. $\square$

156. Neka je $d_{\sup}$ metrika iz **P 14**. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je preslikavanje $g_n \in X$ definisano sa

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{ako } t \in \big[0; 1 - \frac{1}{n+1}\big] \\ (n+1)\Big[t - \big(1 - \frac{1}{n+1}\big)\Big], & \text{ako } t \in \big[1 - \frac{1}{n+1}; 1\big] \end{cases}$$

Jasno $g_n \in K$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kada bi postojao podniz $(g_{k_i} : i \in \mathbb{N})$ niza $(g_n : n \in \mathbb{N})$ koji konvergira ka nekoj tački $h \in X$, onda bi imali $\lim\limits_{i \to +\infty} d_{\sup}(g_n, h) = 0$, i specijalno $h(1) = \lim\limits_{i\to+\infty} g_{k_i}(1) = 1$, kao i $h(t) = \lim\limits_{i\to+\infty} g_{k_i}(t) = 0$ za svako $t \in [0;1)$. A ovo bi povlačilo da h nije neprekidna funkcija, tj. $h \notin X$.

Dakle niz $(g_n : n \in \mathbb{N})$ nema konvergentan podniz, te prostor $\big(K, \mathrm{rel}_K(\tau)\big)$ nije nizovno kompaktan. Kako je reč o metrizabilnom prostoru, ovo je ekvivalentno sa tim da prostor $\big(K, \mathrm{rel}_K(\tau)\big)$ nije kompaktan. $\square$

157. Neka je (X,τ) prostor iz **P 13**. Za $x \in \mathbb{R}$ neka je $p_x : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ projekcija definisana sa $p_x(f) := f(x)$. Neka je $\lambda := \bigotimes_{t\in\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{R}}$ (ovo je topologija na skupu ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$). Ako je $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ i $W_1, \ldots, W_n \in \mu_{\mathbb{R}}$, onda je lako videti da je

$$\mathrm{O}[r_1, \ldots, r_n | W_1, \ldots, W_n] = X \cap \bigcap_{t \in T} (p_t)^{\leftharpoonup} U_t$$

gde je $T := \{r_1, \ldots, r_n\}$ i $U_{r_i} := W_i$ za $i = \overline{1,n}$. Ovo znači da je $\tau = \mathrm{rel}_X(\lambda)$. Zato kako su p_t za $t \in \mathbb{R}$ λ-neprekidne funkcije to su $p_t \restriction X$ τ-neprekidne funkcije.

Neka su sada $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ i $W_1, \ldots, W_n \in \mu_{\mathbb{R}}$ tako da je $U := \mathrm{O}[r_1, \ldots, r_n | W_1, \ldots, W_n] \neq \varnothing$. Ovo specijalno znači da za svako

$i = \overline{1,n}$ možemo izabrati po neko $a_i \in W_i \neq \varnothing$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $i \neq j \Rightarrow r_i \neq r_j$ za $i,j = \overline{1,n}$. Izaberimo $s \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}$. Ako je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljno onda, kako je skup $\{r_1, \ldots, r_n, s\}$ sa $n+1$-elemenata, postoji neko $f_m : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ tako da je $f(s) = m$ i $f(r_i) = a_i$ za $i = \overline{1,n}$ (videti zadatak 147.); jasno $f_m \in U$. Zato je $\mathbb{N} = \{f_m(s) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \{g(s) : g \in U\}$ pa je $\{g(s) : g \in U\}$ neograničen podskup od $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo da postoji neki $F \subseteq X$ koji je τ-kompaktan i za koji je $U \subseteq F$. Skup $\{g(s) : g \in F\} = (p_s \upharpoonright X)^{\rightharpoonup} F$ je $\mu_{\mathbb{R}}$-kompaktan jer je $p_s \upharpoonright X$ τ-neprekidna funkcija, pa je kao takav ograničen. No $\{g(s) : g \in F\} \supseteq \{g(s) : g \in U\}$ pa bi i skup $\{g(s) : g \in U\}$ morao da bude ograničen – kontradikcija.

Ovim smo dokazali čak i nešto više od toga da (X, τ) ne može biti lokalno kompaktan.

Napomena 8. Iz činjenice da je $\tau = \mathrm{rel}_X(\lambda)$ sledi da za proizvoljno $F \subseteq X \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ važi da je F τ-kompaktan podskup od X ako i samo ako je λ-kompaktan podskup od ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Dajemo jedan jednostavan test λ-kompaktnosti podskupova od ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$: $F \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je λ-kompaktan ako i samo ako je λ-zatvoren i za svako $t \in \mathbb{R}$ je skup $\{f(t) : f \in F\}$ ograničen.

Da pokažemo ovo pretpostavimo najpre da je F λ-kompaktan. Kako je λ `Hausdorff`-ova topologija (kao proizvod `Hausdorff`-ovih) to F mora biti λ-zatvoren; ako je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljno, onda iz $M := \{f(t) : t \in \mathbb{R}\} = (p_t)^{\rightharpoonup} F$ i iz činjenice da je p_t λ-neprekidna funkcija sledi da je $M \subseteq \mathbb{R}$ $\mu_{\mathbb{R}}$-kompaktan skup pa znamo da kao takav mora biti ograničen.

Neka je sada F λ-zatvoren i neka za svako $t \in \mathbb{R}$ postoje realni brojevi $a_t < b_t$ tako da je $\{f(t) : f \in F\} \subseteq [a_t; b_t] =: J_t$. Imamo $F \subseteq Y \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, gde

$Y := \prod_{t\in\mathbb{R}} J_t$. No

$$\mathrm{rel}_Y(\lambda) = \mathrm{rel}_{\prod_{t\in\mathbb{R}} J_t}\left(\bigotimes_{t\in\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{R}}\right) = \bigotimes_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{rel}_{J_t}(\mu_{\mathbb{R}}) = \bigotimes_{t\in\mathbb{R}} \mu_{J_t}$$

pa kako je za svako $t \in \mathbb{R}$ μ_{J_t} kompaktna topologija, to sledi da je i $\mathrm{rel}_Y(\lambda)$ kompaktna topologija. Kako je F λ-zatvoren to je F i $\mathrm{rel}_Y(\lambda)$-zatvoren, te mora biti $\mathrm{rel}_Y(\lambda)$-kompaktan podskup od $Y \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, što je ekvivalentno s tim da je λ-kompaktan podskup od ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. $\square$

158. Za $x \in \mathbb{R}$ neka je $p_x : X \to \mathbb{R}$ projekcija definisana sa $p_x(f) := f(x)$. Neka je $T \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan neprazan konačan skup i $U_x \in \mu_{\mathbb{R}}$ za $x \in T$ tako da je $\varnothing \neq \bigcap_{x\in T} (p_x)^{\leftarrow} U_x$. Ovo specijalno znači da za svako $x \in T$ možemo izabrati po neko $r_x \in U_x \neq \varnothing$. Prema zadatku 147. znamo da postoji neko $g \in A$ tako da je $g(x) = r_x$ za svako $x \in T$. Očigledno je $g \in A \cap \bigcap_{x\in T} (p_i)^{\leftarrow} U_x$.

Ovim smo dokazali da je A gust podskup od ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Kako je $\tau := \bigotimes_{x\in\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{R}}$ `Hausdorff`-ova topologija to kad bi A bio τ-kompaktan podskup, onda bi morao biti i τ-zatvoren, a kako je A τ-gust ovo bi značilo da je $A = {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$; naravno nije svaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna. $\square$

159. Neka je $\big[(0;1) \cap \mathbb{Q}\big]^2 = \{q_n \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$, tako da $n \neq m \Rightarrow q_n \neq q_m$.

Neka je $a_{0,0} := (q_0(1), q_0(2), 1)$ i konstruišimo $a_{n,i}$ za $n \in \mathbb{N}$ i $i \in \{0, \dots, n-1\}$ na sledeći način:
$a_{1,0} := \big(q_1(1), q_1(2), a_{0,0}(3)/2\big)$;
$a_{2,0} := \big(q_2(1), q_2(2), a_{1,0}(3)/2\big)$, $a_{2,1} := \big(q_1(1), q_1(2), a_{2,0}(3)/2\big)$;
$a_{3,0} := \big(q_3(1), q_3(2), a_{2,1}(3)/2\big)$, $a_{3,1} := \big(q_1(1), q_1(2), a_{3,0}(3)/2\big)$,
$a_{3,2} := \big(q_2(1), q_2(2), a_{3,1}(3)/2\big)$;
i uopšte ako su $a_{k,i}$ za $k \in \mathbb{N} \cap [1;n]$ i $i \in \{0, \dots, k-1\}$ konstruisani definišimo:
$a_{n+1,0} := \big(q_{n+1}(1), q_{n+1}(2), a_{n,n-1}(3)/2\big)$, i $a_{n+1,i} := \big(q_i(1), q_i(2), a_{n+1,i-1}(3)/2\big)$

za $i = \overline{1, n}$.

Za $u, v \in \mathbb{R}^3$ definišimo $h_{u,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sa $h_{u,v}(t) = (1-t) \cdot u + t \cdot v$. Ako je $u \neq v$ lako je videti da je u tom slučaju preslikavanje $h_{u,v}$ injektivno i neprekidno te da je restrikcija $(h_{u,v}) \upharpoonright [0;1] : [0;1] \to (h_{u,v})^{\rightharpoonup}[0;1] = \mathrm{Seg}[u,v]$ homeomorfizam. Takođe ako $w \in \mathbb{R}^3$ nije kolinearno sa u i v, tj. ako $w \in \mathbb{R}^3 \setminus (h_{u,v})^{\rightharpoonup}\mathbb{R}$ (jasno je da je $(h_{u,v})^{\rightharpoonup}\mathbb{R}$ prava koja prolazi kroz u i v) onda, zbog $\mathrm{Seg}[u,v] \cap \mathrm{Seg}[v,w] = \{v\}$ i $h_{u,v}(1) = v = h_{v,w}(0)$, a na osnovu zadatka 51., lako je videti i da je preslikavanje $f : [0;1] \to \mathrm{Seg}[u,v] \cup \mathrm{Seg}[v,w]$ definisano sa

$$f(t) := \begin{cases} h_{u,v}(2t) & \text{ako} \quad t \in [0;1/2], \\ h_{v,w}(2t-1) & \text{ako} \quad t \in [1/2;1] \end{cases}$$

takođe homeomorfizam i to takav da $f(0) = u$ i $f(1) = w$.

Stavimo:

$F_{0,0} := \mathrm{Seg}\big[a_{0,0}, (a_{0,0}(1), a_{0,0}(2), a_{0,0}(3)/2)\big] \cup \mathrm{Seg}\big[(a_{0,0}(1), a_{0,0}(2), a_{0,0}(3)/2), a_{1,0}\big]$;
$F_{1,0} := \mathrm{Seg}\big[a_{1,0}, (a_{1,0}(1), a_{1,0}(2), a_{1,0}(3)/2)\big] \cup \mathrm{Seg}\big[(a_{1,0}(1), a_{1,0}(2), a_{1,0}(3)/2), a_{2,0}\big]$;
$F_{2,0} := \mathrm{Seg}\big[a_{2,0}, (a_{2,0}(1), a_{2,0}(2), a_{2,0}(3)/2)\big] \cup \mathrm{Seg}\big[(a_{2,0}(1), a_{2,0}(2), a_{2,0}(3)/2), a_{2,1}\big]$;
$F_{2,1} := \mathrm{Seg}\big[a_{2,1}, (a_{2,1}(1), a_{2,1}(2), a_{2,1}(3)/2)\big] \cup \mathrm{Seg}\big[(a_{2,1}(1), a_{2,1}(2), a_{2,1}(3)/2), a_{3,0}\big]$;

i za $n \geq 3$ definišemo:

$F_{n,i} := \mathrm{Seg}\big[a_{n,i}, (a_{n,i}(1), a_{n,i}(2), a_{n,i}(3)/2)\big] \cup \mathrm{Seg}\big[(a_{n,i}(1), a_{n,i}(2), a_{n,i}(3)/2), a_{n,i+1}\big]$
za $i = \overline{0, n-2}$, odnosno

$$F_{n,n-1} := \mathrm{Seg}\big[a_{n,n-1}, (a_{n,n-1}(1), a_{n,n-1}(2), a_{n,n-1}(3)/2)\big]$$
$$\cup \mathrm{Seg}\big[(a_{n,n-1}(1), a_{n,n-1}(2), a_{n,n-1}(3)/2), a_{n+1,0}\big].$$

Zbog $n \neq m \Rightarrow q_n \neq q_m$, a na osnovu definicije tačaka $a_{0,0}$ i $a_{n,i}$, imamo, kako smo to već primetili, da su $F_{0,0}$ i $F_{n,i}$ homeomorfni sa $[0;1]$.

Neka su $r_{n,i} \in (1;+\infty)$ za $n \in \mathbb{N}$ i $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ takvi da uvek važi $r_{n,i} < r_{n+1,j}$ i $r_{n,i} < r_{n,i+1}$. Neka je $r_{0,0} = 1$. Kako smo to ranije već primetili možemo fiksirati homeomorfizme
$g_{0,0} : [r_{0,0}; r_{1,0}] \to F_{0,0}$ tako da $g_{0,0}(r_{0,0}) = a_{0,0}$ i $g_{0,0}(r_{1,0}) = a_{1,0}$;
$g_{1,0} : [r_{1,0}, r_{2,0}] \to F_{1,0}$ tako da $g_{1,0}(r_{1,0}) = a_{1,0}$ i $g_{1,0}(r_{2,0}) = a_{2,0}$;
$g_{2,0} : [r_{2,0}, r_{2,1}] \to F_{2,0}$ tako da $g_{2,0}(r_{2,0}) = a_{2,0}$ i $g_{2,0}(r_{2,1}) = a_{2,1}$;
$g_{2,1} : [r_{2,1}, r_{3,0}] \to F_{2,1}$ tako da $g_{2,1}(r_{2,1}) = a_{2,1}$ i $g_{2,1}(r_{3,0}) = a_{3,0}$;

i za $n \geq 3$
$g_{n,i} : [r_{n,i}, r_{n,i+1}] \to F_{n,i}$ za $i = \overline{0, n-2}$, tako da $g_{n,i}(r_{n,i}) = a_{n,i}$ i $g_{n,i}(r_{n,i+1}) = a_{n,i+1}$ odnosno
$g_{n,n-1} : [r_{n,n-1}, r_{n+1,0}] \to F_{n,n-1}$, tako da $g_{n,n-1}(r_{n,n-1}) = a_{n,n-1}$ i $g_{n,n-1}(r_{n+1,0}) = a_{n+1,0}$.

Neka je $F_{-1,0} := \Big[\mathrm{Seg}[(0,0,0),(0,0,1)] \setminus \{(0,0,0)\}\Big] \cup \mathrm{Seg}[(0,0,1), a_{0,0}]$ i $g_{-1,0} : (-\infty;1] \to F_{-1,0}$ preslikavanje definisano sa

$$g_{-1,0}(t) := \begin{cases} (0,0,e^t) & \text{ako} \quad t \in (-\infty;0], \\ (1-t)\cdot(0,0,1) + t \cdot a_{0,0} & \text{ako} \quad t \in [0;1] \end{cases}.$$

Koristeći se zadatkom 51. kao i činjenicama:

- $F_{-1,0} \cap F_{0,0} = \{a_{0,0}\}$, $(g_{-1,0})^{-1}(a_{0,0}) = (g_{0,0})^{-1}(a_{0,0}) = r_{0,0}$,
- $F_{-1,0} \cap F_{n,i} = \varnothing$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $i \in \{0,\ldots,n-1\}$,
- $F_{0,0} \cap F_{1,0} = \{a_{1,0}\}$, $(g_{0,0})^{-1}(a_{1,0}) = (g_{1,0})^{-1}(a_{1,0}) = r_{1,0}$,
- $F_{0,0} \cap F_{n,i} = \varnothing$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $i \in \{0,\ldots,n-1\}$,

i inače za svako $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,\ldots,n_1\}$ i $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,\ldots,m-1\}$ važi ili $F_{n,i} \cap F_{m,j} = \varnothing$ ili za tačno jedno $z \in \mathbb{R}^3$ je $F_{n,i} \cap F_{m,j} = \{z\}$ i pritom je $(g_{n,i})^{-1}(z) = (g_{m,j})^{-1}(z)$

jednostavno je videti da je sa $g := g_{-1,0} \cup g_{0,0} \cup \bigcup\big\{g_{n,i} \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ i } i \in \{0,\ldots,n-1\}\big\}$ definisana neprekidna bijekcija $g : \mathbb{R} \to F_{-1,0} \cup F_{0,0} \cup \bigcup\big\{F_{n,i} \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ i } i \in \{0,\ldots,n-1\}\big\} =: L$. U to da je $g : \mathbb{R} \to L$ zapravo homeomorfizam možemo se uveriti tako što ćemo proveriti da je slika svakog skupa oblika $(a;b)$ za $\{a,b\} \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, μ_L-otvoren skup, a ovo nije teško uraditi ako se koristi činjenica da je po konstrukciji $F_{n,i} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \left\{2^{-\binom{n}{2}-i-1}\right\}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

Neka je $K := [0;1]^2 \times \{0\}$ i $X := K \cup L$. Pokažimo da je X tražena kompaktifikacija. Kako je $K \cap L = \varnothing$, a K je očigledno homeomorfan sa $[0;1]^2$, a L homeomorfno sa $\mathbb{R}$, ovo zapravo znači da treba samo dokazati da je X kompaktan i da je $\mathrm{cl}(L) = X$.

Kako je X je ograničen preostaje da pokažemo da je zatvoren. Neka je $(x_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ niz tačaka skupa X koji konvergira u prostoru $\mathbb{R}^3$ ka tački $z \in \mathbb{R}^3$. Iz $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0;1]^2 \times \mathbb{R}$ (a kako je $[0;1]^2 \times \mathbb{R}$ zatvoren) sledi $z \in [0;1]^2 \times \mathbb{R}$.

Slučaj 1: 0 je tačka nagomilavanja niza $(n \in \mathbb{N} \ : \ x_n(3))$. Kako niz $(x_n(3) \ : \ n \in \mathbb{N})$ konvergira ka $z(3)$ ovo zapravo znači da je $z(3) = 0$, tj. $z \in K \subseteq X$.

Slučaj 2: Postoje $1 > \varepsilon > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\varepsilon < |x_n(3)| = x_n(3)$ za svako $n \geq n_0$.

U ovom slučaju postoji konačan $T \subseteq \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big(\{n\} \times \{0,\dots,n-1\}\big)$ tako da je $\big\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N} \cap [n_0;+\infty)\big\} \subseteq \big\{(0,0,t) \ : \ t \in [\varepsilon;1]\big\} \cap \Bigg(F_{-1,0} \cup \bigcup_{(i,j)\in T} F_{i,j}\Bigg) =: G$. Ovo je zato što važi $F_{n,i} \subseteq (0;1]^2 \times \left\{2^{-\binom{n}{2}-i-1}\right\}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

Dalje svaki od $F_{i,j}$ za $(i,j) \in T$ je zatvoren podskup od $\mathbb{R}^3$ (jer je neprekidna slika kompakta - zatvorenog segmenta realne prave), a zatvoreni su i $\big\{(0,0,t) \ : \ t \in [\varepsilon;1]\big\}$ i $F_{-1,0} \cap \big\{(0,0,t) \ : \ t \in [\varepsilon;1]\big\}$. Kako je T konačan odavde sledi da je G zatvoren podskup od $\mathbb{R}^3$ pa mora biti $z \in G \subseteq L \subseteq X$.

Nakon što smo dokazali da je X kompaktan, dokazujemo da je L gust u X. Neka su $x \in K$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $m \in \mathbb{N}$ tako da je $\max\big\{|x(1) -$

$q_m(1)|, |x(2) - q_m(2)|\bigr\} < \varepsilon$ i neka je $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n > m$ i $2^{-n} < \varepsilon$. Tada je $a_{n,i_0}(1) = q_m(1)$ i $a_{n,i_0}(2) = q_m(2)$ za neko $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$. Kako je takođe $a_{n,i_0}(3) = 2^{-\binom{n}{2}-i_0-1} < 2^{-n} < \varepsilon$, a $x(3) = 0$, to je

$$a_{n,i} \in L \cap \Bigl(\bigl(x(1)-\varepsilon; x(1)+\varepsilon\bigr) \times \bigl(x(2)-\varepsilon; x(2)+\varepsilon\bigr) \times \bigl(x(3)-\varepsilon; x(3)+\varepsilon\bigr) \Bigr) \neq \varnothing.$$

$\square$

160. (1) Neka je $h : [0;1]^2 \to [0;1] \times S$ definisano sa

$$h(x, y) = (x, (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)))$$

Lako je videti da je $\ker(h) = E$. g je (τ_X, τ_Y)-neprekidno kao proizvod $(\mu_{[0;1]}, \mu_{[0;1]})$-neprekidnog preslikavanja $\mathrm{id}_{[0;1]}$ i $(\mu_{[0;1]}, \tau_S)$-neprekidnog preslikavanja $p : [0;1] \to S$ definisanog sa $p(y) = (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$. τ_X je kompaktna topologija, a τ_Y T_2 topologija pa je g (τ_X, τ_Y)-zatvoreno. Kako je h preslikavanje **na** skup Y to zaključujemo da je h je (τ_X, τ_Y)-količničko. Otuda je $h_\diamond : X_{/E} \to Y$ $(\mathrm{Factor}(\tau_X, E), \tau_Y)$-homeomorfizam.

(2) Neka je $f : [0;1]^2 \to S \times S$ definisano sa $f(x, y) = (\dot{\mathrm{e}}^{2\pi x \mathrm{i}}, \dot{\mathrm{e}}^{2\pi y \mathrm{i}})$. Kao u delu pod **(1)** zaključujemo da je ovo (τ_X, τ_Y)-količničko preslikavanje, a jednostavno je proveriti i da je $\ker(f) = E$, tako da je $f_\diamond : X_{/E} \to Y$ $(\mathrm{Factor}(\tau_X, E), \tau_Y)$-homeomorfizam.

(3) Za $u \in [0;1]$ neka je $M(u) := (2 + \cos(2\pi u), 0, \sin(2\pi u))$. Jasno $\mathcal{K} = \{M(u) : u \in [0;1]\}$. Za $u \in [0;1]$ sa $\mathcal{K}_u$ označimo skup

$$\bigl\{ \bigl((2 + \cos(2\pi u)) \cos(2\pi v), (2 + \cos(2\pi u)) \sin(2\pi v), \sin(2\pi u)\bigr) : v \in [0;1] \bigr\}$$

tj. kružnicu koja nastaje rotiranjem tačke $M(u)$ oko z-ose. Jasno

$$Y = \bigcup_{u \in [0;1]} \mathcal{K}_u =$$

$$= \bigl\{ \bigl((2+\cos(2\pi u)) \cos(2\pi v), (2+\cos(2\pi u)) \sin(2\pi v), \sin(2\pi u)\bigr) : u, v \in [0;1] \bigr\}$$

Dakle preslikavanje $g : [0;1]^2 \to Y$ definisano sa

$$g(x,y) = \big((2+\cos(2\pi u))\cos(2\pi v), (2+\cos(2\pi u))\sin(2\pi v), \sin(2\pi u)\big)$$

slika X **na** Y. Za $u_1, u_2 \in [0;1]$ imamo da je $g^{\rightharpoonup}(\{u_1\} \times [0;1]) = \mathcal{K}_{u_1}$ kao i da $M(u_1) \neq M(u_2)$ povlači $\mathcal{K}_{u_1} \cap \mathcal{K}_{u_2} = \varnothing$. Dakle ako su $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0;1]^2$ takvi da je $g(u_1, v_1) = g(u_1, v_1)$, onda mora biti $M(u_1) = M(u_2)$, tj. $\cos(2\pi u_1) = \cos(2\pi u_2)$ i $\sin(2\pi u_1) = \sin(2\pi u_2)$; obzirom da su $u_1, u_2 \in [0;1]$ to mora biti $u_1 = u_2$ ili $\{u_1, u_2\} \subseteq \{0,1\}$; iz $g(u_1, v_1) = g(u_1, v_1)$ dalje sledi $\cos(2\pi v_1) = \cos(2\pi v_2)$ i $\sin(2\pi v_1) = \sin(2\pi v_2)$, tj. $v_1 = v_2$ ili $\{v_1, v_2\} \subseteq \{0,1\}$. Vidimo dakle da je $\ker(g) \subseteq E$. Lako se proverava da je i $E \subseteq \ker(g)$.

Kao u delu **(1)** zaključujemo da je g (τ_X, τ_Y)-količničko preslikavanje pa je $g_\diamond : X_{/E} \to Y$ $(\mathrm{Factor}(\tau_X, E), \tau_Y)$-homeomorfizam. □

161. (1) Funkcija $h : X \to S$ definisana sa $h(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ je (τ_X, μ_S)-količničko preslikavanje i važi $\ker(h) = E$.

(2) Funkcija $f : X \to S_{/F}$ definisana sa $f(x) = [(\cos(\pi x), \sin(\pi x))]_F$ je $(\tau_X, \mathrm{Factor}(\mu_S, F))$-neprekidna jer je $f = p \circ g$ gde je $g : X \to S$ definisana sa $g(x) = (\cos(\pi x), \sin(\pi x))$ (a ova funkcija je (τ_X, μ_S)-neprekidna) i $p : S \to S_{/F}$ prirodna projekcija indukovana sa F. Lako je videti da je f **na** skup $S_{/F}$. Ako pokažemo da je $\lambda := \mathrm{Factor}(\mu_S, F)$ T_2 topologija, onda će, obzirom da je τ_X kompaktna topologija, slediti da je f količničko preslikavanje, pa kako je očigledno $\ker(f) = F$ dobićemo da je $f_\diamond$ (τ_X, λ)-homeomorfizam.

Ako je $N_1 = \{\dot{e}^{\alpha \mathrm{i}}, \dot{e}^{(\alpha+\pi)\mathrm{i}}\}$ i $N_2 = \{\dot{e}^{\beta \mathrm{i}}, \dot{e}^{(\beta+\pi)\mathrm{i}}\}$ za neke $\alpha, \beta \in [0;\pi]$ tako da je $\alpha \neq \beta$, onda je očigledno da postoji realan broj $\varepsilon > 0$ tako da su

$$U := \{\dot{e}^{t\mathrm{i}} : t \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\} \cup \{\dot{e}^{t\mathrm{i}} : t \in (\alpha - \varepsilon + \pi, \alpha + \varepsilon + \pi)\}$$

i

$$V := \{\dot{e}^{t\mathrm{i}} : t \in (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)\} \cup \{\dot{e}^{t\mathrm{i}} : t \in (\beta - \varepsilon + \pi, \beta + \varepsilon + \pi)\}$$

disjuktni. U i V su jasno μ_S-otvoreni i pravilni za F, pa su $U_0 := p^{\rightharpoonup} U$ i $V_0 := p^{\rightharpoonup} V$ disjunktni, λ-otvoreni skupovi. Naravno $N_1 \in U_0$ i $N_2 \in V_0$.

Drugi način da se uverimo u to da je λ T_2 topologija jeste da primetimo da je p (μ_S, λ)-otvoreno preslikavanje kao i da je F $\mu_S \times' \mu_S$-zatvoren podskup od S^2 (provera ovih dveju činjenica je jednostavna pa je prepuštamo čitaocu) i da onda primenimo naredno korisno tvrđenje:

ako je (Z, τ_Z) proizvoljan prostor F relacija ekvivalencije na X koja je $\tau_Z \times' \tau_Z$-zatvoren podskup od Z^2 i ako je prirodna projekcija p indukovana sa F $(\tau_Z, \mathrm{Factor}(\tau_Z, F))$-otvoreno preslikavanje, onda je $\mathrm{Factor}(\tau_Z, F)$ T_2 topologija.

Da pokažemo ovo neka su $a, b \in Z$ tako da je $[a]_F \neq [b]_F$. Tada je $(a, b) \in Z^2 \setminus F$ pa (F je $\tau_Z \times' \tau_Z$-zatvoren) postoje τ_Z-otvoreni $U \ni a$ i $V \ni b$ tako da je $U \times V \subseteq Z^2 \setminus F$. $U_0 := p^{\rightharpoonup} U$ i $V_0 := p^{\rightharpoonup} V$ su $\mathrm{Factor}(\tau_Z, F)$-otvoreni (jer je p $(\tau_Z, \mathrm{Factor}(\tau_Z, F))$-otvoreno preslikavanje) i jasno $[a]_F = p(a) \in U_0$ i $[b]_F = p(b) \in V_0$. Kad bi bilo $c \in U_0 \cap V_0$ za neko $c \in Z_{/F}$, onda bi postojali $a_1 \in U$ i $b_1 \in V$ tako da je $[a_1]_F = p(a_1) = c = p(b_1) = [b_1]_F$, a odavde bi sledilo da je $(a_1, b_1) \in (U \times V) \cap F \neq \varnothing$, što bi protivurečilo izboru skupova U i V. Dakle mora biti $U_0 \cap V_0 = \varnothing$. $\square$

162. Neka su $a \in X$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$ proizvoljni. Sa S označimo skup svih onih tačaka $c \in X$ za koje postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in X$ tako da je $a = x_0$, $c = x_n$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ za $i = \overline{1, n}$. Jasno $a \in S \neq \varnothing$.

Pokažimo da je S $\mathrm{Top_m}(d)$-otvoren. Neka je $c \in S$. Tada mora biti $\mathrm{K}_d[c; \varepsilon) \subseteq S$. Zaista, ako je $c_0 \in \mathrm{K}_d[c; \varepsilon)$ i $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in X$ tako da je $a = x_0$, $c = x_n$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ za $i = \overline{1, n}$, onda ako uzmemo $x_{n+1} = c_0$ imamo $a = x_0$, $c_0 = x_{n+1}$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ za $i = \overline{1, n+1}$, pa je $c_0 \in S$.

Pokažimo da je S $\mathrm{Top_m}(d)$-zatvoren. Neka je $c \in X \setminus S$. Tada mora biti $\mathrm{K}_d[c; \varepsilon) \cap S = \varnothing$. Zaista ako bi postojalo neko $c_0 \in \mathrm{K}_d[c; \varepsilon) \cap S$ tada bi za neke $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in X$ bilo $a = x_0$, $c_0 = x_n$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ za $i = \overline{1, n}$; no onda ako uzmemo $x_{n+1} = c$ imamo $a = x_0$, $c = x_{n+1}$ i $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ za $i = \overline{1, n+1}$, pa je $c \in S$ - kontradikcija.

Dakle S je neprazan $\mathrm{Top_m}(d)$-otvoreno-zatvoren podskup od X pa kako je $\big(X, \mathrm{Top_m}(d)\big)$ povezan to mora biti $S = X$. $\square$

163. **(1)** Stavimo $S := \bigcup_{i \in I} A_i$. Neka su $U, V \subseteq X$ otvoreni skupovi takvi da je $S \cap U \cap V = \varnothing$ i $S \subseteq U \cup V$. Kako je $A_{i_0} \subseteq U \cup V$, $A_{i_0} \cap U \cap V \subseteq S \cap U \cap V = \varnothing$, a A_{i_0} povezan skup, to postoji $W_0 \in \{U, V\}$ tako da je $A_{i_0} \subseteq W_0$.

Neka je $i \in I$ proizvoljno. Kako je $A_i \subseteq U \cup V$, $A_i \cap U \cap V \subseteq S \cap U \cap V = \varnothing$, a A_i povezan skup, to postoji $W \in \{U, V\}$ tako da je $A_i \subseteq W$. Kad bi bilo $W_0 \neq W$ onda bi imali $\{W, W_0\} = \{U, V\}$ te i $W_0 \cap W = \varnothing$. Zbog $A_{i_0} \subseteq W_0 \in \tau$ i $A_i \subseteq W \in \tau$, ovo povlači da je $\overline{A_{i_0}} \subseteq X \setminus W$ i $\overline{A_i} \subseteq X \setminus W_0$, pa je otuda $\overline{A_{i_0}} \cap A_i = \varnothing$ i $A_{i_0} \cap \overline{A_i} = \varnothing$, suprotno pretpostavci.

(2) Stavimo $I := \{A\} \cup B$ i definišimo $S_x := \{x\}$ za $x \in B$, odnosno $S_A := A$. Za svako $i \in I$ skup S_i je povezan, i važi $\overline{S_A} \cap S_i \neq \varnothing$ za svako $i \in I$. Kako je $B = \bigcup_{i \in I} S_i$ tvrđenje sledi iz dela pod **(1)**.

Pokažimo sada tvrđenje i direktno. Neka su $U, V \subseteq X$ otvoreni skupovi takvi da je $B \cap U \cap V = \varnothing$ i $B \subseteq U \cup V$. Tada je i $A \cap U \cap V = \varnothing$ i $A \subseteq U \cup V$, pa kako je A povezan to mora biti $A \subseteq W_1$ za neko $W_1 \in \{U, V\}$. Neka je $\{W_2\} = \{U, V\} \setminus \{W_1\}$. Neka je $b \in B$ proizvoljno. Iz $b \in W_2 \in \tau$ i $b \in B \subseteq \overline{A}$ sledi da postoji neko $a \in A \cap W_2$. No ovo znači da je $a \in A \cap W_1 \cap W_2 = A \cap U \cap V = \varnothing$. Dakle ne može biti $b \in W_2$. Zato sada iz $B \subseteq W_1 \cup W_2$ sledi da je $B \subseteq W_1 \in \{U, V\}$. $\square$

164. Za $x \in X$ neka je $C_x := \bigcup\{A \subseteq X \,:\, x \in A \text{ i } A \text{ je povezan skup}\}$ komponenta povezanosti tačke x u datom prostoru.

(1) Neka je $x \sim y$ i $y \sim z$, tj. neka je $x, y \in P$ i $y, z \in Q$, za neke povezane skupove $P, Q \subseteq X$. Zbog $y \in P \cap Q \neq \varnothing$ je i skup $P \cup Q$ povezan, a pritom je $x, z \in P \cup Q$. Dakle $x \sim z$.

(2) Imamo

$$z \in C_x$$

ako i samo ako

$$\exists A \subseteq X \ (A \text{ je povezan, } x \in A \text{ i } z \in A)$$

ako i samo ako

$$\exists A \subseteq X \ (A \text{ je povezan i } \{x,z\} \subseteq A)$$

ako i samo ako

$$x \sim z$$

ako i samo ako

$$z \in [x]_\sim .$$

Prema (1) iz zadatka 163. skup C_x je povezan. Ako je $M \subseteq X$ povezan skup takav da je $C_x \subseteq M$, onda je $x \in C_x \subseteq M$ pa je $M \subseteq C_x$, tj. $M = C_x$.

(3) Neka je $S \subseteq X$ maksimalan povezan podskup od X. Uočimo proizvoljnu tačku $x \in S$ i pokažimo da je $S = C_x$. Kako je S povezan skup to prema definiciji samog pojma komponente povezanosti mora biti $S \subseteq C_x$. Na osnovu dela pod **(2)** skup C_x je povezan, pa prema učinjenoj pretpostavci o skupu S, odavde sada sledi da je $S = C_x$.

(4) Na osnovu (2) iz zadatka 163. imamo da je $\overline{C_x}$ povezan skup, pa sada prema delu pod **(2)**, a zbog $C_x \subseteq \overline{C_x}$, sledi da je $C_x = \overline{C_x}$. □

165. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije iz zadatka 164. Neka je $x \in X$ i neka je $C \subseteq X$ komponenta povezanosti prostora (X, τ). Imamo $C = [y]_\sim$. Za proizvoljno $x \in X$ sa K_x označimo komponentu povezanosti tačke x u prostoru (X, τ). Dakle postoji $y \in X$ tako da je $C = K_y = [y]_\sim$. Ako je $x \in X$ proizvoljno imamo

$$x \in C \iff x \in [y]_\sim \iff x \sim y \iff [x]_\sim = [y]_\sim \iff K_y = C$$

□

166. Neka je svaku tačku $x \in X$ skup C_x komponenta povezanosti, a Q_x kvazikomponenta povezanosti te tačke. Neka su $S \ni x$ povezan podskup od X i $A \ni x$ otvoreno-zatvoren podskup od X. Kako je $S \subseteq A \cup A^c$, oba skupa A i A^c su otvorena, a S povezan, to mora biti $S \subseteq A$ ili $S \subseteq A^c$. Zbog $x \in S \cap A \neq \varnothing$ imamo da je $S \subseteq A$. Ovim smo pokazali da mora biti $C_x \subseteq Q_x$.

Za svako $x \in X$ stavimo

$$\mathcal{F}_x := \{A \subseteq X \,:\, x \in A \text{ i } A \text{ je otvoreno-zatvoren}\}\,.$$

Dakle $Q_x = \bigcap \mathcal{F}_x$.

Pokažimo sada da iz $z \in Q_x$ mora da sledi $\mathcal{F}_z = \mathcal{F}_x$, te specijalno i $Q_z = Q_x$. Ako je $A \in \mathcal{F}_x$ onda je $z \in Q_x = \bigcap \mathcal{F}_x \subseteq A$ pa je $A \in \mathcal{F}_z$. Ovim smo pokazali da je $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_z$. Ako je $B \in \mathcal{F}_z$ takav da je $x \notin B$, onda je B^c otvoreno-zatvoren skup takav da je $x \in B^c \not\ni z$, tj. $B^c \in \mathcal{F}_x \setminus \mathcal{F}_z$, što protivureči onom što smo već pokazali. Dakle mora biti i $\mathcal{F}_z \subseteq \mathcal{F}_x$.

Da pokažemo da kvazikomponente čine particiju skupa X, preostaje da primetimo da ako su $x, y \in X$ takve tačke da postoji neko $z \in Q_x \cap Q_y$, onda na osnovu ovog što smo upravo pokazali mora biti $Q_x = Q_z = Q_y$. $\square$

167. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka,

$$\mathcal{F}_x := \{A \subseteq X \,:\, x \in A \text{ i } A \text{ je otvoreno-zatvoren}\}$$

i $Q_x := \bigcap \mathcal{F}_x$ kvazikomponenta povezanosti tačke x.

Pretpostavimo da su K_1 i K_2 $\mathrm{rel}_{Q_x}(\tau)$-zatvoreni disjunktni skupovi takvi da je $Q_x = K_1 \cup K_2$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $x \in K_1$. Skup Q_x je zatvoren pa su zato i skupovi K_1 i K_2 zatvoreni. Kako je prostor (X, τ) normalan kao `Hausdorff`-ov i kompaktan, to postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $K_1 \subseteq U$, $K_2 \subseteq V$ i $U \cap V = \varnothing$. Svaki $A \in \mathcal{F}_x$ je kompaktan skup, kao zatvoren podskup kompaktnog prostora. Zato sada iz $\bigcap \mathcal{F}_x = Q_x = K_1 \cup K_2 \subseteq U \cup V$ prema zadatku 145. sledi da postoji neki konačan $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_x$ takav da je $G := \bigcap \mathcal{M} \subseteq U \cup V$. Skup G je otvoreno-zatvoren pa je skup $G \cup U$ otvoren. Kako je G zatvoren i važi $G \subseteq U \cup V$, $U, V \in \tau$ i $U \cap V = \varnothing$ to na osnovu zadatka 37. sledi da je $G \cap U$ zatvoren skup. Dakle $x \in U \cap Q_x = U \cap \bigcap \mathcal{F}_x \subseteq U \cap \bigcap \mathcal{M} = U \cap G$ pa kako je $G \cap U$ otvoreno-zatvoren skup, zaključujemo da je $G \cap U \in \mathcal{F}_x$. Zato je $Q_x \subseteq G \cap U \subseteq U$, tj. $K_2 = \varnothing$. $\square$

168. Neka je (X,τ) prostor iz **P 7**. Ako su F_1 i F_2 zatvoreni i neprazni skupovi, onda možemo izabrati $x_1 \in F_1$ i $x_2 \in F_2$; tada je $x_1x_2 \in x_1\mathbb{N} \cap x_2\mathbb{N} = \mathrm{cl}\,(\{x_1\}) \cap \mathrm{cl}\,(\{x_2\}) \subseteq \overline{F_1} \cap \overline{F_2} = F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ (videti zadatak 29.). Dakle svaka dva neprazna zatvorena skupa imaju neprazan presek.

Neka je (X,τ) prostor iz **P 9** ili **P 10**. Ako su U_1 i U_2 neprazni otvoreni skupovi možemo izabrati $l_i \in U_i$ i $k_i \in \mathbb{N}$ tako da je $A_i := \mathbb{N} \cap (l_i + k_i\mathbb{Z}) \subseteq U_i$, za $i = \overline{1,2}$; no tada je $k_1k_2 \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \subseteq \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \neq \varnothing$ (videti rešenje dela pod (2) zadatka 113.). Dakle zatvorenja proizvoljna dva neprazna otvorena skupa imaju neprazan presek.

Neka je sada (Y,τ_Y) proizvoljan prostor i $f : (Y,\tau_Y) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ tako da postoje $a_1, a_2 \in f^{\rightharpoonup}Y$ pri čemu $a_1 \neq a_2$. Ako je $\varepsilon := |a_2 - a_1|/3$ i $U_i := f^{\leftharpoonup}(a_i - \varepsilon; a_i + \varepsilon)$, $F_i := f^{\leftharpoonup}\{a_i\}$ za $i = \overline{1,2}$, onda su U_1 i U_2 neprazni otvoreni skupovi, F_1 i F_2 neprazni zatvoreni skupovi i imamo $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \subseteq f^{\leftharpoonup}[a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon] \cap f^{\leftharpoonup}[a_2 - \varepsilon; a_2 + \varepsilon] = \varnothing$ i $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Iz gore izloženog možemo zaključiti da ako je (X,τ) prostor iz **P 7**, **P 9** ili **P 10**, onda svako $f : (X,\tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ mora biti konstantno preslikavanje. Ako je $\varnothing \neq S \subset Y$ τ_Y-otvoreno-zatvoren podskup prostora (Y,τ_Y), onda je $g : Y \to \mathbb{R}$ definisano sa $g(y) = 0$ ako $y \in Y \setminus S$, odnosno $g(y) = 1$ ako $y \in S$, τ_Y-neprekidno preslikavanje koje nije konstantno. Zato najzad možemo zaključiti i da su sva tri dotična prostora povezana. $\square$

169. **(1)** Da pokažemo da je A povezan skup, neka su F_1 i F_2 $\mathrm{rel}_A(\tau)$-zatvoreni skupovi takvi da je $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ i $F_1 \cup F_2 = A$. Kako je A zatvoren to su i F_1 i F_2 zatvoreni. Iz $A \cap B = (B \cap F_1) \cap (B \cap F_2)$, a kako su $B \cap F_1$ i $B \cap F_2$ zatvoreni, disjunktni skupovi, a $A \cap B$ povezan skup, sledi da je $B \cap F_1 = \varnothing$ ili $B \cap F_2 = \varnothing$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $B \cap F_1 = \varnothing$. Tada je $A \cup B = F_1 \cup (F_2 \cup B)$, skupovi F_1 i $F_2 \cup B$ su zatvoreni, važi $F_1 \cap (F_2 \cup B) = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap B) = \varnothing$ i skup $A \cup B$ je povezan pa mora biti $A \cup B \subseteq F_1$ ili $A \cup B \subseteq F_2 \cup B$. U prvom slučaju iz $F_2 \subseteq A \subseteq F_1$ i $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ sledi da je $F_2 = \varnothing$. U drugom slučaju iz $F_1 \subseteq A \subseteq F_2 \cup B$ i $F_1 \cap B = \varnothing$ sledi da je $F_1 \subseteq F_2$, pa ponovo zbog $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ mora biti $F_1 = \varnothing$.

Primetimo da tvrđenje ostaje na snazi ukoliko se za oba skupa, umesto da su zatvoreni, pretpostavi da su otvoreni.

(2) Iz zadatka 38., obzirom da je G otvoren skup, sledi da je $G \cap \mathrm{bd}(G) = \varnothing$, tj. $\mathrm{bd}(G) \subseteq X \setminus G$. Ako stavimo $A := \overline{G} = G \cup \mathrm{bd}(G)$ i $B := X \setminus G$ imamo da je

$$A \cap B = \big(G \cup \mathrm{bd}(G)\big) \cap (X \setminus G) = \mathrm{bd}(G) \cap (X \setminus G) = \mathrm{bd}(G)$$

povezan skup. Kako je $A \cup B = X$, a (X, τ) po pretpostavci povezan prostor, to tvrđenje sledi iz dela pod **(1)**. $\square$

170. Neka je $a \in X$ proizvoljna tačka. Stavimo $S := \{x \in X : f(x) = f(a)\}$. Pokažimo da je S otvoreno-zatvoren skup, iz čega bi, zbog $a \in S \neq \varnothing$ i činjenice da je (X, τ_X) povezan prostor, sledilo da je $S = X$, tj. $f(x) = f(a)$ za svako $x \in X$.

Neka je $z \in S$. Po pretpostavci postoji neki otvoren skup $U \ni z$ takav da je $f(x) = f(z)$ za svako $x \in U$. Kako je $f(z) = f(a)$ odavde sledi da je $z \in U \subseteq S$. Ovim smo pokazali da je S otvoren skup.

Neka je $z \in X \setminus S$. Po pretpostavci postoji neki otvoren skup $U \ni z$ takav da je $f(x) = f(z)$ za svako $x \in U$. Kako je $f(z) \neq f(a)$ odavde sledi da je $f(x) \neq f(a)$ za svako $x \in U$, tj. da je $z \in U \subseteq X \setminus S$. Ovim smo pokazali da je $X \setminus S$ otvoren skup. $\square$

171. Stavimo $Y_0 := f^{\rightharpoonup} X$ i $\tau_{Y_0} := \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y)$. Tada je $f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\mathsf{c}} (Y_0, \tau_{Y_0})$. Izaberimo proizvoljno $y \in Y_0$. Kad bi (Y_0, τ_{Y_0}) bio diskretan prostor, onda bi skup $\{y\}$ bio τ_{Y_0}-otvoreno-zatvoren. Otuda bi skup $f^{\leftharpoonup}\{y\}$ bio τ_X-otvoreno-zatvoren. Kako je $y \in f^{\rightharpoonup} X$ to je $f^{\leftharpoonup}\{y\} \neq \varnothing$, pa kako je (X, τ_X) povezan prostor, zaključujemo da mora biti $f^{\leftharpoonup}\{y\} = X$, tj. dobijamo da je f konstantno preslikavanje, suprotno pretpostavci.

Dakle skup Y_0 ne može biti diskretan podskup prostora (Y, τ_Y), tj. mora da postoji neka tačka $a \in Y_0$ koja nije izolovana tačka skupa Y_0. Kako je a τ_Y-tačka nagomilavanja skupa Y_0, to ako je (Y, τ_Y) T_1 prostor, onda u svakoj okolini tačke a mora biti beskonačno mnogo elemenata skupa Y_0, pa specijalno Y_0 mora biti beskonačan.

Pokažimo sada da ako je (Y, τ_Y) T_1 prostor, onda skup Y_0 zapravo ne može imati nijednu izolovanu tačku. Zaista, neka je, suprotno ono što treba pokazati, $z \in Y_0$ izolovana tačka skupa Y_0. Drugim rečima, pretpostavimo da postoji neki τ_Y-otvoren skup $V \ni z$ takav da je $V \cap Y_0 = \{z\}$. Imamo $f^{\leftharpoonup}\{z\} = f^{\leftharpoonup}\big(V \cap f^{\rightharpoonup}X\big) = f^{\leftharpoonup}V \in \tau_X$. Takođe, kako je (Y, τ_Y) T_1 prostor, to je $\{z\}$ τ_Y-zatvoren skup pa je $f^{\leftharpoonup}\{z\}$ τ_X-zatvoren skup. Kako je $z \in f^{\rightharpoonup}X$ to je $f^{\leftharpoonup}\{z\} \neq \varnothing$, pa kako je (X, τ_X) povezan prostor, zaključujemo da mora biti $f^{\leftharpoonup}\{z\} = X$, tj. dobijamo da je f konstantno preslikavanje, suprotno pretpostavci. $\square$

172. Ako je $\prec$ strogo linearno uređenje na nekom skupu Y, $\tau_Y := \mathrm{lot}(\prec)$ i (X, τ_X) takav prostor da je za svako $x \in X$ skup $X \setminus \{x\}$ τ_X-povezan, a sam X je bar tročlan, onda ne postoji nijedna (τ_X, τ_Y)-neprekidna injekcija $f : X \to Y$. Da pokažemo ovo neka je suprotno ovom tvrđenju $f : X \to Y$ injektivno i (τ_X, τ_Y)-neprekidno preslikavanje. X je bar tročlan, a f injektivno pa postoje $a, b, c \in f^{\rightharpoonup}X$ tako da je $a \neq b \neq c \neq a$. Kako je $\prec$ linearno to bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a \prec b \prec c$. Skup $f^{\leftharpoonup}\{b\}$ je jednočlan (ponovo jer je f injektivno) pa je po pretpostavci $X_0 := X \setminus f^{\leftharpoonup}\{b\}$ τ_X-povezan. Obzirom na (τ_X, τ_Y)-neprekidnost preslikavanja f ovo povlači da je $Y_0 := f^{\rightharpoonup}X_0 \not\ni b$ skup koji je τ_Y-povezan. No $a \in (\leftarrow; b)_{\prec} \cap Y_0 =: A \in \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y)$, $c \in (b; \rightarrow)_{\prec} \cap Y_0 =: B \in \mathrm{rel}_{Y_0}(\tau_Y)$ i $Y_0 = A \cup B$, pri čemu je (jasno) $A \cap B = \varnothing$. Ovo protivureči činjenici da je Y_0 τ_Y-povezan.

Iz upravo dokazane činjenice **(1)** sledi direktno, dok **(2)** proizilazi iz nje i toga da kad bi $\prec$ bilo neko strogo linearno uređenje na skupu $\mathbb{R}^n$ tako da je $\mu_{\mathbb{R}^n} \supseteq \mathrm{lot}(\prec)$, onda bi $\mathrm{id}_{\mu_{\mathbb{R}^n}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ moralo da bude $\mathrm{lot}(\prec)$-neprekidno preslikavanje. $\square$

173. Pokažimo da ako je $\prec$ **proizvoljno** strogo linearno uređenje na nekom skupu X i $\tau := \mathrm{lot}(\prec)$, onda je (X, τ) povezan prostor ako i samo ako važi

konjunkcija sledeća dva uslova (a) i (b):
(a) $\forall a, b \in X \ \big(a \prec b \Rightarrow \exists c \in X \ (a \prec c \prec b)\big)$
i
(b) *svaki neprazan $\prec$-odozgo ograničen podskup od X ima $\prec$-supremum.*

Neka je najpre (X, τ) povezan. Pretpostavimo suprotno onom se tvrdi pod (a) da postoje $a, b \in X$ takvi da $a \prec b$ i $(a; b)_\prec = \varnothing$. Tada za $U := (\leftarrow; b)_\prec$ i $V := (a; \rightarrow)_\prec$ važi $a \in U \neq \varnothing$, $b \in V \neq \varnothing$, $U \cap V = (a; b)_\prec = \varnothing$, $\{U, V\} \subseteq \tau$ i $X = U \cup V$ - dakle (X, τ) nije povezan, kontradikcija.

Dalje pretpostavimo suprotno onom se tvrdi pod (b) da postoji nepazan $A \subseteq X$ takav da je skup $M := \{x \in X \ : \ \forall a \in A \ (a \preceq x)\}$ neprazan ali da M nema najmanji element.

Dokazujemo da je M otvoren. Neka je $x \in M$. Kako M nema najmanji element to postoji neko $y \in M$ tako da je $y \prec x$, tj. $x \in (y; \rightarrow)_\prec \in \tau$. Takođe je $(y; \rightarrow)_\prec \subseteq M$. Zaista ako je $z \in (y; \rightarrow)_\prec$ i $a \in A$, onda $y \succ a$ (zbog $y \in M$) te i $z \succ a$ (zbog $z \succ y$).

Dokazujemo da je M^c otvoren. Neka je $x \in M^c$. Dakle postoji neko $a_0 \in A$ tako da je $x \prec a_0$. Imamo $(\leftarrow; a_0)_\prec \subseteq M^c$: zaista, ako je $z \in (\leftarrow; a_0)_\prec$ onda $\neg\forall a \in A \ (a \preceq z)$ jer $a_0 \in A$ i $z \prec a_0$.

Najzad $M \neq \varnothing$ po pretpostavci i $\varnothing \neq A \subseteq M^c$ - ako $a \in A$ onda (obzirom da A nema $\prec$-najveći element jer bi on automatski bio $\prec$-supremum skupa A) $\exists b \in A \ (a \prec b)$ pa $a \notin M$.

Neka sada važe uslovi (a) i (b) i neka su suprotno onom što treba dokazati $\varnothing \neq U \in \tau$, $\varnothing \neq V \in \tau$ tako da je $U \cap V = \varnothing$ i $U \cup V = X$. Izaberimo $u_0 \in U$ i $v_0 \in V$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $u_0 \prec v_0$.

Ako je $u \in U$ takvo da za neko $v \in V$ važi $u \prec v$, onda mora da postoji neko $a \in X$ tako da je $u \prec a$ i $[u; a)_\prec \subseteq U$. Zaista, ne može biti $u \in (y; \rightarrow)_\prec \subseteq U$ za neko $y \in X$ jer bi to povlačilo $v \in U \cap V \neq \varnothing$; zato iz $u \in U \in \tau$ sledi da postoje neki $a, b \in X$ takvi da je $u \in (\leftarrow; a)_\prec \subseteq U$ ili $u \in (b; a)_\prec \subseteq U$ - u svakom slučaju je $u \prec a$ i $[u; a)_\prec \subseteq U$.

Analogno, ako je $v \in V$ takvo da za neko $u \in U$ važi $u \prec v$, onda mora da postoji neko $b \in X$ tako da je $b \prec v$ i $(b; v]_\prec \subseteq V$.

Specijalno imamo da je $S := \{a \in X \ : \ u_0 \prec a \text{ i } [u_0; a)_\prec \subseteq U\}$ je neprazan. Ako $a \in S$ onda ne može biti $v_0 \prec a$ jer bi zbog $u_0 \prec v_0$ to značilo da je $v_0 \in V \cap [u_0; a)_\prec \subseteq V \cap U \neq \varnothing$. Dakle imamo $a \preceq v_0$ za svako $a \in S$ pa prema (b) postoji supremum $r := \sup_\prec S$ skupa S.

Dokazujemo da ne može biti $r \in U$. Pretpostavimo suprotno. Ako je $r \in (x; \rightarrow)_\prec \subseteq U$ za neko $x \in X$, onda zbog $r := \sup_\prec S$ mora da postoji neko $s \in S$ tako da je $x \prec a$; kako je v_0 $\prec$-majoranta skupa S to je $a \preceq v_0$ pa je $v_0 \in V \cap (x; \rightarrow)_\prec \subseteq V \cap U \neq \varnothing$. Ako je $r \in (\leftarrow; y)_\prec \subseteq U$ za neko $y \in X$, onda bi imali $u_0 \prec y$ te i $[u_0; y)_\prec \subseteq (\leftarrow; y)_\prec \subseteq U$, tj. $y \in S$; ali $y \succ r = \sup_\prec S$ - kontradikcija. Najzad, ako je $r \in (x; y)_\prec \subseteq U$ za neke $x, y \in X$, onda zbog $x \prec r = \sup_\prec S$ postoji neko $a \in (x; r]_\prec \cap S$, pa iz $[u_0; y)_\prec \subseteq [u_0; a)_\prec \cup (x; y)_\prec \subseteq U$ i $y \succ u_0$ sada sledi $y \in S$; ali $y \succ r = \sup_\prec S$ - kontradikcija.

Dakle $r \in X \setminus U = V$. No $u_0 \in U$, $r \in V$ i $u_0 \prec r$ pa (kako smo to ranije već primetili) mora da postoji neko $b \in X$ tako da je $b \prec r$ i $(b; r]_\prec \subseteq V$. Iz $b \prec r = \sup_\prec S$ sledi da postoji neko $a \in S$ tako da je $b \prec a$. Prema (a) postoji neko $x \in (b; a)_\prec$. Dakle $b \prec x \prec a \preceq r$. Ako je $b \prec u_0$ onda je $u_0 \in (b; r]_\prec \cap U \subseteq V \cap U \neq \varnothing$ - kontradikcija. Ako je $u_0 \preceq b$ onda je $x \in [u_0; a)_\prec \cap (b; r]_\prec \subseteq U \cap V \neq \varnothing$ - ponovo kontradikcija.

Kako naše konkretno strogo uređenje u zadatku zadovoljava gore navedene uslove (a) i (b) (videti rešenje zadatka 155.) to zaključujemo da je (X, τ) iz našeg zadatka povezan prostor.

Preostaje da pokažemo da (X, τ) nije put-povezan. Tvrdimo da ne postoji $f : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ tako da je $f(0) = (0, 0)$ i $f(1) = (1, 1)$. Pretpostavimo da takva funkcija f postoji i stavimo $Y := f^{\rightharpoonup}[0; 1]$. Kad bi postojalo neko $a \in X \setminus Y$, onda bi za $L := (\leftarrow; a)_\prec \cap Y$ i $D := (a; \rightarrow)_\prec \cap Y$ imali $(0, 0) \in L \in \mathrm{rel}_\tau(Y) \setminus \{\varnothing\}$, $(1, 1) \in D \in \mathrm{rel}_\tau(Y) \setminus \{\varnothing\}$, $Y = L \cup D$ i očigledno $L \cap D = \varnothing$, te $\big(Y, \mathrm{rel}_\tau(Y)\big)$ ne bi bio povezan. Ali on jeste povezan kao neprekidna slika povezanog prostora $[0; 1]$. Dakle mora biti

$f^{\rightharpoonup}[0;1] = X$. Neka je sad $\mathcal{U} \subseteq \tau \setminus \{\varnothing\}$ celularna familija moći kontinuum (ovakvo $\mathcal{U}$ postoji - videti zadatak 25.). Tada je familija $\mathcal{V} := \{f^{\leftharpoonup}U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mu_{[0;1]} \setminus \{\varnothing\}$ celularna i moći kontinuum. No takva familija ne može da postoji jer je $[0;1]$ separabilan prostor (videti napomenu u rešenju dela pod (2) zadatka 33.) - kontradikcija. $\square$

174. Pokažimo najpre da ako su $p, q \in \mathbb{R}$ tako da je $p < q$, onda je $[p;q]$ povezan skup.

Neka su $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni skupovi takvi da je $[p;q] \subseteq U_1 \cup U_2$, $p \in U_1$ i $U_1 \cap U_2 \cap [p;q] = \varnothing$. Dakle skup $S := \{z \in [p;q] : [p;z] \subseteq U_1\} \ni p$ je neprazan i ograničen odozgo pa postoji $r := \sup S \in [p;q]$.

Ako je $x \in [p;r)$ onda postoji neko $c \in S$ tako da je $x < c$ pa je $x \in [p;c] \subseteq U_1$. Dakle $[p;r) \subseteq U_1$.

Pretpostavimo najpre da je $r \in U_2$. Zbog $p \in U_1$ i $U_1 \cap U_2 \cap [p;q] = \varnothing$ je $p < r$. Skup U_2 je otvoren pa postoji neko $c \in [p;r) \cap U_2$. No $c \in [p;r) \subseteq U_1 \cap [p;q]$ pa sledi $U_1 \cap U_2 \cap [p;q] \neq \varnothing$, suprotno pretpostavci.

Zaključujemo da mora biti $r \notin U_2$. Iz $r \in [p;q] \subseteq U_1 \cup U_2$ sada sledi da je $r \in U_1$. Kad bi bilo $r < q$ onda bi, obzirom da je U_1 otvoren skup, postojalo neko $c \in (r;q)$ tako da je $[r;c] \subseteq U_1$. Tada bi imali $[p;c] = [p;r) \cup [r;c] \subseteq U_1$, tj. $c \in S$, a ovo je nemoguće jer je $c > r = \sup S$. Zaključujemo da je $r = q$ pa je $[p;q] = [p;r) \cup \{r\} \subseteq U_1$.

(1) Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ povezan skup i neka su $x, y \in A$ tako da je $x < y$. Kad bi postojalo neko $u \in (x;y) \setminus A$, onda bio važilo $A \subseteq (-\infty;u) \cup (u;+\infty)$. Kako su skupovi $(-\infty;u)$ i $(u;+\infty)$ otvoreni, disjunktni, a skup A povezan, to bi odavde sledilo da je A podskup tačno jednog od njih. No zbog $x \in A \cap (-\infty;u) \neq \varnothing$ i $y \in A \cap (u;+\infty) \neq \varnothing$ ovo nije moguće.

Da pokažemo obrat, pretpostavimo da je neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $(x;y) \subseteq A$ za svako $x, y \in A$. Ako je $a \in A$ proizvoljno, ovo znači da je

$$A = \left(\bigcup_{b \in A;\, a<b} [a;b] \right) \cup \left(\bigcup_{b \in A;\, b<a} [b;a] \right)$$

pa da je skup A povezan sledi iz činjenice da su segmenti povezani skupovi i zadatka 163. pod (1).

(2) Lako je videti da svaki od navedenih tipova skupova ima osobinu iz dela pod **(1)** te i da je povezan.

Obrnuto, pretpostavimo je neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $(x;y) \subseteq A$ za svako $x, y \in A$. Stavimo $p := \inf A \in [-\infty; +\infty]$ i $q := \sup A \in [-\infty; +\infty]$. Ako je $x \in (p;q)$ onda postoje $u, v \in A$ tako da je $u < x < v$, te mora biti $x \in A$. Dakle $(p;q) \subseteq A$. Nije teško proveriti da zavisno od toga da li je $p \in \mathbb{R}$ ili $p = -\infty$, $q \in \mathbb{R}$ ili $q = +\infty$, $p \in A$ ili $p \notin A$, $q \in A$ ili $q \notin A$, skup A mora biti nekog od navedenih oblika. $\square$

175. (3)⇒(1) Neka je $x \in U \in \tau$ i C komponenta povezanosti tačke x u prostoru $\big(U, \mathrm{rel}_U(\tau)\big)$. Tada je $x \in C \subseteq U$ i $\big(C, \mathrm{rel}_C(\mathrm{rel}_U(\tau))\big) = \big(C, \mathrm{rel}_C(\tau)\big)$ je povezan prostor, tj. C je povezan skup prostora (X, τ). Prema **(3)** C je otvoren skup.

(1)⇒(2) Ovo je očigledno.

(2)⇒(3) Neka je $U \subseteq X$ neprazan otvoren skup i $C \subseteq U$ proizvoljna komponenta povezanosti prostora $\big(U, \mathrm{rel}_U(\tau)\big)$ i neka je $x \in C$ proizvoljna tačka. Prema zadatku 165. C je komponenta povezanosti tačke x u prostoru $\big(U, \mathrm{rel}_U(\tau)\big)$ pa je

$$C = \bigcup \big\{ S \subseteq U \,:\, x \in S \text{ i } \big(S, \mathrm{rel}_S(\mathrm{rel}_U(\tau))\big) \text{ je povezan prostor} \big\}\ .$$

Ako je $S \subseteq U$ onda je $\big(S, \mathrm{rel}_S(\mathrm{rel}_U(\tau))\big) = \big(S, \mathrm{rel}_S(\tau)\big)$. Zato je

$$C = \bigcup \{ S \subseteq U \,:\, x \in S \text{ i } S \text{ je povezan skup prostora } (X, \tau) \}$$

Prema pretpostavci postoji neki povezan skup $P \subseteq X$ prostora (X, τ) takav da je $x \in \mathrm{int}(P) \subseteq P \subseteq U$. Odavde sledi da je $P \subseteq C$ te i $x \in \mathrm{int}(P) \subseteq C$. Ovim smo pokazali da je C otvoren skup. $\square$

176. (1) Neka je (X, τ) prostor iz **P 7**. Ako je $n \in U \in \tau$ onda $n \in D_m \subseteq U$ za neko $m \in X$ (videti zadatak 13.); no $n \in D_m$ je ekvivalentno sa $D_n \subseteq D_m$ pa je $n \in D_n \subseteq U$.

Nakon što smo ovo primetili neka su $A, B \in \mathrm{rel}_{D_n}(\tau)$ tako da je $D_n = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ i $n \in B$. Tada je $B \in \tau$ (zbog $D_n \in \tau$) pa na osnovu gore izvedenog zaključka mora biti $D_n \subseteq B$, tj. $D_n = B$ odnosno $A = \varnothing$. Odavde vidimo da je D_n τ-povezan, τ-otvoren skup i to takav da je $n \in D_n \subseteq U$ za svaki τ-otvoren skup $U \ni n$.

Neka je sada (X, τ) prostor iz **P 10**. Za $k, l \in \mathbb{N}$ stavimo $\mathrm{M}(l, k) := \mathbb{N} \cap (l + k\mathbb{Z})$. Primetimo da za $x, y, n, m \in \mathbb{N}$ važi

$$\mathrm{M}(x, n) \subseteq \mathrm{M}(y, m) \iff x \in \mathrm{M}(y, m) \ \wedge \ m|\ n$$

$$x \in \mathrm{M}(y, m) \iff \mathrm{M}(x, m) = \mathrm{M}(y, m)$$

$$\mathrm{M}(x, n) \cap \mathrm{M}(y, m) \neq \varnothing \iff x \equiv y \pmod{\mathrm{NZD}(n, m)}$$

(u vezi sa poslednjim tvrđenjem možete pogledati rešenje zadatka 30. pod (2)). Stavimo $R := \{k \in \mathbb{N} \ : \text{ ne postoji prost broj } p \text{ tako da } p^2 | k\}$. Znamo da je $\mathcal{B}' := \{(l + k\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} \ : \ l, k \in \mathbb{N};\ \mathrm{NZD}(l, k) = 1;\ k \in R\}$ baza za τ (videti zadatak 13.). Neka su $l \in \mathbb{N}$ i $k \in R$ takvi da je $\mathrm{NZD}(l, k) = 1$. Pokažimo da je $\mathrm{M}(l, k)$ τ-povezan skup. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje neprazni $A_i \in \mathrm{rel}_{\mathrm{M}(l,k)}(\tau)$ za $i = \overline{1, 2}$ tako da je $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ i $A_1 \cup A_2 = \mathrm{M}(l, k)$; izaberimo po $t_i \in A_i$. Kako je $\mathrm{M}(l, k) \in \tau$ to je $A_1, A_2 \in \tau$ pa postoje $n_1, n_2 \in R$ tako da je $\mathrm{M}(t_i, n_i) \subseteq A_i$ za $i = \overline{1, 2}$. Za $i = \overline{1, 2}$ zbog $\mathrm{M}(t_i, n_i) \subseteq \mathrm{M}(l, k)$ imamo $n_i = km_i$ za neke $m_i \in \mathbb{N}$; iz $km_i \in R$ sledi da je $\mathrm{NZD}(k, m_i) = 1$. Dakle $\mathrm{NZD}(k, m_1 m_2) = 1$, pa postoji neko $s \in \mathbb{N}$ tako da je $sm_1m_2 \equiv_k l$, tj. $sm_1m_2 \in \mathrm{M}(l, k)$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $sm_1m_2 \in A_1$. Sada iz $A_1 \in \tau$ sledi da je $\mathrm{M}(sm_1m_2, r) \subseteq A_1$ za neko $r \in \mathbb{N}$ takvo da je $\mathrm{NZD}(sm_1m_2, r) = 1$. Zbog $\mathrm{M}(sm_1m_2, r) \subseteq \mathrm{M}(l, k)$ je $r = kr_0$ za neko $r_0 \in \mathbb{N}$. Jasno $\mathrm{NZD}(r_0, m_2) = 1$ pa je $\mathrm{NZD}(r, km_2) = k$. Kako je $sm_1m_2, t_2 \in \mathrm{M}(l, k)$ to je $sm_1m_2 \equiv_k l \equiv_k t_2$ pa zbog $k = \mathrm{NZD}(r, km_2)$ zaključujemo da je $\varnothing \neq \mathrm{M}(sm_1m_2, r) \cap \mathrm{M}(t_2, km_2) \subseteq A_1 \cap A_2$ - kontradikcija.

Ovim smo dokazali da je svaki element baze $\mathcal{B}'$ τ-povezan skup, a ovo znači da je (X,τ) lokalno povezan prostor.

(2) Prostor (X,τ) iz **P 8** ima bazu sačinjenu od τ-otvoreno-zatvorenih skupova (videti zadatak 130.). Ako je $U \in \tau$ i $x \in U$ onda se lako proverava da postoji neki $V \in \tau$ tako da je $x \in V \subset U$; ako je W takav τ-otvoreno-zatvoren skup da $x \in W \subseteq V$, onda je W neprazan, pravi podskup od U koji je otvoreno-zatvoren i u odnosu na topologiju $\mathrm{rel}_U(\tau)$, te U nije τ-povezan podskup. Dakle nijedan neprazan τ-otvoren skup nije povezan.

Neka je sada (X,τ) prostor iz **P 9**. Za $k,l \in \mathbb{N}$ stavimo $\mathrm{M}(l,k) := \mathbb{N} \cap (l + k\mathbb{Z})$. Imamo $1 \in \mathrm{M}(1,2) \in \tau$. Neka je $A \in \tau$ proizvoljno tako da je $1 \in A \subseteq \mathrm{M}(1,2)$. Kako nijedan singlton nije τ-otvoren (što se neposredno proverava) to postoji neko $y \in A \setminus \{1\} \subseteq \mathrm{M}(1,2)$. y je neparan prirodan broj pa postoje $s,n \in \mathbb{N}$ i tako da je $y = 1 + 2^s(2n-1)$. Jasno $y \in M(1,2) \setminus \mathrm{M}(1,2^{s+1}) =: V$. Dokazaćemo da je $V \in \tau$, te će iz $A = (\mathrm{M}(1,2^{s+1}) \cap A) \cup (V \cap A)$, $1 \in \mathrm{M}(1,2^{s+1}) \cap A \in \mathrm{rel}_A(\tau)$, $y \in V \cap A \in \mathrm{rel}_A(\tau)$ i $\mathrm{M}(1,2^{s+1}) \cap V = \varnothing$ slediti da A nije τ-povezan skup. Neka je $x \in V$ proizvoljno. Tada za neke $m,k \in \mathbb{N}$ važi $x = 1 + 2^k(2m-1)$ pri čemu je $k \leq s$. Imamo $x + 2^{k+1}\mathbb{Z} = 1 + 2^k\,(1 + 2\mathbb{Z})$ pa je $x \in \mathrm{M}(x,2^{k+1}) \subseteq \mathrm{M}(1,2) \setminus \mathrm{M}(1,2^{k+1}) \subseteq \mathrm{M}(1,2) \setminus \mathrm{M}(1,2^{s+1}) = V$ jer $k \leq s$. Kako je x neparan prirodan broj to je $\mathrm{NZD}\left(x,2^{k+1}\right) = 1$ pa je $\mathrm{M}(x,2^{k+1}) \in \tau$. Ovim smo dokazali da mora biti $V \in \tau$. $\square$

177. Neka je (X,τ) lokalno povezan prostor, $A \subseteq X$, $\tau_A := \mathrm{rel}_A(\tau)$ i $r : (X,\tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} (A,\tau_A)$ tako da je $r \restriction A = \mathrm{id}_A$. Pokažimo da je (A,τ_A) lokalno povezan prostor. U tom cilju koristićemo se zadatkom 175.

Neka je $U_0 \in \tau_A$ proizvoljan skup i C komponenta povezanosti prostora $\left(U_0, \mathrm{rel}_{U_0}(\tau_A)\right)$. Pokažimo da je $C \in \tau_A$. Neka je $x \in C$ proizvoljna tačka.

Skup $U := r^{\leftharpoonup}U_0$ je τ-otvoren i zbog $r \restriction A = \mathrm{id}_A$ je $x \in U_0 \subseteq U$. Neka je K komponenta povezanosti tačke x u prostoru $\left(U, \mathrm{rel}_U(\tau)\right)$. Tada je po pretpostavci $K \in \tau$, pa važi $x \in K \cap A \in \tau_A$. Zbog $r \restriction A = \mathrm{id}_A$ je $K \cap A \subseteq r^{\rightharpoonup}K$, pa zbog $K \subseteq U = r^{\leftharpoonup}U_0$ konačno imamo $x \in K \cap A \subseteq r^{\rightharpoonup}K \subseteq U_0$. Kako je K povezan skup prostora (X,τ) to je $r^{\rightharpoonup}K$ povezan skup prostora

(A, τ_A). Zato sada iz $x \in r^{\rightharpoonup}K \subseteq U_0$ sledi $r^{\rightharpoonup}K \subseteq C$ te je $x \in K \cap A \subseteq C$ i $K \cap A \in \tau_A$.

Kako je tačka $x \in C$ bila proizvoljna, na ovaj način smo pokazali da važi $C \in \tau_A$. $\square$

178. Neka je $\mathcal{I}$ particija nepraznog otvorenog skupa $U \subseteq \mathbb{R}$ čiji su članovi komponente povezanosti prostora (U, μ_U). $\mathbb{R}$ je lokalno povezan prostor pa je svaki $I \in \mathcal{I}$ otvoren skup. Jedini neprazni, otvoreni i povezani podskupovi skupa $\mathbb{R}$ su otvoreni intervali – skupovi nekog od oblika $(-\infty; x)$, $(x; +\infty)$ ili $(x; y)$ za neke realne brojeve $x < y$ (videti zadatak 174.). Dakle članovi familije $\mathcal{I}$ su otvoreni intervali realne prave. Kako je svaka celularna familija otvorenih skupova prebrojiva (jer je $\mathbb{R}$ separabilan prostor), tvrđenje je dokazano. $\square$

179. Neka je preslikavanje $h_1 : [0; 1/2] \to X$ definisano sa $h_1(t) = f(2t)$ za $t \in [0; 1/2]$. h_1 je τ-neprekidno preslikavanje kao kompozicija preslikavanja $k : [0; 1/2] \xrightarrow{\mathsf{c}} [0; 1]$ definisanog sa $k(t) = 2t$, za $t \in [0; 1/2]$, i preslikavanja $f : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$. Slično, preslikavanje $h_2 : [0; 1/2] \to X$, definisano sa $h_2(t) = g(2t-1)$ za $t \in [1/2; 1]$, je τ-neprekidno. Kako je $h_1(1/2) = h_2(1/2)$ to je na osnovu zadatka 51. preslikavanje $f * g$ τ-neprekidno. $\square$

180. Neka je $a \in X$ proizvoljna tačka. Označimo sa S_a skup svih onih tačaka $x \in X$ takvih da postoji neki put $f : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ takav da je $f(0) = a$ i $f(1) = x$. Jasno $a \in S_a$.

Pokažimo da je S_a otvoren skup. Neka je $z \in S_a$ proizvoljno. Dakle postoji neki put $f : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ takav da je $f(0) = a$ i $f(1) = z$. Po pretpostavci postoji neki otvoren skup $U \ni z$ takav da za svaku tačku $x \in U$ postoji neki put $g_x : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ takav da je $g_x(0) = z$ i $g_x(1) = x$. Pokažimo da je $U \subseteq S_a$. Neka je $x \in U$ proizvoljna tačka. Preslikavanje $h := f * g_x$ je put u prostoru (X, τ) i pritom je $h(0) = f(0) = a$ i $h(1) = g_x(1) = x$. Dakle $x \in S_a$.

Pokažimo da je $X \setminus S_a$ otvoren skup. Neka je $z \in X \setminus S_a$ proizvoljno. Po pretpostavci postoji neki otvoren skup $U \ni z$ takav da za svaku tačku $x \in U$ postoji neki put $g_x : [0; 1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (X, \tau)$ takav da je $g_x(0) = z$ i $g_x(1) = x$.

Pokažimo da je $U \subseteq X \setminus S_a$. Neka je $x \in U$ proizvoljna tačka. Kad bi bilo $x \in S_a$, onda bi postojao neki put $f : [0;1] \xrightarrow{c} (X,\tau)$ takav da je $f(0) = a$ i $f(1) = x$. Definišimo $k : [0;1] \to X$ sa $k(t) = g_x(1-t)$ za svako $t \in [0;1]$. Jasno k je τ-neprekidno preslikavanje, jer je takvo g_x. Zato je preslikavanje $h := f * k$ put u prostoru (X,τ) i pritom je $h(0) = f(0) = a$ i $h(1) = k(1) = g_x(0) = z$. Odavde sledi da je $z \in S_a$, suprotno pretpostavci.

Kako je (X,τ) povezan, a S_a neprazan otvoreno-zatvoren skup, to sledi da je $X = S_a$. Zato ako su $u, v \in X$ proizvoljne tačke i f_u, f_v putevi u prostoru (X,τ) redom takvi da je $f_u(0) = a$ i $f_u(1) = u$, odnosno $f_v(0) = a$ i $f_v(1) = v$, i ako je preslikavanje $k : [0;1] \to X$ definisano sa $k(t) = f_u(1-t)$ za svako $t \in [0;1]$, onda je $h := k * f_v$ put u prostoru (X,τ) takav da je $h(0) = u$ i $h(1) = v$. □

181. (4)⇒(1): Neka je d proizvoljna metrika na $\mathbb{R}^2$ kompatibilna sa $\mu_{\mathbb{R}^2}$.

Neka je $u \in U$ proizvoljno i stavimo

$$S := \Big\{ v \in U \ : \ u \neq v \Rightarrow \text{ postoje } n \in \mathbb{N} \text{ i } b = (b_0, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n \text{ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je } b_0 = u, b_n = v \text{ i } \mathrm{PG}(b) \subseteq U \Big\}.$$

Pokažimo da je S μ_U-zatvoren skup. Neka je dakle $x \in \mathrm{cl}_{\mu_U}(S)$. Postoji $\varepsilon \in (0;+\infty)$ tako da je $K := \mathrm{K}_d[x;\varepsilon] \subseteq U$. Prema pretpostavci možemo uočiti neko $y \in S \cap K$. Znamo da postoji $b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^l$ za neko $l \in \mathbb{N}$ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je $\mathrm{PG}(b) \subseteq U$ $b(0) = u$ i $b(l) = y$.

U slučaju da je $x \in \mathrm{PG}(b)$ neka je $i_0 \in \{0, \ldots, l-1\}$ najmanji takav da je $x \in \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$. Ako je $x = B_{i_0}$ onda $h := (b_0, \ldots, b_{i_0})$ ne dozvoljava samopreseke i svedoči da je $x \in S$. Slično, ako je $x \neq b_{i_0}$ onda $h := (b_0, \ldots, b_{i_0}, x)$ ne dozvoljava samopreseke i svedoči da je $x \in S$.

Pretpostavimo sada da je $x \notin \mathrm{PG}(b)$. Skup $K_0 := K \cap \mathrm{PG}(b)$ je kompaktan i $x \notin K_0$ pa je $\delta := \mathrm{Dist}\big(\{x\}, K_0\big) > 0$ i pritom postoji neko $p \in K_0$

tako da je $d(x,p) = \delta$ (videti zadatak 142.). Neka je $i_0 \in \{0, \ldots, l-1\}$ najmanji takav da je $p \in \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$.

Primetimo da važi $\mathrm{Seg}[x,p] \cap \mathrm{PG}(b) = \{p\}$. Zaista, kad bi postojalo neko $q \in \mathrm{Seg}[x,p) \cap \mathrm{PG}(b)$, onda bi važilo $\delta = d(x,p) < d(x,q) \leq \mathrm{Dist}\big(\{x\}, K_0\big) = \delta$ ($q \in K_0$ jer je $\mathrm{Seg}[x,p] \subseteq K$ obzirom da je K konveksan skup) - kontradikcija.

Slučaj 1: $p = b_0 = u$. $x \neq p$ jer $x \notin \mathrm{PG}(b) \ni p$ pa (u, x) ne dozvoljava samopreseke i svedoči da je $x \in S$ (imamo $\mathrm{Seg}[u,x] = \mathrm{Seg}[p,x] \subseteq K \subseteq U$ jer je K konveksan skup).

Slučaj 2: $p \neq b_0 = u$. Stavimo $h := (b_0, \ldots, b_{i_0}, p, x)$. $x \notin \{p, b_0\}$ jer $x \notin \mathrm{PG}(b) \supseteq \{p, b_0\}$.

Kad bi bilo $p = b_{i_0}$ onda zbog $p \neq b_0$ bi imali $i_0 - 1 \geq 0$ i $p \in \mathrm{Seg}[b_{i_0-1}, b_{i_0}]$ što bi protivurečilo izboru broja i_0; dakle $p \neq b_{i_0}$. Da pokažemo da h ne dozvoljava samopreseke preostaje, obzirom da ih b ne dozvoljava kao i da važi $\mathrm{Seg}[b_{i_0}, p] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$, da pokažemo:

(1) $\mathrm{Seg}[p,x] \cap \displaystyle\bigcup_{j=0}^{i_0-1} \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}] = \varnothing$;

(2) $\mathrm{Seg}[b_{i_0}, p] \cap \mathrm{Seg}[p,x] = \{p\}$.

Kad bi bilo $\mathrm{Seg}[p,x] \cap \displaystyle\bigcup_{j=0}^{i_0-1} \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}] \neq \varnothing$, onda bi zbog $\mathrm{Seg}[x,p] \cap \mathrm{PG}(b) = \{p\}$ imali $p \in \displaystyle\bigcup_{j=0}^{i_0-1} \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}]$; no zbog $p \in \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$, a kako b ne dozvoljava samopreseke, odavde bi sledilo $p = b_{i_0}$, a već smo dokazali da ovo nije tačno. Dakle (1) važi. (2) je direktna posledica činjenice da je $\mathrm{Seg}[b_{i_0}, p] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}] \subseteq \mathrm{PG}(b)$ i $\mathrm{Seg}[x,p] \cap \mathrm{PG}(b) = \{p\}$.

Dakle dokazali smo da h ne dozvoljava samopreseke. $\mathrm{PG}(h) \subseteq U$ sledi iz $\mathrm{Seg}[x,p] \subseteq K \subseteq U$, $\mathrm{Seg}[b_{i_0},p] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_0},b_{i_0+1}]$ i $\mathrm{PG}(b) \subseteq U$. Sada h svedoči da je $x \in S$.

Kako je $x \in \mathrm{cl}_{\mu_U}(S)$ u prethodnom razmatranju bilo proizvoljno to sledi da je S μ_U-zatvoren skup.

Pokažimo sada da je S μ_U-otvoren skup. Neka je dakle $x \in S$. Postoji $b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^l$ za neko $l \in \mathbb{N}$ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je $\mathrm{PG}(b) \subseteq U$, $b(0) = u$ i $b(l) = x$. Ako je $l > 1$ označimo $M := \bigcup\limits_{j=0}^{l-2} \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}]$, a ako $l = 1$ neka $M := \{b_0\}$. b ne dozvoljava samopreseke pa je $x = b_l \notin M$. M je zatvoren skup, a U otvoren pa postoji neko $\varepsilon \in (0;+\infty)$ tako da je $\mathrm{K}_d[x;\varepsilon] \subseteq U \setminus M$. Tvrdimo da važi $V := \mathrm{K}_d[x;\varepsilon) \subseteq S$. Neka je $y \in V$ proizvoljno.

Ako je $\mathrm{Seg}[x,y] \cap \mathrm{Seg}[b_{l-1},x] \neq \{x\}$, onda sledi da je $y \in \mathrm{Seg}(b_{l-1},x]$ (zbog $b_{l-1} \notin V \ni y$) te i $\mathrm{Seg}[b_{l-1},y] \cap \mathrm{Seg}[b_{l-1},b_l]$. Lako je videti da u ovom slučaju $h := (b_0,\ldots,b_{l-1},y)$ svedoči da je $y \in S$.

Ako je $\mathrm{Seg}[x,y] \cap \mathrm{Seg}[b_{l-1},x] = \{x\}$, onda $h := (b_0,\ldots,b_l,y)$ svedoči da je $y \in S$: ovo je zato što b ne dozvoljava samopreseke, $b_l = x$, $\mathrm{Seg}[x,y] \subseteq \mathrm{K}_d[x;\varepsilon]$ i $\mathrm{B}_d[x,\varepsilon] \cap M = \varnothing$.

Dakle S je μ_U-otvoreno-zatvoren skup, neprazan zbog $u \in S$, pa kako je U povezan to odavde sledi da mora biti $S = U$.

Lanac implikacija **(1)**$\Rightarrow$**(2)**$\Rightarrow$**(3)**$\Rightarrow$**(4)** očigledno važi. $\square$

182. Neka je $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ euklidska norma, a $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$.

Neka je $a = (a_0,\ldots,a_n) \in S$. Ako je $n > 1$ za svako $(i,j) \in \{0,\ldots,n\}^2$ takvo da je $i < j$ važi $\mathrm{Seg}[a_i,a_{i+1}] \cap \mathrm{Seg}[a_j,a_{j+1}] = \varnothing$ pa kako su i $\mathrm{Seg}[a_i,a_{i+1}]$ i $\mathrm{Seg}[a_j,a_{j+1}]$ kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}^2$ to imamo da je (videti zadatak

142.)

$$\varepsilon_{i,j} := \mathrm{Dist}\Big(\mathrm{Seg}[a_i, a_{i+1}], \mathrm{Seg}[a_j, a_{j+1}]\Big) > 0.$$

Neka su $f_1, f_2 : \left(\mathbb{R}^2\right)^3 \to \mathbb{R}$ definisane sa $f_1(x,y,z) := d(x,z)$ i $f_2(x,y,z) := |d(y,x) - d(y,z)|$ za $(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$. Jasno je da $f_1, f_2 : \left(\mathbb{R}^2\right)^3 \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ (videti zadatak 83.). Ako je $i \in \{1,\dots,n-1\}$, onda je $\mathrm{Seg}[a_{i-1}, a_i] \cap \mathrm{Seg}[a_i, a_{i+1}] = \{a_i\}$ (dakle dve duži imaju zajedničku samo jednu krajnju tačku), tj. $f_1(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \neq f_2(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$, pa zbog neprekidnosti postoji neko $\delta_i \in (0; +\infty)$ tako da je $f_1(x,y,z) \neq f_2(x,y,z)$ za svako $(x,y,z) \in \mathrm{K}_d(a_{i-1}; \delta_i) \times \mathrm{K}_d(a_i; \delta_i) \times \mathrm{B}_d(a_{i+1}, \delta_i)$. Najzad $b_0 \neq b_n$ povlači da je $\mathrm{K}_d(a_0; \theta) \cap \mathrm{K}_d(a_n; \theta) = \varnothing$ za neko $\theta \in (0; +\infty)$. Neka je $\lambda \in (0; +\infty)$ tako da je $\lambda < \min\{\varepsilon_{i,j}/2, \delta_k, \theta\}$ za svako $(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2$ takvo da je $i < j$ i svako $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Tvrdimo

$$U := \mathrm{K}_d(a_0; \lambda) \times \cdots \times \mathrm{K}_d(a_n; \lambda) \subseteq S.$$

Neka je $b = (b_0 \dots, b_n) \in U$ proizvoljno. Ako je $i \in \{1,\dots,n-1\}$ onda iz $(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}) \in \mathrm{K}_d(a_{i-1}; \delta_i) \times \mathrm{K}_d(a_i; \delta_i) \times \mathrm{K}_d(a_{i+1}; \delta_i)$ sledi da je $f_1(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}) \neq f_2(b_{i-1}, b_i, b_{i+1})$; ovo specijalno povlači da je $b_i \notin \{b_{i-1}, b_{i+1}\}$, a onda sledi da duž sa krajnjim tačkama b_{i-1} i b_i, tj. $\mathrm{Seg}[b_{i-1}, b_i]$, i duž sa krajnjim tačkama b_i i b_{i+1}, tj. $\mathrm{Seg}[b_i, b_{i+1}]$, imaju kao jedinu zajedničku tačku b_i. Iz $(b_0, b_n) \in \mathrm{K}_d(a_0; \theta) \times \mathrm{K}_d(a_n; \theta)$ sledi da je $b_0 \neq b_n$.

Dalje pretpostavimo da je $(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2$ takvo da je $i < j$ i da postoji neko $u \in \mathrm{Seg}[b_i, b_{i+1}] \cap \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}] \neq \varnothing$. Tada je $u = (1-t_1) \cdot b_i + t_1 \cdot b_{i+1} = (1-t_2) \cdot b_j + t_2 \cdot b_{j+1}$ za neke $t_1, t_2 \in [0;1]$. Neka je $x := (1-t_1) \cdot a_i + t_1 \cdot a_{i+1} \in \mathrm{Seg}[a_i, a_{i+1}]$ i $y := (1-t_2) \cdot a_j + t_2 \cdot a_{j+1} \in \mathrm{Seg}[a_j, a_{j+1}]$. Imamo

$$\varepsilon_{i,j} \leq d(x,y) \leq d(x,u) + d(y,u) =$$

$$= \|(1-t_1) \cdot a_i + t_1 \cdot a_{i+1} - (1-t_1) \cdot b_i - t_1 \cdot b_{i+1}\| +$$

$$\|(1-t_2) \cdot a_j + t_2 \cdot a_{j+1} - (1-t_2) \cdot b_j + t_2 \cdot b_{j+1}\| \leq$$

$$(1-t_1)\|a_i - b_i\| + t_1\|a_{i+1} - b_{i+1}\| + (1-t_2)\|a_j - b_j\| + t_2\|a_{j+1} - b_{j+1}\| < \varepsilon_{i,j}$$

- kontradikcija. $\square$

183. Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Tvrđenje za $n = 1$ se dokazuje koristeći istu ideju kao u dokazu indukcijskog koraka i to znatno jednostavnije pa se stoga prepušta čitaocu.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n \in \mathbb{N}$ i neka je $a \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{n+1}$ tako da $\mathrm{PG}(a) \subseteq U$ i da ne dozvoljava samopreseke. Neka su $x, y \in U \setminus \mathrm{PG}(a)$ proizvoljni tako da je $x \neq y$. Pronađimo izlomljenu liniju koja spaja x i y i sadržana je u $U \setminus \mathrm{PG}(a)$.

Prema indukcijskoj hipotezi postoji neko $m \in \mathbb{N}$ i $b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^m$ koje definiše izlomljenu liniju tako da $\mathrm{PG}(b) \subseteq U \setminus \mathrm{PG}(a_0, \ldots, a_n)$, $b_0 = x$ i $b_m = y$. Ako je $n > 1$ stavimo $K := \mathrm{PG}(a_0, \ldots, a_{n-1})$, a ako $n = 1$ stavimo $K := \{a_{n-1}\}$. Imamo $K \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] = \varnothing$ (a ne dozvoljava samopreseke). Kako je $\mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}]$ kompaktan, a $F := (\mathbb{R}^2 \setminus U) \cup K \cup \{x, y\})$ zatvoren, i ova dva skupa su disjunktna, to postoji zatvoreni pravougaonik u $\mathbb{R}^2$ Π tako da važi $\mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] \subseteq \mathrm{int}(\Pi) \subseteq \Pi \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus F \subseteq U$.

Ako je $\mathrm{PG}(b) \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] = \varnothing$ onda je b tražena izlomljena linija koja spaja x i y i sadržana je u $U \setminus \mathrm{PG}(a)$. Neka je zato $\mathrm{PG}(b) \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] \neq \varnothing$. Za bar jedno $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ važi $\mathrm{Seg}(b_i, b_{i+1}) \cap \mathrm{int}(\Pi) \neq \varnothing$. Neka je i_1 najmanji, a i_2 najveći takav indeks. Jasno je da možemo izabrati neko $u \in \mathrm{Seg}(b_{i_1}, b_{i_1+1}) \cap \mathrm{int}(\Pi)$ i neko $u \in \mathrm{Seg}(b_{i_2}, b_{i_2+1}) \cap \mathrm{int}(\Pi)$ takve da je $\mathrm{Seg}[b_{i_1}, u] \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] = \mathrm{Seg}[v, b_{i_2+1}] \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] = \varnothing$. Zbog $\{u, v\} \subseteq \mathrm{PG}(b)$ i $\mathrm{PG}(b) \cap \mathrm{PG}(a_0, \ldots, a_n) = \varnothing$ imamo i $\{u, v\} \cap \mathrm{Seg}[a_{n-1}, a_n] = \varnothing$. Zato postoji $c \in \left(\mathbb{R}^2\right)^k$ za neko $k \in \mathbb{N}$ koje definiše izlomljenu liniju tako da je $\mathrm{PG}(c) \subseteq \Pi \setminus \mathrm{PG}(a_{n-1}, a_n, a_{n+1})$, $c_0 = u$ i $c_k = v$. $h := (b_0, \ldots, b_{i_1}, c_0, \ldots, c_k, b_{i_2}, \ldots, b_m)$ definiše izlomljenu liniju, važi $h_0 = x$, $h_{i_1+k+m-i_2+2} = y$. Imamo

$$\mathrm{PG}(h) = \mathrm{PG}(b_0, \ldots, b_{i_1}) \cup \mathrm{Seg}[b_{i_1}, u] \cup \mathrm{PG}(c) \cup \mathrm{Seg}[v, b_{i_2+1}] \cup \mathrm{PG}(b_{i_2}, \ldots, b_m).$$

Na osnovu izbora brojeva i_1 i i_2 je

$$\mathrm{PG}(b_0, \ldots, b_{i_1}) \cap \mathrm{int}(\Pi) = \varnothing$$

i

$$\mathrm{PG}(b_{i_2}, \ldots, b_m) \cap \mathrm{int}(\Pi) = \varnothing\,.$$

Odavde zbog $\mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] \subseteq \mathrm{int}(\Pi)$ i $\mathrm{PG}(b) \cap K = \varnothing$ sledi $\mathrm{PG}(b_0, \dots, b_{i_1}) \cup \mathrm{PG}(b_{i_2}, \dots, b_m) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{PG}(a)$.

Zbog $\mathrm{PG}(c) \cap \mathrm{PG}(a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = \varnothing$, $\mathrm{PG}(c) \subseteq \Pi$ i $\Pi \cap K \subseteq \Pi \cap F = \varnothing$ jasno je da je $\mathrm{PG}(c) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{PG}(a)$.

Na osnovu $\mathrm{Seg}[b_{i_1}, u] \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] = \mathrm{Seg}[v, b_{i_2+1}] \cap \mathrm{Seg}[a_n, a_{n+1}] = \varnothing$, $\mathrm{Seg}[b_{i_1}, u] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_1}, b_{i_1+1}] \subseteq \mathrm{PG}(b)$, $\mathrm{Seg}[v, b_{i_2+1}] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_2}, b_{i_2+1}] \subseteq \mathrm{PG}(b)$ i $\mathrm{PG}(b) \cap K = \varnothing$ sledi $\mathrm{Seg}[b_{i_1}, u] \cup \mathrm{Seg}[v, b_{i_2+1}] \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{PG}(a)$.

Najzad kako je još $\mathrm{PG}(h) \subseteq \mathrm{PG}(b) \cup \mathrm{PG}(c) \subseteq U \cup \Pi \subseteq U$, vidimo da je c traženo. $\square$

184. Plan za kostrukciju nije vezan konkretno za $\mathbb{R}^2$ te ga prezentujemo u opštijem ambijentu - dakle neka je (X, d) proizvoljan metrički prostor. Ako su $F_i \subseteq X$ povezani i kompaktni za svako $i \in \mathbb{N}$ i ako važi

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \left(i < n \Rightarrow \mathrm{Dist}(F_i, F_n) < \frac{1}{n} \right),$$

onda skup $P := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ mora biti povezan. Pokažimo ovo.

Pretpostavimo da to nije tačno, tj. neka su V_1 i V_2 otvoreni tako da za $U_i := V_i \cap P$, $i = \overline{1,2}$, važi $P = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ i $U_1 \neq \varnothing \neq U_2$. Uočimo po $u_i \in U_i$ za $i = \overline{1,2}$; postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $u_i \in F_{n_i}$. Za $i = \overline{1,2}$, iz $F_{n_i} = (U_1 \cap F_{n_i}) \cup (U_2 \cap F_{n_i})$, $(U_1 \cap F_{n_i}) \cap (U_2 \cap F_{n_i}) = \varnothing$, $\{U_1 \cap F_{n_i}, U_2 \cap F_{n_i}\} \subseteq \mu_{F_{n_i}}$, $u_i \in U_i \cap F_{n_i} \neq \varnothing$ i činjenice da je F_{n_i} povezan sledi da je $U_j \cap F_{n_i} = \varnothing$, gde $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$, pa je $F_{n_i} \subseteq U_i$. Kako je $F_{n_i} \subseteq V_i \in \mu_{\mathbb{R}^2}$ i F_{n_i} kompaktan to postoji neko $\varepsilon \in (0; +\infty)$ tako da za svako $y \in X$ važi $\exists x \in F_{n_i}\ \big(d(x,y) < \varepsilon\big) \Rightarrow y \in V_i$ (videti zadatak 142.). Neka je $m \in \mathbb{N}$ tako da $m > \max\{n_1, n_2, \varepsilon^{-1}\}$. Po pretpostavci je $\mathrm{Dist}(F_{n_i}, F_m) < \dfrac{1}{m} < \varepsilon$ pa sledi da za $i = \overline{1,2}$ postoje $x_i \in F_{n_i}$ i $y_i \in F_m$ tako da je $d(x_i, y_i)$. Tada je $y_i \in V_i \cap F_m = U_i \cap F_m \neq \varnothing$ za $i = \overline{1,2}$; kako još imamo $F_m = (F_m \cap U_1) \cup (F_m \cap U_2)$ (zbog $F_m \subseteq P = U_1 \cup U_2$), $F_m \cap U_i \in \mu_{F_m}$ za $i = \overline{1,2}$ i $(F_m \cap U_1) \cap (F_m \cap U_2) = \varnothing$ to odavde dobijamo da F_m nije povezan - suprotno pretpostavljenom.

Vratimo se sada našem zadatku. Skupove F_n ćemo ovde tražiti u obliku izlomljenih linija $\mathrm{PG}(b)$ gde $b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i b ne dozvoljava samopreseke, koje naravno moraju biti po parovima disjunktne.

Za $F_1 = \{a_1\}$ i $F_2 = \{a_2\}$ uzmimo proizvoljne disjunktne singltone tako da je $d(a_1, a_2) < 1/2$. Uočimo dve različite tačke $a_1' \in \mathbb{R}^2$ i $a_2' \in \mathbb{R}^2$ tako da je $d(a_1, a_1') < 1/3$ i $d(a_2, a_2') < 1/3$. Kako je $V := \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$ otvoren, povezan, $\{a_1', a_2'\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$ i $a_1 \neq a_2$ to postoje $n_3 \in \mathbb{N}$ $c_3 \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{n_3}$ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je $c_3(0) = a_1'$ i $c_3(n_3) = a_2'$ i tako da pritom $\mathrm{PG}(c_3) \subseteq V$. Stavimo $F_3 := \mathrm{PG}(c_3)$. F_1, F_2 i F_3 su po parovima disjunktne izlomljene linije i po konstrukciji je $\mathrm{Dist}(F_1, F_2) < 1/2$ i $\mathrm{Dist}(F_1, F_3) < 1/3$, $\mathrm{Dist}(F_2, F_3) < 1/3$. Prema zadatku 183. skup $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{3} F_i = V \setminus F_3$ je otvoren i povezan.

Pretpostavimo da smo konstruisali po parovima disjunktne izlomljene linije F_i za $i = \overline{1,k}$ tako da važi

$$\forall n \in \{1, \ldots, k\}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \left(i < n \Rightarrow \mathrm{Dist}(F_i, F_n) < \frac{1}{n}\right)$$

i tako da je $U := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ (otvoren) povezan. Za $i = \overline{1,k}$ izaberimo po $x_i \in F_i$ i $z_i \in U$ tako da je $d(x_i, z_i) < \dfrac{1}{k+1}$ i to tako da važi $z_i \neq z_j$ (ovo je moguće uraditi recimo jer su skupovi oblika $T \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$, za konačne $T \subseteq \mathbb{R}^2$, I kategorije kao unije konačno mnogo nigde gustih skupova kakvi su $\mathrm{Seg}[u, v]$ za $u, v \in \mathbb{R}^2$, pa imaju praznu unutrašnjost obzirom da je $\mathbb{R}^2$ `Baire`-ov - videti napomenu uz rešenje zadatka 47.). Pokažimo indukcijom po $i \in \{2, \ldots, k\}$ da postoji $c \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je $\{z_1, z_2, \ldots, z_i\} \subseteq \mathrm{PG}(c) \subseteq U$.

Kako je U otvoren povezan i $z_1, z_2 \in U$ tako da je $z_1 \neq z_2$ to je $z_1 = c(0)$ i $z_2 = c(n)$ za neko $c \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$, gde $n \in \mathbb{N}$, koje ne dozvoljava samopreseke i da pritom važi $\mathrm{PG}(c) \subseteq U$.

Neka je tvrđenje tačno za neko $m \in \{2, \ldots, k-1\}$ i neka je $c \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$, gde $n \in \mathbb{N}$, takvo da ne dozvoljava samopreseke i takvo da važi $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subseteq \mathrm{PG}(c) \subseteq U$. Ako je $z_{m+1} \in \mathrm{PG}(c)$, onda je baš c onakvo kakvo se traži. Neka je sada $z_{m+1} \in U \setminus \mathrm{PG}(c) =: V$. Rezon koji sledi već je korišćen u dokazu dela (4)⇒(1) zadatka 181.

$\bigcup\limits_{i=0}^{n-2} \mathrm{Seg}[c_i, c_{i+1}]$ je zatvoren skup i ne sadrži tačku c_n, a U je otvoren pa postoji neko $\varepsilon \in (0; +\infty)$ tako da je $K := \mathrm{K}_d[c_n; \varepsilon] \subseteq U \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n-2} \mathrm{Seg}[c_i, c_{i+1}]$. Uočimo proizvoljno $x \in \mathrm{K}_d[c_n; \varepsilon] \setminus \mathrm{Seg}[c_{n-1}, c_n]$ tako da je $x \neq z_{m+1}$. V je otvoren i povezan, a $x, z_{m+1} \in V$ su različite tačke. Zato postoji $b \in \left(\mathbb{R}^2\right)^l$ za neko $l \in \mathbb{N}$ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je $\mathrm{PG}(b) \subseteq V$ i $b(0) = x$, $b(l) = z_{m+1}$. Skup $K_0 := K \cap \mathrm{PG}(b)$ je kompaktan i $c_n \notin K_0$ pa je $\delta := \mathrm{Dist}\big(\{c_n\}, K_0\big) > 0$ i pritom postoji neko $p \in K_0$ tako da je $d(c_n, p) = \delta$ (videti zadatak 142.). Neka je $i_0 \in \{0, \ldots, l-1\}$ najveći takav da je $p \in \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$.

Primetimo da kad bi bilo $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \mathrm{Seg}[c_{n-1}, c_n] \neq \{c_n\}$, onda bi moralo da bude $p \in \mathrm{Seg}[c_{n-1}, c_n]$ (setimo se da je $c_{n-1} \notin K \ni p$), a ovo nije moguće jer $p \in \mathrm{PG}(b)$ i $\mathrm{PG}(c) \cap \mathrm{PG}(b) = \varnothing$. Dakle $\mathrm{Seg}[c_{n-1}, c_n] \cap \mathrm{Seg}[c_n, p] = \{c_n\}$.

Takođe važi $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \mathrm{PG}(b) = \{p\}$. Zaista, kad bi postojalo neko $q \in \mathrm{Seg}[c_n, p) \cap \mathrm{PG}(b)$, onda bi važilo $\delta = d(c_n, p) < d(c_n, q) \leq \mathrm{Dist}\big(\{c_n\}, K_0\big) = \delta$ ($q \in K_0$ jer je $\mathrm{Seg}[c_n, p] \subseteq K$ obzirom da je K konveksan skup) - kontradikcija.

Slučaj 1: $p = b_l = z_{m+1}$. $h := (c_0, \ldots, c_n, p)$ ne dozvoljava samopreseke jer ih c ne dozvoljava, jer $\mathrm{Seg}[c_n, p] \subseteq K$ i jer $K \cap \bigcup\limits_{i=0}^{n-2} \mathrm{Seg}[c_i, c_{i+1}] = \varnothing$. Takođe važi $\{z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}\} \subseteq \mathrm{PG}(h) \subseteq U$.

Slučaj 2: $p \neq b_l = z_{m+1}$. Stavimo $h := (c_0, \ldots, c_n, p, b_{i_0+1}, \ldots, b_l)$.

$c_n \neq p$ jer $c_n \notin \mathrm{PG}(b) \ni p$. Iz istog razloga je i $c_0 \neq b_l = z_{m+1}$. Kad bi bilo $p = b_{i_0+1}$ onda zbog $p \neq b_l$ bi imali $i_0 + 1 \leq l - 1$ i $p \in \mathrm{Seg}[b_{i_0+1}, b_{i_0+2}]$ što bi protivurečilo izboru broja i_0; dakle $p \neq b_{i_0+1}$. Da pokažemo da h ne dozvoljava samopreseke preostaje, obzirom da ih ni c ni b ne dozvoljavaju kao i da važi $\mathrm{PG}(c) \cap \mathrm{PG}(b) = \varnothing$ i $\mathrm{Seg}[p, b_{i_0+1}] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$, da pokažemo:

(1) $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \bigcup_{j=0}^{n-2} \mathrm{Seg}[c_j, c_{j+1}] = \varnothing$;

(2) $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \bigcup_{j=i_0+1}^{l-1} \mathrm{Seg}[b_j, b_{j+1}] = \varnothing$;

(3) $\mathrm{Seg}[c_{n-1}, c_n] \cap \mathrm{Seg}[c_n, p] = \{c_n\}$;

(4) $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \mathrm{Seg}[p, b_{i_0+1}] = \{p\}$;

(1) važi jer $\mathrm{Seg}[c_n, p] \subseteq K$ i $K \cap \bigcup_{i=0}^{n-2} \mathrm{Seg}[c_i, c_{i+1}] = \varnothing$. (2) sledi iz $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \mathrm{PG}(b) = \{p\}$ (što smo već dokazali), $p \in \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}]$, $p \neq b_{i_0+1}$ i činjenice da b ne dozvoljava samopreseke. Za (3) već znamo da važi. (4) sledi iz $\mathrm{Seg}[c_n, p] \cap \mathrm{PG}(b) = \{p\}$ i iz $\mathrm{Seg}[p, b_{i_0+1}] \subseteq \mathrm{Seg}[b_{i_0}, b_{i_0+1}] \subseteq \mathrm{PG}(b)$.

Dakle dokazali smo da h ne dozvoljava samopreseke. $\mathrm{PG}(h) \subseteq U$ sledi iz $\mathrm{Seg}[c_n, p] \subseteq K \subseteq U$, $\mathrm{PG}(c) \subseteq U$ i $\mathrm{PG}(b) \subseteq V \subseteq U$. Konačno jasno je da $\{z_1, \ldots, z_{m+1}\} \subseteq \mathrm{PG}(h)$.

Induktivnim rasuđivanjem zaključujemo da da postoji neko $c_{k+1} \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n$ za neko $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ koje ne dozvoljava samopreseke tako da je $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \subseteq \mathrm{PG}(c_{k+1}) \subseteq U$. Stavimo $F_{k+1} := \mathrm{PG}(c_{k+1})$. Zbog $d(x_i, z_i) < \dfrac{1}{k+1}$ za $i = \overline{1,k}$ imamo da je $\mathrm{Dist}(F_i, F_{k+1}) < \dfrac{1}{k+1}$ za $i = \overline{1,k}$. Jasno je da $F_{k+1} \cap \bigcup_{i=1}^{k} F_i = \varnothing$. Kako je U otvoren i povezan, c_{k+1} ne dozvoljava samopreseke i $\mathrm{PG}(c_{k+1}) \subseteq U$, to je i $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} F_i = U \setminus \mathrm{PG}(c_{k+1})$ otvoren i povezan. $\square$

185. Pokažimo da (C,τ) nije put povezan. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji neko preslikavanje $f : [0;1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (C,\tau)$ takvo da je $f(0) = A$ i $f(1) = B$. Neka je $r := \inf f^{\leftharpoonup}\{B\}$. Jasno $r \in [0;1]$. Kako je $\{B\}$ τ-zatvoren skup, a preslikavanje f τ-neprekidno, to je $f^{\leftharpoonup}\{B\}$ zatvoren skup prostora $[0;1]$. Zato mora biti $r \in f^{\leftharpoonup}\{B\}$, tj. $f(r) = B$. Zbog $f(0) = A \neq B$ sledi da je $0 < r$. Primetimo da za svako $t \in [0;r)$ važi $f(t) \neq B$. Skup

$$U := \{(x,y) \in C \,:\, y > 1/2\}$$

je τ-otvoren i $f(r) \in U$. Otuda postoji neko $\alpha \in (0;r)$ takvo da je $f^{\rightharpoonup}[\alpha;r] \subseteq U$. Kako je $f(\alpha) \neq B$ to za neko $k \in \mathbb{N}$ mora biti $f(\alpha) \in L_k \cap U$. Tada je $f(\alpha) = (1/k, s)$ za neko $s \in (1/2;1)$. Izaberimo proizvoljno $\delta \in \left(\dfrac{1}{k+1}; \dfrac{1}{k}\right)$. Imamo

$$W_1 := \{(x,y) \in C \,:\, x < \delta\} \in \tau$$

i

$$W_2 := \{(x,y) \in C \,:\, x > \delta\} \in \tau$$

i $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Zbog

$$f^{\rightharpoonup}[\alpha;r] \subseteq U \subseteq \{B\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \subseteq W_1 \cup W_2$$

i $f(\alpha) \in W_2 \cap f^{\rightharpoonup}[\alpha;r] \neq \varnothing$ i $f(r) = B \in W_1 \cap f^{\rightharpoonup}[\alpha;r] \neq \varnothing$ sada sledi da $f^{\rightharpoonup}[\alpha;r]$ nije povezan skup prostora (C,τ). No preslikavanje f je τ-neprekidno, a $[\alpha;r]$ povezan skup prostora $[0;1]$, pa ovo nije moguće. Dobijena protivurečnost svedoči da ne postoji nikakvo preslikavanje $f : [0;1] \xrightarrow{\mathsf{c}} (C,\tau)$ takvo da je $f(0) = A$ i $f(1) = B$.

Ovim smo pokazali da (C,τ) nije put povezan prostor.

Pokažimo sada da je (C, τ) povezan prostor. Ako stavimo $S_n := L_n$ i $S_0 := H$ onda je, na osnovu zadatka 163., skup

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n = H \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$$

povezan skup prostora (C, τ). A na osnovu istog zadatka, zbog

$$B \in \mathrm{cl}_\tau \left(H \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \right),$$

sada i skup

$$\{B\} \cup H \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = C$$

mora biti povezan. □

186. Skupovi

$$V := \{x \in [0;1] \,:\, f(x) > x\} \text{ i } M := \{x \in [0;1] \,:\, f(x) < x\}$$

su otvoreni podskupovi od $[0;1]$, jer je f neprekidno preslikavanje, i važi $V \cap M = \varnothing$. Kad bi bilo $f(x) \neq x$ za svako $x \in [0;1]$, onda bi imali $[0;1] = V \cup M$, a važilo bi i $f(1) < 1$ i $f(0) > 0$, tj. $0 \in V \neq \varnothing$ i $1 \in M \neq \varnothing$, te prostor $[0;1]$ ne bi bio povezan, što znamo da nije tačno. □

187. Skupovi

$$V := \{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > x\} \text{ i } M := \{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) < x\}$$

su otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$, jer je f neprekidno preslikavanje, i važi $V \cap M = \varnothing$. Prema učinjenoj pretpostavci važi $\mathbb{R} = V \cup M$. Zato, obzirom da je $\mathbb{R}$ povezan prostor, odavde dobijamo da je $\mathbb{R} = V$ ili da je $\mathbb{R} = M$. U prvom slučaju za svako $x \in \mathbb{R}$ mora da važi $f(x) > x$, pa stoga za svako $x \in \mathbb{R}$ mora da važi i $f(f(x)) > f(x) > x$. U drugom slučaju za svako $x \in \mathbb{R}$ mora da važi $f(x) < x$, pa stoga za svako $x \in \mathbb{R}$ mora da važi i $f(f(x)) < f(x) < x$. □

188. Neka su A i B dve različite tačke datog prostora i neka je s simetrala duži $\mathrm{Seg}[A, B]$. Za svako $T \in s$ stavimo

$$L_T := \mathrm{Seg}(A, T] \cup \mathrm{Seg}[T, B)$$

Imamo $L_{T_1} \cap L_{T_2} = \varnothing$ za svako $T_1, T_2 \in s$ tako da je $T_1 \neq T_2$. Kad bi za svako $T \in s$ postojala neka tačka $C_T \in L_T \cap \mathbb{Q}^2$, onda bi, zbog činjenice da je $C_{T_1} \neq C_{T_2}$ kad god su $T_1, T_2 \in s$ tazličite tačke, skup $\{C_T : T \in s\}$ bio neprebrojiv podskup prebrojivog skupa $\mathbb{Q}^2$. Dakle za neko $T \in s$ mora biti $L_T \cap \mathbb{Q}^2 = \varnothing$. Kako je još $A, B \notin \mathbb{Q}^2$, to sada sledi da je

$$\mathrm{Seg}[A, T] \cup \mathrm{Seg}[T, B] \subseteq X$$

□

189. Neka je $d_{\sup}$ metrika iz **P 14** i neka su date funkcije $f, g \in X$. Stavimo $C := d_{\sup}(f, g)$. Definišimo preslikavanje $H : [0; 1] \to X$ tako da je

$$\Big[H(t)\Big](s) := (1 - t)f(s) + tg(s)$$

za svako $t, s \in [0; 1]$. Da pokažemo da je H put u prostoru (X, τ) primetimo da za svako $t_1, t_2, s \in [0; 1]$ imamo

$$\Big|\Big[H(t_1)\Big](s) - \Big[H(t_2)\Big](s)\Big| = \big|(t_2 - t_1)f(s) + (t_1 - t_2)g(s)\big|$$

$$\leq |t_1 - t_2| \cdot |f(s) - g(s)| \leq C|t_1 - t_2|$$

Odavde sledi da važi

$$d_{\sup}\Big(H(t_1), H(t_2)\Big) \leq C|t_1 - t_2|$$

te preslikavanje H zaista jeste put.

Dakle dati prostor je put povezan, pa tim pre i povezan. □

190. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $p_n : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ projekcija definisana sa $p_n(z) := z(n)$ za svako $z \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Neka je τ $\mathbb{N}$-stepen uobičajene topologije na skupu $\mathbb{R}$.

Neka su dati $x, y \in C$. Za svako $t \in [0;1]$ i $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\lim_{n\to+\infty}\big((1-t)x(n)+ty(n)\big) =$$

$$(1-t)\lim_{n\to+\infty}x(n)+t\lim_{n\to+\infty}y(n)=(1-t)r+tr=r$$

Otuda, ako za svako $t \in [0;1]$ definišemo niz $H(t) \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ sa

$$\Big[H(t)\Big](n) := (1-t)x(n)+ty(n)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, onda imamo da je $H : [0;1] \to X$. Pokažimo da je H put u prostoru $\big(C, \mathrm{rel}_C(\tau)\big)$. Ovo je ekvivalentno činjenici da je H τ-neprekidno preslikavanje, odnosno činjenici da je za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $p_n \circ H : [0;1] \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$. Dakle neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Za $t \in [0;1]$ imamo

$$(p_{n_0}\circ H)(t) = \Big[H(t)\Big](n_0) = (1-t)x(n_0)+ty(n_0)$$

Kako je za svako $k, l \in \mathbb{R}$ funkcija $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ data sa $f(t) := kt + l$ neprekidna, to sledi da je H put u prostoru $\big(C, \mathrm{rel}_C(\tau)\big)$.

Ovim smo pokazali da je dati prostor put povezan. Tim pre on mora biti i povezan. $\square$

191. **(1)** Neka je B τ_Y-zatvoren (slučaj kad je B τ_X-otvoren se razmatra potpuno analogno) tako da $q^{\leftharpoonup}B$ nije τ_X-povezan. Kako je $q^{\leftharpoonup}B$ τ_X-zatvoren ovo drugim rečima znači da je $q^{\leftharpoonup}B = A_1 \cup A_2$ za neke neprazne, disjunktne, τ_X-zatvorene $A_1, A_2 \subseteq X$. Kad bi bilo $q(a_1) = q(a_2) =: b$ za neke $a_i \in A_i$, $i = \overline{1,2}$, onda bi (zbog $b \in B$ i $q^{\leftharpoonup}B = A_1 \cup A_2$) imali $q^{\leftharpoonup}\{b\} = (A_1 \cap q^{\leftharpoonup}\{b\}) \cup (A_2 \cap q^{\leftharpoonup}\{b\})$, pri čemu za $i = \overline{1,2}$ imamo da je $\varnothing \neq A_i \cap q^{\leftharpoonup}\{b\} \ni a_i$ $\mathrm{rel}_{q^{\leftharpoonup}\{b\}}(\tau_X)$-zatvoren skup, što bi značilo da $q^{\leftharpoonup}\{b\}$ nije τ_X-povezan, suprotno pretpostavci. Dakle $B_1 := q^{\rightharpoonup}A_1$ i $B_2 := q^{\rightharpoonup}A_2$ su disjunktni. Iz $q^{\leftharpoonup}B = A_1 \cup A_2$ i činjenice da je q preslikavanje **na** skup Y imamo da je $B = B_1 \cup B_2$, a kako je još $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ to možemo zaključiti da je $q^{\leftharpoonup}B_i = A_i$ za $i = \overline{1,2}$. q je (τ_X, τ_Y)-količničko pa su zato B_1 i B_2 τ_Y-zatvoreni. Kako je $B_1 \neq \varnothing \neq B_2$ (jer $A_1 \neq \varnothing \neq A_2$) to sledi da B nije τ_Y-povezan.

(2) Neka je $\lambda := \mathrm{Factor}(\tau, E)$ i $N \subseteq X_{/E}$ λ-komponenta povezanosti tačke $C \in X_{/E}$. Dakle C je τ-komponenta povezanosti i $C \subseteq \bigcup N = q^{\leftharpoonup} N$. q je (τ, λ)-količničko, za svako $S \in X_{/E}$ imamo da je $q^{\leftharpoonup}\{S\} = S$ τ-povezan jer je čak τ-komponenta povezanosti, pa prema **(1)**, obzirom da je N λ-zatvoren (kao λ-komponenta povezanosti), skup $q^{\leftharpoonup} N$ mora biti τ-povezan. No iz $C \subseteq q^{\leftharpoonup} N$ sada sledi $C = q^{\leftharpoonup} N$, a ovo znači da je $N = \{C\}$. $\square$

192. **(1)** Tvrđenje je direktna posledica činjenice da ako je $\mathcal{U} \cup \{U\} \subseteq \tau$ konačna familija i $F \subseteq X$ τ-zatvoren skup, onda važi

$$f^{\rightharpoonup} U = \mathrm{Hit}_X(\{U\}) \cap \mathcal{A}, \ f^{\leftharpoonup}\left[\mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) \cap \mathcal{A}\right] = \bigcap \mathcal{U}$$

i

$$f^{\leftharpoonup}\left[\mathrm{Miss}_X(F) \cap \mathcal{A}\right] = X \setminus F \ .$$

(2) Neka su dati konačan $\mathcal{U} \subseteq \tau$, τ-zatvoren $F \subseteq X$ i $A, B \in \mathcal{A}$ tako da je $A \cup B \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) \cap \mathrm{Miss}_X(F) \cap \mathcal{A} =: W$. Stavimo $\mathcal{U}_A := \{U \in \mathcal{U} \,:\, U \cap A \neq \varnothing\}$ i $\mathcal{U}_B := \{U \in \mathcal{U} \,:\, U \cap B \neq \varnothing\}$. Zbog $A \cup B \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U})$ je $\mathcal{U} = \mathcal{U}_A \cup \mathcal{U}_B$. Očigledno je

$$(A, B) \in \left[\mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}_A) \cap \mathrm{Miss}_X(F) \cap \mathcal{A}\right] \times \left[\mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}_B) \cap \mathrm{Miss}_X(F) \cap \mathcal{A}\right] =: M\,,$$

$M \in \lambda \times' \lambda$ i $u^{\rightharpoonup} M \subseteq W$, zbog $\mathcal{U} = \mathcal{U}_A \cup \mathcal{U}_B$.

193. **(1)** Neka je $x \in K$ i $K \in \mathcal{F} = \{A \subseteq X \,:\, X \setminus A \in \tau\}$ tako da je $x \notin K$. Postoji $U \in \tau$ tako da je $x \in U \subseteq \mathrm{cl}_\tau(U) \subseteq X \setminus K$. Lako je videti da je $(x, K) \in U \times \left[\mathrm{Miss}_X(\mathrm{cl}_\tau(U)) \cap \mathcal{F}\right] \subseteq (X \times \mathcal{F}) \setminus R$. Ovim smo dokazali da je $(X \times \mathcal{F}) \setminus R \in \tau \times' \lambda$.

(2) Neka su $K, L \in \mathcal{F}$ tako da je $K \nsubseteq L$ i neka je $x \in K \setminus L$. Postoji $U \in \tau$ tako da je $x \in U \subseteq \mathrm{cl}_\tau(U) \subseteq X \setminus L$. Lako je videti da je $(K, L) \in \left[\mathrm{Hit}_X(\{U\}) \cap \mathcal{F}\right] \times \left[\mathrm{Miss}_X(\mathrm{cl}_\tau(U)) \cap \mathcal{F}\right] \subseteq (\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \setminus R$. Ovim smo dokazali da je $(\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \setminus R \in \lambda \times' \lambda$.

(3) Ako su $K, L \in \mathcal{F}$ tako da je $K \cap L = \varnothing$, onda postoje $U, V \in \tau$ tako da je $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ i $U \cap V = \varnothing$. Jasno $(K, L) \in \big[\mathrm{Miss}_X(X \setminus U) \cap \mathcal{F}\big] \times \big[\mathrm{Miss}_X(X \setminus V) \cap \mathcal{F}\big] \subseteq (\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \setminus R$. Ovim smo dokazali da je $(\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \setminus R \in \lambda \times' \lambda$. $\square$

194. (1) Tvrđenje je direktna posledica činjenice da ako je $\mathcal{U} \subseteq \tau_2$ konačna familija i $F \subseteq X_2$ τ_2-zatvoren skup, onda važi

$$g^{\leftarrow}\mathrm{Hit}_{X_2}(\mathcal{U}) = \mathrm{Hit}_{X_1}\left(\{f^{\leftarrow}U \,:\, U \in \mathcal{U}\}\right) \quad \text{i} \quad g^{\leftarrow}\mathrm{Miss}_{X_2}(F) = \mathrm{Miss}_{X_1}(f^{\leftarrow}F)$$

(2) Ako je $n \in \mathbb{N}$ i $\{U_i \,:\, i = \overline{1,n}\} \subseteq \tau_1$, $\{V_i \,:\, i = \overline{1,n}\} \subseteq \tau_2$, onda je

$$m^{\leftarrow}\mathrm{Hit}_{X_1 \times X_2}\big(\{U_i \times V_i \,:\, i = \overline{1,n}\}\big) =$$
$$\mathrm{Hit}_{X_1}\big(\{U_i \,:\, i = \overline{1,n}\}\big) \times \mathrm{Hit}_{X_2}\big(\{V_i \,:\, i = \overline{1,n}\}\big)$$

Neka je sada $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ i $F \subseteq X_1 \times X_2$ $(\tau_1 \times' \tau_2)$-zatvoren skup tako da je $m(K_1, K_2) \in \mathrm{Miss}_{X_1 \times K_2}(F)$, tj. $K_1 \times K_2 \subseteq (X_1 \times X_2) \setminus F =: O \in \tau_1 \times' \tau_2$.

Za svako $(x, y) \in K_1 \times K_2$ postoji po $U_{x,y} \in \tau_1$ i $V_{x,y} \in \tau_2$ tako da je $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq O$. Ako je $y \in K_2$ onda iz $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{x \in K_1} U_{x,y}$ sledi da postoji konačan $T_y \subseteq K_1$ tako da je $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{x \in T_y} U_{x,y}$; stavimo $P_y := \bigcup\limits_{x \in T_y} U_{x,y} \in \tau_1$ i $Q_y := \bigcap\limits_{x \in T_y} V_{x,y} \in \tau_2$.

Ako je $y \in K_2$ i $(a, b) \in P_y \times Q_y$, onda je $(a, b) \in U_{x_0,y}$ za neko $x_0 \in T_y$, pa iz $b \in Q_y \subseteq V_{x_0,y}$ dalje sledi $(a, b) \in U_{x_0,y} \times V_{x_0,y} \subseteq O$. Ovo znači da za svako $y \in K_2$ važi $P_y \times Q_y \subseteq O$.

Iz $K_2 \subseteq \bigcup\limits_{y \in K_2} Q_y$ sledi da je $K_2 \subseteq \bigcup\limits_{y \in S} Q_y$ za neki konačan $S \subseteq K_2$. Stavimo $A := \bigcap\limits_{y \in S} P_y$ i $B := \bigcup\limits_{y \in S} Q_y$. Lako se proverava (rezon iz prethodnog pasusa) da je $A \times B \subseteq O$. Imamo $L_1 \times L_2 \subseteq A \times B \subseteq O$ za svako $(L_1, L_2) \in W$ gde je

$$W := \mathrm{Miss}_{X_1}(X_1 \setminus A) \times \mathrm{Miss}_{X_2}(X_2 \setminus B) \in \lambda_1 \times' \lambda_2$$

tj. $m^{\rightharpoonup} W \subseteq \mathrm{Miss}_{X_1 \times X_2}(F)$. Jasno $(K_1, K_2) \in W$. $\square$

195. (1) Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ konačan i $B \in X$ tako da je $\max S < \min B$. $\mathcal{U}_0 := \{\{n\} : n \in S\}$ je konačna familija $\mathbb{P}(\mathbb{N})$-otvorenih skupova, a $F_0 := \mathbb{N} \setminus (S \cup B)$ je $\mathbb{P}(\mathbb{N})$-zatvoren skup pa je $\mathrm{El}(S, B) = \mathrm{Hit}_{\mathbb{N}}(\mathcal{U}_0) \cap \mathrm{Miss}_{\mathbb{N}}(F_0) \cap X \in \lambda_1$.

Obrnuto, neka su dati konačan $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$, zatim $A \in X$ i $F \subseteq \mathbb{N}$ tako da je $A \in \mathrm{Hit}_{\mathbb{N}}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{Miss}_{\mathbb{N}}(F) \cap X =: O$. Za svako $U \in \mathcal{U}$ izaberimo po $x_U \in A \cap U$. Stavimo $m_0 := \max\{x_U : U \in \mathcal{U}\}$, $S := A \cap [1; m_0]$ i $B := (\mathbb{N} \setminus F) \cap [m_0 + 1; +\infty)$. Jasno $\{x_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq S$. Iz $A \in \mathrm{Miss}_{\mathbb{N}}(F)$ sledi da je $A \subseteq \mathbb{N} \setminus F$, pa kako je A beskonačan to imamo da je $B \in X$. $\max S = m_0 < m_0 + 1 \leq \min B$ i S je konačan pa je $\mathrm{El}(S, B) \in \tau$. Pokažimo da je $A \in \mathrm{El}(S, B) \subseteq O$.

Zbog $A \subseteq \mathbb{N} \setminus F$ je $A \cap [m_0 + 1; +\infty) \subseteq (\mathbb{N} \setminus F) \cap [m_0 + 1; +\infty) = B$. Otuda je $A = (A \cap [1; m_0]) \cup (A \cap [m_0 + 1; +\infty)) \subseteq S \cup B$. Kako je $S \subseteq A$ po konstrukciji, i jasno $A \in X$, ovim smo dokazali da je $A \in \mathrm{El}(S, B)$.

Neka je sada $C \in \mathrm{El}(S, B) \subseteq X$ proizvoljno. Ako $U \in \mathcal{U}$ onda je $x_U \in S \subseteq C$ pa je $x_U \in C \cap U \neq \varnothing$. Dakle $C \in \mathrm{Hit}_{\mathbb{N}}(\mathcal{U})$. Imamo $S \subseteq A \subseteq \mathbb{N} \setminus F$ pa je $C \subseteq S \cup B \subseteq \mathbb{N} \setminus F$, tj. $C \in \mathrm{Miss}_{\mathbb{N}}(F)$. Ovim smo dokazali da je $\mathrm{El}(S, B) \subseteq O$.

(2) Neka je $T \in Y$. Kako je T konačan skup to je i $\mathcal{V} := \{\{n\} : n \in T\}$ konačan pa je $Y \cap \mathrm{Hit}_{\mathbb{N}}(\mathcal{V}) \in \lambda_2$. Otuda je $\{T\} = Y \cap \mathrm{Hit}_{\mathbb{N}}(\mathcal{V}) \cap \mathrm{Miss}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N} \setminus T) \in \lambda_2$. $\square$

196. (1) Neka je $\mathcal{K} \subseteq X_1$ τ_1 kompaktan i neka je $\mathcal{V} \subseteq \tau$ tako da je $\bigcup \mathcal{K} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Treba dokazati da postoji neki konačan $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ tako da je $\bigcup \mathcal{K} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Za svako $A \in \mathcal{K}$ postoji po neki konačan $\mathcal{V}_A \subseteq \mathcal{V}$ tako da je $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}_A$ (jer je $A \in X_1$ τ-kompaktan podskup od X); stavimo $U_A := X_1 \cap \operatorname{Miss}_X(X \setminus \bigcup \mathcal{V}_A) \in \tau_1$. Dakle za svako $A \in \mathcal{K}$ je $A \in U_A$, tj. $\mathcal{K} \subseteq \bigcup\{U_A : A \in \mathcal{K}\}$ pa kako je $\mathcal{K}$ τ_1-kompaktan podskup od X_1, to postoji neki konačan $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ tako da je $\mathcal{K} \subseteq \bigcup\{U_A : A \in \mathcal{K}_0\}$. Stavimo $\mathcal{U} := \bigcup\{\mathcal{V}_A : A \in \mathcal{K}_0\}$. $\mathcal{U}$ je jasno konačan podskup od $\mathcal{V}$.

Neka je $x \in \bigcup \mathcal{K}$ proizvoljno. Postoji $K \in \mathcal{K}$ tako da je $x \in K$. Postoji $B \in \mathcal{K}_0$ tako da je $K \in U_B$, tj. $K \subseteq \bigcup \mathcal{V}_B \subseteq \bigcup\limits_{A \in \mathcal{K}_0} \left(\bigcup \mathcal{V}_A\right)$. Dakle $x \in K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Ovo znači da je $\bigcup \mathcal{K} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

(2) Stavimo

$$\mathcal{L}_1 := \big\{X_1 \cap \operatorname{Hit}_X\big(\{A\}\big) \,:\, A \in \tau \setminus \{\varnothing\}\big\}$$

i

$$\mathcal{L}_2 := \{X_1 \cap \operatorname{Miss}_X(F) \,:\, F \ \text{ je } \tau - \text{zatvoren}\}$$

Kako je $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ predbaza za τ_1 to će (τ_2, τ_1)-neprekidnost preslikavanja f neposredno slediti ako pokažemo da je $f^{\leftharpoonup} S \in \tau_2$ za svako $S \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Neka je $A \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ i $V := X_1 \cap \operatorname{Hit}_X\big(\{A\}\big)$. Za $\mathcal{K} \in X_2$ imamo

$$\mathcal{K} \in f^{\leftharpoonup} V \iff \mathcal{K} \in X_2 \wedge A \cap \bigcup \mathcal{K} \neq \varnothing \iff \mathcal{K} \in X_2 \wedge \exists K \in \mathcal{K}\ K \cap A \neq \varnothing$$

$$\iff \mathcal{K} \in X_2 \ \wedge \ \mathcal{K} \cap \big[X_1 \cap \operatorname{Hit}_X\big(\{A\}\big)\big] \neq \varnothing$$

pa je $f^{\leftharpoonup} V = X_2 \cap \operatorname{Hit}_{X_1}(\{U\})$, gde je $U := X_1 \cap \operatorname{Hit}_X\big(\{A\}\big)$. Kako je $A \in \tau$ to je $U \in \tau_1$ pa zaključujemo da je $f^{\leftharpoonup} V \in \tau_2$.

Neka je sada $F \subseteq X$ τ-zatvoren i $V := X_1 \cap \operatorname{Miss}_X(F)$. Za $\mathcal{K} \in X_2$ imamo

$$\mathcal{K} \in f^{\leftharpoonup} V \iff \mathcal{K} \in X_2 \wedge F \cap \bigcup \mathcal{K} = \varnothing \iff \mathcal{K} \in X_2 \wedge \forall K \in \mathcal{K}\ K \cap F = \varnothing$$

$$\iff \mathcal{K} \in X_2 \ \wedge \ \forall K \in \mathcal{K}\ K \in X_1 \cap \operatorname{Miss}_X(F) \iff \mathcal{K} \in X_2\ \mathcal{K} \subseteq U$$

gde je $U := X_1 \cap \mathrm{Miss}_X(F)$, pa je $f^{\leftharpoonup}V = X_2 \cap \mathrm{Miss}_{X_1}(X_1 \setminus U)$. Kako je $F \subseteq X$ τ-zatvoren to je $U \in \tau_1$ pa je $X_1 \setminus U$ τ_1-zatvoren. Otuda je $f^{\leftharpoonup}V \in \tau_2$. $\square$

197. (1) Za $n \in \mathbb{N}$ definišimo

$$\mathcal{S}_n(U) := \Big\{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\varnothing\} \,:\, \mathcal{V} \text{ je celularna familija sa } n \text{ elemenata i } \bigcup \mathcal{V} \subseteq U\Big\}$$

i pokažimo da je

$$\{A \in \mathcal{A} \,:\, \text{ postoji } B \subseteq A \cap U \text{ sa } n \text{ elemenata}\} = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}_n(U)} \mathrm{Hit}_X(\mathcal{V})$$

Da pokažemo manje očiglednu inkluziju, neka je $A \in \mathcal{A}$ i $\{b_1, \ldots, b_n\} = B \subseteq A \cap U$ sa n elemenata. Kako je $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$ to, obzirom da je (X, τ) `Hausdorff`-ov prostor, postoje $O_i \in \tau$ za $i = \overline{1, n}$ tako da je $b_i \in O_i$ i $i \neq j \Rightarrow O_i \cap O_j = \varnothing$; $\mathcal{B}$ je baza za τ, a $U \in \tau$ pa postoje $V_i \in \mathcal{B}$ tako da je $b_i \in V_i \subseteq U \cap O_i$. Lako je videti da je $\mathcal{V} := \{V_i \,:\, i = \overline{1, n}\} \in \mathcal{S}_n(U)$ kao i da je $A \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{V})$. Tvrđenje pod **(1)** sada sledi iz

$$\{A \in \mathcal{A} \,:\, A \cap U \text{ je beskonačan}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}_n(U)} \mathrm{Hit}_X(\mathcal{V})$$

(2) Neka je $\mathcal{B}$ prebrojiva baza prostora (X, τ). Stavimo

$$\mathcal{L} := \big\{(U_1, U_2) \in \mathcal{B}^2 \,:\, \overline{U_1} \subseteq U_2\big\}$$

i

$$I_Y := \{A \in \mathcal{A} \,:\, A \cap Y \text{ je beskonačan}\}$$

za svako $Y \subseteq X$. Kako je $\mathcal{B}$ prebrojiv skup to je i $\mathcal{L}$ prebrojiv. Za svako $(U_1, U_2) \in \mathcal{L}$ definišimo $P_{U_1, U_2} := \mathrm{Miss}_X\left(\overline{U_1}\right) \cup I_{U_2}$; na osnovu **(1)** i zbog identiteta $N \cup \bigcap_{j \in J} M_j = \bigcap_{j \in J}(N \cup M_j)$ imamo da je P_{U_1, U_2} G_δ skup topologije λ. Pokažimo

$$D := \{A \in \mathcal{A} \,:\, A \text{ nema izolovanih tačaka}\} = \bigcap_{(U_1, U_2) \in \mathcal{L}} P_{U_1, U_2}$$

(a kako je presek prebrojive familije G_δ skupova ponovo G_δ skup, iz ovog bi sledilo tvrđenje pod **(2)**). Primetimo najpre da ako je (Z, τ_Z) T_1 prostor i $S \subseteq Z$ bez τ_Z-izolovanih tačaka, onda za svako $V \in \tau_Z$ važi $S \cap V \neq \varnothing \Rightarrow$ $S \cap V$ *je beskonačan skup.*

Neka je $A \in D$ i $(U_1, U_2) \in \mathcal{L}$. Ako $A \notin \mathrm{Miss}_X\left(\overline{U_1}\right)$, onda je $\varnothing \neq A \cap \overline{U_1} \subseteq A \cap U_2$ pa je $A \cap U_2 \in \tau$ beskonačan, tj. $A \in I_{U_2}$.

Neka je sada $A \in \mathcal{A} \setminus D$. Tada postoje $W \in \tau$ i $a \in A$ tako da je $W \cap A = \{a\}$. Kako je (X, τ) regularan prostor, a $\mathcal{B}$ njegova baza, to postoje neki $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $a \in \overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq W$. Jasno $(V_1, V_2) \in \mathcal{L}$. Zbog $a \in \overline{V_1} \cap A$ je $A \notin \mathrm{Miss}_X(\overline{V_1})$, a da je $A \notin I_{V_2}$ sledi iz $A \cap V_2 \subseteq A \cap W = \{a\}$. Dakle $A \notin P_{V_1, V_2}$ pa je $A \notin \bigcap\limits_{(U_1, U_2) \in \mathcal{L}} P_{U_1, U_2}$. □

198. Neka je $F := \{(x, 1/x) \, : \, x \in (0; +\infty)\} \in \mathcal{F}_0$. Jasno

$$F \in \mathcal{F}_0 \cap \mathrm{Miss}_{\mathbb{R}^2}\left(\mathbb{R} \times (-\infty; 0]\right) =: W \in \lambda$$

Neka je $\varepsilon \in (0; 1)$ proizvoljno. Izaberimo bilo koji realan broj $x_0 > 2/\varepsilon$ i stavimo $F_0 := F \cup \{(x_0, 0)\}$. Iz $d\left((x_0, 0), (x_0, 1/x_0)\right) = 1/x_0 < \varepsilon/2$ sledi $[F, F_0, \varepsilon/2]_d$ pa je $\mathrm{H}_d(F, F_0) < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon < 1$ to je $\rho(F, F_0) = \mathrm{H}_d(F, F_0) < \varepsilon$ te je $F_0 \in \mathrm{K}_\rho[F; \varepsilon)$. No $F_0 \notin W$. Ovim smo dokazali da važi $W \in \lambda \setminus \mathrm{Top_m}(\rho)$.

Neka je sada $P := \mathbb{R} \times \{0\} \in \mathcal{F}_0$ i neka su $k \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_k \in \mu_{\mathbb{R}^2}$ i $S \subseteq \mathbb{R}^2$ $\mu_{\mathbb{R}^2}$-zatvoren skup tako da je $P \in \mathcal{F}_0 \cap \mathrm{Hit}_{\mathbb{R}^2}\left(\{U_1, \ldots, U_k\}\right) \cap \mathrm{Miss}_{\mathbb{R}^2}(S) =: V$. Za svako $i = \overline{1, k}$ možemo izabrati po $x_i \in \mathbb{R}$ tako da je $(x_i, 0) \in U_i$. Stavimo $Z_V := \left\{(x_i, 0) \, : \, i = \overline{1, n}\right\} \in \mathcal{F}_0$. Jasno $Z_V \in V$ i $Z_V \cap S = \varnothing$ (zbog $Z_V \subseteq P$).

Za $y := 1 + \max\limits_{i = \overline{1, n}} x_i$ imamo $(y, 0) \in P$ i $\inf\limits_{b \in Z_V} d((y, 0), b) = 1$ pa je $\mathrm{H}_d(P, Z_V) \geq \sup\limits_{a \in P} \inf\limits_{b \in Z_V} d(a, b) \geq 1$. Otuda je $\rho(P, Z_V) = 1$. Dakle $Z_V \notin \mathrm{K}_\rho[P; 1)$ pa je $Z_V \in V \setminus \mathrm{K}_\rho[P; 1) \neq \varnothing$. Iz prethodnog se lako može zaključiti da važi $\mathrm{K}_\rho[P; 1) \in \mathrm{Top_m}(\rho) \setminus \lambda$. □

199. Znamo da je $\rho := \mathrm{H}_{\mathcal{C}_0,d}$ metrika na skupu $\mathcal{C}_0$. Ako je $\varnothing \neq S \subseteq X$ konačan, $\varepsilon \in (0;+\infty)$, $\mathcal{U} := \{\mathrm{K}_d[x;\varepsilon) \,:\, x \in S\}$, $F := X \setminus \bigcup_{x\in S} \mathrm{K}_d[x;\varepsilon)$ i ako su $A, B \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) \cap \mathrm{Miss}_X(F)$, a $\delta \in (2\varepsilon;+\infty)$, tvrdimo da je $\mathrm{H}_d(A,B) < \delta$.

Zaista, ako je $a \in A$ onda zbog $\mathrm{Miss}_X(F)$ postoji neko $x_1 \in S$ tako da je $a \in \mathrm{K}_d[x_1;\varepsilon)$. Zbog $B \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U})$ postoji neko $b \in \mathrm{K}_d[x_1;\varepsilon)$. No tada je $d(a,b) \leq d(a,x_1) + d(x_1,b) < 2\varepsilon$. Dakle $\forall a \in A \exists b \in B\ d(a,b) < 2\varepsilon$. Analogno se dokazuje da je $\forall b \in B \exists a \in A\ d(b,a) < 2\varepsilon$. Ovo znači da je $[A,B,2\varepsilon]_d$ pa kako je $2\varepsilon < \delta$ to sledi $\mathrm{H}_d(A,B) < \delta$.

Ako je $A \in \mathcal{C}_0$ onda za svako $\varepsilon \in (0;+\infty)$ postoji konačan $S \subseteq A$ tako da je

$$A \in \mathrm{Hit}_X\left(\{\mathrm{K}_d[x;\varepsilon) \,:\, x \in S\}\right) \cap \mathrm{Miss}_X\Big(X \setminus \bigcup \{\mathrm{K}_d[x;\varepsilon) \,:\, x \in S\}\Big)$$

Iz ove činjenice i prethodne analize se lako sada zaključuje da važi $\mathrm{Top_m}(\rho) \subseteq \lambda$.

Neka su sada $\mathcal{U} \subseteq \tau$ konačan skup, $F \subseteq X$ τ-zatvoren skup i $A \in \mathcal{C}_0$ tako da je $A \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) \cap \mathrm{Miss}_X(F)$. Zbog $K \cap F = \varnothing$ postoji $\theta \in (0;+\infty)$ tako da je $d(b,a) \geq \theta$ za svako $(b,a) \in F \times A$. Zbog $A \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U})$ za svako $U \in \mathcal{U}$ postoji po $a_U \in A \cap U$ i $\delta_U \in (0;\theta]$ tako da je $\mathrm{K}_d[a_U;\delta_U) \subseteq U$. Stavimo $\varepsilon := \min\{\delta_U \,:\, U \in \mathcal{U}\}$. Pokažimo da je $\mathrm{K}_\rho[A;\varepsilon) \subseteq \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U}) \cap \mathrm{Miss}_X(F)$.

Neka je $B \in \mathrm{K}_\rho[A;\varepsilon)$. Imamo $[A,B,\varepsilon]_d$. Ako je $b \in B$ onda postoji neko $a \in A$ tako da je $d(b,a) < \varepsilon \leq \theta$ pa ne može biti $b \in F$ prema izboru broja θ. Dakle $B \in \mathrm{Miss}_X(F)$. Ako $U \in \mathcal{U}$ onda, obzirom da je $a_U \in A$, postoji neko $b \in B$ tako da je $d(a_U,b) < \varepsilon$. Zbog $\varepsilon \leq \delta_U$ je sada $b \in \mathrm{K}_d[a_U;\delta_U) \subseteq U$, pa je $b \in B \cap U \neq \varnothing$. Dakle $B \in \mathrm{Hit}_X(\mathcal{U})$.

Ovim smo dokazali da je $\lambda \subseteq \mathrm{Top_m}(\rho)$. □

200. **(1)** Za $a \in \mathbb{R}^2$ i $\rho \in (0;+\infty)$ definišimo funkciju $f_{a,\rho} : [0;1] \to X$ sa $f_{a,\rho}(t) := \mathrm{K}_d[a;t\rho]$ ako $t > 0$, odnosno $f_{a,\rho}(0) := \{a\}$. Za $a, b \in \mathbb{R}$

definišimo funkciju $g_{a,b} : [0;1] \to X$ sa $g_{a,b}(t) := \{(1-t) \cdot a + t \cdot b\}$. Neka su F $\mu_{\mathbb{R}^2}$-zatvoren i $n \in \mathbb{N}$ i $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mu_{\mathbb{R}^2}$ i stavimo $W := \mathrm{Miss}_{\mathbb{R}^2}(F) \cap \mathrm{Hit}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{U}) \cap X$.

Pokažimo da su funkcije $f_{a,\rho}$ τ-neprekidne. Neka je $t_0 \in (0;1]$ tako da je $f_{a,\rho}(t_0) \in W$. Imamo $\varepsilon_0 := \mathrm{Dist}\,(f_{a,\rho}(t_0), F) > 0$. Ako je $i \in \mathbb{N} \cap [1;n]$ onda zbog $U_i \cap \mathrm{K}_d[a; t_0\rho] \neq \varnothing$ možemo uočiti neko $u_i \in U_i \cap \mathrm{K}_d[a; t_0\rho) \neq \varnothing$; tada je $0 < t_0 - \dfrac{d(a, u_i)}{\rho} =: \varepsilon_i$. Neka je realan broj δ takav da je $0 < \delta \leq \varepsilon_j$ za svako $j = \overline{1,n}$, i $\delta \leq \varepsilon_0/\rho$. Lako je proveriti da mora da važi $(f_{a,\rho})^{\rightharpoonup}\big([0;1] \cap (t_0 - \delta; t_0 + \delta)\big) \subseteq W$. Ovo znači da je $f_{a,\rho}$ τ-neprekidna u tački t_0. Ako je $f_{a,\rho}(0) \in W$ i $\theta \in (0;1)$ tako da je $\mathrm{K}_d[a;\theta) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus F$, onda se jednostavno proverava je $(f_{a,\rho})^{\rightharpoonup}(0; \theta/\rho) \subseteq W$. Ovo znači da je $f_{a,\rho}$ τ-neprekidna u tački 0.

Pokažimo da su funkcije $g_{a,b}$ τ-neprekidne. Neka je $t_0 \in [0;1]$ tako da je $f(t_0) \in W$. Stavimo $U_0 := X \setminus F$. Za svako $i \in \mathbb{N} \cap [0;n]$ neka je $\varepsilon_i \in (0;+\infty)$ takvo da je $\mathrm{K}_d[a + t_0 \cdot (b-a); \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Ako je δ proizvoljan realan broj takav da je $0 < \delta \leq \varepsilon_j / d(a,b)$ za $i = \overline{0,n}$, onda je očigledno $(g_{a,b})^{\rightharpoonup}\big([0;1] \cap (t_0 - \delta; t_0 + \delta)\big) \subseteq W$.

Neka su najzad $a, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^2$ i $\rho, r_1, \ldots, r_m \in (0;+\infty)$ tako da je $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{K}_d[b_i; r_i] \subseteq \mathrm{K}_d[a;\rho]$. Za $i = \overline{1,m}$ preslikavanje $g_{a,b_i} * f_{b_i,r_i}$ koje nastaje nastavljanjem f_{b_i,r_i} na g_{a,b_i} je τ-neprekidno. Preslikavanje $u : X^m \to X$ definisano sa $u(A_1, \ldots, A_m) = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ je $\big(\prod'^{m}_{i=1}\tau, \tau\big)$-neprekidno (što sledi iz zadatka 192. koristeći indukciju). Zato je preslikavanje $p : [0;1] \to X$ definisano sa $p(t) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} (g_{a,b_i} * f_{b_i,r_i})(t)$ τ-neprekidno. Konačno, za preslikavanje $q * p$, gde je $q : [0;1] \to X$ definisano sa $q(t) = f_{a,\rho}(1-t)$, imamo da je τ-neprekidno kao i da važi $(q*p)(0) = \mathrm{K}_d[a;\rho]$ i $(q*p)(1) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{K}_d[b_i; r_i]$.

(2) Ovo se jednostavno dokazuje, recimo ispitivanjem neprekidnosti u svakoj tački.

(3) **(I)** Neka je najpre (Y,λ) proizvoljan prostor, a (X,τ) hiperprostor nepraznih kompaktnih podskupova tog prostora. Za $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathbb{P}(Y)$ sa $\mathcal{A}\subseteq_{\rightharpoonup}\mathcal{B}$ ćemo označavati činjenicu da je $\forall A\in\mathcal{A}\exists B\in\mathcal{B}\ (\overline{A}\subseteq B)$, sa $\mathcal{A}\subseteq_{\leftharpoonup}\mathcal{B}$ činjenicu da je $\forall B\in\mathcal{B}\exists A\in\mathcal{A}\ (\overline{A}\subseteq B)$ i sa $\mathcal{A}\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{B}$ činjenicu da je $\mathcal{A}\subseteq_{\rightharpoonup}\mathcal{B}\ \wedge\ \mathcal{A}\subseteq_{\leftharpoonup}\mathcal{B}$.

Za konačnu familiju $\mathcal{A}\subseteq\lambda$ definišimo $\langle\mathcal{A}\rangle:=\mathrm{Hit}(\mathcal{A})\cap\mathrm{Miss}\,(Y\setminus\bigcup\mathcal{A})\cap X$. Lako je videti da familija $\{\langle\mathcal{A}\rangle : \mathcal{A}\subseteq\lambda$ je konačan$\}$ predstavlja bazu prostora (X,τ). Jasno $\mathcal{A}\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{B}\ \Rightarrow\ \langle\mathcal{A}\rangle\subseteq\langle\mathcal{B}\rangle$.

Pretpostavimo sada da je λ regularna topologija i neka je $\mathcal{B}$ baza za (Y,λ). Tvrdimo da ako je $K\in\langle\mathcal{M}_1\rangle\cap\langle M_2\rangle$, onda postoji neki konačan $B_0\subseteq\mathcal{B}$ tako da je $K\in\langle\mathcal{B}_0\rangle$ i $\mathcal{B}_0\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{M}_1$, $\mathcal{B}_0\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{M}_2$: zaista ako je $S\in\mathcal{M}_1$, onda postoji neko $x(S)\in K\cap S$; zbog $K\subseteq\bigcup\mathcal{M}_2$ je $x(S)\in N$ za neko $N\in\mathcal{M}_2$. Kako je λ regularna topologija to postoji neko $f(S)\in\mathcal{B}$ tako da je $x(S)\in f(S)\subseteq\overline{f(S)}\subseteq S\cap N$. Jasno $f^{\rightharpoonup}\mathcal{M}_1\subseteq_{\rightharpoonup}\mathcal{M}_2$ i $f^{\rightharpoonup}\mathcal{M}_1\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{M}_1$. Slično za svako $S\in\mathcal{M}_2$ postoji neko $y(S)\in K\cap S$ i $g(S)\in\mathcal{B}$ tako da je $y(S)\in g(S)\subseteq\overline{g(S)}\subseteq S\cap N$. Jasno $g^{\rightharpoonup}\mathcal{M}_2\subseteq_{\rightharpoonup}\mathcal{M}_1$ i $g^{\rightharpoonup}\mathcal{M}_2\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{M}_2$. Za svako $z\in K$ postoje $M_1(z)\in\mathcal{M}_1$ i $M_2(z)\in\mathcal{M}_2$ tako da je $z\in M_1(z)\cap M_2(z)$ i $U(z)\in\mathcal{B}$ tako da je $z\in U(z)\subseteq\overline{U(z)}\subseteq M_1(z)\cap M_2(z)$. K je kompaktan pa je $K\subseteq\bigcup\limits_{z\in T}U(z)$ za neki konačan $T\subseteq K$. Ako stavimo $\mathcal{B}_0:=\{U(z) : z\in T\}\cup f^{\rightharpoonup}\mathcal{M}_1\cup g^{\rightharpoonup}\mathcal{M}_2$, onda je $\mathcal{B}_0$ kao što se traži.

Iz prethodnog specijalno sledi da ako je $\mathcal{B}$ prebrojiva baza, onda je $\mathcal{L}=\{\langle\mathcal{B}_0\rangle : \mathcal{B}_0\subseteq\mathcal{B}$ je konačan$\}$ prebrojiva baza za X. Neka je $K\in X$ i $\{\langle\mathcal{A}_i\rangle : i\in\mathbb{N}\}$ lokalna baza u strogom smislu u tački K, gde su $\mathcal{A}_i\subseteq\lambda$ konačni. Neka je $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}$ konačan tako da je $K\in\langle\mathcal{B}_1\rangle$ i $\mathcal{B}_1\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{A}_1$; za $i\in\mathbb{N}$ neka je $\mathcal{B}_{i+1}\subseteq\mathcal{B}$ konačan tako da je $K\in\langle\mathcal{B}_{i+1}\rangle$ i $\mathcal{B}_{i+1}\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{B}_i$ i $\mathcal{B}_{i+1}\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{A}_i$. Kako smo to ranije primetili imamo $\langle\mathcal{B}_i\rangle\subseteq\langle\mathcal{A}_i\rangle$ za svako $i\in\mathbb{N}$, pa je $\{\langle\mathcal{B}_i\rangle : i\in\mathbb{N}\}$ lokalna baza u strogom smislu u tački K, i to takva da je $\mathcal{B}_{i+1}\subseteq_{\leftrightarrow}\mathcal{B}_i$ za svako $i\in\mathbb{N}$.

(II) Vratimo se sada našem zadatku. $\mathcal{B} := \big\{\mathrm{K}_d[q;\delta) \,:\, q \in \mathbb{Q}^2,\ r \in \mathbb{Q} \cap (0;1)\big\}$ je prebrojiva baza prostora $(\mathbb{R}^2, \mu_{\mathbb{R}^2})$. Za $i \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ konačan tako da je $\{\langle \mathcal{B}_i \rangle \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ lokalna baza u strogom smislu u tački K, i to takva da je $\mathcal{B}_{i+1} \subseteq_{\leftrightarrow} \mathcal{B}_i$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Stavimo $\mathcal{U}_i := \mathcal{B}_{2i-1}$ i $\mathcal{V}_i := \{\overline{A} \,:\, A \in \mathcal{B}_{2i}\}$. Zbog $\langle \mathcal{B}_{i+1} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}_i \rangle$ imamo da je $\{\langle \mathcal{U}_i \rangle \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ lokalna baza u strogom smislu u tački K i to takva da je $\langle \mathcal{U}_{i+1} \rangle \subseteq \langle \mathcal{U}_i \rangle$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Pritom je $\mathcal{V}_{i+1} \subseteq_{\leftrightarrow} \mathcal{V}_i \subseteq_{\leftrightarrow} \mathcal{U}_i$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Stavimo $K_i := \bigcup \mathcal{V}_i \in X$, za $i \in \mathbb{N}$.

Ako je A zatvorena kugla i $\mathcal{F} \neq \varnothing$ konačan skup zatvorenih kugli tako da je $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A$, fiksirajmo $(\mu_{[0;1]}, \tau)$-neprekidno preslikavanje $h_{A;\mathcal{F}} : [0;1] \to X$ tako da je $h_{A;\mathcal{F}}(0) = A$, $h_{A;\mathcal{F}}(1) = \bigcup \mathcal{F}$ i $\varnothing \neq h_{A;\mathcal{F}}(t) \subseteq A$ za svako $t \in [0;1]$.

Neka je $m_i := 1 - \dfrac{1}{i}$ za $i \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$. Za $A \in \mathcal{V}_i$ skup $\mathcal{V}_{i+1}(A) := \{B \in \mathcal{V}_{i+1} \,:\, B \subseteq A\}$ je zbog $\mathcal{V}_{i+1} \subseteq_{\leftharpoondown} \mathcal{V}_i$ neprazan; stavimo

$$r_i(t) := \bigcup_{A \in \mathcal{V}_i} h_{A;\mathcal{V}_{i+1}(A)}\left(\frac{t - m_i}{m_{i+1} - m_i}\right) \in X$$

za $t \in [m_i; m_{i+1}]$. Preslikavanje $r_i : [m_i; m_{i+1}] \to X$ je $\big(\mu_{[m_i;m_{i+1}]}, \tau\big)$-neprekidno. Pritom je

$$r_i(m_i) = \bigcup_{A \in \mathcal{V}_i} h_{A;\mathcal{V}_{i+1}(A)}(0) = \bigcup_{A \in \mathcal{V}_i} A = K_i$$

i

$$r_i(m_{i+1}) = \bigcup_{A \in \mathcal{V}_i} h_{A;\mathcal{V}_{i+1}(A)}(1) = \bigcup_{A \in \mathcal{V}_i} \Big(\bigcup \mathcal{V}_{i+1}(A)\Big) =$$

$$= \bigcup \{B \in \mathcal{V}_{i+1} \,:\, \exists A \in \mathcal{V}_i \ (B \subseteq A)\} = \bigcup \mathcal{V}_{i+1} = K_{i+1}$$

Pokažimo da je $r_i(t) \in \langle \mathcal{U}_i \rangle$ za svako $t \in [m_i; m_{i+1}]$. Imamo $r_i(t) \subseteq \bigcup\limits_{A \in \mathcal{V}_i} A \subseteq \bigcup\limits_{S \in \mathcal{U}_i} S = \bigcup \mathcal{U}_i$, jer $\mathcal{V}_i \subseteq_{\rightharpoondown} \mathcal{U}_i$. Neka je sada $S_0 \in \mathcal{U}_i$ proizvoljno.

Zbog $\mathcal{V}_i \subseteq_{\llcorner} \mathcal{U}_i$ postoji neko $A_0 \in \mathcal{V}_i$ tako da je $A_0 \subseteq S_0$. Imamo

$$h_{A_0;\mathcal{V}_{i+1}(A_0)}\left(\frac{t-m_i}{m_{i+1}-m_i}\right) \subseteq A_0 \subseteq S_0$$

pa je

$$r_i(t) \cap S_0 \supseteq h_{A_0;\mathcal{V}_{i+1}(A_0)}\left(\frac{t-m_i}{m_{i+1}-m_i}\right) \cap S_0 = h_{A_0;\mathcal{V}_{i+1}(A_0)}\left(\frac{t-m_i}{m_{i+1}-m_i}\right) \neq \varnothing$$

Kako za svako $i \in \mathbb{N}$ važi $r_i(m_{i+1}) = K_{i+1} = r_{i+1}(m_{i+1})$ kao i $(r_i)^{\rightharpoonup}[m_i; m_{i+1}] \subseteq \langle \mathcal{U}_i \rangle$, to iz $\big(\mu_{[m_i;m_{i+1}]}, \tau\big)$-neprekidnosti ovih preslikavanja, činjenice da je $\{\langle \mathcal{U}_i \rangle : i \in \mathbb{N}\}$ lokalna baza u strogom smislu u tački K i toga što važi $\langle \mathcal{U}_{i+1} \rangle \subseteq \langle \mathcal{U}_i \rangle$ za svako $i \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $r := \{(1, K)\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} r_i$ $\big(\mu_{[0;1]}, \tau\big)$-neprekidno preslikavanje; pritom je $r(0) = r_1(m_1) = K_1$ i $r(1) = K$. No već smo videli u dokazu dela **(1)** da postoji $\big(\mu_{[0;1]}, \tau\big)$-neprekidno preslikavanje $f : [0; 1] \to X$ tako da je $f(0) = \{(0, 0)\}$ i $f(1) = K_1$, jer je K_1 unija konačno mnogo zatvorenih kugli. Tada je $g := f * r$ $\big(\mu_{[0;1]}, \tau\big)$-neprekidno preslikavanje tako da je $g(0) = \{(0, 0)\}$ i $g(1) = K$. $\square$

201. Neka su A i B proizvoljni skupovi, svaki od kojih ima po bar dva elementa, tako da je $A \cap B = \varnothing$. Stavimo $X := A \cup B$, $E_1 := A^2 \cup \{(x, x) : x \in B\}$, $E_2 := B^2 \cup \{(x, x) : x \in A\}$ i $\mathcal{R} := \{E_1, E_2\}$. Očigledno, E_1 i E_2 su relacije ekvivalencije na skupu X i važi $E_1 \cap E_2 = \Delta_X$. Uslov (FB) ne važi jer je $E_1 \neq \Delta_X \neq E_2$. Ako je $S \subseteq X$ proizvoljan i $x \in S$, onda je ili $x \in A$ ili $x \in B$; u prvom slučaju je $\mathrm{B}[x; E_2) = \{x\} \subseteq S$, a u drugom $\mathrm{B}[x; E_1) = \{x\} \subseteq S$. Dakle $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{R}) = \mathbb{P}(X)$. $\square$

202. **(1)** Za $S \subseteq X$ stavimo $D := \{x \in S : \exists A \in \mathcal{U}\ (\mathrm{B}[x; A) \subseteq S)\}$.

Ako je $x \in \mathrm{int}_\tau(S)$ onda je zbog $\mathrm{int}_\tau(S) \in \tau$ prema definiciji topologije τ za neko $A \in \mathcal{U}$ mora biti $x \in \mathrm{B}[x; A) \subseteq \mathrm{int}_\tau(S) \subseteq S$, pa je $x \in D$. Ovim smo dokazali da je $\mathrm{int}_\tau(S) \subseteq D$.

Da pokažemo sada $D \subseteq \mathrm{int}_\tau(S)$ neka je $x \in D$ proizvoljno. Imamo $\mathrm{B}[x;A) \subseteq S$ za neko $A \in \mathcal{U}$. Neka je $C \in \mathcal{U}$ tako da je $C^{(2} \subseteq A$. Pokažimo da je $\mathrm{B}[x;C) \subseteq D$.

Neka je $y \in \mathrm{B}[x;C)$ proizvoljno. Ako je $z \in \mathrm{B}[y;C)$ onda iz $x\,C\,y$ i $y\,C\,z$ sledi $x\,C^{(2}\,z$ pa je $x\,A\,z$, tj. $z \in \mathrm{B}[x;A) \subseteq S$. Ovim smo dokazali da je $\mathrm{B}[y;C) \subseteq S$. A ovo znači da je $y \in D$. Kako je $y \in \mathrm{B}[x;C)$ bilo proizvoljno to sledi $\mathrm{B}[x;C) \subseteq D$.

Kako je $x \in D$ bilo proizvoljno to smo upravo dokazali da je $D \in \tau$ pa je zbog $D \subseteq S$ i $D \subseteq \mathrm{int}_\tau(S)$.

(2) Zbog $x \in \mathrm{B}[x;A) \subseteq \mathrm{B}[x;A)$ prema **(1)** sledi da je $x \in \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[x;A))$. **(2)** sledi iz te činjenice i definicije topologije $\mathrm{Top}_\mathrm{u}(\mathcal{U})$. $\square$

203. **(1)** Neka je $M \in \mathcal{U}$. Postoji neko $N \in \mathcal{U}$ tako da je $N^{(3} \subseteq M$. Neka je $N_0 := N \cap N^{(-1}$. Jasno $N_0 \in \mathcal{U}$, $(N_0)^{(-1} = N_0$ i $(N_0)^{(3} \subseteq M$. Da je $\mathrm{cl}_\lambda(M) \in \mathcal{U}$ sledi neposredno iz $\mathcal{U} \ni M \subseteq \mathrm{cl}_\lambda(M)$. Pokažimo da je $N_0 \subseteq \mathrm{int}_\lambda(M)$ iz čega će slediti da je $\mathrm{int}_\lambda(M) \in \mathcal{U}$.

Dakle neka je $(x,y) \in N_0$ proizvoljno. Imamo $U := \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[x;N_0)) \times \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[y;N_0)) \in \lambda$ kao i $(x,y) \in U$. Ako je $(a,b) \in U$ proizvoljno onda je $(x,a) \in N_0 = (N_0)^{(-1}$ i $(y,b) \in N_0$, tj. $(a,x) \in N_0$, $(x,y) \in N_0$ i $(y,b) \in N_0$, pa je $(a,b) \in (N_0)^{(3} \subseteq M$. Dakle $(x,y) \in U \subseteq M$, pa je $(x,y) \in \mathrm{int}_\lambda(M)$. Ovim smo dokazali da je $N_0 \subseteq \mathrm{int}_\lambda(M)$.

(2) Ako je $M \in \mathcal{U}$ onda je prema **(1)** $N := \mathrm{int}_\lambda(M) \in \mathcal{U} \cap \lambda$. Preslikavanje $f : X^2 \to X^2$ definisano sa $f(x,y) := (y,x)$ je (λ,λ)-homeomorfizam (što se trivijalno proverava) pa je zato $N^{(-1} = f^{\rightharpoonup}N \in \lambda$. Otuda je $N_0 := N \cap N^{(-1} \in \mathcal{U} \cap \lambda$ i važi $(N_0)^{(-1} = N_0$. Jasno, imamo $N_0 \subseteq \mathrm{int}_\lambda(M) \subseteq M$.

(3) Za proizvoljno $M \in \mathcal{U}$ uočimo (kao u delu pod **(1)**) neko $N_0 \in \mathcal{U}$ tako da je $(N_0)^{(-1} = N_0$ i $(N_0)^{(3} \subseteq M$. Pokažimo da je $\mathrm{cl}_\lambda(N_0) \subseteq M$. Neka je $(a,b) \in \mathrm{cl}_\lambda(N_0)$. Imamo $V := \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[a;N_0)) \times \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[b;N_0)) \in \lambda$ pa postoji neko $(x,y) \in V \cap N_0$. $(a,x) \in N_0$, $(x,y) \in N_0$ i $(b,y) \in N_0 = (N_0)^{(-1}$, pa je $(a,b) \in (N_0)^{(3} \subseteq M$. Ovim smo dokazali da je $\mathrm{cl}_\lambda(N_0) \subseteq M$. Dalje, kako je $f : X^2 \to X^2$ definisano sa $f(x,y) := (y,x)$ (λ,λ)-homeomorfizam, to imamo $(\mathrm{cl}_\lambda(N_0))^{(-1} = f^{\rightharpoonup}\mathrm{cl}_\lambda(N_0) = \mathrm{cl}_\lambda(f^{\rightharpoonup}N_0) = \mathrm{cl}_\lambda(N_0)$. $\square$

204. (1) Neka je $A \subseteq X$. Za proizvoljno $a \in A$ imamo $\mathrm{B}[a;\Delta_X) = \{a\} \subseteq A$, pa je $A \in \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$.

(2) Sledi direktno iz definicije topologije indukovane uniformnošću.

(3) Neka je $\tau := \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$ i pretpostavimo najpre da je $\mathcal{U}$ `Hausdorff`-ova uniformnost. Neka su $a, b \in X$ tako da je $a \neq b$. Kako je $(a,b) \notin \Delta_X = \bigcap \mathcal{U}$ to je $(a,b) \notin R$ za neko $R \in \mathcal{U}$. Neka je $Q \in \mathcal{U}$ takvo da $Q^{(2} \subseteq R$. Stavimo $U := \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[a;Q))$ i $V := \mathrm{int}_\tau\left(\mathrm{B}\left[b;Q^{(-1}\right)\right)$. Prema zadatku 202. pod (2) je $a \in U$ i $b \in V$. Kad bi postojalo neko $c \in U \cap V$, onda bi imali $(a,c) \in Q$ i $(b,c) \in Q^{(-1}$, tj. $(a,c) \in Q$ i $(c,b) \in Q$, pa bi bilo $(a,b) \in Q^{(2} \subseteq R$, što nije tačno. Dakle mora da važi $U \cap V = \varnothing$.

Pretpostavimo sada da je τ `Hausdorff`-ova topologija i neka je $(a,b) \in X^2 \setminus \Delta_X$. Zbog $a \neq b$ postoji neko $R \in \mathcal{U}$ tako da je $a \in \mathrm{B}[a;R) \not\ni b$. Jasno je da $(a,b) \notin R \supseteq \bigcap \mathcal{U}$.

(4) Ako je $\mathcal{U}_E$ uniformnost na skupu X, onda zbog $E \in \mathcal{U}_E$ postoje neki $A, B \in \mathcal{U}_E$ tako da važi $A^{(2} \subseteq E$ i $B \subseteq E^{(-1}$. Kako je $E \subseteq A \cap B$ to je $E^{(2} \subseteq E$ i $E \subseteq E^{(-1}$, tj. $E^{(-1} \subseteq E$. Ovo znači da je E tranzitivna i simetrična relacija.

Obrnuto, ako je E relacija ekvivalencije na skupu X, onda za svako $A, B \in \mathcal{U}_E$ važi $E^{(2} = E \subseteq A$, $E = E^{(-1} \subseteq A^{(-1}$ i $E \subseteq A \cap B$. Ovo govori da je $\mathcal{U}_E$ uniformnost na X.

Ako je $E \subseteq A \subseteq X \times X$ i $x \in X$, onda je $\mathrm{B}[x;E) \subseteq \mathrm{B}[x;A)$. Zato ako je $x \in S \subseteq X$, onda je $\exists A \in \mathcal{U}_E\ (\mathrm{B}[x;A) \subseteq S)$ ekvivalentno sa $\mathrm{B}[x;E) \subseteq S$, obzirom da je $E \in \mathcal{U}_E$. Zato je $S \in \mathrm{Top_u}(\mathcal{U}_E)$ ako i samo ako $\forall x \in S\ (\mathrm{B}[x;E) \subseteq S)$. No $\mathrm{B}[x;E) = [x]_E$ te je $S \in \mathrm{Top_u}(\mathcal{U}_E)$ ako i samo ako $\forall x \in S\ ([x]_E \subseteq S)$. $\square$

205. **(1)** Primetimo najpre da je $x\,R_\varepsilon\,y$ ako i samo ako $\{x-y, y-x\} \subseteq \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon)$. Kako su sve relacije R_ε za $\varepsilon \in (0;+\infty)$ refleksivne, to treba zapravo proveriti da li $\mathcal{V}$ zadovoljava uslove (FB), (U1) i (U2). Sve relacije R_ε za $\varepsilon \in (0;+\infty)$ su simetrične tako da (U2) automatski važi. (FB) važi jer je $R_{\varepsilon_1} \cap R_{\varepsilon_2} = R_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da je $y\,R_{\varepsilon/2}\,z$ i $z\,R_{\varepsilon/2}\,x$. Iz $y-z \in \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon/2)$ i $z-x \in \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon/2)$ sledi $y-x \in \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon)$, a iz $z-y \in \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon/2)$ i $x-z \in \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon/2)$ sledi $x-y \in \mathbb{Q}\cap(-\infty;\varepsilon)$. Dakle $x\,R_\varepsilon\,y$. Ovim je dokazano $\left(R_{\varepsilon/2}\right)^{(2} \subseteq R_\varepsilon$. Zato važi (U1).

(2) Sve relacije D_a za $a \in \mathbb{R}$ su simetrične i tranzitivne pa (U1) i (U2) automatski važe. (FB) sledi iz jednakosti $D_{a_1} \cap D_{a_2} = D_{\max\{a_1,a_2\}}$ za $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, koja se jednostavno proverava.

(3) Da je $\mathcal{V}_{\mathrm{u}}$ uniformnost na skupu X sledi iz zadatka 204. pod (4) i činjenice da je E relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{R}$ što se lako proverava.

(4) Imamo $(1/3, 0), (0, 1/2) \in E$ dok je $(1/3, 1/2) \notin E$. Zato E nije relacija ekvivalencije na skupu $[0;1]$ pa prema zadatku 204. pod (4) $\mathcal{V}_{\mathrm{u}}$ nije uniformnost. $\square$

206. **(1)** Ako je $x < a$ onda je $\mathrm{B}[x; D_a) = \{x\}$ pa je zato $\{x\} \in \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{V})$.

(2) Na osnovu zadatka 204. pod (4) imamo da za $S \subseteq \mathbb{R}$ važi $S \in \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{V})$ ako i samo ako je S pravilan za $E := \Delta_X \cup \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. Lako se proverava da je $\mathbb{R}_{/E} = \big\{\{x,-x\} : x \in [0;+\infty)\big\}$. Ako je $x \in [0;+\infty)$ proizvoljno, onda je $\{x,-x\}$ pravilan za E i pritom je $\{x\} = [0;+\infty) \cap \{x,-x\}$ Ovo znači da je $[0;+\infty)$ $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{V})$-diskretan podskup od $\mathbb{R}$. Iz $[0;+\infty) \cap A \neq \varnothing$ za svako $A \in \mathbb{R}_{/E}$ sledi da je $[0;+\infty) \cap \bigcup N \neq \varnothing$ za svaki neprazan $N \subseteq \mathbb{R}_{/E}$. Ovo znači da je $[0;+\infty)$ $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{V})$-gust. $\square$

207. Da je $\mathcal{V}_d$ u-baza na X sledi iz jednakosti $D_{\varepsilon_1} \cap D_{\varepsilon_2} = D_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}$, $\left(D_{\varepsilon/2}\right)^{(2} \subseteq D_\varepsilon$ i $(D_\varepsilon)^{(-1} = D_\varepsilon$, koje važe za svako $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon \in (0;+\infty)$.

Jednakost $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V}_d) = \mathrm{Top_m}(d)$ sledi iz toga što važi $\mathrm{B}[x; D_\varepsilon) = \mathrm{K}_d[x;\varepsilon)$ za svako $x \in X$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$.

Da pokažemo da je $\mathcal{V}_d \subseteq \mathrm{Top_m}(d) \times' \mathrm{Top_m}(d) =: \lambda$ neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj i $(x_0, y_0) \in R_\varepsilon$. Tada je $r := d(x_0, y_0) < \varepsilon$ pa je $\delta := \dfrac{\varepsilon - r}{2} < 0$. Stavimo $W := \mathrm{K}_d[x_0; \delta) \times \mathrm{K}_d[x_0; \delta)$. Jasno $(x_0, y_0) \in W \in \lambda$. Ako je $(a, b) \in W$ onda iz $d(a, x_0) < \delta$ i $d(b, y_0) < \delta$ sledi $d(a, b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, b) < 2\delta + r < \varepsilon$, tj. $(a, b) \in R_\varepsilon$. Dakle $(x_0, y_0) \in W \subseteq R_\varepsilon$. Ovim smo dokazali da je $\mathcal{V}_d \subseteq \lambda$.

d je metrika ako i samo ako $\forall (a, b) \in X^2 \setminus \Delta_X \; d(a, b) > 0$ ako i samo ako $\forall (a, b) \in X^2 \setminus \Delta_X \; \exists \varepsilon \in (0; +\infty) \; d(a, b) \geq \varepsilon$ ako i samo ako $\forall (a, b) \in X^2 \setminus \Delta_X \; \exists \varepsilon \in (0; +\infty) \; (a, b) \notin D_\varepsilon$ ako i samo ako $\Delta_X = \bigcap \mathcal{V}_d$. No $\bigcap \mathcal{V}_d = \bigcap (\mathcal{V}_d)_\mathrm{u}$. □

208. Za svako $\varepsilon \in (0; +\infty)$ je $R_\varepsilon \subseteq R'_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < \varepsilon\}$. Ako je $\mathcal{V}' := \{R'_\varepsilon : \varepsilon \in (0; +\infty)\}$ onda prema zadatku 207. važi $\mathrm{Top_u}(\mathcal{V}') = \mathrm{Top_m}(d) = \mu_\mathbb{R}$ gde je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, pa je prema (2) iz zadatka 204. je $\mu_\mathbb{R} = \mathrm{Top_u}(\mathcal{V}') \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$.

Kako je $U := \mathbb{Q} \cap (0; 1) \notin \mu_\mathbb{R}$ skup koji je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$-otvoren (jer za $x \in U$ i $\varepsilon := \min\{x, 1 - x\}$ važi $\mathrm{B}[x; R_\varepsilon) \subseteq U$) to smo dokazali da je $\mu_\mathbb{R} \subset \mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$.

Ako je $\sim$ kongruencija na grupi $(\mathbb{R}, +)$ koja odgovara podgrupi $(\mathbb{Q}, +)$, onda je $\mathbb{R} = \bigcup \mathbb{R}_{/\sim}$, pa kako je za svako $x \in \mathbb{R}$ skup $[x]_\sim = x + \mathbb{Q}$ prebrojiv to $\mathbb{R}_{/\sim}$ mora biti neprebrojiv (štaviše moći kontinuum). $\mathbb{R}_{/\sim}$ je celularna familija. Ako je $s \in \mathbb{R}$ i $r \in s + \mathbb{Q}$, onda za proizvoljno $\varepsilon \in (0; +\infty)$ važi $\mathrm{B}[r; R_\varepsilon) \subseteq s + \mathbb{Q}$. Ovo znači da je $\mathbb{R}_{/\sim} \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$. □

209. Označimo sa d euklidsku metriku na skupu $[0; 1]$. Da familija $\mathcal{O}$ zadovoljava uslov (FB) je očigledno, a da proverimo uslov (U1) neka je $A \in \mathcal{O}$. Sledi da za svako $x \in X$ postoji po $\varepsilon_x \in (0; +\infty)$ tako da je $A = \bigcup\limits_{x \in X} \big[\mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x)\big]^2$. Kako je $X = \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x)$ to na osnovu zadatka 144. postoji neko $\delta \in (0; +\infty)$ takvo da za svako $u \in X$ postoji neko $x \in X$ tako da $\mathrm{K}_d[u; \delta) \subseteq \mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x)$. Stavimo $B := \bigcup\limits_{x \in X} \big[\mathrm{K}_d[x; \delta/4)\big]^2$. Jasno

$B \in \mathcal{O}$. Da pokažemo da je $B^{(2} \subseteq A$ neka su $u, v, w \in X$ tako da je $(w, v), (v, u) \in B$. Ovo znači da postoje neki $x, y \in X$ takvi da je $\{u, v\} \subseteq \mathrm{K}_d[x; \delta/4)$ i $\{w, v\} \subseteq \mathrm{K}_d[y; \delta/4)$. Odatle je $d(u, v) \leq d(x, u) + d(x, v) < \delta/2$ i $d(w, v) \leq d(y, w) + d(y, v) < \delta/2$ pa je $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) < \delta$. Dakle $\{u, w\} \subseteq \mathrm{K}_d[u; \delta)$ pa za neko $x \in X$ važi $\{u, w\} \subseteq \mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x)$. Zato je $(u, w) \in \left[\mathrm{K}_d[x; \varepsilon_x)\right]^2 \subseteq A$. Ovim smo dokazali da je $B^{(2} \subseteq A$.

Da proverimo uslov (U2) neka je $A \in \mathcal{O}$. Kako je preslikavanje $f : X \to X$ definisano sa $f(x, y) := (y, x)$ $(\tau \times' \tau, \tau \times' \tau)$-homeomorfizam, onda je i $A^{(-1} = f^{\rightharpoonup} A \in \tau \times' \tau$. Jasno $\Delta_X \subseteq A^{(-1}$, što znači da je $A^{(-1} \in \mathcal{O}$.

Pokažimo da je $\lambda := \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O}) \subseteq \tau$. Neka je $S \in \lambda$ i $x_0 \in S$ proizvoljno. Postoji neko $A \in \mathcal{O}$ tako da je $\mathrm{B}[x_0; A) \subseteq S$. Kako je $(x_0, x_0) \in A \in \tau \times' \tau$ to postoji τ-otvoren $V \ni x_0$ tako da je $\{x_0\} \times V \subseteq A$. Dakle $x_0 \in V \subseteq \mathrm{B}[x_0; A) \subseteq S$. Kako je $x_0 \in S$ bilo proizvoljno ovim smo dokazali da je $S \in \tau$.

Neka je sada $S \in \tau$ i i $x_0 \in S$. Postoji $\varepsilon \in (0; +\infty)$ tako da je $\mathrm{K}_d[x_0; \varepsilon) \subseteq S$. Prema zadatku 207. je $R_\varepsilon := \{(a, b) \in X^2 \,:\, d(a, b) < \varepsilon\} \in \tau \times' \tau$. Dakle $R_\varepsilon \in \mathcal{O}$ i $\mathrm{B}[x_0; R_\varepsilon) = \mathrm{K}_d[x_0; \varepsilon) \subseteq S$. Ovim smo dokazali da je $S \in \lambda$.

Primetimo da nam za dokaz ove poslednje činjenice nije bila potrebna metrizabilnost topologije τ već samo činjenica da se radi o T_1 topologiji. Zaista ako $x_0 \in S \in \tau$, onda je $C := (X \setminus \{x_0\})^2 \cup S^2 \in \mathcal{O}$ i $x_0 \in \mathrm{B}[x_0; C) \subseteq S$, odakle vidimo da mora biti $\tau \subseteq \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O})$.

Napomena 9. Ako je (X, τ) proizvoljan prostor i

$$\mathcal{O} := \{A \subseteq X \times X \,:\, \Delta_X \subseteq A \in \tau \times' \tau\}$$

onda je, obzirom da $\mathcal{O}$ zadovoljava uslov (FB), $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O})$ topologija na skupu X; gore smo zapravo dokazali da je uvek $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O}) \subseteq \tau$. Ako je τ T_1

topologija onda je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{O}) = \tau$. Familija $\mathcal{O}$ ne mora uvek biti u-baza na X; doduše jeste u-baza ako je τ `Hausdorff`-ova parakompaktna topologija – specijalno metrizabilna ili T_3 `Lindelöf`-ova (gore smo zapravo dali dokaz ove činjenice u slučaju kompaktne metrizabilne topologije). $\square$

210. Stavimo $\mathcal{K} := \{(K,\varepsilon) : K \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan skup i $\varepsilon \in (0;+\infty)\}$.
(1) Da familija $\mathcal{V}$ zadovoljava uslov (FB) sledi iz $D_{K_1\cup K_2,\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}} \subseteq D_{K_1,\varepsilon_1} \cap D_{K_2,\varepsilon_2}$, kad god je $(K_1,\varepsilon_1),(K_1,\varepsilon_1) \in \mathcal{K}$, obzirom da je tada i $K_1 \cup K_2$ kompaktan skup. (U2) sledi iz toga što su svi elementi familije $\mathcal{V}$ simetrične relacije. (U1) sledi iz $(D_{K,\varepsilon/2})^{(2} \subseteq D_{K,\varepsilon}$ za svako $(K,\varepsilon) \in \mathcal{K}$. Zaista, neka su $g,h,f \in X$ tako da je $r_1 := \sup\limits_{t\in K} |g(t)-h(t)| < \varepsilon/2$ i $r_2 := \sup\limits_{t\in K} |h(t)-f(t)| < \varepsilon/2$. Ako je $t_0 \in K$ proizvoljno, onda je $|g(t_0) - f(t_0)| \leq |g(t_0) - h(t_0)| + |h(t_0) - f(t_0)| \leq r_1 + r_2$. Odavde sledi da je $\sup\limits_{t\in K} |g(t) - f(t)| \leq r_1 + r_2 < \varepsilon$, tj. $(f,g) \in D_{K,\varepsilon}$.

(2) Neka je $f \in X$, $(K,\varepsilon) \in \mathcal{K}$ i $h \in \mathrm{B}[f; D_{K,\varepsilon})$. Tada je $r := \sup\limits_{t\in K} |h(t) - f(t)| < \varepsilon$. Za $\varepsilon_0 := \dfrac{\varepsilon - r}{2}$ imamo $\mathrm{B}[h; D_{K,\varepsilon_0}) \subseteq \mathrm{B}[f; D_{K,\varepsilon})$. Zaista ako je $g \in \mathrm{B}[h; D_{K,\varepsilon_0})$, onda kao u delu **(1)** dobijamo

$$\sup_{t\in K} |g(t) - f(t)| \leq \sup_{t\in K} |g(t) - h(t)| + \sup_{t\in K} |h(t) - f(t)| < \varepsilon_0 + r < \varepsilon$$

pa je $g \in \mathrm{B}[f; D_{K,\varepsilon})$.

(3) Pokažimo najpre da je $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{V})$. Dakle neka je $k \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ i $U_i \in \mu_{\mathbb{R}}$ za $i = \overline{1,k}$, i neka je $f \in \mathrm{M}[a_1,b_1,\ldots,a_k,b_k|U_1,\ldots,U_k] =: W$. Za svako $i = \overline{1,k}$ i $x \in f^{\rightharpoonup}[a_i;b_i] \subseteq U_i$ postoji po neko $\varepsilon_{x,i} \in (0;+\infty)$ tako da je $x \in (x - 2\varepsilon_{x,i}; x + 2\varepsilon_{x,i}) \subseteq U_i$. Za $i = \overline{1,k}$ skup $f^{\rightharpoonup}[a_i;b_i]$ je kompaktan pa postoji po konačan $F_i \subseteq f^{\rightharpoonup}[a_i;b_i]$ tako da je $f^{\rightharpoonup}[a_i;b_i] \subseteq \bigcup\limits_{x\in F_i} (x - \varepsilon_{x,i}; x + \varepsilon_{x,i})$. Neka je $\delta := \min\{\varepsilon_{x,i} : i = \overline{1,k},\ x \in F_i\}$. Tvrdimo $\mathrm{B}[f; D_{K,\delta}) \subseteq W$. Neka je $g \in \mathrm{B}[f; D_{K,\delta})$, $j \in [1;k] \cap \mathbb{N}$ i $t \in [a_j;b_j]$.

Zbog $f(t) \in f^{\rightharpoonup}[a_j;b_j] \subseteq \bigcup\limits_{x\in F_j} (x-\varepsilon_{x,j};x+\varepsilon_{x,j})$ postoji neko $x_0 \in F_j$ tako da je $f(t) \in (x_0-\varepsilon_{x_0,j};x_0+\varepsilon_{x_0,j})$. Kako je $|g(t)-f(t)| < \delta \leq \varepsilon_{x_0,j}$ (jer $x_0 \in F_j$) to je $g(t) \in (x-2\varepsilon_{x_0,j};x+2\varepsilon_{x_0,j}) \subseteq U_j$. Ovim smo dokazali da je $g^{\rightharpoonup}[a_j;b_j] \subseteq U_j$ za svako $j=\overline{1,k}$, tj. $g \in W$.

Neka su sada dati $f \in X$ i $S \in \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{V})$ tako da je $f \in S$. Postoji $(K,\varepsilon) \in \mathcal{K}$ tako da je $f \in \mathrm{B}[f;D_{K,\varepsilon}) \subseteq S$. Za svako $t \in K$ postoje $a_t, b_t \in \mathbb{R}$ tako da je $t \in [a_t;b_t]$ i $f^{\rightharpoonup}[a_t;b_t] \subseteq (f(t)-\varepsilon/4;f(t)+\varepsilon/4)$ (jer $f:\mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$). K je kompakt pa postoji neko $m \in \mathbb{N}$ i $t_1,\ldots,t_m \in K$ tako da je $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m}(a_{t_i};b_{t_i})$. Neka je $A := \mathrm{M}[a_{t_1},b_{t_1},\ldots,a_{t_m},b_{t_m}|U_1,\ldots,U_m]$ gde je $U_i := (f(t_i)-\varepsilon/4;f(t_i)+\varepsilon/4)$ za $i=\overline{1,m}$. Imamo $f \in A$ na osnovu izbora brojeva a_t i b_t za $t \in K$. Neka je $g \in A$ i $r \in K$. Postoji neko $j \in [1;m] \cap \mathbb{N}$ tako da je $r \in [a_{t_j};b_{t_j}]$ Sledi da je $g(r) \in (f(t_j)-\varepsilon/4;f(t_j)+\varepsilon/4)$. No $f(r) \in (f(t_j)-\varepsilon/4;f(t_j)+\varepsilon/4)$ (zbog $r \in [a_{t_j};b_{t_j}]$) pa je $|g(r)-f(r)| < \varepsilon/2$. Kako je $r \in K$ bilo proizvoljno ovo znači da je $\sup\limits_{t\in K}|g(t)-f(t)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, tj. $g \in \mathrm{B}[f;D_{K,\varepsilon})$. Ovim smo dokazali da je $f \in A \subseteq \mathrm{B}[f;D_{K,\varepsilon})$. Dakle $A \in \mathcal{B}$ i $f \in A \subseteq S$. $\square$

211. (1) Neka su dati $a,b,c \in X$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Prema definiciji funkcije d postoje

$$k,l \in \mathbb{N},\ x_0,\ldots,x_k,y_0,\ldots,y_l \in X,\ s_1,\ldots,s_k,r_1,\ldots,r_l \in \mathbb{N}_0$$

tako da je $x_0=a$, $x_k=b$, $x_{i-1}\,V_{s_i}\,x_i$ za $i=\overline{1,k}$ i $y_0=b$, $y_l=c$, $y_{i-1}\,V_{r_i}\,y_i$ za $i=\overline{1,l}$ i tako da je $\sum\limits_{i=1}^{k} f(s_i) < d(a,b)+\varepsilon$ i $\sum\limits_{i=1}^{l} f(r_i) < d(b,c)+\varepsilon$. Zato je $d(a,c) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} f(s_i) + \sum\limits_{i=1}^{l} f(r_i) < d(a,b)+d(b,c)+2\varepsilon$. Ovim smo dokazali da je $d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)$.

(2) Primetimo najpre da iz pretpostavki zadatka sledi $i \leq j \Rightarrow V_j \subseteq V_i$ za svako $i,j \in \mathbb{N}_0$. Zato ako je $i,j \in \mathbb{N}_0$, onda $f(i) < f(j) \ \Rightarrow\ V_i \subseteq V_{j+1}$ (ovo je zato što $f(i) < f(j)$ povlači $i \geq j+1$).

Ako je $i \in \mathbb{N}_0$ i $(a,b) \in V_i$, onda uzimajući $k=1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ i $s_1 = i$ imamo $d(a,b) \leq \sum_{i=1}^{k} f(s_i) = f(i)$. Ovim smo dokazali da je $V_i \subseteq \{(a,b) \in X^2 : d(a,b) \leq f(i)\}$.

Pokažimo indukcijom po $k \in \mathbb{N}$ da ako je $r \in \mathbb{N}_0$ i ako su $x_0, \ldots, x_k \in X$ i $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}_0$ tako da je $x_{i-1}\, V_{s_i}\, x_i$ za $i = \overline{1,k}$, onda $\sum_{i=1}^{k} f(s_i) < f(r) \implies x_0\, V_r\, x_k$. Ako su $x_1, x_2 \in X$ i $s \in \mathbb{N}_0$ tako da je $f(s) < f(r)$ i $x_0\, V_s\, x_1$, onda je $(x_0, x_1) \in V_s \subseteq V_r$. Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno za neko $k \in \mathbb{N}_0$ i neka su $x_0, \ldots, x_{k+1} \in X$ i $s_1, \ldots, s_{k+1} \in \mathbb{N}_0$ tako da je $x_{i-1}\, V_{s_i}\, x_i$ za $i = \overline{1, k+1}$ i neka je $\sum_{i=1}^{k+1} f(s_i) < f(r)$. Mora biti $f(s_1) < f(r+1) \vee f(s_{k+1}) < f(r+1)$ jer bi u suprotnom imali $\sum_{i=1}^{k+1} f(s_i) \geq 2f(r+1) \geq f(r)$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $f(s_1) < f(r+1)$. Neka je $m \in \mathbb{N} \cap [1;k]$ najveći takav da je $\sum_{i=1}^{m} f(s_i) < f(r+1)$. Prema indukcijskoj hipotezi je $x_0\, V_{r+1}\, x_m$. $f(s_{m+1}) < f(r)$ povlači $(x_m, x_{m+1}) \in V_{s_{m+1}} \subseteq V_{r+1}$.

Ako je $m = k$ onda, obzirom da $f(s_{k+1}) < f(r)$ povlači $(x_m, x_{k+1}) \in V_{s_{k+1}} \subseteq V_{r+1}$, imamo $(x_0, x_{k+1}) \in (V_{r+1})^{(2} \subseteq (V_{r+1})^{(3} \subseteq V_r$. Ako je $m < k$ onda je $m+2 \leq k+1$ i (prema izboru broja m) važi $\sum_{i=1}^{m+1} f(s_i) \geq f(r+1)$, pa je $\sum_{i=m+2}^{k+1} f(s_i) < f(r) - f(r+1) \leq f(r+1)$. Prema indukcijskoj hipotezi ovo znači da je $x_{m+1}\, V_{r+1}\, x_{k+1}$; dakle $x_0\, V_{r+1}\, x_m$, $x_m\, V_{r+1}\, x_{m+1}$ i $x_{m+1}\, V_{r+1}\, x_{k+1}$ pa je $(x_0, x_{k+1}) \in (V_{r+1})^{(3} \subseteq V_r$.

Ako je sada $i \in \mathbb{N}_0$ i ako su $a, b \in X$ tako da je $d(a,b) < f(i)$, onda prema definiciji funkcije d postoje $k \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_k \in X$ i $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{N}_0$ tako da je $x_0 = a$, $x_k = b$ i $x_{i-1} \, V_{s_i} \, x_i$ za $i = \overline{1,k}$ i $\sum_{i=1}^{k} f(s_i) < f(i)$. Na osnovu onog što smo upravo dokazali sledi $(a,b) \in V_i$. Ovim smo dokazali da je $\{(a,b) \in X^2 : d(a,b) < f(i)\} \subseteq V_i$.

(3) Ako je $\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} V_i = \Delta_X$ i ako su $a, b \in X$ tako da je $d(a,b) = 0$, onda zbog

$$(a,b) \in \big\{(u,v) \in X^2 : d(u,v) < f(i)\big\} \subseteq V_i \quad \text{za svako } i \in \mathbb{N}$$

mora biti $(a,b) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} V_i = \Delta_X$, tj. $a = b$.

(4) Pretpostavimo da je $\lim_{i \to +\infty} f(i) = 0$. Ako je $a \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, onda uzimajući $k = 1$, $x_0 = x_1 = a$ i $s_1 \in \mathbb{N}$ takvo da je $f(s_1) < \varepsilon$ imamo $a \, V_{s_1} \, a$ te i $d(a,a) \leq \sum_{i=1}^{k} f(s_i) = f(s_1) < \varepsilon$. Ovim smo dokazali da je $d(a,a) = 0$.

(5) Na osnovu **(1)** važi $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ za svako $x, y, z \in X$. Kako je $(V_i)^{(-1} = V_i$ za svako $i \in \mathbb{N}$ to imamo i da je $d(x,y) = d(y,x)$ za svako $x, y \in X$. Zato važi $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ za svako $x, y, z \in X$.

Stavimo $\tau := \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$. Ako je $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in X^2$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$, onda imamo

$$\begin{aligned} |d(a_1,b_1) - d(a_2,b_2)| &\leq |d(a_1,b_1) - d(a_1,b_2)| + |d(a_1,b_2) - d(a_2,b_2)| \\ &\leq d(b_1,b_2) + d(a_1,a_2) \end{aligned}$$

Zbog $\lim_{i \to +\infty} f(i) = 0$ postoji neko $i \in \mathbb{N}$ takvo da je $2f(i) < \varepsilon$. Kako je $V_i \subseteq \{(u,v) \in X^2 : d(u,v) \leq f(i)\}$ to mora biti

$$(a_2,b_2) \in \mathrm{int}_\tau\left(\mathrm{B}[a_1; V_i]\right) \times \mathrm{int}_\tau\left(\mathrm{B}[b_1; V_i]\right) \;\Rightarrow\; |d(a_1,b_1) - (a_2,b_2)| < \varepsilon$$

a pritom znamo da je $(a_1, b_1) \in \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[a_1; V_i]) \times \mathrm{int}_\tau(\mathrm{B}[b_1; V_i]) \in \tau \times' \tau$ (videti zadatak 202. pod (2)). $\square$

212. Dakle neka je $(X, \mathcal{U})$ proizvoljan uniforman prostor, $\tau_X := \mathrm{Top_u}(\mathcal{U})$ i neka je $x \in X \setminus F$, gde je F τ_X-zatvoren skup. Postoji neko $C \in \mathcal{U}$ tako da je $C^{(-1} = C$ i $\mathrm{B}[x; C) \subseteq X \setminus F$ (videti zadatak 203. pod (2)). Neka je $A_0 := X^2$, $A_1 := C$. Na osnovu zadatka 203. pod (2) možemo dalje rekurzivno definisati A_i za $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tako da važi $(A_i)^{(-1} = A_i$ i $(A_{i+1})^{(3} \subseteq A_i$ za svako $i \in N \setminus \{1\}$. Neka je $f(i) := \dfrac{1}{2^i}$ za $i \in \mathbb{N}_0$ i neka je $d : X \times X \to [0; +\infty)$ pseudometrika na X koja odgovara nizovima $(A_i : i \in \mathbb{N}_0)$ i f kao u zadatku 211. Znamo da je d $(\tau_X \times' \tau_X)$-neprekidna funkcija pa je $g : X \to \mathbb{R}$ definisana sa $g(y) = d(x, y)$ τ_X-neprekidna. Jasno $g(x) = 0$. Ako $y \in F$ onda je $(x, y) \notin A_1$ pa zbog $\{(a, b) \in X^2 : d(a, b) < 1\} \subseteq V_1$ sledi $g(y) = d(x, y) \geq 1$. Ovim smo dokazali da je τ_X potpuno regularna topologija. $\square$

213. (FB) sledi iz $\mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k,g_1,\ldots,g_k;\min\{\varepsilon_1/2,\varepsilon_2/2\}} \subseteq \mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon_1/2} \cap \mathrm{D}_{g_1,\ldots,g_k;\varepsilon_2/2}$. (U2) sledi iz simetričnosti dotičnih relacija, a (U1) iz očigledne činjenice $\left[\mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon/2}\right]^{(2} \subseteq \mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon}$. Dakle $\mathcal{F}(\tau)$ je u-baza na skupu X.

Da pokažemo $\mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau)) \subseteq \tau$ neka je $x_0 \in S \in \mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau))$. Tada postoje $\varepsilon \in (0; +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$ i τ-neprekidne $f_i : X \to \mathbb{R}$ za $i = \overline{1, k}$ tako da važi

$$\forall y \in X \ \left(\max_{i=\overline{1,k}} |f_i(x_0) - f_i(y)| < \varepsilon \ \Rightarrow \ y \in S \right)$$

Za svako $i \in \mathbb{N} \cap [1; k]$, obzirom da je f_i τ-neprekidna funkcija, postoji po τ-otvoren $V_i \ni x_0$ tako da je $(f_i)^{\rightharpoonup} V_i \subseteq (f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) - \varepsilon)$. Stavimo $W := \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i \in \tau$. Neka je $y \in W$ proizvoljno. Za svako $i \in \mathbb{N} \cap [1; k]$ imamo $|f_i(x_0) - f_i(y)| < \varepsilon$. Zato je $y \in S$. Dakle $x_0 \in W \subseteq S$. Ovim smo dokazali $\mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau)) \subseteq \tau$.

Pretpostavimo sada da je (X,τ) potpuno regularan prostor. Da pokažemo $\tau \subseteq \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{F}(\tau))$ neka je $x_0 \in U \in \tau$. τ je potpuno regularna topologija pa postoji neko $f : (X,\tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ tako da je $f(x_0) = 0$ i $f(y) = 1$ za svako $y \in X \setminus U$. Dakle ako je $y \in X \setminus U$, onda je $|f(x_0) - f(y)| = 1$ pa je $(x_0, y) \notin \mathrm{D}_{f;1}$. Ovo znači da je $\mathrm{B}[x_0; D_{f;1}) \subseteq U$. Dakle $U \in \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{F}(\tau))$. Ovim smo dokazali da je $\tau \subseteq \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{F}(\tau))$.

Napomena 10. Neka je (X,τ) proizvoljan prostor, $\lambda := \tau \times' \tau$, $\mathcal{O}(\tau) := \{M \in \lambda : \Delta_X \subseteq M\}$ i

$$\mathcal{M}(\tau) :=$$
$$\Big\{M \in \mathcal{O}(\tau) : \text{ postoje } A_i \in \mathcal{O}(\tau) \text{ za } i \in \mathbb{N} \text{ tako da je } A_1 = M \text{ i}$$
$$(A_{i+1})^{(2} \subseteq A_i \text{ za svako } i \in \mathbb{N}\Big\}$$

$\mathcal{O}(\tau)$ ne mora biti u-baza na X ali je $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(\tau))$ uvek topologija na X i važi $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(\tau)) \subseteq \tau$ (videti napomenu uz rešenje zadatka 209.). S druge strane jednostavno se proverava da je podfamilija $\mathcal{M}(\tau)$ familije $\mathcal{O}(\tau)$ uvek u-baza na X. Ako je $\mathcal{F}(\tau)$ u-baza iz našeg zadatka, onda je $\mathcal{F}(\tau) \subseteq \mathcal{M}(\tau)$: zbog neprekidnosti funkcija $f_1, \ldots, f_k$ lako je videti da je $\mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon} \in \mathcal{O}(\tau)$ pa koristeći činjenicu da je $\left[\mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon/2}\right]^{(2} \subseteq \mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon}$ nije teško dokazati da je $\mathrm{D}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon} \in \mathcal{M}(\tau)$. Zbog $\mathcal{F}(\tau) \subseteq \mathcal{M}(\tau) \subseteq \mathcal{O}(\tau)$ imamo da važi

$$\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{F}(\tau)\right) \subseteq \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{M}(\tau)\right) \subseteq \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{O}(\tau)\right) \subseteq \tau$$

(pri kraju ove napomene dokazaćemo je zapravo $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{F}(\tau)\right) = \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{M}(\tau)\right)$). Dakle, ako je τ potpuno regularna topologija, onda iz našeg zadatka sledi da je $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{M}(\tau)\right) = \tau$. Obrnuto, ako je $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{M}(\tau)\right) = \tau$ onda, obzirom da je $\mathcal{M}(\tau)$ u-baza na skupu X, iz rešenja zadatka 212. sledi da je τ potpuno regularna topologija. Ukratko

$$\tau \text{ je potpuno regularna topologija ako i samo ako važi } \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\left(\mathcal{M}(\tau)\right) = \tau$$

Ukoliko je τ proizvoljna, ne nužno potpuno regularna topologija, stavimo $\tau_0 := \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{M}(\tau))$ i $\lambda_0 := \tau_0 \times' \tau_0$; imamo $\tau_0 \subseteq \tau$ pa je i $\lambda_0 \subseteq \lambda$.

Pokažimo da ako je $\mathcal{U}$ proizvoljna uniformnost na skupu X koja indukuje tu istu topologiju τ_0 (tj. takva da je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{U}) = \mathrm{Top_u}(\mathcal{M}(\tau)) = \tau_0$), onda mora biti $\mathcal{U} \subseteq \big(\mathcal{M}(\tau)\big)_{\mathrm{u}}$. Zaista ako je $N \in \mathcal{U}$ onda, koristeći zadatak 203. pod (1) i uslov (U1), nije teško rekurzivno konstruisati niz $A_i \in \mathcal{U}$ tako da je $A_1 = N$ i $\big[\mathrm{int}_{\lambda_0}(A_{i+1})\big]^{(2} \subseteq \mathrm{int}_{\lambda_0}(A_i)$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathrm{int}_{\lambda_0}(A_i) \in \mathcal{U} \cap \lambda_0 \subseteq \mathcal{U} \cap \lambda$ to je $\mathrm{int}_{\lambda_0}(A_i) \in \mathcal{O}(\tau)$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Zato je $\mathrm{int}_{\lambda_0}(A_1) \in \mathcal{M}(\tau)$ te zbog $\mathrm{int}_{\lambda_0}(A_1) \subseteq N$ sledi $N \in \big(\mathcal{M}(\tau)\big)_{\mathrm{u}}$.

Specijalno, za datu potpuno regularnu topologiju τ na skupu X uniformnost $\big(\mathcal{M}(\tau)\big)_{\mathrm{u}}$ u-generisana u-bazom $\mathcal{M}(\tau)$ je najveća (preciznije: $\subseteq$-najveća) uniformnost na skupu X koja indukuje τ. Nju nazivamo *fina uniformnost potpuno regularne topologije* τ.

Ukoliko je τ proizvoljna, ne nužno potpuno regularna topologija, pokažimo da važi

$$\mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau)) = \mathrm{Top_u}(\mathcal{M}(\tau))$$

Iz $\mathrm{Top_u}(\mathcal{M}(\tau)) =: \tau_0 \subseteq \tau$ sledi $\mathcal{F}(\tau_0) \subseteq \mathcal{F}(\tau)$ pa je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau_0)) \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau))$. No τ_0 je potpuno regularna topologija (jer je $\mathcal{M}(\tau)$ u-baza na skupu X) pa prema našem zadatku mora biti $\tau_0 = \mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau_0)) \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{F}(\tau)) \subseteq \mathrm{Top_u}(\mathcal{M}(\tau)) = \tau_0$. $\square$

214. Za svako $x \in X$ postoji po $U_x \in \mathcal{A}$ i $P_x \in \mathcal{U}$ tako da je $\mathrm{B}[x; P_x) \subseteq U_x$, a zatim i $Q_x \in \mathcal{U}$ tako da je $(Q_x)^{(2} \subseteq P_x$. Familija $\big\{\mathrm{int}_\tau\big(\mathrm{B}[x; Q_x)\big) : x \in X\big\}$ je τ-otvoren pokrivač jer je $x \in \mathrm{int}_\tau\big(\mathrm{B}[x; Q_x)\big)$ za svako $x \in X$, pa postoji neki konačan $T \subseteq X$ tako da je $X = \bigcup_{x\in T} \mathrm{B}[x; Q_x)$. Stavimo $R := \bigcap_{x\in T} Q_x \in \mathcal{U}$.

Neka je $(a, b) \in R$. Za neko $x_0 \in T$ je $a \in \mathrm{B}[x_0; Q_{x_0})$, tj. $(x_0, a) \in Q_{x_0}$. Zbog $(a, b) \in R \subseteq Q_{x_0}$ je sada $(x_0, b) \in (Q_{x_0})^{(2} \subseteq P_{x_0}$. Dakle $b \in \mathrm{B}[x_0; P_{x_0}) \subseteq U_{x_0}$. Iz $(x_0, a) \in Q_{x_0} \subseteq (Q_{x_0})^{(2} \subseteq P_{x_0}$ sledi $a \in \mathrm{B}[x_0; P_{x_0}) \subseteq U_{x_0}$. Dakle $\{a, b\} \subseteq U_{x_0} \in \mathcal{A}$.

Napomena 11. Primetimo da tvrđenje ovog zadatka uopštava ono iz zadatka 144.

Napomena 12. Neka su $\mathcal{M}(\tau)$ i $\mathcal{O}(\tau)$ kao iz Napomene 10. Pretpostavimo da je $\tau = \mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{U})$ za neku uniformnost na X i da je τ kompaktna topologija. Nije teško, koristeći ovaj zadatak, videti da mora biti $\mathcal{O}(\tau) \subseteq \mathcal{U}$. Specijalno, obzirom da je $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}\big((\mathcal{M}(\tau))_{\mathrm{u}}\big) = \tau$ jer je τ potpuno regularna topologija (videti zadatak 212.), odavde sledi da je $\mathcal{O}(\tau) \subseteq (\mathcal{M}(\tau))_{\mathrm{u}}$. Zato, obzirom da je $\mathcal{M}(\tau)$ u-baza na X, za svako $M \in \mathcal{O}(\tau)$ postoje $A_i \in \mathcal{M}(\tau) \subseteq \mathcal{O}(\tau)$ za $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tako da je $(A_2)^{(2} \subseteq M$ i $(A_{i+1})^{(2} \subseteq A_i$ za svako $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, te uzimajući $A_1 := M \in \mathcal{O}(\tau)$, iz same definicije familije $\mathcal{M}(\tau)$ vidimo da je $M \in \mathcal{M}(\tau)$. Dakle mora biti $\mathcal{O}(\tau) \subseteq \mathcal{M}(\tau)$.

Da rezimiramo: ako je (X, τ) kompaktan potpuno regularan prostor, onda je $\mathcal{O}(\tau) = \mathcal{M}(\tau)$, $\mathcal{O}(\tau)$ je u-baza na skupu X, $\mathrm{Top}_{\mathrm{u}}(\mathcal{O}(\tau)) = \tau$ i uniformnost $(\mathcal{O}(\tau))_{\mathrm{u}}$ je upravo fina unifomnost potpuno regularne topologije τ. $\square$

215. (1) Neka je $x \in G$ fiksirano. Preslikavanje $g := g_x \triangle \mathrm{id}_G$, gde je $g_x : G \to G$ konstantno preslikavanje definisano sa $g_x(z) = x$ za svako $z \in G$, je (τ, τ)-neprekidno kao dijagonalni proizvod (τ, τ)-neprekidnih. Kako je po pretpostavci $f : G^2 \to G$ definisano sa $f(u, v) = uv$ $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidno preslikavanje, to je $f \circ g$ (τ, τ)-neprekidno. No $f \circ g = l_x$. Na analogan način se dokazuje da je i d_x (τ, τ)-neprekidno.

Kako je x u gornjem razmatranju bilo proizvoljno to sada iz $(l_x)^{-1} = l_{x^{-1}}$ i $(d_x)^{-1} = d_{x^{-1}}$ zaključujemo da su l_x i d_x (τ, τ)-homeomorfizmi za svako $x \in G$.

(2) Preslikavanje $f : G \to G$ definisano sa $f(x) = x^{-1}$ je po pretpostavci (τ, τ)-neprekidno, pa iz $f \circ f = \mathrm{id}_G$ sledi da je f (τ, τ)-homeomorfizam . Otuda je $(\overline{A})^{(-1)} = f^{\rightharpoonup}\big(\overline{A}\big) = \overline{f^{\rightharpoonup} A} = \overline{(A^{(-1)})}$.

Za $x, y \in G$ neka je $s_{x,y} : G \to G$ definisano sa $s_{x,y}(z) = xzy$. Iz $s_{x,y} = l_x \circ d_y$ sledi da je $s_{x,y}$ (τ, τ)-neprekidno preslikavanje. Kako su x i y u ovom razmatranju bili proizvoljni, a kako je $\big(s_{x,y}\big)^{-1} = s_{x^{-1}, y^{-1}}$, to zaključujemo da je $s_{x,y}$ (τ,τ)-homeomorfizam za svako $x,y \in G$. Otuda je $\operatorname{int}(xAy) = \operatorname{int}\big((s_{x,y})^{\rightharpoonup}A\big) = (s_{x,y})^{\rightharpoonup}\big(\operatorname{int}(A)\big) = x \cdot \operatorname{int}(A) \cdot y$.

(3) Pokažimo da je $\{A \in \tau : x \in A\} \subseteq \{xy^{-1}B : y \in B \in \tau\}$ za svako $x,y \in G$. Neka je $A \in \tau$ tako da je $x \in A$. Tada je $A = xy^{-1}B$, gde je $B := yx^{-1}A$. Imamo $B = yx^{-1}A = (l_{yx^{-1}})^{\leftharpoonup}A \in \tau$ (zbog $A \in \tau$, prema delu pod (1)) i $y \in yx^{-1}A$ (zbog $x \in A$).

Pokažimo sada da je $\{xy^{-1}B : y \in B \in \tau\} \subseteq \{A \in \tau : x \in A\}$ za svako $x,y \in G$. Neka je $B \in \tau$ tako da je $y \in B$. Prema upravo dokazanom je $B = yx^{-1}A$ za neko $A \in \tau$ tako da je $x \in A$. Otuda je $xy^{-1}B = A$.

(4) Neka je $f : G^n \to G$ definisano sa $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. (τ,τ)-neprekidnost množenja u grupi $\mathbb{G}$ nam omogućava da (jednostavnom indukcijom po n) zaključimo da je f $(\underbrace{\tau \times' \cdots \times' \tau}_{n \text{ puta}}, \tau)$-neprekidno preslikavanje. Zato kako je $f(\underbrace{\mathfrak{e},\ldots,\mathfrak{e}}_{n \text{ puta}}) = \mathfrak{e}$ to postoje $W_i \in \tau$, za $i = \overline{1,n}$, takvi da je $\mathfrak{e} \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ i tako da važi $f^{\rightharpoonup}(W_1 \times \cdots \times W_n) \subseteq U$. Stavimo $V := \left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right)^{-1}$. Jasno $V = V^{(-1)}$, $V \in \tau$ i $\mathfrak{e} \in V$. Zbog $V \subseteq W_i$ za svako $i = \overline{1,n}$ imamo $V^{(n)} = f^{\rightharpoonup}(V^n) \subseteq f^{\rightharpoonup}(W_1 \times \cdots \times W_n) \subseteq U$. Naravno $V \subseteq V^{(n)}$ zbog $\mathfrak{e} \in V$. $\square$

216. Pokažimo najpre da je $\overline{A} \subseteq \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}\}$. Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \in \mathcal{B}$ proizvoljno. Kako je $\mathfrak{e} \in U$ to postoji $V \in \tau$ tako da je $\mathfrak{e} \in V$ i $V = V^{(-1)} \subseteq U$ (recimo $V = U \cap U^{(-1)}$). Zbog $x \in \overline{A}$ mora da postoji neko $a \in A \cap (xV)$. Imamo $x \in aV^{(-1)} = aV \subseteq aU \subseteq AU$.

Pokažimo sada da je $\bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}\} \subseteq \overline{A}$. Neka je $x \in \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}\}$ i $O' \in \tau$ proizvoljno tako da je $x \in O'$. Imamo $O' = xO$ za neki otvoren $O \ni \mathfrak{e}$. Postoji $V = V^{(-1)} \in \tau$ tako da je $\mathfrak{e} \in V \subseteq O$, a kako je $\mathcal{B}$ lokalna baza u tački $\mathfrak{e}$, i neko $U \in \mathcal{B}$ takvo da je $U \subseteq V$. Prema pretpostavci je $x \in AU \subseteq AV$, pa je $x \in aV$ za neko $a \in A$. Otuda je $a \in xV^{(-1)} = xV \subseteq xO = O'$, pa je $A \cap O' \neq \varnothing$.

Dakle dokazali smo da je $\overline{A} = \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}\}$. Jednakost $\overline{A} = \bigcap\{UA : U \in \mathcal{B}\}$ se dokazuje potpuno analogno. $\square$

217. **(1)** Neka su $x \in G$ i otvoren $U \ni x$ proizvoljni. Tada je $x^{-1}U \ni \mathfrak{e}$ otvoren skup pa postoji otvoren $V \ni \mathfrak{e}$ takav da je $V^{(2)} \subseteq x^{-1}U$. Prema zadatku 216. imamo da je $\overline{V} \subseteq V^{(2)}$. Dakle V je otvoren skup takav da $\mathfrak{e} \in V \subseteq \overline{V} \subseteq x^{-1}U$. Zato je xV otvoren skup takav da $x \in xV \subseteq x\overline{V} = \overline{xV} \subseteq U$.

(2) Neka je A otvoren skup zatvoren za operaciju "$\cdot$". Prema zadatku 216. je $\overline{A} \subseteq A^{(2)}$. No prema pretpostavci je $A^{(2)} \subseteq A$. Zaključujemo da je skup A zatvoren. $\square$

218. Stavimo $H := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A^{(n)}$ i pokažimo da je H otvorena podgrupa.

Neka je $x \in H$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \dots, a_n \in A$ tako da je $x = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Iz $\mathfrak{e} \in \operatorname{int}(A)$ sledi $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n A)$, tj. $x \in \operatorname{int}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n A) \subseteq \operatorname{int}(A^{(n+1)}) \subseteq \operatorname{int}(H)$. Dakle $H \in \tau$.

Neka su sada $x, y \in H$. Tada postoje $n, m \in \mathbb{N}$ i $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$ tako da je $x = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ i $y = b_1 \cdot \ldots \cdot b_m$. Otuda je $xy^{-1} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot (b_m)^{-1} \cdot \ldots (b_1)^{-1} \in A^{(n+m)}$, jer je $A^{(-1)} = A$. Dakle H je podgrupa.

Prema zadatku 217. pod (2) sledi da je H otvoreno-zatvoren skup. On je neprazan jer $\mathfrak{e} \in \operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq H$. Kako je τ povezana topologija ovo znači da je $H = G$. $\square$

219. Jasno je da (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). (1) $\Rightarrow$ (4) sledi iz zadatka **217.** pod (1) i činjenice da svaki T_0 regularan prostor mora biti T_2, pa samim tim i T_3. Zaista neka su $x, y \in G$ i $x \neq y$. Ako je prostor (G, τ) T_0 onda postoje $u, v \in G$ tako da je $\{x, y\} = \{u, v\}$ i $U \in \tau$ tako da važi $u \in U \not\ni v$. No (G, τ) je regularan pa za neki $V \in \tau$ mora biti $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. No tada su V i $G \setminus \overline{V}$ otvoreni i međusobno disjunktni skupovi i imamo $u \in V$ i $v \in G \setminus U \subseteq G \setminus \overline{V}$.

Implikacija (2) $\Rightarrow$ (5) važi u bilo kom topološkom prostoru bio on sa *kompatibilnom* strukturom grupe ili ne. Da se uverimo u istinitost implikacije (5) $\Rightarrow$ (2) iskoristimo činjenicu da je (G,τ) *homogen* topološki prostor, tj. za svako $x, y \in G$ postoji neki (τ,τ)-homeomorfizam $h : G \to G$ tako da je $h(x) = y$ (preslikavanje $l_{yx^{-1}}$ iz zadatka **215.** pod (1) je jedan takav (τ,τ)-homeomorfizam). Pretpostavimo dakle da je (X,λ) homogen topološki prostor i $x_0 \in X$ takvo da je $\bigcap\{U \in \lambda : x_0 \in U\} = \{x_0\}$. Neka su $a, b \in X$ tako da je $a \neq b$ i neka je $h : X \to X$ (λ,λ)-homeomorfizam tako da je $h(a) = x_0$. Tada je $h(b) \neq h(a) = x_0$ pa prema pretpostavci postoji neko $U \in \lambda$ tako da je $x_0 \in U \not\ni h(b)$. Tada je $a = h^{-1}(x_0) \in (h^{-1})^{\leftharpoonup}U \not\ni b$ i pritom je $(h^{-1})^{\leftharpoonup}U \in \lambda$. $\square$

220. (1) Neka su $x, y \in \overline{H}$. Tada je $(x,y) \in \mathrm{cl}_{\tau\times'\tau}(H \times H)$. Kako je funkcija $f : G^2 \to G$ definisana sa $f(u,v) = uv^{-1}$ $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidna to je $f(x,y) \in \mathrm{cl}_\tau(H \times H)$, tj. $xy^{-1} \in \overline{H \cdot H^{(-1)}} = \overline{H}$, jer je $(H, \mathfrak{e}, \cdot)$ podgrupa grupe $\mathbb{G}$.

(2) Neka je $(H, \mathfrak{e}, \cdot)$ normalna podgrupa grupe $\mathbb{G}$ i $a \in G$. Preslikavanje $f : G \to G$ definisano sa $f(x) = axa^{-1}$ je (τ,τ)-homeomorfizam pa je zato $a\overline{H}a^{-1} = f^{\rightharpoonup}(\overline{H}) = \overline{f^{\rightharpoonup}H} = \overline{aHa^{-1}} = \overline{H}$. $\square$

221. Kako je C τ-povezan skup to je $C \times C$ $\tau \times' \tau$-povezan skup. Funkcija $f : G^2 \to G$ definisana sa $f(u,v) = uv^{-1}$ je po pretpostavci $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidna pa je $C \cdot C^{(-1)} = f^{\rightharpoonup}(C \times C)$ τ-povezan skup. Kako je $\mathfrak{e} \in C \cdot C^{(-1)}$ i $C = \bigcup\{S \subseteq G : \mathfrak{e} \in S \text{ i } S \text{ je } \tau - \text{povezan}\}$ to odatle sledi da je $C \cdot C^{(-1)} \subseteq C$. Ovim smo dokazali da je $(C, \mathfrak{e}, \cdot)$ podgrupa grupe $\mathbb{G}$. Preostaje da pokažemo da je normalna.

Neka je $a \in G$ proizvoljno. Funkcija $g : G \to G$ definisana sa $g(x) = axa^{-1}$ je (τ,τ)-neprekidna, a C τ-povezan skup pa je $aCa^{-1} = g^{\rightharpoonup}C$ takođe τ-povezan. Iz $\mathfrak{e} \in aCa^{-1}$ sada sledi da je $aCa^{-1} \subseteq C$. $\square$

222. (1) Za svako $a \in G$ stavimo $M_a := \{x \in G : ax = xa\}$; funkcija $f : G \to G$ definisana sa $f(x) = axa^{-1}x^{-1}$ je (τ,τ)-neprekidna, a skup $\{\mathfrak{e}\}$ zatvoren (jer je (G,τ) T_1 prostor) pa iz $M_a = \{x \in G : f(x) = \mathfrak{e}\} = f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$

sledi da je M_a zatvoren. Kako je $\{x \in G : ax = xa \text{ za svako } a \in G\} = \bigcap\{M_a : a \in G\}$ tvrđenje pod **(1)** sledi.

(2) Prema pretpostavci je $S \times S \subseteq g^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$, gde je $g : G^2 \to G$ definisana sa $f(u,v) = uvu^{-1}v^{-1}$. Kako je S τ-gust to je $S \times S$ $\tau \times' \tau$-gust skup. g je $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidna funkcija, a $\{\mathfrak{e}\}$ τ-zatvoren skup pa je i $g^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$ $\tau \times' \tau$-zatvoren skup. Otuda je $G \times G = \mathrm{cl}_{\tau\times'\tau}(S \times S) \subseteq g^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$, tj. $xyx^{-1}y^{-1} = \mathfrak{e}$ za svako $x, y \in G$. □

223. Neka su $a \in H$ i $U \in \tau$ takvi da je $U \cap H = \{a\}$. Ako je $b \in H$ proizvoljno onda je $(ba^{-1}U) \cap (ba^{-1}H) = ba^{-1}\{a\}$ tj. $(ba^{-1}U) \cap H = \{b\}$ i pritom je $ba^{-1}U \in \tau$. □

224. Neka je $a \in H$ proizvoljno. Funkcija $f : G \to G$ definisana sa $f(x) = axa^{-1}x^{-1}$ je (τ, τ)-neprekidna, a $\{\mathfrak{e}\}$ zatvoren skup pa je $M_a := \{x \in G : axa^{-1}x^{-1} = \mathfrak{e}\} = f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$ zatvoren skup. Pokažimo da je M_a i otvoren skup.

Neka je $x \in M_a$ proizvoljno. Neka je $U \ni \mathfrak{e}$ otvoren skup takav da je $U \cap H = \{\mathfrak{e}\}$ (ovakav skup postoji jer je $\mathfrak{e} \in H$, a H diskretan podskup). Iz $f(x) = \mathfrak{e} \in U \in \tau$ i (τ, τ)-neprekidnosti funkcije f sledi da postoji neki otvoren $V \ni x$ tako da je $f^{\rightharpoonup}V \subseteq U$. Pokažimo da je $V \subseteq M_a$. Neka je $y \in V$ proizvoljno. Po pretpostavci je $yHy^{-1} = H \cdot H = H$, pa zbog $a^{-1} \in H^{-1} = H$ sledi da je $f(y) = a(ya^{-1}y^{-1}) \in H$. No prema izboru skupa V mora biti $f(y) \in U$ pa je zato $f(y) \in H \cap U = \{\mathfrak{e}\}$, tj. $y \in M_a$.

Kako je $M_a \ni \mathfrak{e}$ neprazan otvoreno-zatvoren skup, a (G, τ) povezan prostor to mora biti $M_a = G$, tj. $ax = xa$ za svako $x \in G$. □

225. Pokažimo da je D^c otvoren skup. Neka je $x \in D^c$ proizvoljno. Kako je $\mathfrak{e} \in D$ to po pretpostavci postoji neki otvoren V takav da je $D \cap V = \{\mathfrak{e}\}$. Funkcija $f : G^2 \to G$ definisana sa $f(u, v) = uv^{-1}$ je $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidna i važi $f(x, x) = \mathfrak{e} \in V \in \tau$ pa za neke otvorene $U_1 \ni x$ i $U_2 \ni x$ mora biti $U_1 \cdot (U_2)^{(-1)} = f^{\rightharpoonup}(U_1 \times U_2) \subseteq V$. Za $U := U_1 \cap U_2$ imamo $U \cdot U^{(-1)} \subseteq V$.

Ako je $a_1, a_2 \in D \cap U$ onda mora biti $a_1(a_2)^{-1} \in D \cap V = \{\mathfrak{e}\}$, tj. $a_1 = a_2$. Ovo znači da je ili $D \cap U = \varnothing$ ili $D \cap U = \{a\}$ za neko $a \in D$. U svakom slučaju je skup $W := U \setminus D = U \cap (U \cap D)^c$ otvoren (jer je (G, τ) T_1 prostor pa su singltoni zatvoreni) i naravno važi $x \in W \subseteq D^c$. $\square$

226. Implikacije **(1)**$\Rightarrow$**(2)** i **(3)**$\Rightarrow$**(1)** su očigledne. Da pokažemo **(2)**$\Rightarrow$**(3)** pretpostavimo da je f (τ_1, τ_2)-neprekidno u nekoj tački $a \in G_1$ i neka je $b \in G_1$ proizvoljno. Dokazaćemo da f mora biti (τ_1, τ_2)-neprekidno i u tački b.

Neka je $U \ni f(b)$ proizvoljan τ_2-otvoren skup. Imamo $f(a) \in f(a) \odot f(b)^{-1} \odot U \in \tau_2$ te po pretpostavci postoji neki τ_1-otvoren $V \ni a$ tako da je $f^{\rightharpoonup}V \subseteq f(a) \odot f(b)^{-1} \odot U$. Imamo $b \in b \cdot a^{-1} \cdot V =: W \in \tau_1$. Pokažimo da je $f^{\rightharpoonup}W \subseteq U$. Neka je $x \in W$ proizvoljno. Tada je $x = b \cdot a^{-1} \cdot v$ za neko $v \in V$ pa imamo $f(x) = f(b) \odot f(a)^{-1} \odot f(v) \in f(b) \odot f(a)^{-1} \odot \big(f(a) \odot f(b)^{-1} \odot U\big) = U$. $\square$

227. (1) Neka su preslikavanja $g : X \times X \to X$ i $f : X \to X$ definisana sa $g(a, b) = a + b$ i $f(a) = -a$. Za svako $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ važi

$$g^{\rightharpoonup}\big[(l_1 + k\mathbb{Z}) \times (l_2 + k\mathbb{Z})\big] \subseteq l_1 + l_2 + k\mathbb{Z} \quad \text{i} \quad f^{\leftharpoonup}(l + k\mathbb{Z}) = -l + k\mathbb{Z}$$

Kako je za svako $l \in \mathbb{Z}$ familija $\{l + k\mathbb{Z} \,:\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ lokalna baza topologije τ u tački l (što se neposredno proverava), ovo znači da je preslikavanje g $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidno, a preslikavanje f (τ, τ)-neprekidno.

(2) Neka je $f : X \to X$ definisano sa $f(x) = -x$. Imamo $[0; 1) \in \tau$ dok $f^{\leftharpoonup}[0; 1) = (-1; 0] \notin \tau$. Dakle f nije (τ, τ)-neprekidno preslikavanje. $\square$

228. (1) (X, τ) je T_1 prostor koji nije T_2 prostor (videti zadatak 219.).

(2) Ako je $n \in \mathbb{N}$ imamo $\{1/n\} \in \tau$. S druge strane je $\{0\} \notin \tau$. Prostor dakle nije homogen (videti rešenje zadatka 219.). $\square$

229. Za $C, D \subseteq \mathbb{N}$ i $n, m \in \mathbb{N}$, gde $n \leq m$, imamo

$$\mathrm{V}(n, C) \cap \mathrm{V}(m, D) = \begin{cases} \varnothing, & C \cap [1; n] \neq D \cap [1; n] \\ \mathrm{V}(m, D), & C \cap [1; n] \neq D = [1; n] \end{cases}$$

Dakle $\mathcal{B} := \{\mathrm{V}(n, S) \,:\, n \in \mathbb{N},\ S \subseteq \mathbb{N}\}$ je baza topologije τ.

Kako je svaki element naše grupe sam sebi inverzan (reda je 2) to da pokažemo da je $(X, \triangle, \tau)$ topološka grupa treba proveriti da je preslikavanje $h : X^2 \to X$ definisano sa $h(A, B) := A \triangle B$ za $A, B \in X$ $(\tau \times' \tau, \tau)$-neprekidno. No ako su $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$ tako da je $A \triangle B \in \mathrm{V}(n, C)$, onda je lako videti da je $A_1 \triangle B_1 \in \mathrm{V}(n, C)$ za svako $(A_1, B_1) \in \mathrm{V}(n, A) \times \mathrm{V}(n, B)$, tj. $h^{\rightharpoonup}\,(\mathrm{V}(n, A) \times \mathrm{V}(n, B)) \subseteq \mathrm{V}(n, C)$.

Da je τ kompaktna topologija dokazaćemo "indirektno". Uočimo preslikavanje $f : \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\} =: Y$ definisano sa $f(A)(i) = 0$ ako $i \notin A$ odnosno $f(A)(i) = 1$ ako $i \in A$, za $A \subseteq \mathbb{N}$ i $i \in \mathbb{N}$, tj. $f(A)$ je karakteristična funkcija skupa A u odnosu na skup $\mathbb{N}$. Preslikavanje f je bijekcija **na** skup Y i njen inverz $g := f^{-1} : Y \to X$ je dat sa $g(a) = a^{\leftharpoonup}\{1\}$ za $a \in Y$. $\lambda := \prod'_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{0, 1\})$ je kompaktna `Hausdorff`-ova topologija, kao proizvod kompaktnih `Hausdorff`-ovih. Dokazaćemo da je f (τ, λ)-homeomorfizam, što će značiti da je i τ kompaktna `Hausdorff`-ova topologija.

Ako je $n \in \mathbb{N}$ i $s \in \{0, 1\}^n$, onda imamo $g^{\rightharpoonup}[s\rangle_{\{0,1\}} = \{A \subseteq N \,:\, A \cap [1; n] = s^{\leftharpoonup}\{1\}\} = \mathrm{V}\left(n, s^{\leftharpoonup}\{1\}\right)$. S druge strane ako je $n \in \mathbb{N}$ i $C \subseteq \mathbb{N}$, onda je $f^{\rightharpoonup}\big(\mathrm{V}(n, C)\big) = [s\rangle_{\{0,1\}}$ gde je $s := f(C) \cap ([1; n] \times \{0, 1\})$, tj. $s \in \{0, 1\}^n$ je definisano sa $s(i) = 1$ ako $i \in C$ odnosno $s(i) = 0$ ako $i \notin C$, za $i \in \mathbb{N} \cap [1; n]$.

Kako familija skupova $[s\rangle_{\{0,1\}}$ za $s \in \{0, 1\}^{<\omega}$ predstavlja bazu za topologije λ, a familija $\mathcal{B}$ je baza za topologiju τ, to smo upravo dokazali da je f (τ, λ)-otvoreno, a g (λ, τ)-otvoreno preslikavanje.

Napomena 13. Primetimo da je f istovremeno i izomorfizam grupa $(\mathbb{P}(\mathbb{N})), \triangle)$ i $\left({}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}, \oplus_2\right)$, gde je za $a, b \in {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ niz $(a \oplus_2 b) \in {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ dobijen pokoordinatnim sabiranjem po modulu 2 nizova a i b, tj. $(a \oplus_2 b)(n) = a(n) +_2 b(n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Dakle f je topološki izomorfizam topoloških grupa $(X, \triangle, \tau)$ i $(Y, \oplus_2, \lambda)$. $\square$

230. Neka je $(H, +)$ zatvorena podgrupa topološke grupe $(\mathbb{R}, +, \mu_{\mathbb{R}})$ tako da je $\{0\} \subset H \subset \mathbb{R}$.

Pokažimo da ne može biti $0 \in \overline{H \setminus \{0\}}$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji po $b_n \in H \cap (-1/n; 1/n) \setminus \{0\}$. Za $a_n := |b_n|$ važi $a_n \in H \cap (0; 1/n)$. Skup $S := \{ka_n : n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$ je gust. Zaista, ako su $u < v$ proizvoljni realni brojevi i ako je $n \in \mathbb{N}$ tako da je $1/n < v - u$, a $k \in \mathbb{Z}$ najveće takvo da je $ka_n \leq u$, onda mora biti $u < (k+1)a_n < v$, jer bi $(k+1)a_n \leq u$ protivurečilo izboru broja k, dok bi iz $v \leq (k+1)a_n$ sledilo $a_n = (k+1)a_n - ka_n \geq v - u > 1/n$. Zato je $\mathbb{R} = \overline{S} \subseteq \overline{H} \subseteq \mathbb{R}$, pa je $H = \overline{H} = \mathbb{R}$, suprotno pretpostavci.

Dakle mora biti $0 \notin \overline{H \setminus \{0\}}$. Kako H ima izolovanu tačku to H mora biti diskretan skup (videti zadatak 223.). Zbog $H \neq \{0\}$ je $H \cap (0; +\infty) \neq \varnothing$ ($(H, +)$ je podgrupa). Neka je $a := \inf[H \cap (0; +\infty)]$. Zbog $0 \notin \overline{H \setminus \{0\}}$ je $0 < a$, a zbog $H = \overline{H}$ je $a \in H$. Kad bi postojali neki $k \in \mathbb{Z}$ i $h \in H$ takvi da je $ka < h < (k+1)a$, onda bi imali $0 < h - ka < a$ i $h - ka \in H$, što nije moguće prema izboru broja a. Zato je $H \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}a) = \varnothing$. Naravno $\mathbb{Z}a \subseteq H$ pa je zapravo $H = \mathbb{Z}a$. $\square$

231. Pretpostavimo da je $H \subseteq S$ beskonačan tako da je $(H, \cdot)$ podgrupa grupe $(S, \cdot)$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$ i neka je $f : \mathbb{R} \to S$ definisano sa $f(x) := (\cos x, \sin x) = \dot{\mathrm{e}}^{x\mathrm{i}}$ za $x \in \mathbb{R}$. Primetimo da za $x, y \in \mathbb{R}$ važi $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, kao i da ako je $\delta < 1/4$ proizvoljan realan broj, onda imamo $f^{\rightharpoonup}(x - \delta; x + \delta) = S \cap \mathrm{K}_d[f(x); 2\sin(\delta/2))$.

Neka su $a \in S$ i realan broj $\varepsilon > 0$ proizvoljni. H je beskonačan podskup $\mu_{\mathbb{R}^2}$-kompaktnog skupa $S \subseteq \mathbb{R}^2$ pa postoji neka $\mu_{\mathbb{R}^2}$-tačka nagomilavanja $z_0 \in S$ skupa H. Naravno $\mu_{\mathbb{R}^2}$ je T_1 topologija pa u svakoj $\mu_{\mathbb{R}^2}$-okolini tačke z_0 postoji beskonačno mnogo tačaka skupa H.

Uočimo proizvoljno $c_0 \in \mathbb{R}$ tako da je $f(c_0) = z_0$ i realan broj $\delta \in (0; 1/8)$ takav da je $2\sin\delta < \varepsilon$. Postoje $z_1, z_2 \in H \cap \mathrm{K}_d[z_0; 2\sin(\delta/2))$ tako da je $z_1 \neq z_2$, te postoje i $c_1, c_2 \in (c_0 - \delta; c_0 + \delta)$ tako da je $f(c_1) = z_1$ i $f(c_2) = z_2$. Naravno mora biti $c_1 \neq c_2$. Tada je $f(c_1 - c_2) = \dfrac{z_1}{z_2} \in H$ i $f(c_2 - c_1) = \dfrac{z_2}{z_1} \in H$. Neka je $r \in \{c_1 - c_2, c_2 - c_1\}$ takav da je $r > 0$ i stavimo $h := f(r) \in H$. Jasno $r < 2\delta$.

Uočimo sada proizvoljno $t \in \mathbb{R}$ tako da je $f(t) = a$ i neka je $k \in \mathbb{Z}$ najveći ceo broj za koji važi $kr \leq t$. Tada je $0 < t - kr < r < 2\delta$ pa je (zbog $2\delta < 1/4$) $f(kr) \in f^{\rightharpoonup}(t-2\delta; t+2\delta) \subseteq \mathrm{K}_d[f(t); 2\sin\delta)$, tj. $d(a,h) = d(f(t), f(kr)) < 2\sin\delta < \varepsilon$. □

232. (1) $f^{\rightharpoonup}G$ je kompaktan podskup od $\mathbb{R}$, pa je ograničen. Kad bi bilo $f(x) =: r \neq 0$ za neko $x \in G$, onda bi $\{kr : k \in \mathbb{Z}\} = \{f(x^k) : k \in \mathbb{Z}\}$ bio neograničen podskup od $f^{\rightharpoonup}G$ - kontradikcija.

(2) Neka je $z \in S$ beskonačnog reda i stavimo $a := f(z)$. Ako je $k \in \mathbb{N}$ tako da je $a^k = \mathfrak{e}$, gde je $\mathfrak{e}$ jedinični element grupe $\mathbb{G}$, onda za svako $m \in \mathbb{Z}$ imamo $f(z^{mk}) = \mathfrak{e}$, pa je $\{z^{mk} : m \in \mathbb{Z}\}$ beskonačan (z je beskonačnog reda) podskup od $f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$. Dakle $f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$ je beskonačan i μ_S-zatvoren skup (τ je T_1 topologija), i $\left(f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}, \dot{1}, \cdot\right)$ je podgrupa od $(S, \dot{1}, \cdot)$, te $f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\}$ mora biti μ_S-gust skup (videti zadatak 231.). Kako je on μ_S-zatvoren, to zaključujemo da je $f^{\leftharpoonup}\{\mathfrak{e}\} = S$, tj. f je trivijalan homomorfizam. □

233. (1) Neka su $\alpha, \beta \in X$, $\in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in A$ tako da je $\alpha \circ \beta^{-1} \in \mathrm{V}[x_1, \ldots, x_k | y_1, \ldots, y_k] =: W$. Imamo

$$\alpha \in U := \mathrm{V}[\beta^{-1}(x_1), \ldots, \beta^{-1}(x_k) | y_1, \ldots, y_k]$$

i

$$\beta \in V := \mathrm{V}[\beta^{-1}(x_1), \ldots, \beta^{-1}(x_k) | x_1, \ldots, x_k]$$

Pokažimo da je $u \circ v^{-1} \in W$ za svako $(u,v) \in U \times V$. Dakle neka $(u,v) \in U \times V$. Ako je $i \in [1;k] \cap \mathbb{N}$ onda imamo $v(\beta^{-1}(x_i)) = x_i$ pa je $v^{-1}(x_i) = \beta^{-1}(x_i)$ pa je zato $\left(u \circ v^{-1}\right)(x_i) = u\left(v^{-1}(x_i)\right) = u\left(\beta^{-1}(x_i)\right) = y_i$. Ovo znači da je $uv^{-1} \in W$.

(2) Neka je $(H, \mathrm{id}_A, \circ)$ normalna podgrupa od $(X, \mathrm{id}_A, \circ)$ i neka su dati $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in A$ tako da je $\mathrm{V}[x_1, \ldots, x_k | y_1, \ldots, y_k] \neq \varnothing$. Ovo znači da je $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, kao i $i \neq j \Rightarrow y_i \neq y_j$ (setimo se su elementi skupa X bijekcije). Treba dokazati da je $\mathrm{V}[x_1, \ldots, x_k | y_1, \ldots, y_k] \cap H \neq \varnothing$.

(I) Pokažimo najpre da je ovo tačno kad god je $x_i \neq y_i$ za $i = \overline{1,k}$. U tom cilju ćemo prvo naći neko $h \in H$ i $r_i \in A$ za $i = \overline{1,2k}$ tako da je

$i \neq j \Rightarrow r_i \neq r_j$ i tako da $h(r_{2i-1}) = r_{2i}$ za $i = \overline{1,k}$. Uočimo proizvoljno $g \in H \setminus \{\mathrm{id}_A\} \neq \varnothing$.

Pretpostavimo prvo da je skup $S := \{a \in A : g(a) \neq a\}$ beskonačan. Za proizvoljan konačan $F \subseteq A$ mora da postoji neko $a \in S \setminus (F \cup g^{\leftarrow}F)$; za ovo a očigledno važi $\{a, g(a)\} \cap F = \varnothing$ kao i $g(a) \neq a$. Koristeći ovu činjenicu jednostavno je rekurzivno definisati **injektivan** niz $(r_i : i \in \mathbb{N})$ tako da je $g(r_{2i-1}) = r_{2i}$ za svako $i \in \mathbb{N}$.

Neka je sada S konačan skup. Kako je $g \neq \mathrm{id}_A$ to postoji $a_0 \in A$ tako da je $a_1 := g(a_0) \neq a_0$. Uočimo $u_i, v_i \in A \setminus S$ za $i = \overline{1,k}$ tako da $i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j$, $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$, i $u_i \neq v_j$ za $i, j = \overline{1,k}$. Za $i = \overline{1,k}$ neka je $f_i \in X$ definisano sa $f_i(u_i) = a_0$, $f_i(a_0) = u_i$, $f_i(v_i) = a_1$, $f_i(a_1) = v_i$ i $f(a) = a$ za $a \in A \setminus \{u_i, v_i, a_0, a_1\}$. Lako je videti da $\big((f_i)^{-1} \circ g \circ f_i\big)(u_i) = v_i$, kao i da ako $i \neq j$ onda $\big((f_i)^{-1} \circ g \circ f_i\big)(u_j) = u_j$ i $\big((f_i)^{-1} \circ g \circ f_i\big)(v_j) = v_j$. Zato za

$$h := \big((f_k)^{-1} \circ g \circ f_k\big) \circ \cdots \circ \big((f_2)^{-1} \circ g \circ f_2\big) \circ \big((f_1)^{-1} \circ g \circ f_1\big)$$

važi $h(u_i) = v_i$ $i = \overline{1,k}$. Kako je $(H, \mathrm{id}_A, \circ)$ normalna podgrupa to je $h \in H$. Sada možemo uzeti $r_{2i-1} := u_i$ i $r_{2i} := v_i$.

Nakon što smo našli ovakve $h \in H$ i $r_i \in A$ za $i = \overline{1,k}$, uočimo proizvoljno

$$\gamma \in \mathrm{V}[x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots, x_k, y_k | r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, p_{2k-1}, r_{2k}]$$

Ovo je moguće uraditi jer je po pretpostavci skup $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\}$ sa $2k$ elemenata. Lako je videti da za $h_0 := \gamma^{-1} \circ h \circ \gamma \in H$ važi $h_0(x_i) = y_i$ za $i = \overline{1,k}$.

(II) Ako su $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq A$ i $\{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq A$ proizvoljni skupovi sa po k elemenata (gde sada može da bude i $x_i = y_i$ za neko i), onda izaberimo proizvoljan skup $\{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq A$ sa k elemenata koji je disjunktan sa skupom $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\}$. Prema onom što smo dokazali možemo naći neke $h_1 \in \mathrm{V}[x_1, \ldots, x_k | z_1, \ldots, z_k] \cap H$ i $h_2 \in \mathrm{V}[z_1, \ldots, z_k | y_1, \ldots, y_k] \cap H$. Očigledno je $h_2 \circ h_1 \in \mathrm{V}[x_1, \ldots, x_k | y_1, \ldots, y_k] \cap H$. □

234. (1) Kako je π prirodna projekcija indukovana sa $\sim_H$ to znamo da je π (τ,λ)-količničko, pa tim pre i (τ,λ)-neprekidno preslikavanje. Da pokažemo da je π (τ,λ)-otvoreno neka je $U \in \tau$ proizvoljno. Znamo da je $\pi^{\rightharpoonup}U \in \lambda \iff \pi^{\leftharpoonup}(\pi^{\rightharpoonup}U) \in \tau$. Dalje imamo

$$\pi^{\leftharpoonup}(\pi^{\rightharpoonup}U) = \pi^{\leftharpoonup}\{[x]_{\sim_H} : x \in U\} = \bigcup_{x\in U}[x]_{\sim_H} = \bigcup_{x\in U} xH = U\cdot H =$$

$$= \bigcup_{h\in H} Uh \in \tau$$

jer je $Ux \in \tau$ za svako $x \in G$.

(2) Neka je $f : G_{/\sim_h} \times G_{/\sim_h} \to G_{/\sim_h}$ definisano sa $f(u,v) := uv^{-1}$ za $(u,v) \in G_{/\sim_h} \times G_{/\sim_h}$. Kako je $p : G \to G_{/\sim_h}$ (τ,λ)-neprekidno i (τ,λ)-otvoreno preslikavanje to je $p \otimes p : G \times G \to G_{/\sim_h} \times G_{/\sim_h}$ $(\tau \times' \tau, \lambda \times' \lambda)$-neprekidno i $(\tau \times' \tau, \lambda \times' \lambda)$-otvoreno. $p \otimes p$ je očigledno preslikavanje na skup $G_{/\sim_H}$ pa je zato $(\tau \times' \tau, \lambda \times' \lambda)$-količničko. Otuda će f biti $(\lambda \times' \lambda, \lambda)$ neprekidno ako i samo ako je $h := f \circ (p \otimes p)$ (τ,λ)-neprekidno. No ako su $x, y \in G$ onda je $h(x,y) = [x]_{/\sim_H} \cdot \left([y]_{/\sim_H}\right)^{-1} = [xy^{-1}]_{/\sim_H} = (p \circ g)(x,y)$, gde je $g : G \times G \to G$ definisano sa $g(a,b) := ab^{-1}$ za $a, b \in G$. Dakle $h = g \circ p$ i tvrđenje pod **(2)** neposredno sledi. □

235. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to S$ definisana sa $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Lako je videti da se kongruencija $\sim$ poklapa sa $\ker(f)$.

f je $(\mu_{\mathbb{R}}, \mu_S)$-neprekidno ako i samo ako je $(\mu_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}^2})$-neprekidno ako i samo ako su oba preslikavanja $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ $(\mu_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidna, gde je za $i = \overline{1,2}$ $p_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ odgovarajuća projekcija definisana sa $p_i(a_1, a_2) = a_i$, a ovo poslednje jeste tačno jer je $(p_1 \circ f)(x) = \cos(2\pi x)$ i $(p_2 \circ f)(x) = \sin(2\pi x)$ za $x \in \mathbb{R}$.

Ako je $x \in \mathbb{R}$ i $0 < \delta < 1/4$ proizvoljan realan broj, onda imamo $f^{\rightharpoonup}(x-\delta; x+\delta) = S \cap \mathrm{K}_d[f(x); 2\sin(\pi\delta)) \in \mu_S$ gde je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Dakle f je $(\mu_{\mathbb{R}}, \mu_S)$-otvoreno. Kako je još f preslikavanje **na** skup S to je f $(\mu_{\mathbb{R}}, \mu_S)$-količničko. Otuda je $f_\diamond : \mathbb{R}_{/\ker(f)} \to S$ $(\mathrm{Factor}(\mu_{\mathbb{R}}, \ker(f)), \mu_S)$-homeomorfizam. Da je $f_\diamond$ izomorfizam grupa $\left(\mathbb{R}_{/\ker(f)}, \mathbb{Z}, +\right)$ i $(S, \dot{1}, \cdot)$ direktno sledi iz činjenice da je f epimomorfizam iz grupe $(\mathbb{R}, 0, +)$ na grupu

$(S, \dot{1}, \cdot)$: zaista, ako je $x \in \mathbb{R}$, onda imamo $f(x+y) = \dot{\mathrm{e}}^{2\pi(x+y)\mathrm{i}} = \dot{\mathrm{e}}^{2\pi x\mathrm{i}} \cdot \dot{\mathrm{e}}^{2\pi y\mathrm{i}} = f(x) \cdot f(y)$. $\square$

236. Stavimo $X := {}^{\{1,\dots,n\}^2}\mathbb{R}$. Neka je za $i, j \in \mathbb{N} \cap [1; n]$ $p_{i,j} : X \to \mathbb{R}$ projekcija definisana sa $p_{i,j}(A) = A(i,j)$ za svako $A \in X$. Stavimo $\lambda := \prod'_{s \in \{1,\dots,n\}^2} \mu_\mathbb{R}$. Sva preslikavanja iz skupa $S := \{p_{i,j} : i, j \in \mathbb{N} \cap [1; n]\}$ su $(\lambda, \mu_\mathbb{R})$-neprekidna. Zato su i sva preslikavanja iz skupa $S_1 := \{f_1 \cdot \ldots \cdot f_k : k \in \mathbb{N}$ i $f_i \in S$ za $i = \overline{1, k}\}$ $(\lambda, \mu_\mathbb{R})$-neprekidna pa su takva i sva preslikavanja iz skupa $\det_n \in S_2 := \{\alpha_i f_1 + \cdots + \alpha_k f_k : k \in \mathbb{N}$ i $f_i \in S_1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ za $i = \overline{1, k}\}$. Otuda je $f := \det_n \restriction M : (M, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(R \setminus \{0\}, \mu_{R\setminus\{0\}}\big)$ pa je i $\dfrac{1}{f} : (M, \tau) \xrightarrow{\mathsf{c}} \big(R \setminus \{0\}, \mu_{R\setminus\{0\}}\big)$.

Preslikavanje $g : X \times X \to X$ definisano sa $g(A, B) = A \cdot B$ je $(\lambda \times' \lambda, \lambda)$-neprekidno ako i samo ako je za svako $i, j \in \mathbb{N} \cap [1; n]$ kompozicija $p_{i,j} \circ g : X \times X \to \mathbb{R}$ $(\lambda \times' \lambda, \mu_\mathbb{R})$-neprekidna. Ako su $\pi_1 : X \times X \to X$ i $\pi_2 : X \times X \to X$ definisane sa $\pi_i(a_1, a_2) =:= a_i$ za $i = \overline{1, 2}$, onda je $p_{i,j} \circ g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (p_{i,k} \circ \pi_1) \cdot (p_{k,j} \circ \pi_2) \in \mathtt{C}(\lambda \times' \lambda, \mu_\mathbb{R})$ pa je $g \in \mathtt{C}(\lambda \times' \lambda, \lambda)$. Zato (i zbog $g^{\rightharpoonup}(M \times M) \subseteq M$) je restrikcija preslikavanja g na skup $M \times M$ $(\mathrm{rel}_{M \times M}(\lambda \times' \lambda), \tau)$-neprekidno preslikavanje, i pritom je kao što znamo $\mathrm{rel}_{M \times M}(\lambda \times' \lambda) = \mathrm{rel}_M(\lambda) \times' \mathrm{rel}_M(\lambda) = \tau \times' \tau$.

Preostaje da pokažemo da je $h : M \to M$ definisano sa $h(A) := A^{-1}$ (τ, τ)-neprekidno. Neka je $m : \mathbb{R} \times X \to X$ klasično množenje matrica realnim brojevima. Ako su $\nu_1 : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ i $\nu_2 : \mathbb{R} \times X \to X$ definisane sa $\pi_i(a_1, a_2) =:= a_i$ za $i = \overline{1, 2}$, onda za $i, j \in \mathbb{N} \cap [1; n]$ imamo $p_{i,j} \circ m = \nu_1 \cdot (p_{i,j} \circ \nu_2)$ to je m $(\mu_\mathbb{R} \times' \lambda, \lambda)$-neprekidno preslikavanje. Neka je $\mathrm{Adj} : X \to X$ tako da je za $A \in X$ $\mathrm{Adj}(A)$ adjungovana matrica matrice A. Jasno je da $p_{i,j} \circ \mathrm{Adj} \in S_2$ pa je Adj (λ, λ)-neprekidno preslikavanje. Zato je $\mathrm{Adj}_0 := \mathrm{Adj} \restriction M : M \to M$ (τ, τ)-neprekidno preslikavanje. Imamo $p_{i,j} \circ h = m \circ (\dfrac{1}{f} \triangle \mathrm{Adj}_0)$ za svako $i, j \in \mathbb{N} \cap [1; n]$, pa je h (τ, τ)-neprekidno. Ovim smo dokazali **(1)**.

Da pokažemo **(2)** neka je $A \in M$. Primetimo da je $M = (\det_n)^{\leftharpoonup}(\mathbb{R} \setminus$

$\{0\}$) λ-otvoren skup pa postoji neko $\delta_0 \in (0; +\infty)$ tako da za svako $C \in X$ iz $\max\limits_{i,j=\overline{1,n}} |C(i,j) - A(i,j)| < \delta_0$ sledi $C \in M$. Neka je $\delta \in (0; \delta_0)$ proizvoljno i

$$U := \left\{ C \in M \ : \ \max_{i,j=\overline{1,n}} |C(i,j) - A(i,j)| < \delta \right\}$$

Stavimo $a := \det_n(A) = f(A)$. Za $s = \overline{1,n}$ neka je $B_s \in X$ definisano sa $B_s(i,j) = A(i,j)$ ako $j \neq n$, $B_s(i,n) = 0$ ako $i \neq s$ i $B_s(s,n) = 1$. Kako je $f(A) \neq 0$ to postoji neko $i_0 \in \mathbb{N} \cap [1; n]$ tako da je $r := f(B_{i_0}) \neq 0$.

Neka je $x \in (a - r\delta; a + r\delta)$ proizvoljno. Tada je $\varepsilon := \dfrac{x-a}{r} \in (-\delta; \delta)$. Imamo $C := A + \varepsilon \cdot E_{i_0,n} \in U$, gde je $E \in X$ definisano sa $E_{i_0,n}(i,j) = 0$ ako $(i,j) \neq (i_0, n)$ odnosno $E_{i_0,n}(i_0,n) = 1$, i $f(C) = f(A) + \varepsilon \cdot f(B_{i_0}) = a + \varepsilon r = x$. Ovim smo dokazali da je $f^{\rightharpoonup} U \supseteq (f(A) - r\delta; f(A) + r\delta)$.

Iz gore izloženog vidimo da je f τ-otvoreno preslikavanje. Kako je ono još i τ-neprekidno **na** skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, to je ono $\big(\tau, \mu_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\big)$-količničko, pa je $f_\diamond : M_{/\ker(f)} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\big(\mathrm{Factor}(\tau, \ker(f)), \mu_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\big)$-homeomorfizam. f je homomorfizam grupa $(M, \cdot)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ (ovo je poznata činjenica) pa je $\ker(f) = \sim_H$, a $f_\diamond : M_{/\sim_H} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ izomorfizam grupa $(M_{/\sim_H}, \cdot)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Dakle $f_\diamond$ je jedan topološki izomorfizam kakav se traži. $\square$

237. Neka je $\mathfrak{e}$ neutral grupe $(G, \cdot)$. Za τ-otvoren $V \ni \mathfrak{e}$ stavimo $D_V := \{(x,y) \in G^2 \ : \ y \in xV\} \subseteq G^2$; jasno, $\Delta_G \subseteq V_A$. Neka je $\mathcal{D} := \{S \subseteq G^2 \ : \ D_V \subseteq S$ za neki $\tau -$ otvoren $V \ni \mathfrak{e}\}$. Tvrđenje zadatka će neposredno slediti iz zadatka 212. ukoliko dokažemo da je $\mathcal{D}$ uniformnost na skupu G i to takva da je $\mathrm{Top_u}(\mathcal{D}) = \tau$.

Dokazujemo da je $\mathcal{D}$ uniformnost na skupu G. Neka su $S_1, S_2 \in \mathcal{D}$. Tada postoje τ-otvoreni $V_1 \ni \mathfrak{e}$ i $V_2 \ni \mathfrak{e}$ tako da je $D_{V_i} \subseteq S_i$ za $i = \overline{1,2}$.

Imamo $\mathfrak{e} \in V_1 \cap V_2 \in \tau$ pa iz $D_{V_1 \cap V_2} = D_{V_1} \cap D_{V_2} \subseteq S_1 \cap S_2$ sledi $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{D}$. Dalje, znamo da postoji neki τ-otvoren $U \ni \mathfrak{e}$ za koji je $U^{(-1)} \subseteq V_1$. Ako je $(x,y) \in D_U$, tj. $y \in xU$, onda je $x \in yU^{(-1)} \subseteq yV_1$, tj. $(y,x) \in D_{V_1} \subseteq S_1$ odnosno $(x,y) \in (S_1)^{(-1}$. Dakle $D_U \subseteq (S_1)^{(-1}$. Dalje, znamo da postoji neki τ-otvoren $W \ni \mathfrak{e}$ za koji je $W^{(2)} \subseteq V_1$. Ako

$(x, y) \in (D_W)^{(2}$ onda postoje $z \in G$ i $w_1, w_2 \in W$ tako da je $z = xw_1$, $y = zw_2$, pa je $y = xw_1w_2 \in xW^{(2)} \subseteq xV_1$, tj. $(x, y) \in D_{V_1} \subseteq S_1$. Dakle $D_W \in \mathcal{D}$ i $(D_W)^{(2} \subseteq S_1$.

Pokažimo sada da je $\lambda := \mathrm{Top_u}(\mathcal{D}) = \tau$. Primetimo da za svaki τ-otvoren $V \ni \mathfrak{e}$ i svako $a \in G$ važi $\mathrm{B}[a; D_V) = aV \ni \tau$. Odatle i iz definicije topologije λ direktno sledi $\lambda \subseteq \tau$. S druge strane neka je $U \in \tau$. Ako je $a \in U$ proizvoljno onda $\mathfrak{e} \in a^{-1}U \in \tau$ i $U = \mathrm{B}\left[a; D_{a^{-1}U}\right) \subseteq U$; dakle $U \in \lambda$. Ovim smo dokazali da je $\tau \subseteq \lambda$.

Napomena 14. Primetimo da su za $a \in G$ i $\mathfrak{e} \in V \in \tau$ skupovi $\mathrm{B}[a; D_V)$ uvek $\mathrm{Top_u}(\mathcal{D})$-otvoreni. □

238. Ako je $f \in X$ proizvoljno i $c : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathsf{c}} \mathbb{R}$ konstantna nula funkcija, tj. $c(t) = 0$ za svako $t \in \mathbb{R}$, onda imamo $\nu(c) = \nu(f - f) = \nu(f) - \nu(f) = 0$. Dakle $\nu(c) = 0 \in (-1; 1)$ pa kako je ν $(\tau, \mu_{\mathbb{R}})$-neprekidno preslikavanje to postoje $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ i $U_1, \ldots, U_k \in \mu_{\mathbb{R}}$ tako da za $W := \mathrm{O}[t_1, \ldots, t_k | U_1, \ldots, U_k]$ važi $c \in W$ i $\nu^{\rightharpoonup} W \subseteq (-1; 1)$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da $i \neq j \Rightarrow t_i \neq t_j$ za $i, j = \overline{1, k}$. Zato za svako $i = \overline{1, k}$ možemo fiksirati po $f_i \in X$ tako da je $f_i(t_i) = 1$ i $i \neq j \Rightarrow f_i(t_j) = 0$ za svako $i, j = \overline{1, k}$.

Neka je $f \in X$ proizvoljno tako da je $f(t_i) = 0$ za svako $i = \overline{1, k}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $(n \cdot f)(t_i) = 0 = c(t_i) \in U_i$ za $i = \overline{1, k}$ (jer $c \in W$) pa je $n \cdot f \in W$, te zbog toga i $\nu(n \cdot f) \in (-1; 1)$, tj. $|\nu(f)| < 1/n$. Zaključujemo da mora biti $\nu(f) = 0$.

Neka je sada $g \in X$ proizvoljno i stavimo $h_g := \sum_{i=1}^{k} g(t_i) \cdot f_i$. Ako je $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ proizvoljno, onda je $h_g(t_{i_0}) = g(t_{i_0}) f_{i_0}(t_{i_0}) + \sum_{j = \overline{1,k}, j \neq i_0} g(t_j) f_j(t_{i_0}) = g(t_{i_0})$ pa je $(g - h_g)(t_{i_0}) = g(t_{i_0}) - h_g(t_{i_0}) = 0$. Na osnovu onog što smo već videli ovo znači da mora biti $\nu(g - h_g) = 0$, tj. $\nu(g) = \nu(h_g) = \sum_{i=1}^{k} g(t_i)\nu(f_i) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot p_{t_i}\right)(g)$, gde je $a_i := \nu(f_i)$ za $i = \overline{1,k}$.

Kako je $g \in X$ u gornjem razmatranju bilo proizvoljno ovim smo dokazali da je $\nu = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot p_{t_i}$. $\square$

Literatura

[1] A.V. Arhangel'skii, V.I. Ponomarev, *Osnovy obshchej topologii v zadachah i uprazhnenijah*, Nauka, Moskva, 1974. (English translation: Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984)

[2] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] J.R. Isbell, *Uniform spaces*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1964.

[4] I.M. James, *Topological and uniform spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[5] J.L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[6] B. Mirković, *Teorija mera i integrala*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[7] M. Mršević, *Zbirka rešenih zadataka iz topologije*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.

[8] A.J. Steen, A.J. Seebach, Jr., *Counterexamples in topology* (second edition), Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978.

[9] O.Y. Viro, O.A. Ivanov, N.Y. Netsvetaev, V.M. Kharlamov, *Elementary Topology: Problem Textbook*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[10] S. Willard, *General topology*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1970.

Lista simbola

Indeks pojmova

515.1(075.8)(076)
ПАВЛОВИЋ, Владимир, 1976-
Zbirka zadataka iz opšte topologije /
Vladimir Pavlović. - 1. izd. - Niš :
Prirodno-matematički fakultet, 2013 (Niš :
Unigraf X-copy). - 260 str. ; 25 cm. -
(Serija Pomoćni udžbenici /
Prirodno-matematički fakultet, Niš)
Na nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž
70. - Bibliografija: str. 253. - Registar.
ISBN 978-86-6275-013-6
a) Topologija - Zadaci
COBISS.SR-ID 198159628

515.1(075.8)(076)
ПАВЛОВИЋ, Владимир, 1976-
Zbirka zadataka iz opšte topologije /
Vladimir Pavlović. - 1. izd. - Niš :
Prirodno-matematički fakultet, 2013 (Niš :
Unigraf X-copy). - 260 str. ; 25 cm. -
(Serija Pomoćni udžbenici /
Prirodno-matematički fakultet, Niš)
Na nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž
70. - Bibliografija: str. 253. - Registar.
ISBN 978-86-6275-013-6
a) Topologija - Zadaci
COBISS.SR-ID 198159628