Univerzitet u Beogradu
Tehnički fakultet u Boru

Zbirka zadataka iz obrade rezultata fizičkih merenja

Čedomir A. Maluckov
Zoran T. Pavlović
Miodrag K. Radović

Bor, 2009.

Dr Čedomir A. Maluckov
Dr Zoran T. Pavlović
Dr Miodrag K. Radović

ZBIRKA ZADATAKA IZ OBRADE REZULTATA FIZIČKIH MERENJA

Izdavač
Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru, Vojske Jugoslavije 12, 19210 Bor,
http://www.tf.bor.ac.rs

Urednik
Prof. dr Zoran Marković

Recenzenti
Prof. dr Jugoslav Karamarković, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu
Prof. dr Miodrag Arsić, Elektronski fakultet u Nišu

Odlukom komisije za idavačku delatnost, br. IV/926, od 20.06.2008. godine, rukopis je odobren za štampu kao pomoćni udžbenik na Tehničkom fakultetu u Boru.

ISBN 978-86-80987-64-4

Štampa
Grafomed, Bor

Predgovor

Ova zbirka je namenjena kao pomoćni udžbenik za standardne kurseve na Prirodno-matematičkim fakultetima za predmete Obrada rezultata merenja ili Metrologija i obrada rezultata merenja na odsecima za Fiziku ili za predmet Statistička obrada rezultata merenja na Odsecima za hemiju, zatim za studente Tehničkih fakulteta za predmete Električna merenja ili Fizičko-tehnička merenja.

Ova zbirka zadataka je nastala kao rezultat našeg višegodišnjeg angažovanja u ovoj oblasti. Koliko nam je poznato, na Srpskom jeziku ne postoji nijedna zbirka zadataka koja bi odgovarala predmetu „Obrada razultata merenja". Postoji izvestan broj udžbenika sa ovom tematikom, od kojih u nekima ima nekoliko primera. Pored toga, postoji veliki broj udžbenika i zbirki zadataka iz matematičke statistike, koji delimično odgovaraju nekim oblastima koji pokriva ovaj kurs. S obzirom da u svojim istraživanjima koristimo veliki broj statističkih metoda, izvestan broj ovih metoda je uključen u ovu zbirku zadataka.

Na početku svake glave u ovoj zbirci dat je teorijski uvod, koji je možda neuobičajeno opširan, u odnosu na standardne zbirke zadataka. Međutim, smatrali smo da je ovo neophodno iz nekoliko razloga. Pre svega ovakav pristup omogućava studentima brzi uvid u teorijske postavke pojedinih precedura, bez koga bi bila otežana izrada ovih zadataka. Pored toga, pošto imamo višegodišnje iskustvo u radu sa studentima, poznato nam je da pošto se ispiti polažu najpre pismeno pa usmeno, studenti najpre vežbaju zadatke, a teoriju uče tek kada polože pismeni deo ispita. Ovakav pristup po našem mišljenju će uticati na studente da najpre pročitaju neophodnu teoriju potrebnu za rešavanje zadataka, pa tek onda krenu na rešavanje zadataka.

Zahvaljujemo se prof. dr Miodragu Arsiću, redovnom profesoru Elektronskog fakulteta u Nišu i prof. dr Jugoslavu Karamarkoviću, redovnom profesoru Građevinsko-arhitektonskom fakultetu u Nišu na detaljnom čitanju rukopisa i konstruktivnim sugestijama. Pored roga, zahvaljujemo se kolegama mr Suzani Stamenković, mr Biljani Samardžić i mr Dejanu Aleksiću, asistentima Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, koji su detaljno pročitali rukopis i ukazali na omaške, koje se javljaju prilikom pisanja zbirki zadataka.

Kako je ovo prva verzija ove zbirke zadataka, unapred se zahvaljujemo čitaocima koji nam ukažu na eventualne nejasnoće, ili na eventualno nastale greške. Za sve pomenute primedbe nas možete kontaktirati preko e-maila: cmaluckov@tf.bor.ac.rs, zokip@pmf.ni.ac.yu i mkradovic@junis.ni.ac.yu.

Autori

Sadržaj

Glava 1

Sistemi fizičkih veličina

1.1 Istorijski osvrt

Od najranijh dana svog postanka čovek pokušava da shvati okolinu, biljni i životinjski svet, odnosno prirodu. U isto vreme javlja se potreba za merenjem i osnovnim mernim jedinicama raznih fizičkih veličina kao što su: dužina, vreme, temperatura, masa i druge. Razni narodi stvorili su različite osnovne jedinice za iste fizičke veličine, kao što su: palac, stopa, korak, jard, itd. Njihove jedinice bile su lokalnog, odnosno regionalnog karaktera sa namenom za međusobno sporazumevanje. Razvija se zanatstvo, umetnost, nauka, saobraćaj, trgovina, a u isto vreme razvija se i međusobna saradnja i razmena iskustva u različitim oblastima, i pri tome jedna od najčešćih poteškoća su različite jedinice za iste veličine.

Početkom osamnaestog veka u Francuskoj se javlja ideja o potrebi formiranja jedinstvenih mernih jedinica. Francuska revolucija 1789. godine stvorila je početne uslove da se ostvari jedinstveni sistem mera, uz vizionarsko geslo „*Za sva vremena i sve narode*". Francuska vlada 1789. godine dala je Francuskoj akademiji nauka da prouči i predloži jedinstveni sistem jedinica koji treba da zameni sve dosadašnje sisteme. Ovu ideju predložili su francuski naučnici kao što su: Lagranž, Laplas, Monž i drugi. Posle detaljne analize francuski naučnici su predložili:

- Jedinice jedinstvenog sistema treba da se zasnivaju na zakonima prirode.
- Metrički sistem mera sa osnovnim jedinicama za dužinu *metar*, za masu *gram*, i za vreme *sekunda*.
- Sve druge jedinice su izvedene na osnovu navedenih osnovnih jedinica za dužinu, masu i vreme.
- Svi multipli većih i manjih osnovnih i izvedenih jedinica treba da budu u decimalnom sistemu, a predložili su i sistem prefiksa (predmetka).

Na ovaj predlog Lagranža i drugih francuskih naučnika 1790. godine Nacionalni Sabor Francuske doneo je i odluku o reformi jedinica i mera. Tada je donet „*Metrički sistem mera*" sa osnovnim veličinama i osnovnim jedinicama:

	Osnovna veličina	oznaka veličine	jedinica	oznaka jedinice
1	Dužina	l	metar	m
2	Masa	m	gram	g
3	Vreme	t	sekunada	s

Definicije ovih jedinica su:

- Jedinica za dužinu *jedan metar* (1 m) je definisan kao desetomilioniti deo četvrtine Pariskog meridijana.

- Jedinica mase je masa 1cm^3 destilovane vode na temperaturi 4°C i pritisku 100 kPa (760 mmHg), nazvana je *gram* sa oznakom 1 g.
- Jedinica za vreme je *jedna sekunda* (1 s) koja je definisana kao 1/86400 deo srednjeg sunčanog dana.

Sve ostale jedinice mere ostalih fizičkih veličina smatrane su izvedenim jedinicama.

Francuska vlada je zakonom od 7. aprila 1795. godine usvojila predlog definicija jedinica za dužinu i masu. Delambr (Delambre) i Mešen (Mechain) izvršili su premeravanje meridijana luka zemlje od Dunkerquea do Barcelone. Zatim je izrađen etalon metra i etalon kilograma mase.

- Etalon metra dužine bio je izrađen od platinaste pene u obliku lenjira poprečnog preseka 25x4 mm, čija je dužina na 0° C bila jedan metar, odnosno 1 m (*Arhivski metar*). Dužina lenjira je oko 1.02 m, a 1 m je određen između dva paralelna zareza na njemu.
- Etalon kilogram mase izrađen je od platine u obliku valjka prečnika 39 mm i visnine 39 mm (*Arhivski kilogram*).

Etalon metra i etalon kilograma 22. juna 1799. godine predati su arhivi Francuske Republike.

Iako je metrički sistem nudio velike prednosti i jednostavnost primene, samo uvođenje i njegova primena išla je veoma sporo i otežano. Zbog toga je Francuska vlada 4, jula 1837. godine donela novi zakon da se od 1840. godine isključivo koristi metrički sisitem jedinica.

Sa vremenom, u osamnaestom veku sazrela je ideja o jedinstvenom međunarodnom sistemu jedinica, kako bi se olakšala trgovina i međusobna saradnja naroda u nauci i tehnici. Posle duže diplomatske pripreme ove ideje osamnaest zemalja je 20. maja 1875. godine u Parizu održalo Diplomatsku konferenciju o metru i potpisale „*Metarsku konvenciju*" (fr. Convention du Metre) sa ciljem – da se osigura međunarodno jedinstvo mera i usavršava metarski sistem. Tada je utvrđeno sledeće:

1. Definisane su jedinice dužine *metar* i jedinice mase *kilogram*
2. Osnovan je međunarodni biro za tegove i mere (fr. Bureau International des Poids et Measures, BIPM)
4. Osnovan je međunarodni komitet za tegove i mere (fr. Comite International des Poids et Measures, CIPM)
5. Odlučeno je da se svakih šest godina u Parizu održava Generalna konferecija za tegove i mere (fr. Conference Generale des Poids et Measures, CGPM)

Generalna konferencija za tegove i mere je vrhovno telo, kome je podređen Međunarodni komitet čiji program rada i smer razvoja utvrđuje Međunarodni biro. Srbija je metarsku konvenciju potpisala 1789. godine.

U periodu od 1882. godine do 1889. godine urađeno je četrdeset primeraka etalona metra od legure Pt(90%) i Ir(10%) sa poprečnim presekom u obliku slova X dužine 102 cm. Na prvoj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1889. godine odlučeno je da primerak sa oznakom A_6 bude *međunarodni etalon metra*. Jedinica dužine metra definisana je kao rastojanje između dve paralelne crte na ovom lenjiru A_6 u obliku slova X na 0° C. Dužina od 1 m mogla je da se meri sa tačnošću od $\pm 1\,\mu$m. Na istoj, prvoj Generalnoj konferenciji za tegove i mere, definisana je i jedinica mase kilogram. *Međunarodni etalon kilograma* napravljen je od iste legure Pt(90%) i Ir(10%) u obliku valjka prečnika 39 mm i visine 39 mm. Masa ovog etalona je tačno jedan kilogram (1 kg) i u odnosu na njega izrađuju se drugi nacionalni etaloni za masu. Etaloni metra i kilograma su iste godine predati na čuvanje Međunarodnom birou sa sedištem u Sevru kod Pariza.

U tom periodu, u nauci, a posebno u fizici korišćen je CGS sistem koji se zasniva na jedinicama: centimetru, gramu i sekundi. U tehnici, primenjivan je metrički sistem zasnovan na metru, kilogramu i sekundi, što je takozvani MKS sistem. Brzi razvoj elektrotehnike dovodi do stvaranja većeg broja novih izvedenih jedinica. U nauci i tehnici javljaju se poteškoće prilikom tumačenja raznih fizičkih efekata, tako da se osećala potreba za novom jedinicom koja bi odražavala fizičku suštinu pojava. Italijanski fizičar Đorđi (G. Giorgi) je 1901. godine predložio da se koristi sistem od četiri jedinice: metar, kilogram, sekunda i om za električnu otpornost. Prihvatanje Đorđijevog sistema odvijalo se veoma sporo i tek 1913. godine je prihvaćen njegov predlog na petoj Generalnoj konferenciji za tegove i mere. Međunarona elektrotehnička komisija (engl. International Electrotehnical Commision, IEC) je 1950. godine, takođe prihvatila predlog Đorđija, sa razlikom što je za četvrtu jedinicu umesto oma za otpornost, usvojena jedinica amper za jačinu električne struje. Ovaj koherentni sistem imao je prednosti u odnosu na postojeće sisteme i prema početnim slovima jedinica (metar, kilogram, sekunda, amper) naziva se MKSA sistem, a često se naziva i praktični MKSA sistem. Međunarodni savez za čistu i primenjenu fiziku 1951. godine predložio je ovaj sisitem za korišćenje.

Na jedanaestoj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1960. godine usvojen je *Međunarodni sistem jedinica* sa oznakom SI (fr. Systeme International d'Unites). Ovaj sistem je koherentan, univerzalan za sve oblasti nauke, praktičan a i tačniji od prethodnih. U Jugoslaviji, a i u Srbiji SI sistem jedinica je uveden od 1976. godine Zakonom o mernim jedinicama i merilima, a od 31. decembra 1980. godine je jedino važeći sistem (služ. list SFRJ br. 13/76).

Generalna konferencija za tegove i mere je vrhovno telo, kome je podređen Međunarodni komitet čiji program rada i smer razvoja utvrđuje Međunarodni biro. Danas postoje sledeći konsultativni komiteti za različite oblasti fizike:
- Consultative Committee for Electricity and Magnetism (CCEM)
- Consultative Committee for Photometry and Radiometry (CCPR)
- Consultative Committee for Thermometry (CCT)
- Consultative Committee for Length (CCL)
- Consultative Committee for Time and Frequency (CCTF)
- Consultative Committee for Ionizing Radiation (CCRI)
- Consultative Committee for Units (CCU)
- Consultative Committee for Mass and Related Quantities (CCM)
- Consultative Committee for Amount of Substance: metrology in chemistry (CCQM)
- Consultative Committee for Acoustics, Ultrasound and Vibration (CCAUV)

1.2 Međunarodni sistem jedinica SI

Osnovne jedinice međunarodnog sistema jedinica koje su definisane na jedanaestoj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1960. godine date su u tabeli 1.1.

Tabela 1.1. Osnovne jedinice međunarodnog sistema – SI.

	Osnovna veličina	oznaka veličine	jedinica	oznaka jedinice
1	Dužina	l	metar	m
2	Vreme	t	sekunda	s
3	Masa	m	kilogram	kg
4	Temperatura	T	kelvin	K
5	Jačina struje	I	amper	A
6	Količina materije	n	mol	mol
7	Jačina svetlosti	J	kandela	cd

Jedinice fizičkih veličina izvedenih pomoću osnovnih jedinica nazivaju se *izvedene jedinice*. Izvedene jedinice mogu biti sistemske izvedene jedinice i vansistemske izvedene jedinice. Izvedene sisitemske jedinice mogu imati posebni naziv kao što je dato u tabeli 1.2, ali mogu biti i bez naziva kao na primer jedinica za brzinu (m/s), ubrzanje $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$, gustinu $\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$ i druge. Pored toga izvedene sistemske jedinice SI mogu imati nazive kao kombinaciju imena i simbola izvedenih sistemskih jedinica sa posebnim nazivom, a primeri su dati u tabeli 1.3.

Tabela 1.2. Izvedene sistemske jedinice sa posebnim nazivom prema SI.

Veličina	Jedinica	Simbol	Odnos sa drugim jedinicama	
			osnovnim	izvedenim
Ugao u ravni	radijan	rad	m/m	
Prostorni ugao	steradijan	sr	m^2/m^2	
Frekvencija	herc	Hz	s^{-1}	
Sila	njutn	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	J/m
Pritisak	paskal	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	$N \cdot m^{-2}$
Energija	džul	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
Snaga	vat	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	J/s
Celzijusova temperatura	stepen Celzijusa	°C	K	
Naelektrisanje	kulon	C	$A \cdot s$	
Električni potencijal	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	J/C
Električni kapacitet	farad	F	$m^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	C/V
Električna otpornost	om	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	V/A
Elekrična provodnost	simens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	A/V
Magnetni fluks	veber	Wb	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$V \cdot s$
Magnetna idukcija	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	Wb/m^2
Induktivnost	henri	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	$Wb/A = \Omega \cdot s$
Svetlosni fluks	lumen	lm	$cd \cdot sr$	
Osvetljenost	luks	lx	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$	lm/m^2
Aktivnost	bekerel	Bq	s^{-1}	
Apsorbovana doza	grej	Gy	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg
Ekvivalentna doza	sivert	Sv	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg

Tabela 1.3. Izvedene sistemske jedinice prema SI.

Veličina	Naziv	Simbol	Odnos sa drugim osnovim jedinicama
Dinamička viskoznost	paskal sekund	$Pa \cdot s$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
Moment sile	njutn metar	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Površinski napon	njutn po metru	N/m	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Ugaona brzina	radijan u sekundi	rad/s	$m \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = s^{-1}$
Ugaono ubrzanje	radijan u sekudni na kvadrat	rad/s^2	$m \cdot m^{-1} \cdot s^{-2} = s^{-2}$
Gustina toplotnog fluksa, Energijski osvetljaj	vat po metru kvadratnom	W/m^2	$kg \cdot s^{-3}$
Toplotni kapacitet, Entropija	džul po kelvinu	J/K	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Specifični toplotni kapacitet, Specifična entropija	džul po kilogramu i kelvinu	$J/(kg \cdot K)$	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Specifčna energija	džul po kilogramu	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
Termička provodnost	vat po metru i kelvinu	$W/(m \cdot K)$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
Gustina energije	džul po kubnom metru	J/m^3	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Intenzitet električnog polja	volt po metru	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Gustina naelektrisanja	culon po kubnom metru	C/m^3	$m^3 \cdot s \cdot A$
Gustina električnog fluksa	kulon po kvadratnom metru	C/m^2	$m^2 \cdot s \cdot A$
Električna permitivnost	fard po metru	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Magnetna permeabilost	henri po metru	H/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Molarna energija	džul po molu	J/mol	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
Molarna entropija	džul po molu i kelvinu	$J/(mol \cdot K)$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
Ekspoziciona doza (x i γ zračenja)	kulon po kilogramu	C/kg	$kg^{-1} \cdot s \cdot A$
Brzina absorcione doze	grej u sekundi	Gy/s	$m^2 \cdot s^{-1}$
Energijska jačina zračenja	vat po steradijanu	W/sr	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Radijansa	vat po kvadratnom metru steradijanu	$W/(m^2 \cdot sr)$	$kg \cdot s^{-3}$

Pored sistemskih izvedenih jedinica u praksi se koriste i vansistemske izvedene jedinice, a neke zakonom dozvoljene date su u tabeli 1.4.

Tabela 1.4. Vansistemske jedinice čija je upotreba dozvoljena.

Veličina	Jedinica	Oznaka	Odnos sa drugim osnovim jedinicama
Dužina	morska milja	–	1 morska milja = 1 852 m
Površina	ar	ar	1 a = 100 m^2 = 10^2 m^2
	hektar	ha	1 ha = 10 000 m^2 = 10^4 m^2
Zapremina	litar	l, L	1 l = 1 dm^3= 10^{-3} m^3
Ugao u ravni	pun ugao	–	1 pun ugao = 2π rad
	prav ugao	L	L = $(\pi/2)$ rad
	stepen	°	1°=$(\pi/180)$ rad
	minut	’	1’ = (1/60)°=$(\pi/10\ 800\ )$ rad
	sekund	”	1”= (1/60)’= $(\pi/648\ 000)$ rad
Masa	tona	t	1 t = 1000 kg = 10^3 kg
Podužna masa	teks	tex	1 tex = 1 g/km = 10^{-6} kg/m
Vreme	minut	min	1 min = 60 s
	čas	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	dan	d	1 d = 24 h = 86 400 s
	godina	yr	1 yr = 365.25 d

Pored ovih jedinica dozvoljeno je korišćenje vansistemskih jedinica čije vrednosti zavise od vrednosti fizičkih konstanti. Neke od od ovih jedinica su prikazane u tabeli 1.5. U ovoj tabeli m(^{12}C) je masa atoma ugljenika – 12 koja zavisi od aktuelne vrednosti Avogadrovog broja. Naelektrisanje elektrona e je aktuelna vrednost elementarnog naelektrisanja elektrona.

Tabela 1.5. Vansistemske jedinice čije vrednosti zavise od vrednosti fizičkih konstanti.

Veličina	Jedinica	Oznaka	Definicija
Masa	atomska jedinica mase	u	1 u = m(^{12}C)/12=1.660 540 2(10)x10^{-27} kg
Energija	elektronvolt	eV	1 eV = (e/C) J= 1.602 177 33(49)x10^{-19} J
Astronomska dužina	astronomska jedinica	ua	1 ua = 1.495 978 706 91(30)x10^{11} m

Za pisanje simbola fizičkih veličina i jedinica treba poštovati pravila koja propisuje SI. Pored tog za sve oblasti fizike razrađena je šema oznaka fizičkih veličina. Najvažnija *pravila pisanja* jedinica i simbola fizičkih veličina su:

1. Jedinice se pišu uspravnim štampanim slovima.
2. Nije dozvoljena promena velikih i malih slova i obrnuto.
3. Oznake izvedenih jedinica pišu se sa tačkom ili sa malim razmakom između osnovnih jedinica.
4. Oznake jedinica ne smeju se prekidati i prenositi u novi red.
5. Nije dozvoljeno iza brojne vrednosti veličine stavljati jedinice u zagradi.
6. Iza simbola veličine ili imena veličine dozvoljeno je staviti u zagradi jedinicu veličine.
7. Za izvedene veličine dozvoljeno je korišćenje negativnih eksponenata i jednostrukih razlomaka uključujući i zagrade.

Prefiksi koji mogu biti korišćeni da pokažu decimalni umnožak ili delitelj jedinice navedeni su u tabeli 1.6. Prefiks s oznakom jedinice čini jedinstvenu celinu i kao takav u celini podiže se na pozitivan ili negativan eksponent bez korišćenja zagrade.

Tabela 1.6. Prefiksi uz jedinice SI sistema.

Faktor	Prefiks	Oznaka	Faktor	Prefiks	Oznaka
10^{24}	jota	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zeta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	eksa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	mikro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	piko	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	ato	n
10^{2}	hekto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	jokto	y

1.3 Definicije osnovnih jedinica SI

U ovom delu date su važeće definicije osnovnih jedinica međunarodnog sistema jedinica SI.

1.3.1 Metar

Na 17-toj Generalnoj konferenciji o tegovima i merama (CGPM) 1983. godine utvrđeno je da je jedinica za dužinu *metar* (oznaka: m), sa novom definicijom:

Metar je jednak dužini puta kojeg u vakumu pređe svetlost za vreme od $\frac{1}{c} = \frac{1}{299\ 792\ 458}$ **sekunde.**

Etalon dužine prema ovoj definiciji realizuje se pomoću lasera stabilisane frekvencije f i interferometra posebne konstrukcije. Frekvencija lasera određuje se poređenjem sa vremenskim standardom. Interferometar omogućuje prenošenje određene dužine l preko konačnog broja k talasnih dužina λ emitovane svetlosti stabilisanog lasera, prema nekom sekundarnom standardu, odnosno $l = k \cdot \lambda = k \cdot c \cdot f$. Ovako definisana jedinica dužine je izvedena veličina uzimanjem da je jedinica vremena (frekvencija) tačna i jedinica brzine svetlosti tačna. Formalno treba imati u vidu da je *dužina* osnovna veličina i *metar* osnovna jedinica prema SI. Etalon dužine na ovaj način reprodukuje se sa relativnom greškom od 10^{-9} do 10^{-12}.

1.3.2 Kilogram

Jedinica za masu *kilogram* (oznaka: kg) utvrđena je na Prvoj Generalnoj konferenciji o tegovima i merama 1889. godine.

Kilogram je masa međunarodnog etalona kilograma.

Ovaj etalon izrađen je od legure platine (90%) i iridijuma (10%) u obliku valjka prečnika 39 mm i visine 39 mm. Prototip se čuva u Međunarodnom birou u Sevru kod Pariza pod istim uslovima koji su utvrđeni 1889. godine.

1.3.3 Sekunda

Jedinica za vreme je sekunda (oznaka: s) definisana je na 13-toj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1967. godine.

Sekunda je vremenski interval jednak 9 192 631 770 perioda elektromagnetnog zračenja koje odgovara prelazu između dva hiperfina energetska nivoa osnovnog stanja ($F = 4,\ m_F = 0 \quad i \quad F = 3,\ m_F = 0$) **atoma** ^{133}**Cs.**

Vremenski etalon realizuje se pomoću cezijumovog časovnika. On se sastoji od vakumske cevi u kojoj je smešten izvor cezijuma, magnetnih selektora prvog i drugog, posebnog talasovoda sa slabim visokofrekvetnm poljem frekvencije $f_0 = 9\ 192\ 631\ 770$ Hz, jonizatora Cs atoma, masenog spektometra, umnoživaca elektrona, pojačivača i frekvencijskog sistema sa kvarcnim oscilatorom. Pomoću ovog sistema vrši se usklađivanje frekvencije spoljašnjeg visokofrekventnog elektromagnetnog polja sa frekvencijom prelaza $F = 4$ i $F = 3$ atoma ^{133}Cs formiranjem pozitivnih jona $^{133}Cs^{+}$, što dovodi do pojave oštrog pika jonizacione struje (struje elektrona) reda pA. Ovaj kvantni prelaz odabran je zbog stabilnosti frekvencije od spoljašnjeg uticaja električnog i magnetnog polja. Stabilnost frekvencije ostvaruje se u dužim vremenskim intervalima od najmanje tri godine, a odstupanje frekvencije $\pm 2 \cdot 10^{-12}$. Relativna greška je reda veličine 10^{-11}, što odgovara razlici pokazivanja vremena dva časovnika od 1 s na period $3 \cdot 10^{3}$ godine.

1.3.4 Amper

Jedinica za jačinu električne struje je *amper* (oznaka: A) ustanovljena je na 9-toj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1948. godine.

Amper je jačina stalne struje koja pri prolasku kroz dva pravolinijska provodnika beskonačne dužine i zanemarljivog kružnog preseka na međusobnom rastojanju od d = 1 m u vakuumu, dovodi do pojave sile između provodnika od $2 \cdot 10^{-7}$ N po metru dužine.

Prema Amperovom zakonu (1820) sila između dva provodnika kroz koje protiče električna struja I_1 i I_2 jednaka je:

$$F = \mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{4\pi \cdot d} \cdot l$$

gde je magnetna permeabilnost vakuuma prema SI jednaka:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}$$

Ako su jačine struje u paralenim provodnicima iste $I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A}$, to je:

$$1\ \mathrm{A} = \left(\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\mu_0}\, \mathrm{N} \right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\mu_0}\, \mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-2}} \right)^{1/2}$$

a sila uzajamnog dejstva je:

$$F = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N} = 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A}$$

Merenje ove sile vrši se pomoću *strujne vage*, a najpoznatija je Rejlijeva (*Raylegh*) strujna vaga koja se koristi u americkom Nacionalnom birou za standarde (NBS - National Bureau of Standards). Jedinica za jačinu električne struje ostvaruje se uz pomoć strujne vage sa relativnom nesigurnošću od $3 \cdot 10^{-6}$.

1.3.5 Kelvin

Jedinica za termodinamičku temperaturu je *kelvin* (oznaka: K) koja je usvojena na 13-toj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1967. godine.

Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka 1/273.16 termodinamičke temperature trojne tačke vode.

Kelvinova termodinamička skala bazira se na jednoj referentnoj tački, to je trojna tačka vode koja iznosi 273.16 K. Podrazumeva se nulta tačka termodinamičke skale, a to je apsolutna nula 0 K . Trojna tačka vode je ona tačka u $p - T$ dijagramu (dijagramu zavisosti pritiska od temperature) u kojoj voda može postaojati u sva tri agregatna stanja čvrstom, tečnom i gasovitom. Temperatura izražena u termodinamičkoj skali obično se naziva *apsolutna temperatura.*

Pored Kelvinove skale dozvoljeno je prema SI korišćenje Celzijusuve i Farenhajtove skale u različitim zemljama u svetu.

Celzijusuva skala predložena je 1730. godine, a polazi od dve referentne temperature vode, tačke topljenja leda 0°C i temperature ključanja vode 100°C na normalnom pritisku. Definicija apsolutne temperaturne skale tako je usklađena da je razlika temperature u K i °C bude ista. Veza ovih temperaturnih skala je:

$$T[\mathrm{K}] = T[^\circ\mathrm{C}] + 273.16$$

Farenhajtova skala predložena je 1714. godine, a i ona polazi od dve referentne temperature, temperature topljenja leda 32°F i temperature krvi čoveka 96°F. Tačka ključanja vode je 212°F. Veza temperatura Farenhajtove skale ($^\circ F$) i Kelvinove skale u (K) je:

$$T[\mathrm{K}] = \frac{5}{9}T[^\circ\mathrm{F}] + 255.372$$

Veza temperatura Celzijusove skale (°C) i Farenhajtove skale (°F) je:

$$T[^\circ\mathrm{C}] = \frac{5}{9}\left(T[^\circ\mathrm{F}] - 32\right)$$

Takodje, veza temperatura Farenhajtove skale (°F) i Celzijusove skale (°C) je:

$$T[^\circ\mathrm{F}] = \frac{9}{5}T[^\circ\mathrm{C}] + 32$$

1.3.6 Kandela

Jedinica za jačinu svetlosti *kandela* (oznaka: Cd) usvojena je na 16-toj Generalnj konferenciji za tegove i mere 1979. godine. Definicija kandele je:

Kandela je jednaka jačini svetlosti u datom pravcu iz izvora koji emituje monohromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ Hz (ili talasne dužine 555 nm), čija je energetska jačina (izračena snaga) u datom pravcu jednaka $\frac{1}{686}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}$.

Sa ovom jedinicom jačine svetlosti omogućena je veza zakona fotometrije (vidljivog dela spektra) sa zakonima fizike zračenja. Ova definicija kandele omogućuje da se odredi jedinica sa relativnom greškom $5 \cdot 10^{-2}$. Kandela (*lat. candela,* sveća) prvi put je uvedena 1842. godine, a kao etalon korišćena je svetiljka od ulja. Ovako definisana jedinica jačine svetlosti korišćena je do 1889. godine. Posle toga u različitim zemljama bilo je različitih jedinica i definicija etalona: Hafnerova kandela (sveća), Međunarodna kandela i druge. Kandela kao jedinstvena jedinica u svetu uvedena je na 9-toj Generalnoj konferenciji za tegove i mere. Kao osnovna jedinica međunarodnog sistema jedinica SI uvedena je na 10-toj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1954. godine.

1.3.7 Mol

Jedinica za količinu materije *mol* (oznaka: mol) usvojena je na 14-toj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1971. godine, a njena definicija glasi:

1 mol je količina materije sistema koji sadrži toliko elementarnih jedinki koliko ima atoma u 0.012 kg ugljenika ^{12}C.

Na osnovu ove definicije mol se može shvatiti kao jedinica za broj jedinki u nekom sistemu, a taj broj jednak je Avogadrovom broju N_A. Elementarne jedinke mogu biti atomi, molekuli, joni ili neka druga grupa jednoznačno određenih čestica. Brojna vrednost Avogadroovg broja zavisi od stepena razvoja tehnike merenja, a aktuelna vrednost je $\mathrm{N_A} = 6.022\ 137(4) \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Atomska jedinica mase određena je definicijom mola. Jednom molu ugljenika ^{12}C odgovara masa tačno 12 g. Sada je atomska jedinica mase jednaka:

$$1\ \mathrm{u} = \frac{\mathrm{m}(^{12}\mathrm{C})}{12} = \frac{12\ \mathrm{g}}{12 \cdot \mathrm{N_A}} = 1.660\ 5402(10) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Vrednost atomske jedinice mase zavisi od aktuelne vrednosti Avogadrovog broja.

1.4 Kvantni etaloni

Poslednjih godina ostvario se san fizičara da se etaloni mernih jedinica fizičkih veličina određuju preko fundamentalnih fizičkih konstanti. Princip rada kvantnih etalona zasniva se na diskretnoj strukturi atoma i kvantnim efektima. Atomi i molekuli zavisno od ukupnog ugaonog momenta mogu se nalaziti samo u određenom energetskim stanjima, odnosno određenim energetskim nivoima. Promena energije između dva stanja atoma ili molekula odgovara određenoj frekvenciji:

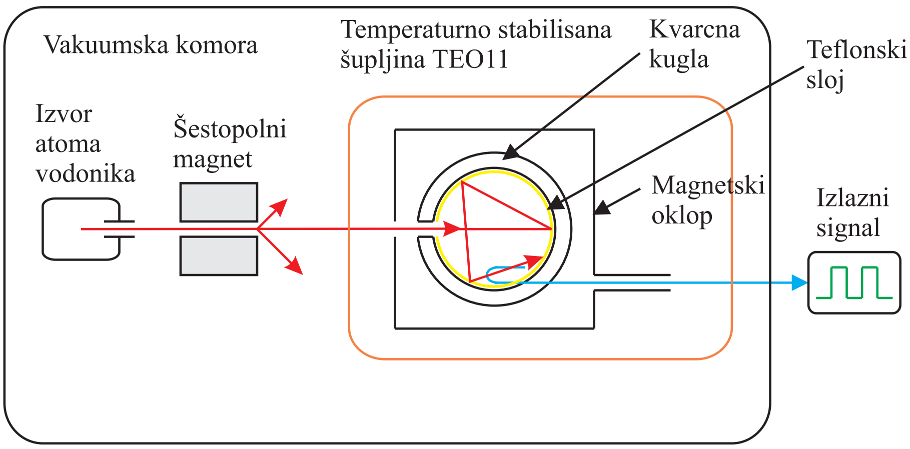
$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_1 - E_2}{h}$$

gde je h – Plankova konstanta, E_1 i E_2 – energije susednih stanja atoma i molekula. One frekvencije koje se mogu meriti sa visokom tačnošću su od posebnog značaja za praktičnu primenu.

Kvantni cezijumski etalon vremena i frekvencije usvojen je na trinaestoj Generalnoj konferenciji za tegove i mere 1967. godine. Od 01. 01. 1990. godine odluka Konsultativnog komiteta za elektricitet (CCE) je da se *Džozefsonova konstanta* $R_j = \dfrac{2e}{h}$ i *fon Klicingova konstanta* $R_k = \dfrac{\hbar}{e^2}$ usvoje kao kvantni etaloni napona i otpornosti.

1.4.1 Vodonični maser kao stabilni izvor frekvencije

Vodonični maser kao generator stabilne frekvencije prvi je predložio N. F. Ramsey sa saradnicima 1961. godine. Kao izvor frekvencije vodonični maser je najstabilniji u vremenu od nekoliko sekundi do jednog meseca. Etalon frekvencije kod vodoničnog masera je posledica razlike energije između dva superfina nivoa atoma vodonika u osnovnom stanju. Spin protona atoma vodonika je $1/2$. Ukupni moment atoma vodonika u osnovnom stanju jednak je $J = 1/2$. Moguće vrednosti stanja energije su $F = 0\,(m_F = 0)$ i $F = 1\,(m_F = 0, \pm 1)$. Ako je osnovna frekvencija $f_0 = 1420\,\mathrm{MHz}$ moguće je proračunatai odgovarajuću energiju osnovnog stanja pomoću kvantnog modela. Pošto se projekcija momenta u stanju $F = 0$ i $f = 1\,(m_F = -1)$, razlikuju po znaku od momenta u stanju $F = 1\,(m_F = 0, 1)$, atome koji se nalaze u različitim stanjima moguće je razdvojiti propuštajući mlaz atoma kroz homogeno magnetno polje. Šematski vodonični maser prikazan je na slici 1.1.



Slika 1.1. Ilustracija principa rada vodoničnog masera.

Aktivni vodonični maser sastoji se iz izvora atoma vodonika koji prolaze kroz visokofrekventnu razelektrisanu cev. Dalje mlaz atoma vodonika usmeren je kroz nehommogeno polje koje vrši selekciju atoma sa stanjem visoke energije i propušta ih u termostabilisanu kvarcnu kuglu. Atomi vodonika sa manjom energijom skreću sa osnovnog pravca i zadržavaju se na zidovima cevi. Kvarcna kugla zatvara atome vodonika u oblasti uniformnog magnetnog polja, koje je formirano mikrotalasima frekvencije $f_0 = 1420\,\mathrm{MHz}$, a koja odgovara prelazu atoma vodonika između energetskih nivoa $F = 0\,(m_F = 0)$

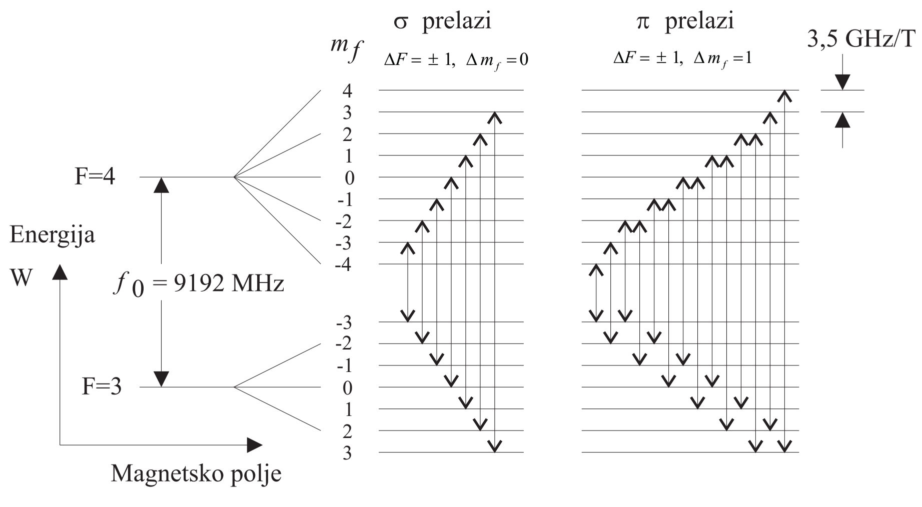
i $F = 1\,(m_F = 1)$. Prinudno zračenje će generisati atome na frekvenciji prelaza između dva energetska nivoa. Unutar kvarcne kugle atomi vodonika slučajne prelaze i odbijaju se pri svakom sudaru sa zidom. Atomi ostvaruju veliki broj sudara sa zidom, a njihovo efektivno vreme interakcije sa mikrotalasnim poljem na ovaj način produžuje se na oko 1 s. Za ovo vreme interakcije atomi teže da oslobode i predaju svoju energiju mikrotalasnom polju u unutrašnjosti šupljine kvarcne kugle. U isto vreme ovo polje teži da stimuliše sve više atoma da zrače, povećavajući intezitet sve dok se ne postigne stabilni rad masera. U stabilnom stanju maser samoosciluje, što znači da je količina energije usled prelaza sa višeg nivoa na niže stanje energije veća od gubitka energije u šupljini kvarcne kugle. U ovom stanju samooscilovanja vodoničnog masera generiše se signal frekvencije $f_0 = 1.420\,405\,751\,778$ GHz. Ovaj signal se zatim pojačava i sinhroniše sa kvarcnim oscilatorom.

Izlazna frekvencija vodoničnog masera ostvaruje se sa greškom $\pm 1 \cdot 10^{-13}$, a njegova stabilnost iznosi $\pm 1 \cdot 10^{-13}/100$ s, odnosno $\pm 3 \cdot 10^{-15}/\text{dan}$.

Pored ovog aktivnog vodoničnog masera postoji i pasivni vodonični maser i oni se bitno konstruktivno ne razlikuju. Kod pasivnog vodoničnog masera se ne ostvaruje proces samooscilovanja, već samo stabiliše frekvencija kvarcnog oscilatora signalom greške. Zbog toga je stabilnost pasivnog masera nešto manja u odnosu na aktivni vodonični maser.

1.4.2 Cezijumski etalon frekvencije

Cezujumski etalon frekvencije predstavlja osnovu skoro svih nacionalnih etalona frekvencije i vremena. Kod ovog etalona frekvencije, kvantni efekti od interesa nastaju u nuklearnom magnetnom hiperfinom osnovnom stanju atoma cezijuma, time je omogućen pristup prirodnoj stabilnoj frekvenciji. Posebno moguć prelaz događa se između hiperfinih nivoa $F = 4\,(m_F = 0)$ i $F = 3\,(m_F = 0)$ atoma cezijuma 133 (^{133}C), kao na slici 1.2. Prelaz je stabilan, odnosno relativno neosetljiv na spoljne uticaje električnog i magnetnog polja. Frekvencija pri ovom prelazu iznosi $f_0 = 9\,192\,631\,770.000$ Hz.



Slika 1.2. Hiperfini prelazi atoma cezijuma u magnetskom polju.

Atomu cezijuma odgovara kvantni broj ukupnog momenta $J = 1/2$, a spinski kvantni broj jezgra iznosi $I = 7/2$, a osnovno stanje atoma je pocepano (razdvojeno) na dva superfina nivoa. U magnetnom polju gornji nivo $F = 4$ cepa se na 9, a donji $F = 3$ na 7 magnetnih podnivoa kao na slici 1.2.

Energija koja odgovara u Zemanovom nivou u magnetnom polju data je izrazom:

$$E(F, m_F) = \frac{hf_0}{16} - \frac{2\mu_F \cdot B \cdot m_F}{7} \pm \frac{hf_0}{2}\left(1 + \frac{1}{2} m_F \cdot x + x^2\right)^{1/2}$$

gde je: h – Plankova konstanta, f_0 – frekvencija prelaza bez prisustva magnetnog polja na nivo $F = 4$,

$f_0 = 0$ – frekvencija prelaza bez prisustva magnetnog polja za nivo $F = 3$, μ_F – magnetni moment jezgra, B – jačina magnetne indukcije, $x = (-2\mu_J + 2\mu_I/7) \cdot B/hf_0$, μ_J – elektronski magnetni moment, za $f_0 = 9\,192\,\mathrm{MHz}$ iznosi $x = 3.045 \cdot B$ ako je jačina magnetne indukcije u [T].

Za prelaz između nivoa $F = 4\,(m_f = 0)$ i $F = 3\,(m_f = 0)$ zavisnost frekvencije od magnetnog polja može se izraziti u obliku:

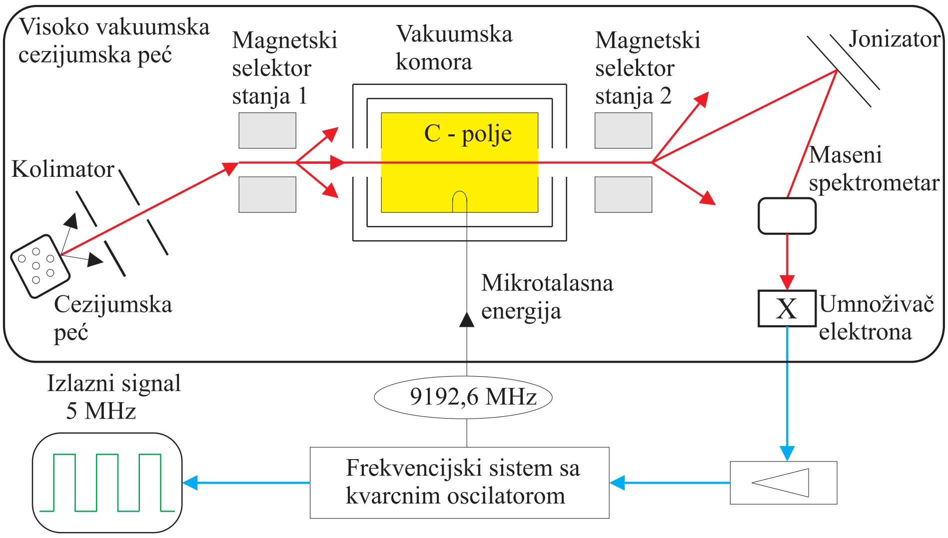
$$f = f_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) = f_0 + 4.26 \cdot 10^6 \cdot B^2\ [\mathrm{Hz}]$$

Ako je magnetna indukcija $B = 5 \cdot 10^{-6}$ T, razlika između frekvencija može se zanemariti kada postoji magnetno polje i kada nema magnetnog polja.

Učestanost prelaza između drugih Zemanovih nivoa za koje je $\Delta m_F = \pm 1$, menja se linearno sa koeficijentom $3.5 \cdot 10^9$ Hz/T. Ako je $B = 5 \cdot 10^{-6}$ T, frekvencija se razlikuje od odgovarajuće vrednosti pri nultom polju približno za $1.8 \cdot 10^4$ Hz, pa nije teško odvojiti prelaze za koje je $\Delta m_F = 0$ od prelaza $\Delta m_F = \pm 1$, a zato je dovoljno na promenljivo polje primeniti slabo homogeno polje.

Atomi cezijuma poseduju ne nulti magnetni moment i u nehomogenom magnetnom polju se udaljavaju od ravnotežnog. Efektivni moment jednak je $\dfrac{\partial E}{\partial B}$ i ako je $m_F = 0$, tada su znaci za $F = 3$ i $F = 4$ različiti.

Princip rada cezijumskog etalona frekvencije prikazan je na slici 1.3. U vodećim metrološkim laboratorijama u svetu cezijumska cev iznosi nekoliko metara. Komercijalni cezijumski etaloni frekvencija iznose nekoliko desetina centimetara.



Slika 1.3. Ilustracija principa rada cezijumskog etalona frekvencije.

Iz cezijumske peći zagrejane do 80°C izlazi mlaz atoma cezijuma sa svim podnivoima stanja $F = 3$ i $F = 4$. U cevi sa visokim vakuumom pomoću kolimatora vrši se fokusiranje mlaza cezijumovih atoma. Zatim mlaz ulazi u nehomogeno magnetno polje prvog magnetnog selektora gde se vrši selekcija atoma zavisno od njihove energije. Atomi sa stanjem $F = 3$ (bez obzira na hiperfine nivoe) i atomi sa stanjima $F = 4$ i hiperfinim nivoom $m_F = -4$ se usmeravaju u mikrotalasnu šuplinu vakuumske komore, dok se preostali atomi sa stanjima $F = 4$ i hiperfinim nivoima odvajaju od glavnog mlaza pod nekim uglom i eliminišu gasnim apsorberima na unutrašnjim zidovima cevi. Atomi cezijuma koji ulaze u vakuumsku mikrotalasnu šupljinu izloženi su slabom homogenom magnetnom polju („C – polje") i mikrotalasnoj energiji koja se unosi u komoru pomoću talasovoda. Frekvencija mikrotalasnog signala iznosi $f_0 = 9\,192\,631\,770.000$ Hz koja se dobija iz kvarcnog oscilatora od 5 MHz višestrukim umnožavanjem frekvencije.

Za rad cezijumskog etalona frekvencije značajni su oni atomi cezijuma, koji pod uslovima koji su navedeni („C – polju”), izvrše rezonantnu apsorciju mikrotalasne energije. Vrednost ove rezonantne energije odgovara prelazu $F = 3\,(m_F = 0)$, i $F = 4\,(m_F = 0)$ u skladu sa slikom 1.3. Ovom skoku energije od 8 hiperfinih nivoa odgovara frekvencija $f_0 = 9\,192\,631\,770.000$ Hz. Drugi magnetni selektor stanja propušta samo one atome koji su izvršili ovaj definisani prelaz, a ostale atome koji nisu izvršili ovaj prelaz rasejavaju ka zidovima vakuumske komore. Usmereni atomi cezijuma padaju na jonizator od volframovog vlakna sa temperaturom od oko 1000°C. Atomi cezijuma se joniziju, gube elektron i napuštaju jonizator kao pozitivni joni. Ovi pozitivni joni ceziuma zatim padaju na maseni spektrometar, gde se vrši odvajanje čistih jona cezijuma od nečistoća iz volframovog usijanog vlakna. Na taj način spektrometar napuštaju samo joni cezijuma, a zatim se pomoću negativnog elektičnog polja ubrzavaju, a dalje se vrši konverzija jonske struje u elektronsku struju. Ova elektronska struja se umnožava pomoću umnoživača elektrona i zatim dodatno pojačava pojačivačima. Izlazna struja elektrona nosi u sebi amplitudnu i frekventnu informaciju, i vodi se u kola za obradu signala koja regulišu frekvenciju visokofrekventnog kvarcnog oscilatora.

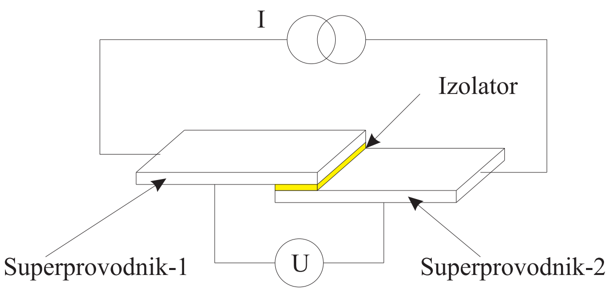
Znači, ako je frekvencija mikrotalasnog signala tačno $f_0 = 9\,192\,631\,770.000$ Hz ostvariće se hiperfini prelazi atoma cezijuma 133, a kao posledica te pojave pojaviće se mala struja reda pikoampera na ulazu umnoživača elektrona. Ako frekvencija mikrotalasnog signala iz nekog razloga malo odstupa od f_0, broj hiperprelaza odmah brzo opada a time i izlazna struja unoživača elektrona brzo opada. Na primer ako frekvencija mikrotalasnog signala odstupi za ±25 Hz to dovodi do pada struje umnoživača elektrona za jednu polovinu. Smanjenje ove struje u frekvencijski sistem dovodi do formiranja signala greške, koji odmah automatski koriguje frekvenciju kvarcnog oscilatora u smeru koji vraća ovu frekvenciju na 5 MHz, a njen umnožak – frekvenciju mikrotalasnog signala – na frekvenciju jednaku $f_0 = 9\,192\,631\,770.000$ Hz.

Cezijumski etalon frekvencije ima više izlaznih signala frekvencije 0.1 MHz, 1 MHz, 5 MHz, 10 MHz. Od ovih nazivnih vrednosti odstupanje frekvencije nije veće od $\pm 2 \cdot 10^{-12}$, a dugotrajna stabilnost frekvencije iznosi $\pm 2 \cdot 10^{-12}$ u celom radnom veku cezijumske cevi, a koja iznosi najmanje tri godine.

Optimizirane verzije etalona fekvencije imaju dugotrajnu stabilnost $\pm 1 \cdot 10^{-13}$/dan. Ova izvanredna dugotrajna stabilnost je osnovna prednost kao primarnog etalona frekvencije u odnosu na druge sekundarne etalone frekvencije (rubidijumski etalon, vodonični maser, kvarcni oscilator).

1.4.3 Kvantni etalon napona na bazi Džozefsonovog efekta

Kvantni etalon napona zasniva se na Džozefsonovom efektu koji je otkrio 1961. godine Džozefson (Brian D. Josephson). Džozefsonov spoj sastoji se iz dva superprovodnika između kojih je izolator debljine 1 – 2 nm, ali koji omogućuje tunelovanje nosilaca. Struktura komponente je takva da je to heterospoj Nb/Nb-oksid/PbInAu.



Slika 1.4. Poprečni presek Džozefsonovog spoja.

Ovaj efekt sastoji se u tome da ako se Džozefsonov spoj ohladi do temperature bliskoj apsolutnoj nuli i ako se priključi jednosmerni napon U stvoriće se naizmenična tunelska struja, super struja u procepu. Frekvencija Džozefsonovog oscilatora-spoja je:

$$f_j = \frac{2e}{h} \cdot U = K_j \cdot U; \quad K_j = \frac{2e}{h}$$

gde je e – naelektrisanje elektrona, h – Plankova konstanta, K_j – *Džozefsonova konstanta.*

Znajući za reverzibilnost ovog efekta Džozefson je predložio idealan frekvencijsko-naponski pretvarač, odnosno:

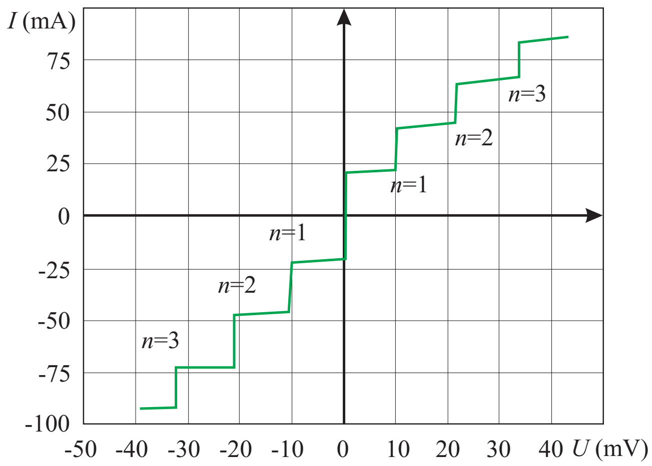
$$\frac{U}{f_j} = \frac{h}{2e}.$$

Znači, količnik ove dve fizičke konstante je $h/2e$ i on određuje odnos između srednje vrednosti jednosmernog napona U Džozefsonovog spoja i frekvencije f_j naizmenične superstruje koja protiče kroz spoj. Ako se Džozefsonov spoj kroz koji protiče jednosmerna struja izloži dejstvu mikrotalasnog zračenja frekvencije f, tada se jednosmernoj struji kroz spoj superponira naizmenična struja f_j koja se fazno sinhroniše sa frekvencijom mikrotalasnog zračenja f u opsegu $f + \Delta f$. Ova naizmenična struja na spoju stvara pad napona U. Ako se frekvencija f_j stabilno održava na vrednosti f, tada jednosmerni napon ne menja svoju vrednost sve dok jednosmerna struja ostaje unutar opsega $I = \Delta I/2$. Veličina ΔI je funkcija snage mikrotalasnog zračenja.

Na taj način, na jednosmernoj $U - I$ karakteristici nastaje plato napona $U = h \cdot \dfrac{f}{2e}$ širine ΔI. Ova pojava ne javlja se samo na osnovnoj frekvenciji mikrotalasnog zračenja, već i svim višim harmonicima $n \cdot f$ $(n = 1, 2, \dots)$. Time na $U - I$ karakteristici nastaje niz stepenastih platoa sa direktnim vrednostima jednosmerenog napona:

$$U_n = n \cdot \frac{h}{2e} \cdot f\,, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

U prethodnom izrazu veličina $K_j = \dfrac{2e}{h} = 483\,597.9 \dfrac{\text{GHz}}{\text{V}}$ naziva se Džozefsonova konstanta.



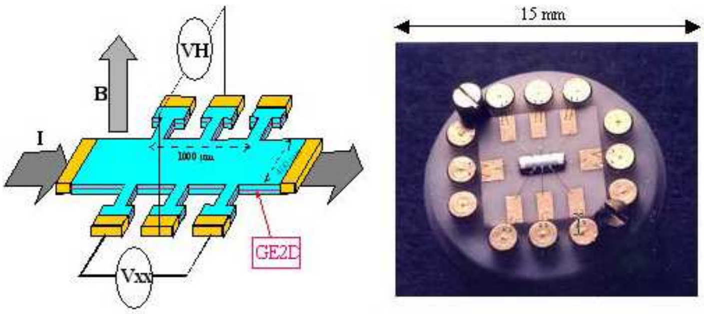
Slika 1.5. Strujno-naponske karakteristike Džozefsonovog spoja.

Postoje različite realizacije Džozefsonovog spoja tako da skokovi napona iznose od 20 μV (pri $f =$ 10 GHz) do 180 μV (pri $f = 90$ GHz). Dobijeni platoi konstantnog napona su idealni referentni naponi. Reproduktivnost zavisi od stabilnosi frekvencije mikrotalasnog zračenja, koja se kontroliše atomskim cezijumskim časovnicima u kratkom vremenu sa relativnom nesigurnošú od $\pm 1 \cdot 10^{-12}$.

Džozefsonovim spojem dobijen je maksimalni referentni napon od oko 27 mV, a najčešće vrednosti od 1 mV, do 1.5 mV. Da bi se dobio referentni napon od 1 V, potrebno je vezati na red veliki broj (oko 100) Džozefsonovih spojeva. Na primer 1989. godine u NIST-u (SAD) napravljen je čip površine (1.27×6.3) mm^2 koji sadrži 3020 Nb/Nb–oksid/PbInAu spojeva redno vezanih u četiri paralelne mikrostrip transmisione linije. Pod dejstvom mikrotalasnog zračenja frekvencije $f = 70$ GHz i snage 5 mW dobija se 30.000 platoa u opsegu od -2 V do +2 V. Naponski platoi su bili širine oko 70 μA i stabilni najmanje 30 min. Ukupna relativna nesigurnost (1σ) iznosi od $\pm 1 \cdot 10^{-9}$ do $\pm 1 \cdot 10^{-8}$ za kalibraciju Vestonovih etalonskih elemenata. Vestonov element koristi se kao etalon elektromotorne sile od 1908. godine. Glavni izvor nesigurnosti kalibracije potiče od unutrašnjeg šuma elektrona samog etalona koji se kalibriše od 75% do 90%. Pri kalibraciji pokazano je da sam Džozefsonov spoj može reprodukovati mernu jedinicu od 1 V sa relativnom nesigurnošću $\pm 3 \cdot 10^{-10}$ (1σ).

1.4.4 Kvantni etalon otpornosti na bazi Holovog efekta

Otkriće kvantnog Holovog efekta 1980. godine od strane fon Klicinga (Klaus von Klitzing) omogućilo je uspostavljanje etalona otpornosti koji zavisi samo od fizičkih konstanti. Ovaj efekat javlja se u uslovima jakog magnetnog polja od oko 10 T i veoma niskoj temperaturi od oko 4.2 K, tanke pločice heterospoja GaAs/AlGaAs kroz koji protiče struja I.



Slika 1.6. Ilustracija kvantnog Holovog elementa.

Holova otpornost takve dvodimenzionalne elektronske struje na krajevima pločice data je u obliku:

$$R_H = \frac{U_H(n)}{I} = \frac{h}{ne^2} = \frac{R_K}{n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

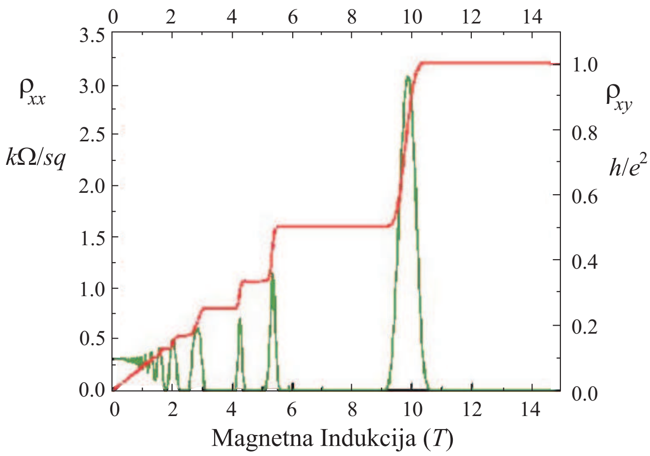
gde je n – broj platoa konstantnog Holovog napona, h – Plankova konsanta i e – naelektrisanje elektrona. R_K je *fon Klicingova konstanta* i ona iznosi:

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\ \Omega$$

a kvantna Holova otpornost jednaka je:

$$R_H = \frac{R_K}{n} = \frac{25\,812.807\,\Omega}{n}$$

U praktičnim uslovima najčešće se koristi drugi i treći plato kojima odgovara Holova otpornost 129 006.404 Ω i 6 453.2018 Ω.



Slika 1.7. Kvantna Holova otpornost u funkciji magnetne indukcije.

Kalibracioni postupak određivanja otpornosti etalona od 1 Ω odvija se u više koraka uz pomoć automatskih uređaja, a delom i manuelno. Ukupna relativna merna nesigurnost određivanja otpornosti etalona od 1 Ω na ovaj način iznosi $\pm 1 \cdot 10^{-7}$. Reproduktivnost i stabilnost ovog etalona na bazi Holovog efekta za godinu dana iznosi reda 10^{-8}, tako da je veoma pogodan za stalnu kontrolu.

Glava 2

Dimenziona analiza

2.1 Osnovi dimenzione analize

Fizički zakoni koji opisuju neku prirodnu pojavu mogu se izraziti rečima ili jednačinama. Fizičke veličine izražavaju fizičke osobine i fizička stanja materijalnih tela i sredina. Znači fizičke veličine su parametari fizičke pojave ili fizičkih efekata. Svaku fizičku veličinu karakteriše kvalitet (*osobina*), i kvantitet (*količina*). Fizičke veličine su na primer: dužina, vreme, masa, temperatura, jačina električne struje, napon, rad, snaga, itd. Fizičke veličine obeležavaju se kurzivnim slovima, velikim i malim, pisanim i štampanim.

Neka je fizički zakon koji opisuje pojavu gde sila F izvrši rad kada se napadna tačka tela pomeri u pravcu dejstva sile za dužinu l, dat jednačinom:

$$A = F \cdot l$$

Ova jednačina predstavlja i primer *veličinske jednačine*. Ona povezuje fizičke veličine rad, silu i pređeni put. Veličinske jednačine važe nezavisno od mernih jedinica i ne zahtevaju upotrebu prethodno određenih jedinica. Fizičke veličine ne zavise od izbora sistema jedinica u kome su izražene. Od izbora jedinica ne zavise ni zakoni koje te jedinice povezuju.

Fizičke veličine dele se na *osnovne* i *izvedene*. Skup osnovnih i izvedenih fizičkih veličina naziva se *sisitem veličina*. Ako je u sistemu veličina ukupan broj veličina m i ako u tom sistemu postoji n međusobno nezavisnih relacija tada je broj osnovnih veličina sistema:

$$p = m - n$$

U geometriji na primer postoje tri veličine: dužina l, površina $S = l \cdot l = l^2$ kao proizvod dve dužine, i zapremina $V = l \cdot l \cdot l = l^3$ kao proizvod tri dužine. Prema tome, kako postoje tri veličine i dve relacije koje ih međusobno povezuju, to je broj osnovnih veličina u geometriji: 3-2=1, odnosno jedna veličina dužine. U dinamici je broj osnovnih veličina tri: dužina, vreme i masa. U elektrotehnici pored ove tri uvodi se i četvrta fizička veličina intenzitet struje.

Uopšte fizička veličina x može se izraziti preko drugih fizičkih veličina jednačinom, odnosno *veličinskom jednačinom* oblika:

$$x = k \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdots$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti, a eksponenti α, β i γ *veličinski izložioci* čije su vrednosti celi brojevi. Kvalitativna veza između fzičkih veličina, odnosno sama priroda fizičke veličine izražava se *dimenzionom formulom*:

$$[x] = [a]^\alpha \cdot [b]^\beta \cdot [c]^\gamma \cdots = A^\alpha \cdot B^\beta \cdot C^\gamma \cdots$$

Ova jednačina pokazuje da se dimenzija $[x]$ fizičke veličine izražava preko dimenzija osnovnih fizičkih veličina $A, B, C, \cdots$.

Imajući u vidu (prema međunarodnom SI-sistemu) da su osnovne fizičke veličine i njihove jedinice date u tabeli 2.1:

Tabela 2.1. Osnovne fizičke veličine prema međunarodnom SI sistemu.

	Osnovna veličina	oznaka veličine	jedinica	oznaka jedinice
1	Dužina	l	metar	m
2	Vreme	t	sekunda	s
3	Masa	m	kilogram	kg
4	Temperatura	T	kelvin	K
5	Jačina struje	I	amper	A
6	Količina materije	n	mol	mol
7	Jačina svetlosti	I_ν	kandela	cd

i dopunske jedinice za uga u ravni *radijan* (oznaka: rad), i za prostorni ugao *steradijan* (oznaka: sr), tada se dimenziona jednačina bilo koje fizičke veličine može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}[x] &= [l]^i \cdot [m]^j \cdot [t]^k \cdot [I]^l \cdot [T]^m \cdot [I_\nu]^n \cdot [N]^p \cdot [\alpha]^q \cdot [\Omega]^r \\ &= \mathrm{m}^i \cdot \mathrm{kg}^j \cdot \mathrm{s}^k \cdot \mathrm{A}^l \cdot \mathrm{K}^m \cdot \mathrm{cd}^n \cdot \mathrm{mol}^p \cdot \mathrm{rad}^q \cdot \mathrm{sr}^r\end{aligned}$$

gde su $i, j, k, \cdots$ *veličinski eksponenti* celi brojevi.

Pored kvaliteta svaku fizičku veličinu karakteriše i drugo obeležje kvantitet ili količina. Količina neke fizičke veličine izražava se brojnom vrednošću. Veličina brojne vrednosti fizičke veličine zavisi od merne jedinice. Na osnovu brojne vrednosti mogu se porediti iste fizčke veličine. Ako merenu veličinu označimo sa M, njenu brojnu vrednost N_M a jedinicu mere sa M_U, tada važi:

$$M = N_M \cdot M_U$$

Odnosno, fizička veličina jednaka je proizvodu između njene brojne vrednosti i jedinice mere.

Ukoliko je izbor jedinica pojedinih fizičkih veličina proizvoljan i ako se svaka fizička veličina pojedinačno izrazi kao prethodna jednačina, tada je veličinska jednačina u sistemu sa tri osnovne veličine može da napiše u oliku:

$$M = N_M \cdot M_U = b \cdot N_x^p \cdot X_U^p \cdot N_y^q \cdot Y_U^q \cdot N_z^r \cdot Z_U^r$$

gde su N_x, N_y i N_z brojne vrednosti, a X_U, Y_U i Z_U usvojene jedinice veličine X, Y i Z respektivno. Neka su jedinice usvojene proizvoljno tako da važi jednačina:

$$M_U = \frac{1}{k} X_U^p \cdot Y_U^q \cdot Z_U^r$$

gde je k neimenovan broj. Ovaj izraz naziva se *jediničnom jednačinom.* Zamenom ovog izraza u prethodni izraz dobija se jednačina:

$$N_M = b \cdot k \cdot N_X^p \cdot N_Y^q \cdot N_Z^r$$

koja se naziva *brojnom jednačinom* fizičke veličine. Pošto brojne jdnačine ne sadrže jedinice, to se obično naznači u vidu legende ispod jednačine sa kojim jedinicma su odeđene brojne vrednosti.

Treba naglasiti da u opštem slučaju nije pogodno proizvoljno birati jedinice za razne veličine, jer to može dovesti do teškoća kako pri teorijskoj analizi tako i kod praktičnog rada.

U nauci se uglavnom koriste skladni, odnosno koherentni ili konzistentni sistemi jedinica. Za slučaj konzistentnog sistema jedinica koeficijent k u prethodnim izrazima jednak je jedinici, $k = 1$ pa je jedinična jednačina određene fizičke veličine istog oblika kao i veličinska jednačina te iste fizičke veličine.

U fizici se fizički zakoni i efekti opisuju jednačinama i formulama koje moraju da ispune *uslov homogenosti*, odnosno važi:

$$x = k_1 \cdot a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \cdot c^{\gamma_1} \cdots + k_2 \cdot a^{\alpha_2} \cdot b^{\beta_2} \cdot c^{\gamma_2} \cdots + \cdots$$

gde su k_1, k_2, $\cdots$ bezdimenzioni faktori, i moraju biti ispunjeni uslovi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$, $\beta_1 = \beta_2 = \cdots$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots$. Uslov homogenosti znači da svi članovi prethodnog izraza moraju da imaju iste dimenzije. Iz ovog uslova slede dva veoma važna pravila o kojima se mora voditi računa prilikom matematičkog modeliranja raznih fizičkih pojava:

- **Mogu se sabirati samo fizičke veličine istih dimenzija**.
- **Fizičke veličine sa obe strane jednakosti moraju imati iste dimenzije**.

Primena principa dimenzione homogenosti na fizičke jednačine i izraze naziva se *dimenziona analiza.*

2.2 Primena dimenzione analize

U praksi se dimenziona analiza koristi za:

a) Određivanje dimenzija pojedinih članova fizičkih formula.

b) Proveru ispravnosti izvedenih formula.

c) Kvalitativno izvođenje fizičkih formula

d) Smanjenja broja nezavisnih promenljivih u sistemu sa više promenjlivih fizičkih veličina.

e) Modeliranje fizičkih sistema na osnovu fizičke sličnosti i analogija.

Primena dimenzione analize biće data na primerima realnih fizičkih pojava i efekata.

Zadaci

$\boxed{\textbf{2.1}}$ Telo je krenulo početnom brzinom v_0 i do nekog uočenog trenutka t kretalo se ravnomerno ubrzano sa ubrzanjem a. Pređeni put tog tela dat je matematičkom formulom:

$$s = v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Proveriti da li je izraz za izračunavanje pređenog puta dimenziono ispravan?

Rešenje:

Najpre se izvrši provera dimenzione ispravnosti navedene formule za izračunavanje pređenog puta. Kako je:

$$[s] = \mathrm{m}\,; \quad [v_0] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,; \quad \left[\frac{1}{2}at^2\right] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s}^2 = \mathrm{m}$$

pa je izraz za pređeni put dimenziono neusaglašen, jer leva strana izraza nema istu dimenziju kao prvi član na desnoj strani. Time se može zaključiti da matematički izraz za pređeni put nije tačan.

$\boxed{\textbf{2.2}}$ Dva tela krenu istovremeno iz istog početnog položaja u međusobno normalnim pravcima. Jedno telo krene stalnom brzinom v, a drugo stalnim ubrzanjem a. Njihovo rastojanje posle vremena t određeno je relacijom:

$$d = \frac{t}{2}\sqrt{4v^2 + a^2 \cdot t^2}$$

Da li je dobijena relacija dimenziono usaglašena?

Rešenje:

Jedinica leve strane jednačine je $[d] = \mathrm{m}$, a desne strane:

$$\left[\frac{t}{2}\sqrt{4v^2 + a^2 \cdot t^2}\right] = \mathrm{s}\sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4} \cdot \mathrm{s}^2} = \mathrm{s} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m}$$

pa je jednačina dimenziono usaglašena.

2.3 Jednačina: $$R = \frac{8\gamma M}{3c^2}$$

određuje poluprečnik Zemlje (prema opštoj teoriji relativnosti) pri kome bi njeno gravitaciono polje bilo toliko jako da bi na njenoj površini prestalo da teče vreme.
Da li je ova jednačina dimenziono usaglašena?

Rešenje:
Da bi ova jednačina bila dimenziono usaglašena potrebno je da i njena desna strana ima jedinicu dužine. Pošto je:

$$[\gamma] = \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} = \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s^2 \cdot kg}}\,; \quad [\mathrm{M}] = \mathrm{kg}\,; \quad [\mathrm{c}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

to je

$$\left[\frac{8\gamma M}{3c^2}\right] = \frac{\dfrac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s^2 \cdot kg}} \cdot \mathrm{kg}}{\dfrac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}} = \mathrm{m}$$

što znači da i desna strana jednačine ima dimenziju dužine, pa je jednačina dimenziono usaglašena.

2.4 Odrediti jedinicu, a samim tim i prirodu fizičke veličine određene izrazom:

$$\frac{4}{d} \cdot \sqrt{\frac{\pi m l}{E_y}}$$

gde je d – prečnik žice, l – njena dužina, m – masa tega kojim je žica opterećena, E_y – Jungov modul elastičnosti metala od koga je žica načinjena.

Rešenje:
Kako je $[d]$=m, $[m]$=kg, $[l]$=m, $[E_y]$=Pa=N/m^2, to je:

$$\left[\frac{4}{d} \cdot \sqrt{\frac{\pi m l}{E_y}}\right] = \frac{1}{\mathrm{m}}\sqrt{\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{N}}} = \mathrm{s}$$ što znači da ovaj izraz ima prirodu vremena.

2.5 Masa protekle tečnosti, koeficijenta viskoznosti η i gustine ϱ, za vreme t, kroz cev dužine l i poluprečnika R, određena je relacijom:

$$m = \frac{\pi R^4 \varrho\, t}{8\eta l}\Delta p$$

gde je Δp – razlika pritiska na početku i kraju cevi.

Da li je ova relacija dimenziono ispravna?

Rešenje:

Kako je $[\pi]$ realan broj, $[R]$=m, $[\varrho]=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$, $[t]$=s, $[\Delta p]$=Pa, $[\eta]$ = Pa · s, $[l]$=m, tada je dimenzija prethodnog izraza za proteklu masu tečnosti:

$$\left[\frac{\pi R^4 \varrho\, t}{8\eta l}\Delta p\right] = \frac{\mathrm{m^4} \cdot \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{Pa \cdot s \cdot m}} \cdot \mathrm{Pa} = \mathrm{kg}$$

pa je relacija dimenziono ispravna, pošto je dimenzija mase $[m]$=kg.

2.6 Temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjen štap na koji deluje sila termičkog naprezanja F kada se njegova temperatura povisi za Δt, određena je matematičkim izrazom:

$$\alpha = \frac{F}{SE_y\Delta t}$$

gde je E_y – Jungov modul elastičnosti metala od koga je štap napravljen, S površina njegovog poprečnog preseka.

Da li je ovaj izraz dimenziono saglasan, pa prema tome i verovatno tačan?

Rešenje:

Pošto je $[\alpha]=\frac{1}{\mathrm{K}}$, $[F]=\mathrm{N}$, $[S]=\mathrm{m}^2$, $[E_y]=\mathrm{Pa}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, $\Delta t={}^\circ\mathrm{C}=\mathrm{K}$, to je:

$$\left[\frac{F}{SE_y\Delta t}\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2\cdot\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot\mathrm{K}} = \frac{1}{\mathrm{K}}$$

pa je izraz za termički koeficijent linearnog širenja dimenziono usaglašen, a time i verovatno tačan.

$\boxed{\textbf{2.7}}$ Zapremina gasa količine n, koji se nalazi na temperaturi T i pritisku p određena je relacijom:

$$V = \frac{nRT}{p}$$

gde je R – molarna gasna konstanta.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

Rešenje:

Jedinica leve strane relacije je $[V]=\mathrm{m}^3$, a s obzirom na to da je $[n]=\mathrm{mol}$, $[R]=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$, $[p]=\mathrm{Pa}$, tada je jedinica desne strane:

$$\left[\frac{nRT}{p}\right] = \frac{\mathrm{mol}\cdot\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{Pa}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Pa}} = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}} = \mathrm{m}^3$$

pa je ovaj izraz dimenziono usaglašen, a time i tačan.

$\boxed{\textbf{2.8}}$ Kada se metalno telo, mase m unese u kalorimetar sa vodom, u njemu se oslobodi količina toplote Q, a srednja temperatura u kalorimetru je tada T_s. Temperatura tela pre unošenja u kalorimetar određena je relacijom:

$$T_x = \frac{Q}{mc} + T_s$$

gde je c – specifična toplotna kapacitivnost metala.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

Rešenje:

Dimenziona saglasnost važiće ako izraz $\frac{Q}{mc}$ ima dimenziju temperature, tj. ako je njegova jedinica Kelvin, odnosno K. Pošto je $[Q]=\mathrm{J}$, $[m]=\mathrm{kg}$, $[c]=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$ to je:

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}} = \mathrm{K}$$ što znači da je potreban uslov ispunjen i relacija je dimenziono saglasna.

$\boxed{\textbf{2.9}}$ U relaciji za promenu temperature:

$$\Delta T = \frac{Mv^2}{jR}$$

je M – molarna masa gasa, v – brzina suda u kome se on nalazi, j – broj stepena slobode gasa, R – molarna gasna konstanta.

Da li je ova relacija dimenziono tačna?

Rešenje:

Relacija je dimenziono tačna ako je dimenziono usaglašena. Pošto je $[M]=\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$, $[v]=\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $[j]=1$, $[R]=\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$, to je:

$$\left[\frac{Mv^2}{jR}\right]=\frac{\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}\cdot\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{m}\cdot\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{J}}=\mathrm{K}$$

S obzirom na to da je jedinica leve strane relacije $[\Delta T]$=K, to je dimenziono usaglašena.

$\boxed{\mathbf{2.10}}$ Četiri elektrona nalaze se u vakumu na međusobno jednakim rastojanjima d. pri tome je intenzitet sile međusobnog dejstva elektrona F. Ovo rastojanje je određeno izrazom:

$$d=\sqrt{\frac{3,83}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{F}}$$

gde je ε_0 – dielektrična konstanta vakuma, a e – naelektrisanje elektrona.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

Rešenje:

Prethodna relacija je dimenziono usaglašena ako je jedinica desne strane metar. Pošto je $[\pi]$ realan broj, $[\varepsilon]=\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^3}$, $[e]$=C, $[F]$=N, tada je:

$$\left[\sqrt{\frac{3,83}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{F}}\right]=\sqrt{\frac{1}{\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}}\cdot\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}}}=\mathrm{m}$$

što znači da je uslov ispunjen, odnosno leva strana jednačine ima istu dimenziju kao i desna strane jednačine.

$\boxed{\mathbf{2.11}}$ Električni motor, stepena korisnog dejstva η priključen je na mrežni napon U. Ovaj motor pokreće građevinsku dizalicu kojom se podiže teret mase m. Teret se diže na visinu h. Da bi se dizanje tereta završilo za vreme t, kroz motor treba da protiče struja jačine I. Ovo vreme je određeno relacijom:

$$t=\frac{mgh}{\eta UI}$$

gde je g – ubrzanje slobodnog padanja.

Dokazati dimenzionu ispravnost prethodne relacije.

Rešenje:

Jedinica desne strane jednačine treba da bude sekunda. Pošto je $[m]$=kg, $[g]=\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $[mg]$=N, $[h]$=m, $[U]=\mathrm{V}=\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$, $[I]=\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$, $[\eta]$ realan broj, to je:

$$\left[\frac{mgh}{\eta UI}\right]=\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{J}}{\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\cdot\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}}=\mathrm{s}$$

Znači jedinica leve i desne strane jednačine su iste pa je jednačina dimenziono usaglašena.

$\boxed{\mathbf{2.12}}$ Kada su dva elektrona (naelektrisanja e) kreću jednakim brzinama v, po pravolinijskim putanjama, između kojih je rastojanje r, onda je sila uzajamnog dejstva elektrona (Lorencova sila) određena relacijom:

$$F_m = \mu_0 \frac{e^2 v^2}{4\pi r^2}$$

pod uslovom da je $v \ll c$. U ovoj relaciji μ_0 je magnetna permeabilnost vakuuma.

Dokazati dimenzionu usaglašenost prethodne relacije.

Rešenje:

Treba pokazati da je izvedena jedinica desne strane prethodne jednačine Njutn (N). Pošto je $[\mu_0]=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$, $[e]$=C, $[v]=\frac{m}{s}$, $[r]$=m, $[\pi]$ realan broj, dobija se da je:

$$\left[\mu_0 \frac{e^2 v^2}{4\pi r^2}\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot \frac{\mathrm{C}^2 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\right)^2 = \mathrm{N}$$

time je dokazna dimenziona saglasnost jednačine Lorentzove sile, pošto je $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A}$.

$\boxed{\mathbf{2.13}}$ Kada elektron (čija je masa m_e, a naelektrisanje e), uleti u homogeno magnetno polje, indukcije B, on se kreće po kružnoj putanji poluprečnika:

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_e \Delta\varphi}{e}}$$

gde je $\Delta\varphi$ –potencijalna razlika kojom je elektron prethodno ubrzan.

Dokazati dimenzionu usaglašenost prethodne relacije.

Rešenje:

Pošto je $[m_e]$=kg, $[\Delta\varphi]$=V, $[B]$=T, to je:

$$\left[\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_e \Delta\varphi}{e}}\right] = \frac{1}{\mathrm{T}}\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{V}}{\mathrm{C}}}$$

Kako je $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}}$, $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$, $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$ nalazi se da jedinica ovog izraza metar, kako i treba da bude s obzirom, na to da on definiše poluprečnik putanje.

$\boxed{\mathbf{2.14}}$ Dokazati da količnik jačine električnog polja E i magnetne indukcije B ima prirodu brzine.

Rešenje:

Imajući u vidu da je $[E]=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, a $[B]=\mathrm{T}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}}$ nalazi se da je:

$$\left[\frac{E}{B}\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{m}}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(pošto je } \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \mathrm{s}\text{).}$$

$\boxed{\mathbf{2.15}}$ Dokazati da je:

$$[L\omega] = \Omega$$

gde je L – induktivnost kalema, ω – kružna učestanost naizmenične struje koja protiče kroz njega.

Rešenje:

Imajući u vidu da je $[L]$=H=$\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A/s}}$, a $[\omega]$=$\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \dfrac{1}{\mathrm{s}}$ i da je Ω=$\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$ nalazi se da je:

$$[L\omega] = \mathrm{H}\cdot\frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{V}}{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}}\cdot\frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega, \qquad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

2.16 Pritisak električnog polja određen je proizvodom dielektrične konstante sredine ε i kvadratom jačine električnog polja E. Dokazati da je:

$$[\varepsilon E^2] = \mathrm{Pa}$$

Rešenje:

Pošto je $[\varepsilon] = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$, $[E] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ i Pa $= \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, nalazi se da je:

$$[\varepsilon E^2] = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}\cdot\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{C}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}, \qquad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

2.17 Dokazati da je:

a) $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, jedinica električnog polja.

b) $\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, jedinica električne permitivnosti.

b) $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = \dfrac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$, jedinica magnetne permeabilnosti.

Rešenje:

a) Imajući u vidu da je V $= \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$ i J $=$ N $\cdot$ m, nalazi se da je:

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

b) Pošto je F $= \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$, i V $= \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$, to je:

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{C}}{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$$

c) Kako je T $= \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}}$, to je:

$$\frac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{A}}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

a i kako je H $= \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A/s}}$, to je:

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}, \qquad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

2.18 Luminacija kugle, poluprečnika R, u kojoj se nalazi tačkasti svetlosni izvor, ukupnog svetlosnog fluksa Φ, određena je jednačinom:

$$L = \frac{\Phi}{4\pi^2 r^2}$$

Dokazati dimenzionu usaglašenost jednačine.

Rešenje:

Prethodnu jednačinu treba napisati u obliku:

$$L = \frac{\Phi}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi r^2}$$

da bi se izvršila provera dimenzija. Pošto je: $[\Phi] = \mathrm{lm} = \mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}$, $[4\pi] = \mathrm{sr}$ i $[\pi r^2] = \mathrm{m}^2$, to je:

$$\left[\frac{\Phi}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi r^2}\right] = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{sr}} \cdot \frac{1}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}}{\mathrm{sr}} \cdot \frac{1}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}$$

Kako je $[L] = \dfrac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}$, jednačina je dimenziono usaglašena.

$\boxed{\textbf{2.19}}$ Brzina prostiranja svetlosti u vakumu određena je jednačinom:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

gde su μ_0 i ε_0 – permeabilnost i permitivnost vakuuma, respektivno.

Dokazati da je jedinica desne strane ove jednačine $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Rešenje:

Pošto je $[\mu_0] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$ i $[\varepsilon_0] = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$ to se dobija:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}\right] = \sqrt{\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}} \cdot \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}} = \frac{\mathrm{m}}{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Znači, dimenzija desne strane jdnačine je dimenzija brzine, što je i trebalo dokazati.

$\boxed{\textbf{2.20}}$ Komptonova talasna dužina određena je relacijom:

$$\lambda_k = \frac{2h}{mc}$$

gde je h – Plankova konstanta, m – masa čestice na kojoj se vrši rasejanje, c – brzina fotona elktromagnetnog zračenja.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

Rešenje:

Imajući u vidu da je dimenzija Plankove konstante $[h] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$, mase $[m] = \mathrm{kg}$, i brzine svetlosti $[c] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, sledi da je:

$$\left[\frac{2h}{mc}\right] = \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{kg} \cdot \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}} = \mathrm{m}$$

Kako je dimenzija talasne dužine $[\lambda] = \mathrm{m}$, jednačina je dimenziono usaglašena.

$\boxed{\textbf{2.21}}$ Ridbergova konstanta je određena jednačinom:

$$R = \frac{me^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 ch^3}$$

gde je m – masa elektrona, e – naelektrisanje elektrona, Z – redni broj elementa, ε_0 – dielektrična konstanta, c – brzina fotona elektromagnetnog zračenja, h – Plankova konstanta.

Izvesti jedinicu za Ridbergovu konstantu.

Rešenje:

Kako je $[m] = \mathrm{kg}$, $[e] = \mathrm{C}$, $[Z] = 1$, $[\varepsilon] = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^3}$, $[c] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $[h] = \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$, na osnovu jednačine za Ridbergovu konstantu dobija se:

$$\left[\frac{me^4Z^2}{8\varepsilon_0^2ch^3}\right] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{C}^4}{\left(\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}\right)^2\cdot\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot(\mathrm{J}\cdot\mathrm{s})^2} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^2} = \frac{1}{\mathrm{m}}$$

Znači dimenzija Ridbergove konstante je $[R] = \dfrac{1}{\mathrm{m}}$.

$\boxed{\mathbf{2.22}}$ Vodonik se nalazi na pritisku p i temperaturi T. Energija elektrona u sastavu atoma vodonika, pod uslovom da je poluprečnik njihove orbite jednak polovini rastojanja između centara susednih atoma, određena je jednačinom:

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{p}{kT}\right)^{1/3}$$

Proveriti tačnost ove jednačine primenom dimenzione analize.

Rešenje:

Pošto je $[e] = \mathrm{C}$, $[\varepsilon_0] = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$, $[p] = \mathrm{Pa}$, $[k] = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$, $[T] = \mathrm{K}$, to je:

$$\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{p}{kT}\right)^{1/3}\right] = \frac{\mathrm{C}^2}{\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}}\left(\frac{\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}{\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot\mathrm{K}}\right)^{1/3} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\left(\frac{1}{\mathrm{m}^3}\right)^{1/3} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{J}$$

Jedinica desne strane jednačine je J, pa je ona dimenziono usaglašena. Pošto je jednačina dimenziono usaglašena ona je verovatno i tačna.

$\boxed{\mathbf{2.23}}$ Aktivnost količine urana mase m, iznosi $\mathcal{A}$. Ovi podaci određuju konstantu radioaktivnosti urana λ, pošto je $\lambda = \dfrac{\mathcal{A}}{N}$, gde je N – broj neraspadnutih atoma urana. Kako je $N = nN_A = \dfrac{m}{M}N_A$ nalazi se da je:

$$\lambda = \frac{\mathcal{A}\cdot M}{mN_A}$$

gde je M – molarna masa urana, a N_A – Avogadrov broj.

Dokazati da je prethodna jednačina dimenziono usaglašena.

Rešenje:

Imajući u vidu da je $[\lambda] = \dfrac{1}{\mathrm{s}}$, znači da i desna strana jednačine treba da ima istu jedinicu. Kako je $[\mathcal{A}] = \mathrm{Bq} = \dfrac{1}{\mathrm{s}}$, $[n] = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$, $[m] = \mathrm{kg}$, $[N_A] = \dfrac{1}{\mathrm{mol}}$, dobija se:

$$\left[\frac{\mathcal{A}\cdot M}{mN_A}\right] = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{s}}\cdot\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}}{\mathrm{kg}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{mol}}} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Znači da desna strana jednačine ima istu dimenziju kao i leva strana, pa je jednačina dimenziono usaglašena.

Glava 3

Prikazivanje rezultata merenja

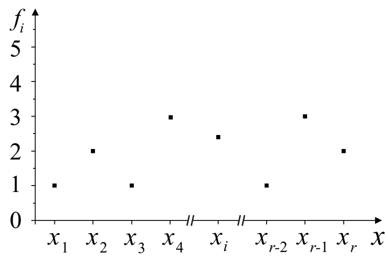
3.1 Grafički prikaz rezultata merenja

Kao rezultat merenja neke fizičke veličine dobija se niz izmerenih podataka: y_1, y_2, y_3, ..., y_n, gde je n ukupan broj merenja. Rezultati se sređuju na sledeći način:

1) Formira se rastući (opadajući) niz od izmerenih podataka: x_1, x_2, x_3, ..., x_n (n broj merenja). Ukoliko se neka vrednost u rastućem nizu x_i ponavlja f_i puta, formira se tablica rastućih vrednosti sa pripadajućim frekvencijama pojavljivanja f_i, tj.

   $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_r \\ f_1 & f_2 & f_3 & ... & f_r \end{matrix}$; $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i = n$; ($n$ označava ukupan broj merenja).

2) Može se nacrtati tačkasti dijagram. Na apcisu se nanose različite vrednosti x_i iz rastućeg niza, a na ordinatu odgovarajuće frekvence f_i (Slika 3.1.). Međutim, tačkasti dijagram nije mnogo informativan i retko se koristi.



Slika 3.1. Tačkasti dijagram

3) Iz rastućeg niza se najpre odrede najveća x_{max} i najmanja x_{min} izmerena vrednost. Opseg između najveće i najmanje izmerene vrednosti $x_{max} - x_{min}$ naziva se interval pojavljivanja.

   Interval pojavljivanja se deli na k klasa. Broj klasa k se može odrediti pomoću izraza: $k = 1 + 3.322 \cdot \log n$; gde n predstavlja ukupan broj merenja.

   Broj klasa k zaokružuje se na ceo broj. Širina klasa h se računa prema izrazu:

   $$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}.$$

   Pri tome treba voditi računa da se u klasi sa najvećim brojem izmerenih vrednosti nalazi oko 20% - 30% vrednosti, kao i da broj klasa bude približno $5 \leq k \leq 30$ [1].

4) Odrede se predstavnici klasa k_i, vrednosti na polovini svake klase, f_i frekvencije i f_i/n relativne frekvencije za svaku klasu (frekvencija predstavlja broj izmerenih vrednosti za svaku klasu), kao i vrednosti kumulativnih frekvencija $\sum_i^k f_i$ i relativnih kumulativnih frekvecija $\sum_i^k f_i/n$ za svaku klasu. Kumulativna frekvencija i-te klase po redu $\sum_i f_i$ predstavlja sumu frekvencija posmatrane klase i svih prethodnih klasa. Ako izmerena vrednost ima istu vrednost kao granica

[1] Međutim, prilikom sređivanja rezultata nećemo se strogo pridržavati ovih pravila. Obično se koristi pravilo da se u klasi sa najvećim brojem izmerenih vrednosti ne nalazi više od 20% - 30% vrednosti i da broj klasa bude približno $5 \leq k \leq 30$. Pri tom se za donju granicu prve klase i gornju granicu poslednje klase, kao i za širinu klasa uzimaju celobrojne vrednosti ili vrednosti pogodne za dalji tretman. Gornji izraz ćemo koristiti samo kao prvi korak pri proceni širine klasa.

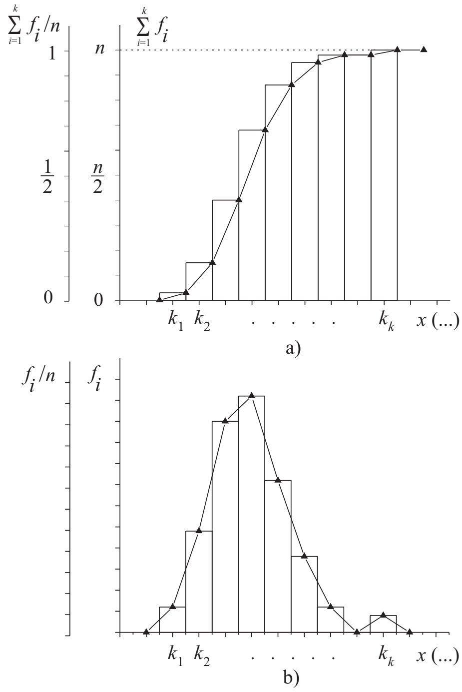
klase, ulazi u klasu ispred. Zato se uvek za najmanju vrednost za računanje klasa uzima vrednost manja od najmanje izmerene vrednosti x_{min}. Ovako sređeni rezultati se prikazuju tabelarno kao u sledećoj tabeli.

k	granice	k_i	f_i	$\frac{f_i}{n}$	$\sum_{i=1}^{k} f_i$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{n}$
1	$c_1 - c_2$	k_1	f_1	$\frac{f_1}{n}$	f_1	$\frac{f_1}{n}$
2	$c_2 - c_3$	k_2	f_2	$\frac{f_2}{n}$	$f_1 + f_2$	$\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n}$
...	...	...	...	...	...	...
k	$c_k - c_{k+1}$	k_k	f_k	$\frac{f_k}{n}$	$f_1 + f_2 + ... + f_k$	$\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + ... + \frac{f_k}{n}$
$\sum_{i=1}^{k}$			n	1		

5) Na osnovu ovako sređenih podataka crtaju se histogrami (Slika 3.2. a)) i poligoni (Slika 3.2. b)).

Histogrami-pravougaonici čije su ivice granice klasa a visine f_i ili f_i/n, zbog čega se i nazivaju histogrami frekvencija i histogrami relativnih frekvecnija. Ako su visine pravouganonika $\sum_{i=1}^{k} f_i$ ili $\sum_{i=1}^{k} = f_i/n$ nazivaju se histogrami kumulativnih frekvencija ili histogrami kumulativnih relativnih frekvencija.

Poligoni-tačke iznad predstavnika klasa k_i sa visinama f_i ili f_i/n, koje su povezane pravim linijama. Ponekad se crtaju i tačka na sredini klase koja prethodi klasi i na sredini klase iznad poslednje klase sa visinom nula. Ovako dobijeni poligoni nazivaju se poligoni frekvencija (ako je apcisa f_i) ili poligoni relativnih frekvencija (ako je apcisa f_i/n). Poligoni kumulativnih frekvencija i poligoni kumulativnih relativnih frekvencija predstavljaju tačke iznad gornjih granica svake klase sa visinom određenom kumulativnim frekvencijama $\sum_{i=1}^{k} f_i$ odnosno kumulativnim relativnim frekvencijama $\sum_{i=1}^{k} f_i/n$, respektivno. Ponekad se crtaju i tačka koja odgovara donjoj granici prve klase (tj. gornjoj granici klase koja prethodi prvoj klasi) sa visinom nula i tačka koja odgovara gornjoj granici klase iza poslednje klase sa visinom n (ili 1 u zavisnosti da li se radi o poligonu kumulativnih frekvencija ili poligonu kumulativnih relativnih frekvencija).

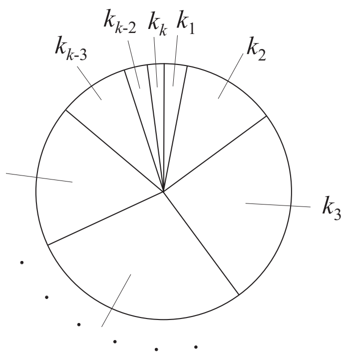


Slika 3.2. a) Histogram i poligon kumulativnih frekvencija i kumulativnih relativnih frekvencija; b) Histogram i poligon frekvencija i relativnih frekvencija.

Histogrami i poligoni u polarnim koordinatama.

a) „Pita"-histogram relativnih frekvencija u polarnim koordinatama (x, φ). Širini klase odgovara koordinati x a relativnoj frekvencija koordinata φ. Širina klasa je uvek ista i ona odgovara poluprečniku kruga. Debljina svakog odsečka kruga „parčeta pite" odgovara relativnoj frekvenciji klase. Debljine odsečaka kruga se odredjuju množenjem relativne frekvencije svake klase sa 360 (pun ugao 360°). Kada se to uradi za svaku od klasa dobija se:

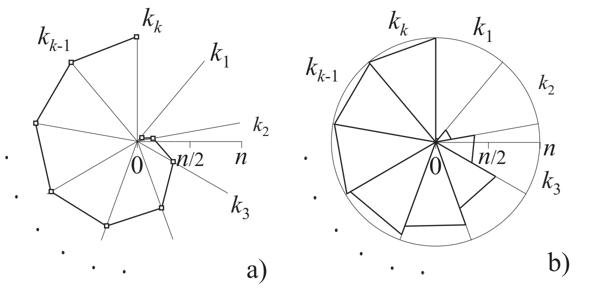
$$\begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & ... & k_r \\ \frac{f_1}{n}\cdot 360 & \frac{f_2}{n}\cdot 360 & ... & \frac{f_r}{n}\cdot 360 \end{array}\;;\quad \sum_{i=1}^{k_r} \frac{f_i}{n}\cdot 360 = 1.$$



Slika 3.3. Histogram u polarnim koordinatama, tzv. „pita".

Ovaj način crtanja histograma se retko koristi u fizici. Najčešće se koristi u ekonomiji, prikazivanju rezultata izbora i slično.

b) Zvezdasti dijagram-poligon relativnih frekvencija ili kumulativnih relativnih frekvencija u polarnim koordinatama. Za razliku od „pite", koordinata φ odgovara širini klase a koordinata x relativnim frekvencijama. Pun ugao se deli na onoliko delova koliko ima klasa, a rastojanje svake tačke od centra kruga odgovara relativnoj frekvenciji (kumulativnoj frekvenciji) svake klase. Ovaj način prikazivanja rezultata merenja nije mnogo ilustrativan i veoma retko se koristi.

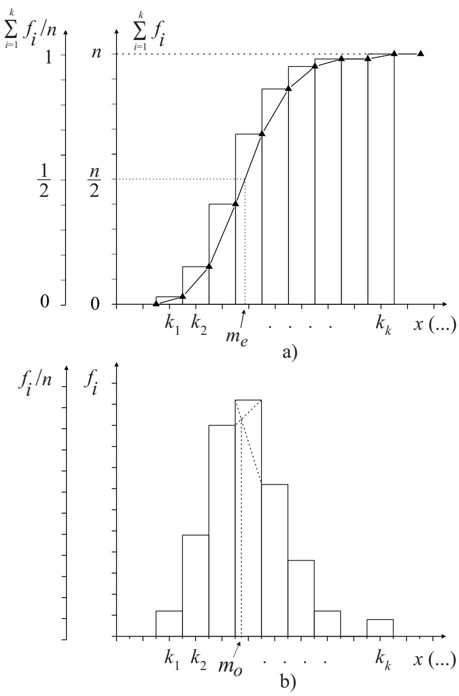


Slika 3.4. a) poligon u polarnim koordinatama; b) histogram u polarnim koordinatama

6) Grafičko procenjivanje *medijane* i *moda*. Medijana predstavlja središnji član niza izmerenih podataka razvrstanih u rastući niz. Mod predstavlja najverovatniju vrednost merene fizičke veličine. Klasa sa najvećom frekvencijom se naziva modalna klasa.

Vrednost medijane (m_e) se procenjuje iz poligona kumulativnih frekvencija ili poligona kumulativnih relativnih frekvencija. Najpre se povuče prava linija paralelna ordinati, počev od vrednosti $n/2$ na apcisi za poligon kumulativnih frekvencija (ili od vrednosti 1/2 za poligon kumulativnih relativnih frekvencija). Kroz tačku preseka ove prave sa poligonalnom linijom se provlači druga prava linija paralelna apcisi do preseka sa ordinatom. U preseku druge paralelne linije sa ordinatom se procenjuje vrednost medijane (vidi sliku slici 3.5 a)).

Vrednost moda (m_o) se procenjuje grafički iz preseka prave linije koja spaja desnu gornju granicu klase koja predhodi modalnoj klasi i desnu gornju granicu modalne klase sa pravom linijom koja spaja levu donju granicu modalne klase sa levom donjom granicom klase koja sledi modalnoj klasi. U preseku prave linije paralelne apcisi sa ordinatom se procenjuje modalna vrednost (vidi sliku slici 3.5 b)).



Slika 3.5. a) Shematski prikaz grafičkog određivanja medijane m_e; b) Shematski prikaz grafičkog određivanja moda m_o

Zadaci

$\boxed{\textbf{3.1}}$ Automat izbacuje teniske loptice u horizontalnom pravcu početnom konstantnom brzinom v_0 sa visine od $h_0 = 1\,\mathrm{m}$. U dvadeset slučajeva je registrovano rastojanje na koje padaju loptice x. Ta rastojanja u metrima (m) iznose:

24.13	21.23	25.18	23.75	24.67	26.55	22.83	25.34	24.26	23.22
24.75	20.86	23.35	25.38	21.34	24.48	25.13	24.82	23.93	22.16

Rezultate razvrstati u 7 klasa širine 1 m, pri čemu je donja granica prve klase na 20 m. Odrediti frekvencije i relativne frekvencije klasa i prikazati ih tabelarno.

Rešenje:

Izmerene vrednosti se najpre poređaju u rastući niz.

| 20.86 | 21.23 21.34 | 22.16 22.83 |
23.22 23.35 23.75 23.93 | 24.13
24.26 24.48 24.67 24.75 24.82 |
25.13 25.18 25.34 25.38 | 26.55 |

Granice klasa su označene vertikalnim linijama. Frekvencije i relativne frekvencije se tablično prikazuju na sledeći način:

k	granice	k_i (m)	f_i	f_i/n
1	20-21	20.5	1	0.05
2	21-22	21.5	2	0.10
3	22-23	22.5	2	0.10
4	23-24	23.5	4	0.20
5	24-25	24.5	6	0.30
6	25-26	25.5	4	0.20
7	26-27	26.5	1	0.05
$\sum_{i=1}^{7}$			20	1

$\boxed{3.2}$ U eksperimentu je merena dužina traga α čestice iz nekog raspada u maglenoj komori. U 50 nezavisnih merenja dužine tragova u metrima (cm) su iznosile:

4.21	5.08	4.56	5.12	4.33	4.78	4.92	4.62	5.03	5.36
5.23	4.49	4.86	4.88	4.78	4.87	4.95	4.79	5.06	4.97
4.83	4.78	4.71	4.82	4.64	4.56	4.92	4.74	4.95	4.86
4.54	4.68	4.84	4.36	4.72	4.85	4.68	4.89	4.91	4.47
4.27	4.58	4.65	4.32	4.47	4.65	4.97	5.02	5.08	4.72

a) Dobijene podatke razvrstati u 12 jednakih klasa i tabelarno prikazati odgovarajuće frekvencije.
b) Nacrtati histogram frekvencija ovih vrednosti.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

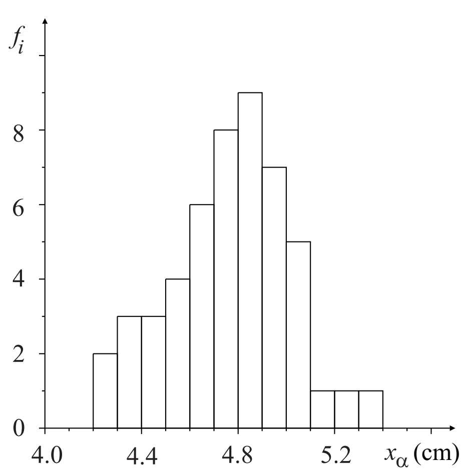
| 4.21 4.27 | 4.32 4.33 4.36 | 4.47 4.47 4.49 | 4.54 4.56
4.56 4.58 | 4.62 4.64 4.65 4.65 4.68 4.68 | 4.71 4.72
4.72 4.74 4.78 4.78 4.78 4.79 | 4.82 4.83 4.84 4.85
4.86 4.86 4.87 4.88 4.89 | 4.91 4.92 4.92 4.95 4.95
4.97 4.97 | 5.02 5.03 5.06 5.08 5.08 | 5.12 | 5.23 | 5.36 |

Minimalna i maksimalna vrednost niza su:

$$x_{min} = 4.21\,\text{cm}; \qquad x_{max} = 5.36\,\text{cm}; \qquad x_{max} - x_{min} = 1.15\,\text{cm}$$

Pošto se traži 12 klasa dodajmo razlici $x_{max} - x_{min}$ broj 0.05 da bi bila deljiva sa 12, a za donju vrednost prve klase uzmimo vrednost manju od 4.21, recimo 4.20. Izdelimo interval $4.2 - 5.4$ na 12 klasa, pa je širina klase 0.1, a granice klasa su: 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 itd. Granice klasa u rastućem nizu su naznačene vertikalnim linijama.
Pre nego što se nacrta histogram frekvecija, najpre se ove vrednosti daju tabelarno, radi preglednosti.

k	granice	k_i (cm)	f_i	f_i/n
1	4.2-4.3	4.25	2	0.04
2	4.3-4.4	4.35	3	0.06
3	4.4-4.5	4.45	3	0.06
4	4.5-4.6	4.55	4	0.08
5	4.6-4.7	4.65	6	0.12
6	4.7-4.8	4.75	8	0.16
7	4.8-4.9	4.85	9	0.18
8	4.9-5.0	4.95	7	0.14
9	5.0-5.1	5.05	5	0.10
10	5.1-5.2	5.15	1	0.02
11	5.2-5.3	5.25	1	0.02
12	5.3-5.4	5.35	1	0.02
$\sum_{i=1}^{12}$			50	1



3.3 Prilikom merenja probojnog napona gasne diode dobijene su sledeće vrednosti u voltima (V):

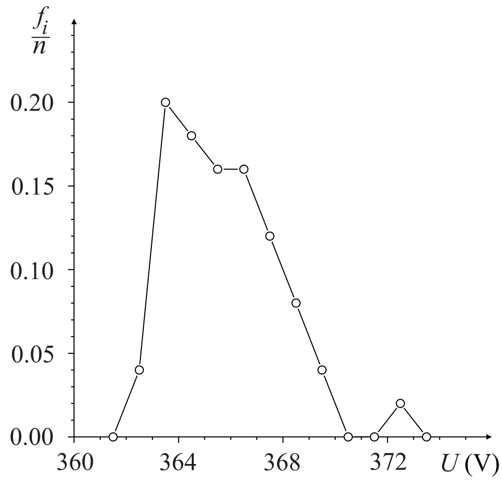
364.9	368.0	366.5	368.9	368.3	364.3	367.1	365.2	366.5	372.8
364.0	364.1	364.1	364.0	365.3	365.3	366.6	363.7	364.9	363.9
363.6	367.8	367.8	363.9	365.1	362.2	363.6	365.1	365.0	366.3
363.4	364.8	363.4	369.8	366.3	368.6	366.4	369.9	363.8	362.5
368.9	367.6	364.9	366.2	365.2	367.4	364.6	366.1	365.9	365.9

a) Dobijene rezultate razvrstati u klase širine 1 V a za donju granicu prve klase uzeti celobrojnu vrednost.
b) Rezultate prikazati tabelarno i u obliku poligona relativnih frekvencija.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 362.2 362.5 | 363.4 363.4 363.6 363.6 363.7 363.8 363.9 363.9
364.0 364.0 | 364.1 364.1 364.3 364.6 364.8 364.9 364.9 364.9
365.0 | 365.1 365.1 365.2 365.2 365.3 365.3 365.9 365.9 | 366.1
366.2 366.3 366.3 366.4 366.5 366.5 366.6 | 367.1 367.4 367.6
367.8 367.8 368.0 | 368.3 368.6 368.9 368.9 | 369.8 369.9 || 372.8|

k	klase	k_i (V)	f_i	f_i/n
1	362-363	362.5	2	0.04
2	363-364	363.5	10	0.20
3	364-365	364.5	9	0.18
4	365-366	365.5	8	0.16
5	366-367	366.5	8	0.16
6	367-368	367.5	6	0.12
7	368-369	368.5	4	0.08
8	369-370	369.5	2	0.04
9	370-371	370.5	/	/
10	371-372	371.5	/	/
11	372-373	372.5	1	0.02
$\sum_{i=1}^{k}$			50	1

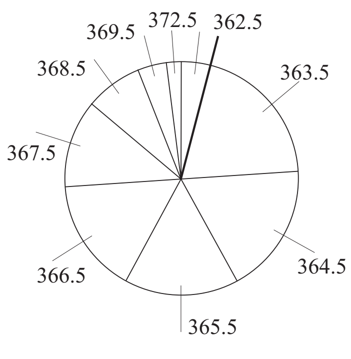


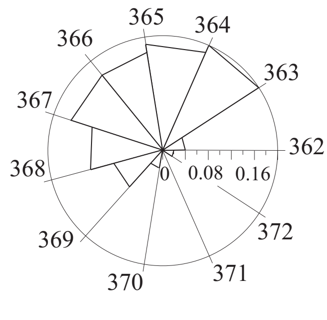
dodatak

a) Prikaz u obliku pite, tj. histogram u polarnim koordinatama. Na x osu se nanose širine klasa a na φ osi relativna frekvencija. „Pita" ima onoliko parčeta koliko ima klasa sa frekvecijom različitom od nule. Predstavnici klasa se nanose unutar kruga, ili izvan. (Ovakav način prikazivanja se retko koristi u fizici, a čest je u ekonomiji.)

b) Histogram u polarnim koordinatama, na x osu se nanose relativne frekvencije a na φ osu širine klasa. (Ovaj način prikazivanja se vrlo retko sreće jer nije ilustrativan.)

k_i (V)	f_i/n	$f_i/n \cdot 360^{\mathrm{O}}$
362.5	0.04	14.4
363.5	0.20	72
364.5	0.18	64.8
365.5	0.16	57.6
366.5	0.16	57.6
367.5	0.12	43.2
368.5	0.08	28.8
369.5	0.04	14.4
370.5	0	0
371.5	0	0
372.5	0.02	7.2





3.4 Prilikom 50 nezavisnih i uzastopnih merenja otpora električnog grejača dobijene su sledece vrednosti u omima (Ω):

66.5	68.1	65.9	67.8	68.6	68.7	70.6	68.8	68.3	68.5
66.4	67.4	68.7	69.2	70.4	70.2	68.0	66.6	70.2	67.0
70.0	67.2	69.0	67.0	70.3	68.3	69.8	66.9	70.8	68.1
64.9	68.5	65.5	67.8	67.5	67.7	68.4	68.9	65.4	67.8
68.3	67.5	68.2	66.8	67.1	68.2	66.9	67.4	68.1	66.8

a) Dobijene rezultate razvrstati u klase širine 1 Ω i prikazati ih tabelarno.
b) Ovako sređene rezultate prikazati u obliku histograma relativnih frekvencija i histograma kumulativnih relativnih frekvencija.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

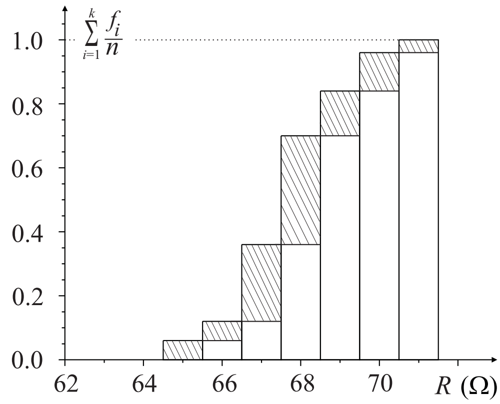
| 64.9 65.4 65.5 | 65.9 66.4 66.5 | 66.6 66.8 66.8 66.9
66.9 67.0 67.0 67.1 67.2 67.4 67.4 67.5 | 67.7 67.8
67.8 67.8 67.8 68.0 68.0 68.1 68.1 68.1 68.2 68.2
68.3 68.3 68.3 68.5 68.5 | 68.6 68.7 68.7 68.8 68.9
69.0 69.2 | 69.8 70.0 70.2 70.2 70.3 70.4 | 70.6 70.8 |

Minimalna i maksimalna vrednost niza su:

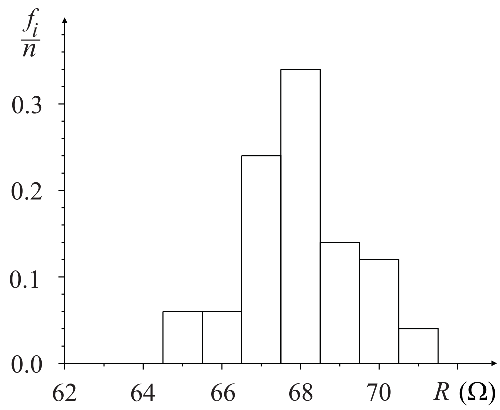
$$x_{min} = 64.9\,\Omega$$

$$x_{max} = 70.8\,\Omega$$

Za donju vrednost prve klase uzećemo vrednost manju od 64.9, recimo 64.5. Pošto su zadate širine klasa 1 Ω, granice klasa su: 64.5 − 65.5, 65.5 − 66.5, 66.5 − 67.5 i zadnje klase 70.5 − 71.5. Granice klasa su označene vertikalnim linijama.



k	klase	k_i (Ω)	f_i	f_i/n	$\sum_{i=1}^{k} f_i/n$
1	64.5-65.5	65	3	0.06	0.06
2	65.5-66.5	66	3	0.06	0.12
3	66.5-67.5	67	12	0.24	0.36
4	67.5-68.5	68	17	0.34	0.70
5	68.5-69.5	69	7	0.14	0.84
6	69.5-70.5	70	6	0.12	0.96
7	70.5-71.5	71	2	0.04	1.00



Prilikom crtanja histograma kumulativnih relativnih frekvencija (ili histograma kumulativnih frekvencija) u nekim knjigama se crtaju samo pravougaonici koji su osenčeni. Međutim, mi ćemo crtati pravougaonike od $f_i/n = 0$ pa do f_i/n za datu klasu (tj. $f_i = 0$ do f_i za datu klasu), što je na slici dato kao zbir šrafiranog i nešrafiranog pravougaonuka.

$\boxed{\textbf{3.5}}$ Merenjem mase nekog praškastog materijala analitičkom vagom dobijene su sledeće vrednosti u miligramima (mg):

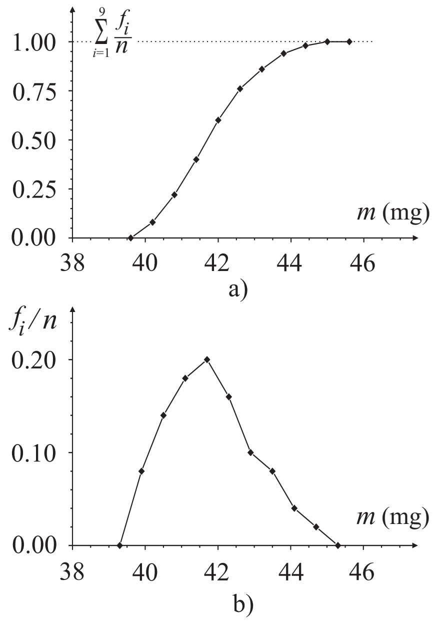
44.6	43.4	42.0	41.8	42.1	40.3	43.0	43.3	39.9	40.8
41.2	39.8	44.0	42.7	42.0	40.9	40.4	40.7	40.9	40.7
39.8	41.2	42.4	41.8	43.6	42.9	42.3	42.6	40.5	41.0
42.5	41.9	43.2	40.9	41.5	41.9	41.4	39.9	44.2	41.2
41.6	42.8	41.6	41.8	42.4	43.7	40.6	40.9	42.2	42.6

a) Dobijene vrednosti razvrstati u klase širine 0.6 mg, a za donju granicu prve kase uzeti 39.6 mg i prikazati ih tabelarno.
b) Rezultate prikazati poligonom relativnih frkvencija i poligonom kumulativnih relativnih frekvencija.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 39.8 39.8 39.9 39.9 | 40.3 40.4 40.5 40.6 40.7
40.7 40.8 | 40.9 40.9 40.9 40.9 41.0 41.2 41.2
41.2 41.4 | 41.5 41.6 41.6 41.8 41.8 41.8 41.9
41.9 42.0 42.0 | 42.1 42.2 42.3 42.4 42.4 42.5
42.6 42.6 | 42.7 42.8 42.9 43.0 43.2 | 43.3 43.4
43.6 43.7 | 44.0 44.2 | 44.6 |

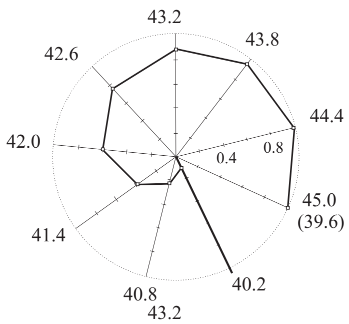
k	klase	k_i (mg)	f_i	f_i/n	$\sum_{i=1}^{k} f_i/n$
1	39.6-40.2	39.9	4	0.08	0.08
2	40.2-40.8	40.5	7	0.14	0.22
3	40.8-41.4	41.1	9	0.18	0.40
4	41.4-42.0	41.7	10	0.20	0.60
5	42.0-42.6	42.3	8	0.16	0.76
6	42.6-43.2	42.9	5	0.10	0.86
7	43.2-43.8	43.5	4	0.08	0.94
8	43.8-44.4	44.1	2	0.04	0.98
9	44.4-45.0	44.7	1	0.02	1.00



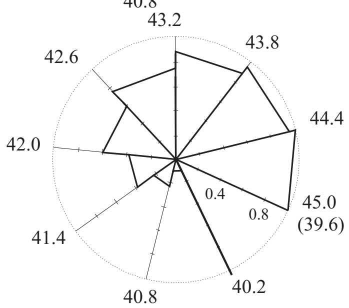
a) Poligon kumulativnih relativnih frkvencija i b) poligon relativnih frekvencija.

<u>dodatak</u>

a) Histogram kumulativnih relativnih frekvencija u polarnim koordinatama. Na φ osu se nanose širine klasa (isti uglovi), a na x osu kumulativne relativne frekvencije (ili po potrebi kumulativne frekvencije). Ima isto onoliko „parčeta" koliko ima klasa. Ponekad se crta jedno „parče" više od broja klasa, da bi se izdvojila prva od poslednje klase zbog preglednosti. Predstavnici klasa se nanose unutar kruga, ili izvan.



b) Poligon kumulativnih relativnih frekvencija u polarnim koordinatama. Na φ osu se nanose širine klasa (isti uglovi), a na x osu kumulativne relativne frekvencije. Ima isto onoliko „parčeta", tj. pravih linija između parčeta koliko ima klasa. Ponekad se crta jedno „parče" više od broja klasa, da bi se izdvojila prva od poslednje klase zbog preglednosti. Predstavnici klasa se nanose na x osu, uglavnom izvan kruga.



3.6 U 50 uzastopnih merenja jačine struje kroz neki otpornik ampermetrom dobijene su sledeće vrednosti u miliamperima (mA):

1.45	1.51	1.38	1.40	1.53	1.59	1.46	1.46	1.60	1.51
1.62	1.36	1.55	1.47	1.40	1.50	1.54	1.51	1.39	1.65
1.34	1.51	1.44	1.61	1.59	1.63	1.57	1.48	1.50	1.31
1.66	1.56	1.48	1.55	1.58	1.52	1.42	1.46	1.43	1.47
1.52	1.60	1.58	1.50	1.63	1.45	1.49	1.53	1.57	1.35

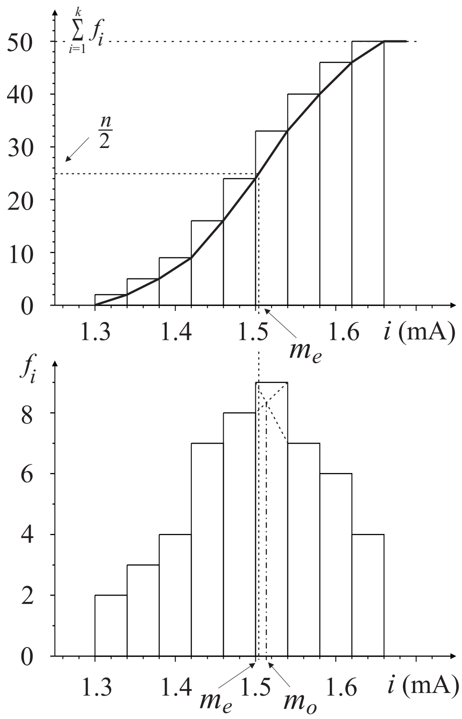
a) Podatke razvrstati po klasama širine 0.04 mA. Za donju granicu prve klase uzeti vrednost 1.30 mA i prikazati ih tabelarno
b) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih frekvencija.
c) Sa histograma proceniti medijanu i mod.

Rešenje:

Rastući niz izmerenih vrednosti je:

|1.31 1.34|1.35 1.36 1.38|1.39 1.40 1.40 1.42|1.43
1.44 1.45 1.45 1.46 1.46 1.46|1.47 1.47 1.48 1.48
1.49 1.50 1.50 1.50|1.51 1.51 1.51 1.51 1.52 1.52
1.53 1.53 1.54|1.55 1.55 1.56 1.57 1.57 1.58 1.58|
1.59 1.59 1.60 1.60 1.61 1.62|1.63 1.63 1.65 1.66|

k	klase	k_i (mA)	f_i	$\sum_{i=1}^{k} f_i$
1	1.30-1.34	1.32	2	2
2	1.34-1.38	1.36	3	5
3	1.38-1.42	1.40	4	9
4	1.42-1.46	1.44	7	16
5	1.46-1.50	1.48	8	24
6	1.50-1.54	1.52	9	33
7	1.54-1.58	1.56	7	40
8	1.58-1.62	1.60	6	46
9	1.62-1.66	1.64	4	50



medijana $m_e = 1.503$ mA ; mod $m_o = 1.513$ mA

3.7 Merenjem električnog napona gradske mreže dobijene su sledeće vrednosti u voltima (V):

226.7	211.3	213.7	217.5	217.2	226.0	218.5	214.5	210.2	212.5
224.8	218.0	220.0	234.8	228.8	235.3	224.1	214.8	236.7	222.2
216.2	223.8	215.0	222.0	214.0	228.0	212.8	230.0	217.0	214.9
230.0	215.7	228.2	226.2	215.3	231.1	224.3	228.8	216.5	218.2
222.8	216.5	225.8	227.8	217.0	221.7	214.2	227.0	220.0	226.2

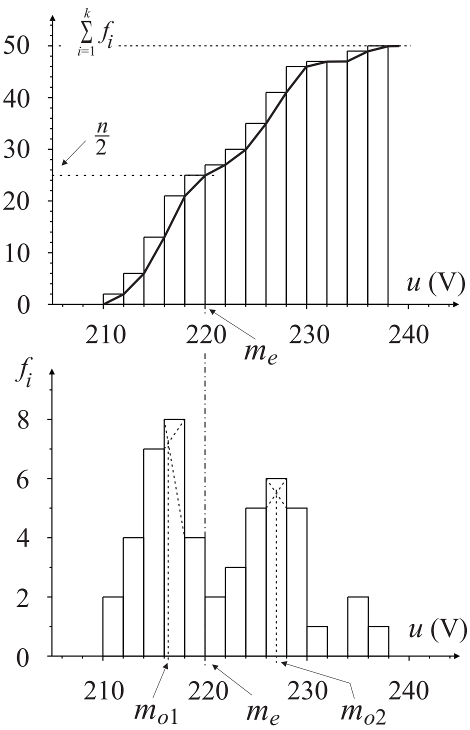
a) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih frekvencija, za podatke razvrstane u klase širine 2 V, a za granice klasa uzeti parne brojeve.
b) Grafički proceniti medijanu i mod.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

|210.2 211.3|212.3 212.8 213.7 214.0|214.2 214.5 214.8 214.9 215.0 215.3 215.7|
216.2 216.5 216.5 217.0 217.2 217.2 217.5 218.0|218.2 218.5 220.0 220.0|221.7

222.0 | 222.2 222.8 223.8 | 224.1 224.3
224.8 225.8 226.0 | 226.2 226.2 226.7
227.0 227.8 228.0 | 228.2 228.8 228.8
230.0 230.0 | 231.1 | 234.8 235.3 | 236.7 |

k	klase	k_i (V)	f_i	$\sum_{i=1}^{k} f_i$
1	210-212	211	2	2
2	212-214	213	4	6
3	214-216	215	7	13
4	216-218	217	8	21
5	218-220	219	4	25
6	220-222	221	2	27
7	222-224	223	3	30
8	224-226	225	5	35
9	226-228	227	6	41
10	228-230	229	5	46
11	230-232	231	1	47
12	232-234	233	0	47
13	234-236	235	2	49
14	236-238	237	1	50



Ovako nacrtan histogram je bimodalan (ima dva moda). Gomilanje oko vrednosti 219 V nije maksimum, jer se u njenoj okolini nalaze samo tri izmerene vrednosti. Prema tome, izmerene vrednosti se gomilaju oko dve najverovatnije vrednosti, pa se sa histograma procenjuju dva moda, m_{o1} i m_{o2}.

medijana $m_e = 220$ V; modovi $m_{o1} = 216.4$ V i $m_{o2} = 227.0$ V

$\boxed{\textbf{3.8}}$ Na autotrci je voženo 50 krugova. Izmerene prosečne brzine svakog kruga u km/h iznose:

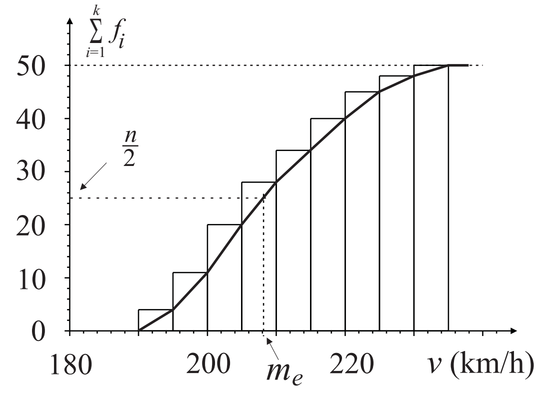
202.2	233.2	207.8	200.0	197.9	206.2	203.8	215.3	217.3	192.7
227.8	216.8	209.0	207.2	201.5	223.5	219.2	198.0	195.7	200.5
192.0	204.7	225.7	210.7	204.5	201.0	197.2	206.0	193.0	208.5
212.3	216.2	221.3	198.5	221.9	206.5	225.0	213.7	203.0	203.5
210.5	218.5	211.2	231.2	195.5	226.3	215.0	220.7	205.2	191.2

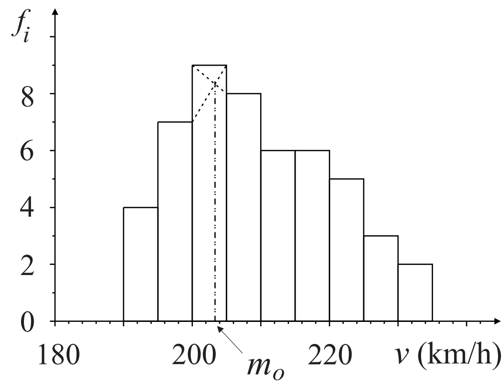
a) Izmerene vrednosti razvrstati u klase širine 5 km/s, a za donju vrednost prve klase uzeti vrednost 190 km/s i prikazati ih tabelarno.
b) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih frekvencija.
c) Sa nacrtanih raspodela grafički proceniti medijanu i mod.
Rešenje:

Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 191.2 192.0 192.7 193.0 | 195.5 195.7 197.2 197.9
198.0 198.5 200.0 | 200.5 201.0 201.5 202.2 203.0
203.5 203.8 204.5 204.7 | 205.2 206.0 206.2 206.5
207.2 207.8 208.5 209.0 | 210.5 210.7 211.2 212.3
213.7 215.0 | 215.3 216.2 216.8 217.3 218.5 219.2
| 220.7 221.3 221.9 223.5 225.0 | 225.7 226.3 227.8 |
231.2 233.2 |

k	klase	k_i (km/h)	f_i	$\sum_{i=1}^{k} f_i$
1	190-195	192.5	4	4
2	195-200	197.5	7	11
3	200-205	202.5	9	20
4	205-210	207.5	8	28
5	210-215	212.5	6	34
6	215-220	217.5	6	40
7	220-225	222.5	5	45
8	225-230	227.5	3	48
9	230-235	232.5	2	50





medijana $m_e = 208.2$ km/h; mod $m_o = 203.4$ km/h

$\boxed{\textbf{3.9}}$ Izmerene vrednosti vremena uspostavljanja svetlog pražnjenja u gasnoj sijalici date su u sledećoj tabeli u milisekundama (ms):

3.1	7.5	12.6	10.4	4.9	15.1	5.3	9.7	14.2	10.0
6.0	5.8	3.5	5.3	9.3	8.5	11.6	10.5	11.6	9.9
12.9	4.6	5.2	3.1	4.9	5.2	3.6	11.8	12.4	10.1
6.0	8.2	9.8	11.7	10.0	6.7	13.4	8.4	16.9	8.0

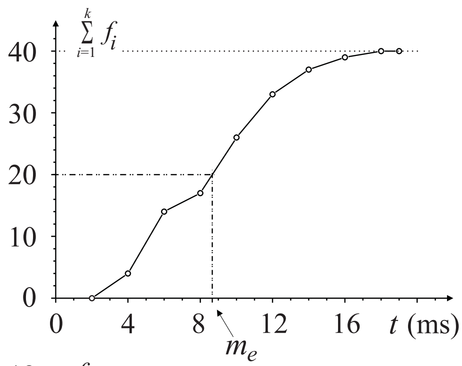
a) Izmerene vrednosti razvrstati u klase širine 2 ms, za donju vrednost prve klase uzeti vrednost 2 ms i prikazati ih tabelarno.
b) Nacrtati poligon frekvencija i poligon kumulativnih frekvencija.
c) Sa poligona proceniti medijanu.

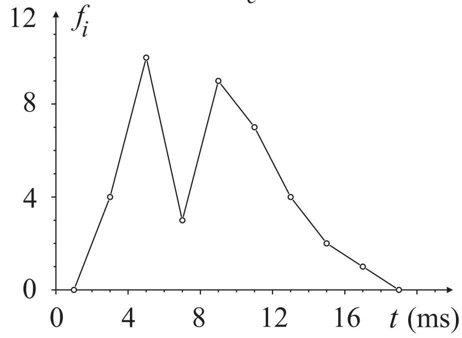
Rešenje:

Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 3.1 3.1 3.5 3.6 | 4.6 4.9 4.9 5.2
5.2 5.3 5.3 5.8 6.0 6.0 | 6.7 7.5
8.0 | 8.2 8.4 8.5 9.3 9.7 9.8 9.9
10.0 10.0 | 10.1 10.4 10.5 11.6 11.6 11.7
11.8 | 12.4 12.6 12.9 13.4 | 14.2 15.1 | 16.9 |

k	klase	k_i (ms)	f_i	$\sum_{i=1}^{k} f_i$
1	2-4	3	4	4
2	4-6	5	10	14
3	6-8	7	3	17
4	8-10	9	9	26
5	10-12	11	7	33
6	12-14	13	4	37
7	14-16	15	2	39
8	16-18	17	1	40





medijana $m_e = 8.7$ ms

Sa poligona frekvencija (relativnih frekvencija) se ne može proceniti mod. Sa ovog poligona se može uočiti da postoje dve najverovatnije vrednosti. Međutim, oblik poligona ukazuje da možda nisu u pitanju dve najverovatnije vrednosti, već da je u trećoj klasi samo tri merenja zbog malog ukupnog broja merenja (40 merenja). Stoga, ova merenja bi trebalo ponoviti, ili je potrebno uraditi veći broj merenja, a ponekad je možda potrebno uraditi merenja na drugi način.

3.10 Merenjem dužine nekog predmeta nonijusom dobijene su sledeće vrednosti u milimetrima (mm):

22.7	20.9	22.4	20.1	23.8	20.7	22.7	22.1	20.8	22.9
20.5	23.1	22.6	21.8	20.5	23.5	21.1	23.7	22.4	23.1
22.8	21.7	21.0	23.3	23.5	22.7	23.4	22.3	23.4	22.9
23.0	22.5	22.0	22.7	22.9	23.0	22.3	20.8	23.2	23.0
22.3	23.4	21.3	23.1	22.0	20.6	22.8	24.0	20.3	23.2

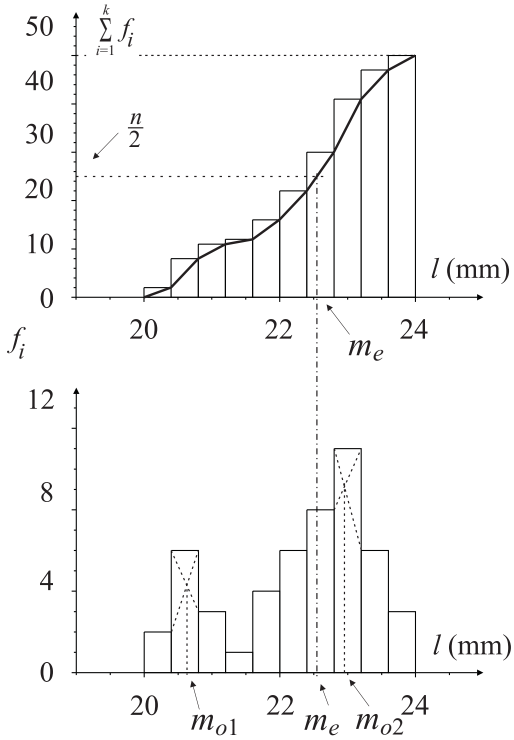
a) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih frekvencija na osnovu podataka razvrstanih u klase širine 0.4 mm, pri čemu je donja granica prve klase 20 mm.
b) Grafički proceniti medijanu i mod.

Rešenje:

Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 20.1 20.3 | 20.5 20.5 20.6 20.7 20.8 20.8 |
20.9 21.0 21.1 | 21.3 | 21.7 21.8 22.0 22.0 |
22.1 22.3 22.3 22.3 22.4 22.4 | 22.5 22.6
22.7 22.7 22.7 22.7 22.8 22.8 | 22.9 22.9
22.9 23.0 23.0 23.0 23.1 23.1 23.1 23.2
23.2 | 23.3 23.4 23.4 23.4 23.5 23.5 | 23.7
23.8 24.0 |

k	klase	k_i (mm)	f_i	$\sum_{i=1}^{k} f_i$
1	20-20.4	20.2	2	2
2	20.4-20.8	20.6	6	8
3	20.8-21.2	21.0	3	11
4	21.2-21.6	21.4	1	12
5	21.6-22.0	21.8	4	16
6	22.0-22.4	22.2	6	22
7	22.4-22.8	22.6	8	30
8	22.8-23.2	23.0	11	41
9	23.2-23.6	23.4	6	47
10	23.6-24.0	23.8	3	50



medijana $m_e = 22.53$ mm;
modovi $m_{o1} = 20.62$ mm i $m_{o2} = 22.96$ mm

3.11 Merenjem dometa iz nekog artiljerijskog oruđa dobijena su sledeća rastojanja u metrima (m):

12210	12675	12350	12490	12155	12600	12920	12640	12320
12840	12625	12435	12270	12735	12620	12390	12190	12590
12700	12250	12870	12660	12675	12440	12800	12510	12710
12320	12250	12730	12575	12525	12825	12635	12280	12375
12410	12820	12550	12600	12400	12750	12650	12460	12715

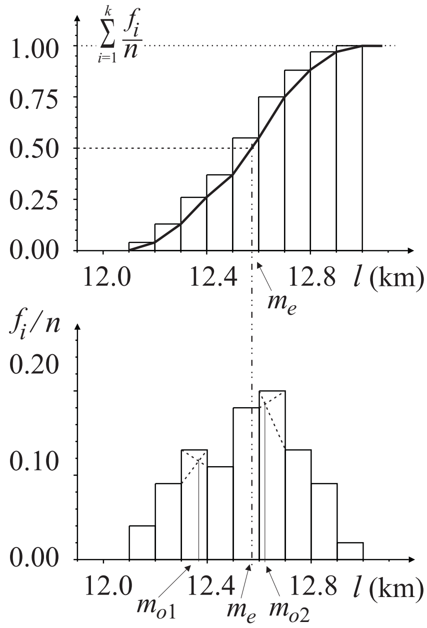
a) Nacrtati histogram relativnih frakvencija i histogram kumulativnih relativnih frekvencija na osnovu podataka razvrstatnih u klase širine 100 m, pri čemu je za donju granicu prve klase 12100 m.
b) Grafički proceniti medijanu i mod.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 12155 12190 | 12210 12250 12270 12280 | 12320 12320 12350 12375

12390 12400 | 12410 12435 12440 12460 12490 |
12510 12525 12550 12550 12575 12590 12600
12600 | 12620 12625 12635 12640 12650 12660
12675 12675 12700 | 12710 12715 12730 12735
12750 12800 | 12820 12825 12840 12870 | 12920 |

k	klase	k_i (m)	f_i	f_i/n	$\sum_{i=1}^{k} f_i/n$
1	12100-12200	12150	2	0.04	0.04
2	12200-12300	12250	4	0.09	0.13
3	12300-12400	12350	6	0.13	0.26
4	12400-12500	12450	5	0.11	0.37
5	12500-12600	12550	8	0.18	0.55
6	12600-12700	12650	9	0.20	0.75
7	12700-12800	12750	6	0.13	0.88
8	12800-12900	12850	4	0.09	0.97
9	12900-13000	12950	1	0.02	0.99



medijana $m_e = 12.570$ km;
modovi $m_{o1} = 12.375$ km i $m_{o2} = 12.620$ km

Na slici su dometi projektila prikazani u kilometrima (km) zbog preglednosti. Pažljivim posmatranjem kumulativnih relativnih frekvencija može se uočiti da je ukupna kumulativna frekvencija za poslednju klasu 0.99. Do ovoga je došlo zbog zaokruživanja. Na primer $2/45 = 0.4444...$ što zaokružujemo na 0.44, $8/45 = 0.1777...$ što zaokružujemo na 0.18 i slično. Međutim poslednju klasu na histogramu kumulativnih frekvencija smo nacrtali da je jednaka jedinici, jer ako vrednost 0.99 zaokružimo npr. na jednu decimalu dobićemo jedinicu. Mada, iako se baš vrednost 0.99 nacrta biće veoma blizu jedinici.

$\boxed{\textbf{3.12}}$ Prilikom fabričke kontrole proizvoda, za 50 nasumično odabranih električnih uređaja, mereno je vreme radnih sati do otkaza (kvara), pri čemu su dobijene sledeće vrednosti u satima:

3850	110	45	1530	194	69	54	1000	605	188
85	5300	1930	301	65	2500	94	3770	47	698
1690	200	4500	150	6000	74	100	1125	957	255
1750	1988	87	61	185	1237	138	197	189	555
79	105	380	51	607	3990	1590	190	3000	765

Nacrtati histogram frekvencija u polulogaritamskoj skali, sa vremenskom osom logaritamskom. Za granice klasa uzeti: 2-4; 4-6; 6-10 za svaki red veličina.

Rešenje:

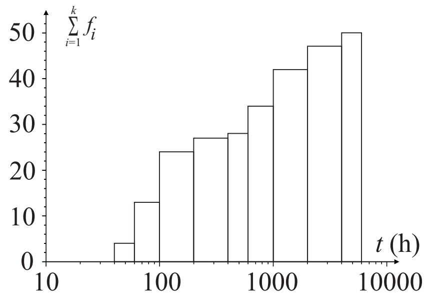
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

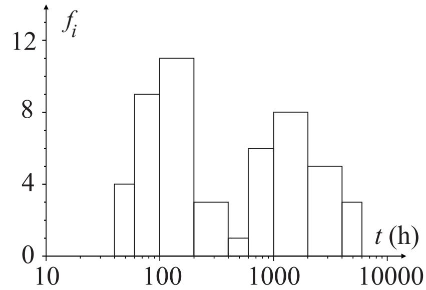
| 45 47 51 54 | 61 65 69 74 79 85
87 94 100 | 105 110 138 150 185 188 189
190 194 197 200 | 255 301 380 | 555 | 605 607
698 735 957 1000 | 1125 1237 1530 1590 1690 1750
1930 1988 | 2500 3000 3770 3850 3990 | 4500 5300 6000 |

Histogram sa logaritamskom x osom se crta samo u slučaju kad se maksimalna x_{max} i minimalna x_{min} izmerena vrednost razlikuju za nekoliko redova veličine. U ovom zadatku su maksimalna i minimalna izmerena vrednost: $x_{max} = 6000$ h i $x_{min} = 45$ h, respektivno.

Znači opseg $x_{max} - x_{min}$ prelazi preko dva reda veličine. Da ne bi veliki broj izmerenih vrednosti bio skoncentrisan u nekoliko prvih klasa histogram se crta u polulogaritamskoj skali.

k	klase	k_i (h)	f_i	$\sum_{i=1}^{k} f_i$
1	40-60	50	4	4
2	60-100	80	9	13
3	100-200	150	11	24
4	200-400	300	3	27
5	400-600	500	1	28
6	600-1000	800	6	34
7	1000-2000	1500	8	42
8	2000-4000	3000	5	47
9	4000-6000	5000	3	50





3.2 Analitički prikaz rezultata merenja

Rezultati merenja prikazani grafički histogramima ili poligonima daju potpunu informaciju o merenoj fizičkoj veličini. Međutim, nekada je potrebno poznavati neke numeričke karakteristike merene veličine, kao što su: srednja vrednost, odstupanja od srednje vrednosti (apsolutna i relativna), medijana i mod, kao i veličine koje mere rasturanje izmerenih vrednosti oko srednje vrednosti (standardna devijacija, koeficijent asimetrije i koeficijent spljoštenosti).

3.2.1 Numeričke karakteristike merenih fizičkih veličina

1) **srednja vrednost**

srednja vrednost pojedinačnih merenja $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Za računanje srednjih vrednosti nije potrebno sređivanje izmerenih vrednosti u rastući niz. U slučaju velikog broja merenja korisno je srediti podatke u rastući niz. Često se dešava da se neke vrednosti više puta javljaju, pa se tim vrednostima dodeljuje frekvenca f_i (inače frekvenca je $f_i \geq 1$). Tako od niza od n elemenata dobijamo niz od k elemenata ($k \leq n$) sa frekvencama f_i. Srednja vrednost se tada računa prema izrazu:

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

procenjena srednja vrednost $\overline{x_f}$

Za podatke raspoređene u klasama, ili sa nacrtanog histogramna, srednja vrednost se procenjuje prema izrazu:

$$\overline{x_f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} k_i f_i,$$

u kome k predstavlja broj klasa. Prema tome, svim vrednostima u jednoj klasi se pridružuje vrednost predstavnika klase k_i, tj. sredine klase. Ovako procenjena srednja vrednost se razlikuje od srednje vrednosti pojedinačnih merenja. Ovo odstupanje je utoliko manje ukoliko je histogram pregledinije nacrtan.

2) **apsolutna odstupanja** (od srednje vrednosti)

Apsolutna odstupanja predstavljaju odstupanja pojedinačnih izmerenih vrednosti od srednje vrednosti.

apsolutna odstupanja pojedinačnih merenja Δx_i $\qquad \Delta x_i = x_i - \overline{x}$

apsolutna odstupanja vrednosti raspoređenih u klase Δk_i $\qquad \Delta k_i = k_i - \overline{x_f}$

Apsolutna odstupanja ne predstavljaju apsolutne vrednosti ovih odstupanja, mogu biti i negativna. Nazivaju se apsolutna (po analogiji sa apsolutnim greškama, vidi kasnije) da bi ih razlikovali od relativnih odstupanja.

$|\Delta x_i|$ i $|\Delta k_i|$ su apsolutne vrednosti apsolutnih odstupanja

3) **relativna odstupanja** (od srednje vrednosti)

relativna odstupanja pojedinačnih merenja δx_i $\qquad \delta x_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\overline{x}}(\cdot 100\%)$

relativna odstupanja vrednosti raspoređenih u klase δk_i $\qquad \delta k_i = \frac{k_i - \overline{x_f}}{\overline{x_f}}(\cdot 100\%)$

Relativna odstupanja se najčešće računaju u odnosu na srednju vrednost. Ukoliko se izražavaju u procentima % (što je najčešći slučaj) tada se u gornjim izrazima množi sa 100.

4) **Medijana** - središnja vrednost niza izmerenih podataka, prethodno sređenog po rastućem ili opadajućem redosledu.

Medijana za pojedinačne vrednosti M_e

- U slučaju neparnog broja članova niza, x_1, x_2, ... x_n; $e = \frac{n+1}{2}$, e označava redni broj središnjeg člana niza, $M_e = x_e$
- U slučaju parnog broja članova niza, postoje dve središnje vrednosti niza, $e_1 = \frac{n}{2}$ i $e_1 = \frac{n}{2} + 1$; pa je $M_e = (x_{e1} + x_{e2})/2$

Medijana za vrednosti raspoređene u klase[2] m_e $\qquad m_e = c_e + \frac{\frac{n}{2} - \sum\limits_{i=2}^{e} f_{i-1}}{f_e} \cdot h$

n - ukupan broj merenja; c_e - donja granica medijalne klase, tj. prve klase čija je kumulativna frekvencija jednaka ili prelazi polovinu ukupne frekvencije ($n/2$); f_e - frekvencija medijalne klase; $\sum_{i=2}^{e} f_{i-1}$ - kumulativna frekvencija klase koja prethodi medijalnoj, h - širina klasa (ista je za sve klase).

Suma apsolutnih vrednosti odstupanja pojedinih vrednosti x_i od medijane m_e je najmanja. Manja je od sume apsolutnih odstupanja od srednje vrednost: $\sum_i |x_i - m_e| \leq \sum_i |x_i - \overline{x_f}|$

5.) **mod** - najčešća ili najverovatnija vrednost u nizu izmerenih podataka.

Mod za pojedinačne vrednosti M_o je ona vrednost koja se najčešće javlja u nizu izmerenih vrednosti[3], tj. vrednost koja ima najveću frekvencu pojavljivanja.

Mod za vrednosti raspoređene u klase[4] m_o se nalazi u klasi sa najvećom frekvencom. Klasa sa najvećom frekvencom se naziva modalna klasa.

$$m_o = c_0 + \frac{f_o - f_{o-1}}{(f_o - f_{o-1}) + (f_o - f_{o+1})} \cdot h$$

c_o - donja granica medijalne klase; f_o - frekvencija modalne klase; $f_o - f_{o-1}$ - razlika frekvencija modalne klase i predhodne; $f_o - f_{o+1}$ - razlika frekvencija modalne klase i naredne; h - širina klasa (ista je za sve klase).

[3]Mod se skoro nikad ne određuje za pojedinačne vrednosti, jer veoma često se dešava da se nijedna vrednost ne javlja više puta ili da se veliki broj vrednosti javlja isti broj puta.

[4]Zbog istog razloga kao kod medijane i mod za vrednosti raspoređene u klase će se obeležavati malim slovom.

3.2.2 Mera rasejavanja podataka oko srednje vrednosti

Metoda momenata se najčešće koristi za izražavanje nekih kvantitativnih karaktersitika histograma (ili poligona) u odnosu na neku vrednost. Ako se te karakteristike određuju u odnosu na srednju vrednost, tada ovaj metod zovemo **metod centralnih momenata**.

Centralni moment reda l:
$$\tilde{m}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(k_i - \overline{x_f})^l \cdot f_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^l \cdot f_i$$

- za $l = 0 \Rightarrow \tilde{m}_0 = 1$ i $l = 1 \Rightarrow \tilde{m}_1 = 0$, nisu praktično značajni.
- Centralni moment reda 2 ($l = 2$) je disperzija uzorka $\tilde{m}_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^2 \cdot f_i = \tilde{D}(x)$

  Standardna devijacija uzorka $\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}(x)}$

  Standardna devijacija se uvodi jer disperzija ima dimenzije merene veličine na kvadrat.

  Korekcija standardne devijacije

  $\tilde{\sigma}_k(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2 \cdot f_i}$ u slučaju pojedinačnih merenja, tj.

  $\tilde{\sigma}_{kf}(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^2 \cdot f_i}$ u slučaju kada su merenja raspoređena po klasama.

  U korigovanom izrazu $n-1$ ne predstavlja broj merenja, već broj stepeni slobode. Korekcija predstavlja broj parametara koje je potrebno odrediti od n merenja, koji su potrebni za računanje izraza. Kako je za određivanje standardne devijacije neophodno najpre odrediti srednju vrednost $\overline{x}$, broj merenja se koriguje za 1 (tj. broj stepeni slobode u ovom slučaju je $n-1$). Bez ove korekcije za $n = 1$ bilo bi $x = \overline{x}$ i $\tilde{\sigma} = 0$, što znači da je to najtačnije merenje. Prema korigovanom izrazu $\tilde{\sigma}_k$ je neodređeno velika (deljenje sa nulom), sve dok nemamo barem još jedno merenje.

  Za veliki broj merenja n ($n \geq 30$), $n-1 \to n$, pa $\tilde{\sigma}_k \to \tilde{\sigma}$. Medjutim, mi ćemo na dalje koristiti korigovanu standardnu devijaciju i radi pojednostavnjenja označavaćemo je samo sa $\tilde{\sigma}$.

- Centralni moment reda $l = 3$ jednak je $\tilde{m}_3 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^3 \cdot f_i$

  Centralni moment reda 3, kao prvi neparni moment različit od nule, daje informaciju o asimetriji histograma.

- Centralni moment reda $l = 4$ dat je izrazom $\tilde{m}_4 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^4 \cdot f_i$

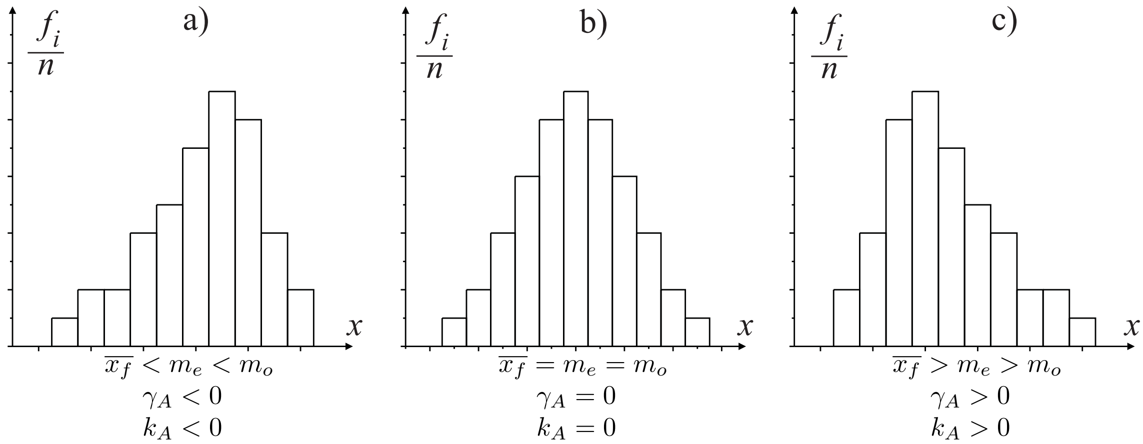
  Centralni moment reda 4 daje informaciju o spljoštenosti histograma.

  I kod ovih momenata se uvodi korekcija kao kod standardne devijacije, pa je:

$$\tilde{m}_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^3 \cdot f_i \qquad \tilde{m}_4 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\Delta k_i^4 \cdot f_i$$

Asimetrija

U slučaju potpuno simetričnih histograma $\overline{x_f} = m_e = m_o$. U slučaju asimetrije ulevo $\overline{x_f} < m_e < m_o$ a u slučaju asimetrije udesno $\overline{x_f} > m_e > m_o$ (kao što je i prikazano na slici 3.6.).



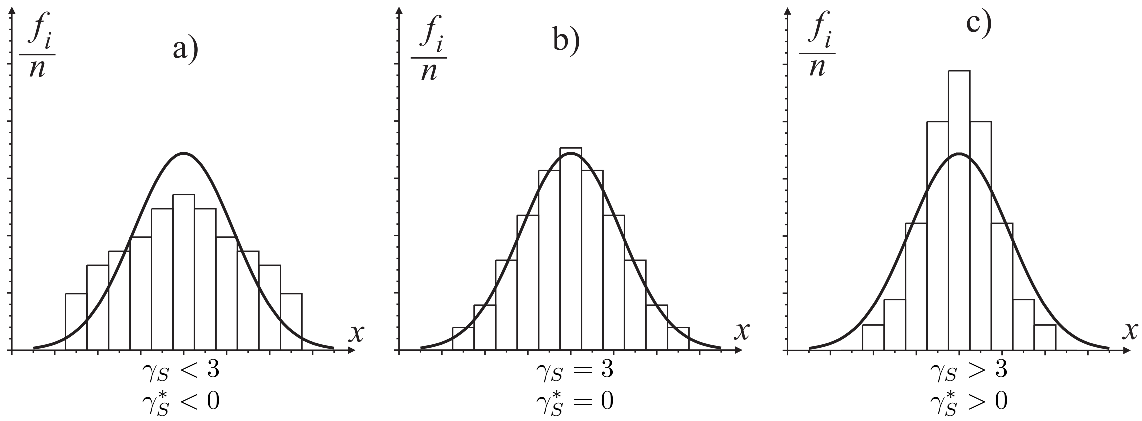
Slika 3.6. Grafički prikaz raspodela, asimetrične ulevo (a), simetrične (b) i asimetrične udesno (c).

Da bi asimetrija mogla da se izrazi kvantitivno uvodi se koeficijenat asimetrije γ_A:

$$\gamma_A = \frac{\tilde{m}_3}{\tilde{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^3 \cdot f_i}{\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^2 \cdot f_i\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{ili Pirsonov koeficijent asimetrije:} \qquad k_A = \frac{\overline{x_f} - m_o}{\tilde{\sigma}_f}$$

Spljoštenost

Spljoštenost predstavlja odstupanje histograma po vertikali od Gausove raspodele (tj, predstavlja meru spljoštenosti u odnosu na Gausovu raspodelu), kao što je prikazano na slici 3.7.



Slika 3.7. Grafički prikaz raspodela, a) spljoštene u odnosu na Gausovu, b) raspodele koja odgovara Gausovoj raspodeli i c) raspodele izdužene u odnosu na Gausovu.

Da bi spljoštenost mogla da se izrazi kvantitivno uvodi se koeficijenat spljoštenosti γ_S (ili γ_S^*) kao:

$$\gamma_S = \frac{\tilde{m}_4}{\tilde{\sigma}^4} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^4 \cdot f_i}{\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^2 \cdot f_i\right)^{\frac{4}{2}}} \qquad \text{ili} \qquad \gamma_S^* = \gamma_S - 3$$

Koeficijenat spljoštenosti γ_S^* se uvodi jer se spljoštenost meri u odnosu na normalnu raspodelu (vidi sliku), a za normalnu raspodelu koeficijenat spljoštenosti iznosi $\gamma_S = 3$. Prema tome, koeficijenat γ_S^* za normalnu raspodelu iznosi nula. Koeficijenat γ_S^* se češće koristi za ispitivanje spljoštenosti, jer se u tom slučaju odstupanje meri u odnosu na nulu, kao u slučaju merenja asimetrije.

Zadaci

3.13 Merenjem otpornosti nekog otpornika dobijene su sledeće vrednosti u omima (Ω):

40.62 40.82 40.78 40.70 40.82 40.78 40.84 40.78 40.85 40.81

Odrediti srednju vrednost, medijanu, mod i apsolutna odstupanja od srednje vrednosti.

Rešenje:

Rastući niz:

40.62 40.70 40.78 40.78 | 40.78

40.81 | 40.82 40.82 40.84 40.85

$$\overline{R} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{7} R_i f_i = \frac{407.8}{10} = 40.78\ \Omega$$

$$M_e = \frac{40.78 + 40.81}{2} = 40.795 \simeq 40.80\ \Omega$$

$M_o = 40.78\ \Omega\ (f_i = 3)$

k	R_i (Ω)	f_i	$R_i f_i$ (Ω)	ΔR_i (Ω)
1	40.62	1	40.62	-0.16
2	40.70	1	40.70	-0.08
3	40.78	3	122.34	0
4	40.81	1	40.81	0.03
5	40.82	2	81.64	0.04
6	40.84	1	40.84	0.06
7	40.85	1	40.85	0.07
$\sum_{i=1}^{7}$		10	407.8	

3.14 Merenjem dužine nekog predmeta mikrometarskim zavrtnjem dobijene su sledeće vrednosti u milimetrima (mm):

4.78 4.76 4.72 4.77 4.71 4.76 4.75 4.74 4.74

Odrediti srednju vrednost, medijanu, mod i relativna odstupanja od srednje vrednosti u procentima.

Rešenje:

Rastući niz:

4.71 4.72 4.73 4.74 $\boxed{4.75}$

4.76 4.76 4.77 4.78

$$\overline{x} = \frac{42.72}{9} = 4.74667 \simeq 4.75 \text{ mm}$$

$M_e = 4.75$ mm

$M_o = 4.76$ mm $(f_i = 2)$

k	R_i (mm)	f_i	$R_i f_i$ (mm)	ΔR_i (mm)	δx_i (%)
1	4.71	1	4.71	-0.04	-0.84
2	4.72	1	4.72	-0.03	-0.63
3	4.73	1	4.73	-0.02	-0.42
4	4.74	1	4.74	-0.01	-0.21
5	4.75	1	4.75	0	0
6	4.76	2	9.52	0.01	0.21
7	4.77	1	4.77	0.02	0.42
8	4.78	1	4.78	0.03	0.63
$\sum_{i=1}^{8}$		9	42.72		

3.15 Merenjem otpornosti nekog otpornika dobijene su sledeće vrednosti u omima (Ω):

147.2 147.4 147.9 147.1 147.1 147.5 147.6 147.4 147.6 147.5

Odrediti srednju vrednost i standardnu devijaciju ovih merenja.

Rešenje:

Rastući niz:

147.1 147.1 147.2 147.4

147.4 147.5 147.5 147.6

147.6 147.9

$\overline{R} = \dfrac{1474.3}{10} = 147.43\ \Omega$

$\tilde{\sigma} = \sqrt{\dfrac{0.561}{9}} = 0.24967 \simeq 0.25\ \Omega$

k	R_i (Ω)	f_i	$R_i f_i$ (Ω)	ΔR_i (Ω)	$\Delta R_i^2 \cdot f_i$ (Ω^2)
1	147.1	2	294.2	-0.33	0.2178
2	147.2	1	147.2	-0.23	0.0529
3	147.4	2	294.8	-0.03	0.0018
4	147.5	2	295.0	0.07	0.0098
5	147.6	2	295.2	0.17	0.0578
6	147.9	1	147.9	0.47	0.2209
$\sum_{i=1}^{6}$		10	1474.3		0.561

$\boxed{3.16}$ Merenjem jačine struje kroz neki otpornik pomoću ampermetra, dobijene su sledeće vrednosti u miliamperima (mA):

0.15 0.27 0.23 0.33 0.19 0.25 0.16 0.22 0.28 0.17 0.19 0.22 0.24 0.27

Odrediti srednju vrednost, apsolutna odstupanja od srednje vrednosti, medijanu i standardnu devijaciju ovih merenja.

Rešenje:

Rastući niz:

0.15 0.16 0.17 0.19

0.19 0.22 $\boxed{0.22}$ $\boxed{0.23}$

0.24 0.25 0.27 0.27

0.28 0.33

$M_e = \frac{i_7+i_8}{2} = 0.225$ mA

$\bar{i} = \dfrac{3.17}{14} \simeq 0.23$ mA

$\tilde{\sigma} = \sqrt{\dfrac{0.0345}{13}} = 0.0515 \simeq 0.05$ mA

k	R_i (Ω)	f_i	$R_i f_i$ (Ω)	ΔR_i (Ω)	$\Delta R_i^2 \cdot f_i$ (Ω^2)
1	0.15	1	0.15	-0.08	0.0064
2	0.16	1	0.16	-0.07	0.0049
3	0.17	1	0.17	-0.06	0.0036
4	0.19	2	0.38	-0.04	0.0032
5	0.22	2	0.44	-0.01	0.0001
6	0.23	1	0.23	0	0
7	0.24	1	0.24	0.01	0.0001
8	0.25	1	0.25	0.02	0.0004
9	0.27	2	0.54	0.04	0.0032
10	0.28	1	0.28	0.05	0.0025
11	0.33	1	0.33	0.10	0.0100
$\sum_{i=1}^{11}$		14	3.17		0.0345

$\boxed{3.17}$ Merenjem temperature ključanja propana C_3H_8 na atmosferskom pritisku dobijene slu sledeće vrednosti u Kelvinovim stepenima (K):

231.4	231.7	230.7	231.9	231.8	232.2	228.2	228.4
230.1	231.8	231.7	231.3	229.9	231.1	231.2	229.8
232.2	229.0	230.0	229.1	232.6	230.4	230.4	231.0
230.4	230.5	232.8	229.8	231.2	229.2	228.2	232.3
230.4	232.0	231.1	231.2	230.0	228.9	229.3	230.8

a) Naći srednju vrednost, medijanu, mod i relativna odstupanja od srednje vrednosti u procentima za pojedinačna merenja.
b) Proceniti srednju vrednost, medijanu, mod, kao i relativna odstupanja od procenjene srednje vrednosti u procentima, za podatke razvrstane u klase širine 0.8 K, ako je donja granica prve klase 228.0 K.
c) Uporediti vrednosti medijane i moda procenjene analitički sa vrednostima procenjenim grafički.

Rešenje:

Opadajući niz izmerenih vrednosti je:

$$\begin{array}{l}
|\ 232.8\quad 232.6\quad 232.3\quad 232.2\quad 232.2\ |\ 232.0\quad 231.9\quad 231.8 \\
231.8\quad 231.7\quad 231.7\quad 231.4\quad 231.3\ |\ 231.2\quad 231.2\quad 231.2 \\
231.1\quad 231.1\quad 231.0\quad \boxed{230.8}\quad \boxed{230.7}\quad 230.5\ |\ 230.4\quad 230.4 \\
230.4\quad 230.4\quad 230.1\quad 230.0\quad 230.0\quad 229.9\quad 229.8\quad 229.8\ | \\
229.3\quad 229.2\quad 229.1\quad 229.0\quad 228.9\ |\ 228.8\quad 228.4\quad 228.2\ |
\end{array}$$

$$M_e = \frac{t_{20} + t_{21}}{2} = \frac{230.8 + 230.7}{2} = 230.75 \text{ K}$$

k	t_i (K)	f_i	$t_i f_i$ (K)	Δt_i (K)	δt_i (%)
1	228.2	1	228.2	-2.47	-1.07
2	228.4	1	228.4	-2.27	-0.98
3	228.8	1	228.8	-1.87	-0.81
4	228.9	1	228.9	-1.77	-0.77
5	229	1	229	-1.67	-0.72
6	229.1	1	229.1	-1.57	-0.68
7	229.2	1	229.2	-1.47	-0.64
8	229.3	1	229.3	-1.37	-0.59
9	229.8	2	459.6	-0.87	-0.38
10	229.9	1	229.9	-0.77	-0.33
11	230	2	460	-0.67	-0.29
12	230.1	1	230.1	-0.57	-0.25
13	230.4	4	921.6	-0.27	-0.12
14	230.5	1	230.5	-0.17	-0.07
15	230.7	1	230.7	0.03	0.01
16	230.8	1	230.8	0.13	0.06
17	231	1	231	0.33	0.14
18	231.1	2	462.2	0.43	0.19
19	231.2	3	693.6	0.53	0.23
20	231.3	1	231.3	0.63	0.27
21	231.4	1	231.4	0.73	0.32
22	231.7	2	463.4	1.03	0.45
23	231.8	2	463.6	1.13	0.49
24	231.9	1	231.9	1.23	0.53
25	232	1	232	1.33	0.58
26	232.2	2	464.4	1.53	0.66
27	232.3	1	232.3	1.63	0.71
28	232.6	1	232.6	1.93	0.84
29	232.8	1	232.8	2.13	0.92
$\sum_{i=1}^{29}$		40	9226.6		

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{29} \frac{t_i}{f_i} = \frac{9226,6}{40} = 230.67\ K \qquad M_o = 230.4 \text{ K}$$

k	granice	k_i (K)	f_i	$\sum_i f_i$	$k_i f_i$ (K)	Δk_i (K)	δk_i (%)
1	228.0-228.8	228.4	3	3	685.3	-2.18	-0.945
2	228.8-229.6	229.2	5	8	1146.0	-1.38	-0.598
3	229.6-230.4	230.0	10	18	2300.0	-0.58	-0.252
4	230.4-231.2	230.8	9	27	2077.2	0.22	0.095
5	231.2-232.0	231.6	8	35	1852.8	1.02	0.442
6	232.0-232.8	232.4	5	40	1162.0	1.82	0.789
$\sum_{i=1}^{6}$					9223.3		

$$\overline{t_f} = \frac{9223.3}{40} = 230.5825 \simeq 230.58 \text{ K}$$

$$m_e = c_e + \frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=2}^{e} f_{i-1}}{f_e} \cdot h = 230.4 + \frac{20-18}{9} \cdot 0.8 = 230.57778 \simeq 230.58 \text{ K}$$

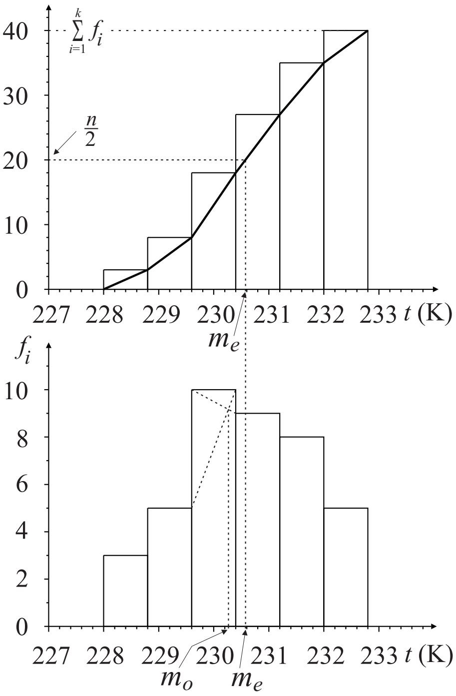
$\frac{n}{2} = 20$ - ukupan broj merenja;
$c_e = 230.4$ K - donja granica medijalne klase;

$f_e = 9$ - frekvencija medijalne klase;
$\sum_{i=2}^{e} f_{i-1} = 18$ - kumulativna frekvencija klase koja prethodi medijalnoj,
$h = 0.8$ K - širina klasa.

$$m_o = c_0 + \frac{f_o - f_{o-1}}{(f_o - f_{o-1}) + (f_o - f_{o+1})} \cdot h =$$
$$= 229.6 + \frac{5}{5+1} \cdot 0.8 = 230.26667 \simeq 230.27 \text{ K}$$

$c_o = 229.6$ - donja granica modalne klase;
$f_o = 10$ - frekvencija modalne klase;
$f_o - f_{o-1} = 5$ - razlika frekvencija modalne klase i predhodne;
$f_o - f_{o+1} = 1$ - razlika frekvencija modalne klase i naredne;
$h = 0.8$ - širina klasa (ista je za sve klase).

analitička procena	grafička procena
$m_e = 230.58$ K	$m_e = 230.48$ K
$m_o = 230.27$ K	$m_o = 230.25$ K



3.18 Merenjem brzine zvuka u vazduhu na 172° C dobijeni su sledeći rezultati u m/s:

424	412	414	430	418	423	421	414	422	429
421	445	439	425	439	420	434	404	402	428
446	412	398	425	416	434	398	412	419	428

a) Proceniti srednju vrednost, apsolutna odstupanja i standardnu devijaciju podataka razvrstanih u klase širine 8 m/s, pri čemu je donja granica prve klase 392.
b) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih relativnih frekvencija i grafički proceniti medijanu i mod.
c) Uporediti vrednosti medijane i moda procenjene grafički sa odgovarajućim vrednostima procenjenim analitički i odrediti vrednost Pirsonovog koeficijena asimetrije.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 398 398 | 402 404 | 412 412 412 414 414 416 |

418 419 420 421 421 422 423 424 | 425 425

428 428 429 430 | 434 434 439 439 | 445 446 |

k	granice	v_i (m/s)	f_i	$v_i f_i$ (m/s)	Δv_i (m/s)	$\Delta v_i^2 f_i$ (m/s)^2	$\sum_i f_i$
1	392-400	396	2	792	-25.1	1260.02	2
2	400-408	404	2	808	-17.1	584.82	4
3	408-416	412	6	2472	-9.1	496.86	10
4	416-424	420	8	3360	-1.1	9.68	18
5	424-432	428	6	2568	6.9	285.66	24
6	432-440	436	4	1744	14.9	888.04	28
7	440-448	444	2	888	22.9	1048.82	30
$\sum_{i=1}^{7}$				12632		4573.9	

$$\overline{v_f} = \frac{12632}{30} = 421.066667 \simeq 421.1 \text{ m/s}$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{4573.9}{29}} = 12.5587 \simeq 12.6 \text{ m/s}$$

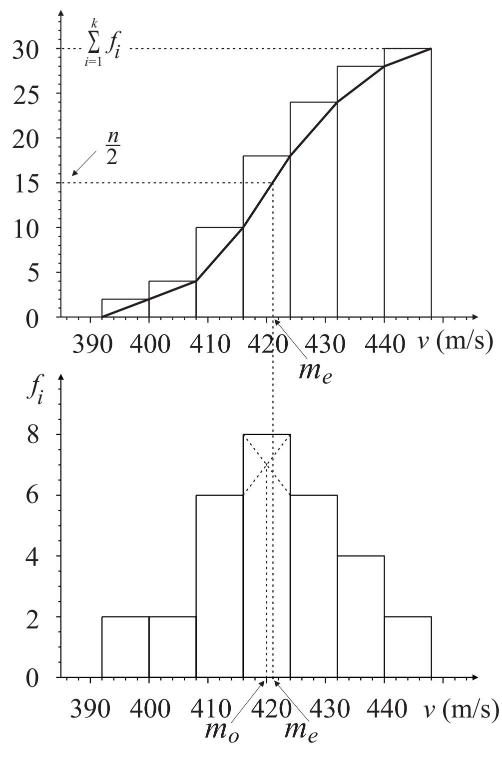
$$m_e = c_e + \frac{\frac{n}{2} - \sum\limits_{i=2}^{e} f_{i-1}}{f_e} \cdot h = \\ = 416 + \tfrac{15-10}{8} \cdot 8 = 421 \text{ m/s}$$

$$m_o = c_0 + \frac{f_o - f_{o-1}}{(f_o - f_{o-1}) + (f_o - f_{o+1})} \cdot h = \\ = 416 + \frac{2}{2+2} \cdot 8 = 420 \text{ m/s}$$

$\overline{v_f} > m_e > m_o$ tj. $(421.1 > 421 > 420)$ asimetrija udesno

$k_A = \dfrac{\overline{v_f} - m_o}{\tilde{\sigma}} = \dfrac{421.1 - 420}{12.6} = 0.087$ asimetrija udesno

analitička procena	grafička procena
$m_e = 421$ m/s	$m_e = 421.1$ m/s
$m_o = 420$ m/s	$m_o = 420$ m/s



$\boxed{\textbf{3.19}}$ Vrednosti dobijene merenjem mase nekog predmeta analitičkom vagom raspoređene su u klase širine 0.2 mg, što je prikazano u sledećoj tabeli:

m_i (mg)	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9	4.1	4.3	4.5	4.7	4.9	5.1	5.3	5.5	5.7	5.9
f_i	1	6	9	14	15	8	6	6	5	4	5	4	4	2	1

a) Iz ovako sređenih podataka nacrtati poligon relativnih frekvencija i poligon kumulativnih relativnih frekvencija i grafički proceniti medijanu.
b) Proceniti srednju vrednost i standardnu devijaciju na osnovu ovako sređenih podataka.
c) Proceniti koeficijente asimetrije i spljoštenosti.

Rešenje:

k	granice (mg)	m_i (mg)	f_i	f_i/n	$\sum_i f_i/n$	$m_i f_i$ (mg)	Δv_i (mg)	$\Delta m_i^2 f_i$ (mg^2)	$\Delta m_i^3 f_i$ (mg^3)	$\Delta m_i^4 f_i$ (mg^4)
1	3.0-3.2	3.1	1	0.011	0.011	3.1	-1.12	1.2544	-1.4050	1.5740
2	3.2-3.4	3.3	6	0.067	0.078	19.8	-0.92	5.0784	-4.6720	4.2980
3	3.4-3.6	3.5	9	0.100	0.178	31.5	-0.72	4.6656	-3.3590	2.4190
4	3.6-3.8	3.7	14	0.156	0.334	51.8	-0.52	3.7856	-1.9690	1.0240
5	3.8-4.0	3.9	15	0.167	0.501	58.5	-0.32	1.5360	-0.4920	0.1570
6	4.0-4.2	4.1	8	0.089	0.590	32.8	-0.12	0.1151	-0.0140	0.0017
7	4.2-4.4	4.3	6	0.067	0.657	25.8	0.08	0.0384	0.0031	0.0002
8	4.4-4.6	4.5	6	0.067	0.724	27.0	0.28	0.4704	0.1320	0.0369
9	4.6-4.8	4.7	5	0.056	0.780	23.5	0.48	1.1520	0.5530	0.2650
10	4.8-5.0	4.9	4	0.044	0.824	19.6	0.68	1.8496	1.2580	0.8550
11	5.0-5.2	5.1	5	0.056	0.880	25.5	0.88	3.8720	3.4070	2.9980
12	5.2-5.4	5.3	4	0.044	0.924	21.2	1.08	4.6656	5.0390	5.4420
13	5.4-5.6	5.5	4	0.044	0.968	22.0	1.28	6.5536	8.3890	10.737
14	5.6-5.8	5.7	2	0.022	0.990	11.4	1.48	4.3808	6.4840	9.5960
15	5.8-6.0	5.9	1	0.011	$1.001 \simeq 1$	5.9	1.68	2.8224	4.7420	7.9660
$\sum_{i=1}^{15}$			90			379.4		42.24	18.0961	47.3698

Prilikom računanja kumulativnih relativnih fekvencija dolazi do greške $\simeq$ 0.001 zbog zaokruživanja. Ukoliko se barata sa većim brojem decimala ova greška se smanjuje.

$$\overline{U_f} = \frac{379.4}{90} = 4.22 \text{ mg}$$

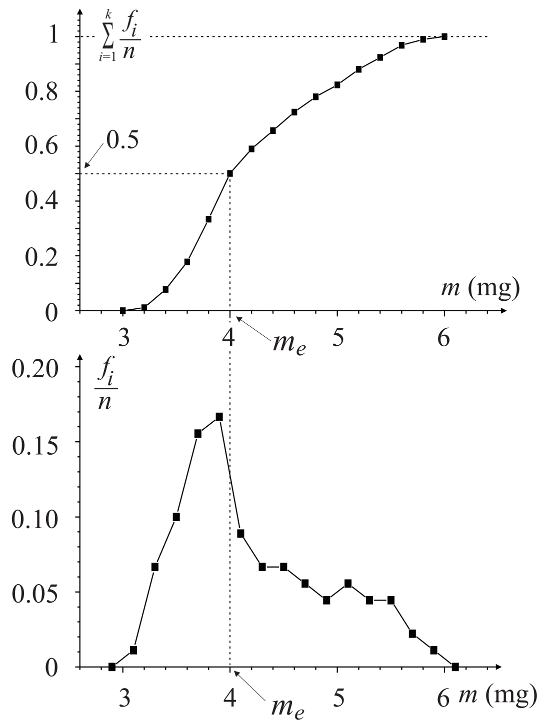
$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{42.24}{89}} = 0.68992 \simeq 0.69 \text{ mg}$$

$$\gamma_A = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^3 \cdot f_i}{\tilde{\sigma}^3} = \frac{\frac{18.0961}{89}}{(0.69)^3} = 0.619$$

$$\gamma_S^* = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^4 \cdot f_i}{\tilde{\sigma}^4} - 3 \frac{\frac{47.3698}{89}}{(0.69)^4} - 3 = -0.652$$

Raspodela je asimetrična udesno ($\gamma_A = 0.619$) i spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu ($\gamma_S^* = -0.652$)

grafička procena medijane: $m_e = 4$ mg



$\boxed{\textbf{3.20}}$ Merenjem visine učenika u nekom odeljenju osmog razreda dobijene su sledeće visine u cm:

183	166	171.2	182	173.5	163.5	176	186	188	193
164	185.5	175.5	189	175.5	181	184.3	171	191.2	181.5
173	165.3	186.2	177.5	176	182	168	178	182	184

a) Proceniti prosečnu visinu učenika u odeljenju i standardnu devijaciju podataka razvrstanih u klase širine 5 cm. Pritom, za donju granicu prve klase uzeti vrednost 160 cm.
b) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih frekvencija.
c) Odrediti koeficijente asimetrije i spljoštenosti.

Rešenje:
Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 163.5 164 | 165.3 166 168 | 171 171.2 173 173.5 | 175.5

175.5 176 176 177.5 178 | 181 181.5 182 182 182

183 184 184.3 | 185.5 186 186.2 188 189 | 191.2 193

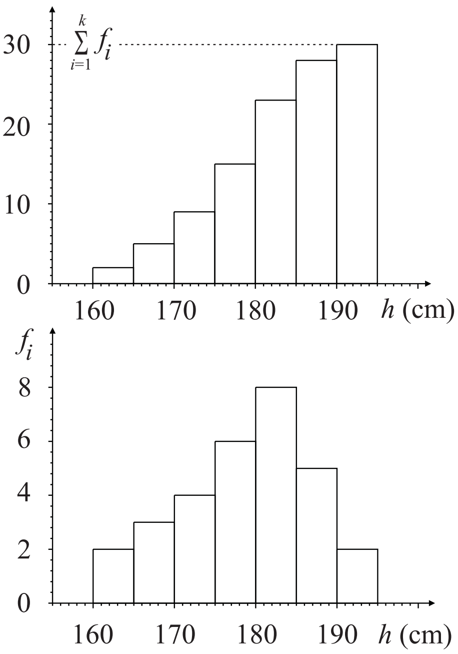
k	granice (cm)	h_i (cm)	f_i	$\sum_i f_i$	$h_i f_i$ (cm)	Δh_i (cm)	$\Delta h_i^2 f_i$ (cm^2)	$\Delta h_i^3 f_i$ (cm^3)	$\Delta h_i^4 f_i$ (cm^4)
1	160-165	162.5	2	2	325	-16.33	533.338	-8709.406	142224.605
2	165-170	167.5	3	5	502.5	-11.33	385.107	-4363.259	49435.723
3	170-175	172.5	4	9	690	-6.33	160.276	-1014.545	6422.067
4	175-180	177.5	6	15	1065	-1.33	10.613	-14.116	18.774
5	180-185	182.5	8	23	1460	3.67	107.751	395.447	1451.290
6	185-190	187.5	5	28	937.5	8.67	150.338	3258.572	28251.818
7	190-195	192.5	2	30	385	13.67	373.738	5108.996	69839.972
$\sum_{i=1}^{7}$					5365		1721.161	-5338.311	297644.249

$$\overline{h_f} = \frac{5365}{30} = 178.8333 \simeq 178.83 \text{ cm}$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1721.161}{29}} = 7.7039 \simeq 7.70 \text{ cm}$$

$$\gamma_A = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^3 \cdot f_i}{\tilde{\sigma}^3} = \frac{-\frac{5338.311}{29}}{(7.70)^3} = -0.403$$

$$\gamma_S^* = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta k_i^4 \cdot f_i}{\tilde{\sigma}^4} - 3 = \frac{\frac{297644.249}{29}}{(7.70)^4} - 3 = -0.080$$



Raspodela je asimetrična udesno ($\gamma_A = 0.403$) i malo spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu ($\gamma_S^* = -0.080$)

$\boxed{\textbf{3.21}}$ Prilikom 50 merenja napona na nekom naponskom izvoru dobijene su sledeće vrednosti u voltima (V):

363.8	363.6	365.4	367.4	366.1	364.8	363.3	364.7	362.9	367.1
363.6	363.2	368.7	366.1	363.7	367.3	365.1	362.7	368.2	367.2
366.4	363.8	365.9	369.4	364.6	365.8	366.3	361.7	366.4	367.6
367.9	365.3	363.9	364.3	365.7	366.9	365.4	363.3	365.3	364.1
364.2	362.3	362.9	364.3	363.4	363.2	363.8	367.4	364.6	364.6

a) Dobijene vrednosti razvrstati u klase širine 1, pri čemu je donja granica prve klase 361.5 i nacrtati histogram frekvencija i historgam kumulativnih frekvencija.
b) Proceniti srednju vrednost, medijanu, mod i standardnu devijaciju ovako sređenih podataka i grafički proceniti medijanu i mod.
c) Proceniti asimetriju i spljoštenost histograma.

Rešenje: Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 361.7 362.3 | 362.7 362.9 362.9 363.2 363.2 363.3 363.3 363.4 |

363.6 363.6 363.7 363.8 363.8 363.8 363.9 364.1 364.2 364.3

364.3 | 364.6 364.6 364.6 364.7 364.8 365.1 365.3 365.3 365.4

365.4 | 365.7 365.8 365.9 366.1 366.1 366.3 366.4 366.4 | 366.9

367.1 367.2 367.3 367.4 367.4 | 367.6 367.9 368.2 | 368.7 369.4

k	granice (V)	h_i (V)	f_i	$\sum_i f_i$	$h_i f_i$ (V)	Δh_i (V)	$\Delta h_i^2 f_i$ (V^2)	$\Delta h_i^3 f_i$ (V^3)	$\Delta h_i^4 f_i$ (V^4)
1	361.5-362.5	362	2	2	724	-3.08	18.973	-58.436	179.984
2	362.5-363.5	363	8	10	2904	-2.08	34.611	-71.991	149.742
3	363.5-364.5	364	11	21	4004	-1.08	12.830	-13.857	14.965
4	364.5-365.5	365	10	31	3650	-0.08	0.064	-0.005	0.0005
5	365.5-366.5	366	8	39	2928	0.92	6.771	6.230	5.731
6	366.5-367.5	367	6	45	2202	1.92	22.118	42.467	81.537
7	367.5-368.5	368	3	48	1104	2.92	25.579	74.691	218.098
8	368.5-369.5	369	2	50	738	3.92	30.733	120.473	472.252
$\sum_{i=1}^{8}$					18254		151.679	99.572	1122.3095

$$\overline{U_f} = \frac{18254}{50} = 365.08 \text{ V} \qquad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{151.679}{49}} = 1.7594 \simeq 1.76 \text{ V}$$

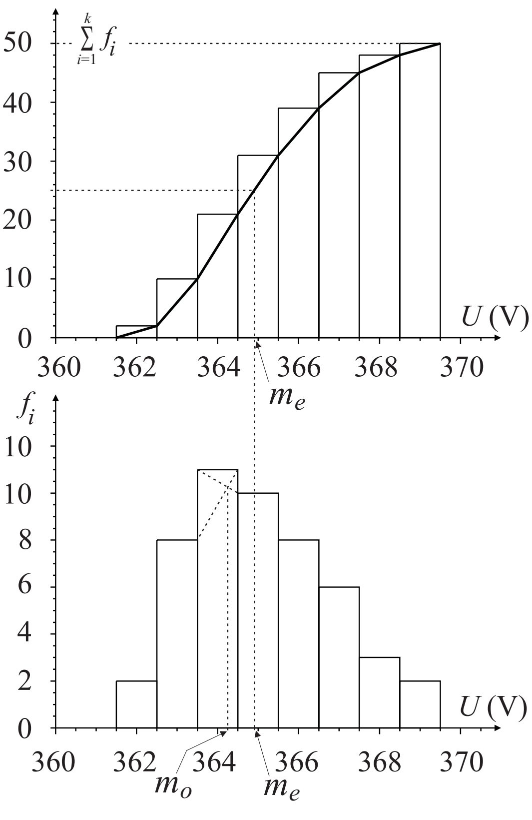
$$\gamma_A = \frac{\frac{99.572}{49}}{(1.7594)^3} = 0.373 \text{ - Asimetrija udesno}$$

$$\gamma_S^* = \frac{\frac{1122.3095}{49}}{(1.7594)^4} - 3 = -0.61 \text{ - Spljoštenost}$$

$$m_e = 364.5 + \frac{25-21}{10} \cdot 1 = 364.9 \text{ V}$$

$$m_o = 363.5 + \frac{3}{3+1} \cdot 1 = 364.25 \text{ V}$$

$$k_A = \frac{365.08 - 364.25}{1.76} = 0.472 \text{ V - Asimetrija udesno}$$



Do različitih vrednosti koeficijenta asimetrije dobijenih metodom momenata i Pirsonovim koeficijentom dolazi zbog različitih metoda računanja koeficijenata i zaokruživanja, aproksimacija i slično.

Grafičkom procenom za medijanu i mod se dobija:

$$m_e = 364.8 \text{ V}, \quad m_o = 364.3 \text{ V}$$

Za vrednosti procenjene grafički i dobijene računanjem važi:

$$m_0 < m_e < \overline{U}$$

3.22 Prilikom određivanja dometa pištolja izvršeno je ispaljivanje pod uglom od 45° uvek pri istoj brzini vetra. Pritom su dobijene sledeće vrednosti u metrima:

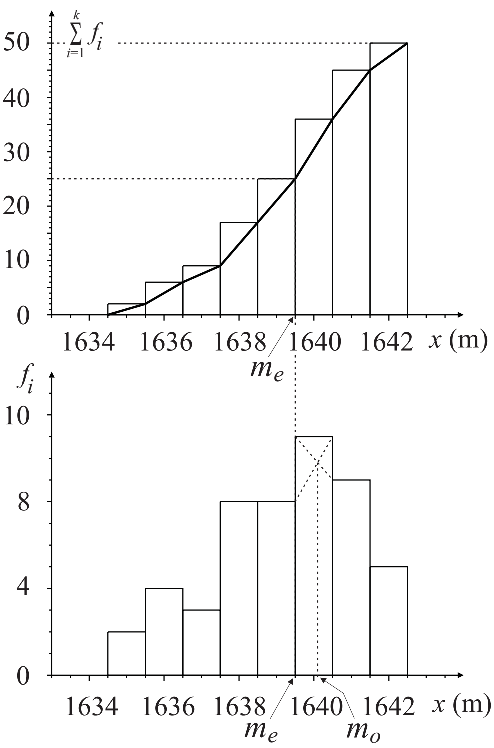
1639.8	1640.3	1641.1	1642.4	1639.2	1637.1	1641.2	1640.9	1636.1	1641.8
1636.9	1640.2	1638.6	1640.9	1640.2	1637.7	1639.8	1641.9	1637.3	1634.9
1641.5	1639.9	1641.9	1640.6	1638.3	1636.5	1639.5	1638.8	1640.2	1641.2
1640.9	1634.8	1635.9	1640.6	1640.4	1638.9	1639.4	1640.4	1640.4	1641.9
1637.7	1638.8	1639.3	1637.9	1638.1	1637.7	1640.5	1636.4	1638.1	1638.5

a) Dobijene vrednosti razvrstati u klase širine 1, pri čemu je donja granica prve klase 1634.5. Iz ovako razvrstanih podataka proceniti srednju vrednost i standardnu devijaciju.
b) Nacrtati histogram frekvencija i histogram kumulativnih frekvencija.
c) Uporediti grafički procenjene vrednosti medijane i moda sa vrednostima dobijenim analitičkom procenom.
d) Odrediti koeficijente asimetrije i spljoštenosti.

Rešenje:

Rastući niz izmerenih vrednosti je:

| 1634.8 1634.9 | 1635.9 1636.1 1636.4
1636.5 | 1636.9 1637.1 1637.3 | 1637.7
1637.7 1637.7 1637.9 1638.1 1638.1
1638.3 1638.5 | 1638.6 1638.8 1638.8
1638.9 1639.2 1639.3 1639.4 1639.5 |
1639.8 1639.8 1639.9 1640.2 1640.2
1640.2 1640.3 1640.4 1640.4 1640.4
1640.5 | 1640.6 1640.6 1640.9 1640.9
1640.9 1641.1 1641.2 1641.2 1641.5 |
1641.8 1641.9 1641.9 1641.9 1642.4 |



k	granice (m)	x_i (m)	f_i	$\sum_i f_i$	$x_i f_i$ (m)	Δx_i (m)	$\Delta x_i^2 f_i$ (m^2)	$\Delta x_i^3 f_i$ (m^3)	$\Delta x_i^4 f_i$ (m^4)
1	1634.5-1635.5	1635	2	2	3270	-4.2	35.28	-148.176	622.339
2	1635.5-1636.5	1636	4	6	6544	-3.2	40.96	-131.072	419.430
3	1636.5-1637.5	1637	3	9	4911	-2.2	14.52	-31.944	70.277
4	1637.5-1638.5	1638	8	17	13104	-1.2	11.52	-13.824	16.589
5	1638.5-1639.5	1639	8	25	13112	-0.2	0.32	-0.064	0.013
6	1639.5-1640.5	1640	11	36	18040	0.8	7.04	5.632	4.506
7	1640.5-1641.5	1641	9	45	14769	1.8	29.16	52.488	94.478
8	1641.5-1642.5	1642	5	50	8210	2.8	39.90	109.740	307.328
$\sum_{i=1}^{8}$					81960		178.7	-157.2	1534.96

$$\overline{x_f} = \frac{1639.2}{50} = 1639.2 \text{ m} \qquad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{178.7}{49}} = 1.9097 \simeq 1.91 \text{ m}$$

$$m_e = 1638.5 + \frac{25-27}{8} \cdot 1 = 1639.5 \text{ m} \qquad m_o = 1639.5 + \frac{3}{3+2} \cdot 1 = 1640.1 \text{ m}$$

analitička procena	grafička procena
$m_e = 1639.5$ m	$m_e = 1639.5$ m
$m_o = 1640.1$ m	$m_o = 1640.2$ m

Za vrednosti procenjene grafički i dobijene računanjem važi:

$$\overline{x_f} < m_e < m_0; \quad \text{asimetrija ulevo} \qquad \gamma_A = \frac{\frac{157.2}{49}}{(1.9097)^3} = -0.460 \text{ - Asimetrija ulevo}$$

$$\gamma_S^* = \frac{\frac{1534.96}{49}}{(1.9097)^4} - 3 = -0.646 \text{ - Spljoštenost}$$

Glava 4

Osnovi teorije verovatnoće

4.1 Osnovi kombinatorike

Da bi odredili verovatnoću ishoda u eksperimentu sa jednakoverovatnim različitim rezultatima, potrebno je prebrojati ih. Često je korisno koristiti kombinatoriku, pogotovu u slučaju velikog broja ponavljanja eksperimenata.

Polazi se od sledećih pravila:

Pravilo zbira Ako se događaj jedne vrste može pojaviti na n_1 načina, događaj druge vrste na n_2 načina, ..., događaj k-te vrste na n_k načina, tada se jedan događaj bez obzira na vrstu može pojaviti na $n_1 + n_2 + ... + n_k$ načina.

Pravilo proizvoda Ako se događaj jedne vrste može pojaviti na n_1 načina, događaj druge vrste na n_2 načina, ..., događaj k-te vrste na n_k načina, tada se k događaja jedan za drugim mogu javiti na $n_1 n_2 ... n_k$ načina.

1) **Permutacije**

   Permutacija bez ponavljanja

   Posmatrajmo skup od n elemenata. Bilo koji raspored ovih elemenata, u kome se svaki elemenat samo jednom javlja, zove se permutacija bez ponavljanja, što se simbolički zapisuje kao:

   $P(n) = n!$ - broj permutacija bez ponavljanja od n elemenata

   Permutacija sa ponavljanjem

   Ako se neki od n elemenata javlja k puta, neke permutacije će biti međusobno identične, raspored elemenata će se ponavljati više puta. Broj različitih permutacija sa ponavljanjem je:

   $P_k(n) = \dfrac{n!}{k!}$ - ako se samo jedan elemenat ponavlja k puta, ili

   $P_{k,r,s}(n) = \dfrac{n!}{k!\, r!\, s!}$ - ako se više elemenata ponavlja. Jedan k puta, drugi r puta a teći s puta.

2) **Kombinacije**

   Kombinacija bez ponavljanja

   Svaki podskup od k različitih elemenata skupa od n elemenata zove se kombinacija bez ponavljanja. Broj različitih kombinacija k-te klase od n-elemenata izračunava se kao:

   $$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}$$

Kombinacija sa ponavljanjem

Posmatrajmo n različitih vrsta elemenata i neka svaka vrsta elemenata sadrži najmanje k međusobno jednakih, tj. neka ih ima bar $n-k$. Broj kombinacija k-te klase od n elemenata sa ponavljanjem se računa kao:

$$\overline{C_k}(n) = \binom{n+k-1}{k} \text{ - broj kombinacija sa ponavljanjem}$$

3) **Varijacije**

Varijacija bez ponavljanja

Svaki linearni raspored od k elemenata, nekog skupa od n elemenata ($1 \leq k \leq n$), naziva se varijacija bez ponavljanja. Kako se od n elemenata može napraviti $\binom{n}{k}$ različitih kombinacija k elemenata i kako se od kombinacija k-te klase dobija $k!$ različitih varijacija, broj varijacija bez ponavljanja je:

$$V_k(n) = \binom{n}{k} k! = n(n-1)\cdots[n-(k-1)]$$

Varijacija sa ponavljanjem

Ake se od nekog skupa od n različitih elemenata obrazuju svi mogući rasporedi od podskupa od po k elemenata, tako da se u tim rasporedima jedan ili više elemenata ponavljaju, dobijaju se varijacije sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata. Ukupan broj varijacija sa ponavljanjem od n elemenata k-te klase je:

$$\overline{V_k}(n) = n^k.$$

Zadaci

$\boxed{4.1}$ Napisati sve permutacije od elemenata a, b, c.

Rešenje:

$$\begin{matrix} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{ukupno} \quad P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$\boxed{4.2}$ Napisati sve permutacije bez ponavljanja od elemenata 1, 2, 3, 4.

Rešenje:

$$\begin{matrix} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1243 & 2143 & 3142 & 4132 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \\ 1342 & 2341 & 3241 & 4231 \\ 1423 & 2413 & 3412 & 4312 \\ 1432 & 2431 & 3421 & 4321 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{ukupno} \quad P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$\boxed{4.3}$ Napisati sve permutacije od elemenata a, a, b, c.

Rešenje:

$$\begin{matrix} aabc & baac & caab \\ abac & baca & caba \\ abca & bcaa & cbaa \\ acab & & \\ acba & & \\ aacb & & \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{ukupno} \quad P_2(4) = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$$

4.4 Koliko različitih prirodnih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara: 1, 2, 2, 3, 3, 3?

Rešenje:

Tražimo broj permutacija od 6 elemenata, od kojih se ponavljaju dva jedne vrste i tri druge vrste:

$$P_{2,3}(6) = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$$

4.5 Na koliko se razlićtih načina mogu linearno poređati jedna kraj druge dve crne, tri bele i četiri crvene kuglice?

Rešenje:

Tražimo broj permutacija od 9 elemenata sa ponavljanjem, dva elementa jedne vrste, tri druge vrste i četiri treće vrste:

$$P_{2,3,4}(9) = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2!\,3!} = 1260$$

4.6 Koliko različitih legura daje pet različitih metala, ako u legure ulazi po tri metala?

Rešenje:

Ovo je jednako broju kombinacija od 5 elemenata treće klase, bez ponavljanja:

$$C_3(5) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

4.7 Napisati sve trocifrene brojeve koji se mogu dobiti od cifara 1, 2, 3, 4, i 5, u kojima su sve cifre različite i uređene po veličini.

Rešenje:

123	234	345
124	235	
125	245	
134		
135		
145		

$$\Rightarrow \quad \text{ukupno} \quad C_3(5) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

4.8 Na koliko načina može da se podeli špil od 52 karte na pola, tako da u svakom delu budu dva keca?

Rešenje:

Rešenje je ekvivalentno izvlačenju 24 karata od 48, među kojima nema kečeva i dva keca od 4. Prvo izvlačenje se ostvaruje na $C_{24}(48)$ načina, a drugo na $C_2(4)$ moguća načina. Kako svako izvlačenje „ne kečeva” može da se kombinuje sa izvlačenjem kečeva, broj ovih kombinacija je:

$$C_{24}(48) \cdot C_2(4) = \frac{48!}{24!\,24!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = 1.935... \cdot 10^{14}$$

4.9 Od koliko elemenata broj kombinacija drugog reda iznosi 15?

Rešenje:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) = 30 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 30 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su: $n_1 = 6$ i $n_2 = -5$; rešenje $n_2 = -5$ nije moguće, $\Rightarrow n = 6$.

4.10 Napisati sve kombinacije sa ponavljanjem četvrte klase od elemenata 1, 2, 3.

Rešenje:

1111	1222	2222	3333
1112	1223	2223	
1113	1233	2233	
1122	1333	2333	
1132			
1133			

$$\Rightarrow \quad \overline{C_4}(3) = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!\,2!} = 15$$

4.11 Na koliko načina se n predmeta može podeliti na k osoba?

Rešenje:

Uslovom zadatka je: n - broj klasa; k - broj elemenata; $\Rightarrow \quad \overline{C_k}(n) = \binom{k+n-1}{n}$.

4.12 Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji se mogu napisati ciframa: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Rešenje:

Traženi broj predstavlja broj varijacija sa ponavljanjem od 8 elemenata četvrte klase:

$\overline{V_k}(n) = 8^4 = 4096.$

4.13 Na tiketu za sportsku prognozu ima 12 parova. Koliko različito popunjenih kolona obezbeđuje 12 tačnih pogodaka?

Rešenje:

Broj varijacija sa ponavljanjem od 3 elementa dvanaeste klase: $\Rightarrow \quad \overline{V_{12}}(3) = 3^{12} = 531441.$

4.14 Koliko treba popuniti kombinacija na tiketu sportske prognoze, ako se zna rezultat 5 susreta?

Rešenje:

Kako na tiketu ima 12 parova, ostaje 7 susreta kojima treba pogoditi rezultat. Prema tome, radi se o varijacijama sa ponavljanjem od 3 elementa sedme klase.

$\overline{V_7}(3) = 3^7 = 2187.$

4.15 Koliko kolona na tiketu sportske prognoze treba popuniti, ako se zna da 7 susreta neće biti nerešeno?

Rešenje:

$$\overline{V_k}(n) \cdot \overline{V_{k'}}(n') = \overline{V_5}(3) \cdot \overline{V_7}(2) = 3^5 \cdot 2^7 = 31104.$$

$\overline{V_5}(3)$ - za susrete za koje ne znamo rezultat
$\overline{V_7}(2)$ - za susrete za koje znamo da neće biti nerešeni.

4.16 Koliko ima telefona u gradu čiji su brojevi petocifreni, ako su svi registrovani brojevi telefona takvi da su im sve cifre različite? Koliko ih ima ako ako se cifre ponavljaju?

Rešenje:

Ako se brojevi ponavljaju, brojeva telefona ima: $\overline{V_5}(10) = 10^5 = 100000.$

Ako se cifre u telefonskim brojevima ne ponavljaju, brojeva ima: $V_5(10) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 5! = \frac{10!}{5!\,5!} \cdot 5! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

4.2 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Rezultat merenja fizičke veličine u nekom eksperimentu unapred se ne može jednoznačno odrediti i predstavlja slučajni događaj. Može se odrediti samo njegova verovatnoća.

Ako se skup svih mogućih događaja–rezultata nekog eksperimenta obeleži sa Ω, verovatnoća javljanja svih događaja–rezultata eksperimenta, odnosno skupa Ω je takav da je:

$$P(\Omega) = 1.$$

Slučajni rezultat, odnosno događaj nekog eksperimenta je bilo koji skup A koji je podskup od Ω.

4.2.1 Klasična definicija verovatnoće

Verovatnoća slučajnog rezultata nekog eksperimenta A se određuje izrazom:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$$

Na osnovu ove definicije verovatnoća sigurnog događaja jednaka je: $P(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$.

Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

- U toriji verovatnoće za skupovnu operaciju preseka koristi se termin proizvod.
- Za slučajne događaje A i B koji se međusobno isključuju (ne mogu se desiti istovremeno) važi $P(AB) = 0$.
- Ako se slučajni ishodi međusobno isključuju, za skupovnu operaciju unije u teoriji verovatnoće se koristi termin zbir. Verovatnoća zbira događaja koji se međusobno isključuju je:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- Ako događaji A_1, A_2, ... , A_n koji se međusobno isključuju čine potpun sistem događaja (tj. ako je njihova unija $A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n = \Omega$), verovatnoća njihovog nastupanja je:

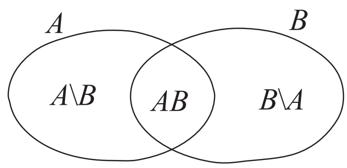
$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

- Suprotan događaj slučajnom događaju A je događaj $\overline{A}$. Pošto A i $\overline{A}$ čine potpun sistem događaja, tada je verovatnoća suprotnog događaja $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- Razlika događaja A i B je događaj koji se realizuje kada se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B, označava se sa $A \setminus B$ (vidi sliku 4.1). Verovatnoća događaja $A \setminus B$ je:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$$



Slika 4.1. Grafički prikaz razlike događaja.

- Verovatnoća zbira događaja koji se međusobno ne isključuju je:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Uslovna verovatnoća

Verovatnoća slučajnog događaja (rezultata) A nekog eksperimenta, kada se događaj B već desio i kada događaj B utiče na događaj A, verovatnoća $P(A|B)$ se računa pomoću izraza:

$$P(A|B) = \frac{P(BA)}{P(B)},$$

gde su: $P(BA)$ verovatnoća nastupanja događaja (rezultata) A i B, a $P(B)$ verovatnoća nastupanja događaja (rezultata) B.

Pošto se ostvario događaj (rezultat) eksperimenta B, skup Ω se svodi na B. Skup B sadrži sve moguće događaje (rezultate) A. Odavde se prema klasičnoj definiciji verovatnoće dobija:

$$P(A|B) = \frac{N(AB)}{N(B)}$$

gde su: $N(AB)$ broj povoljnih događaja (rezultata) A kada se događaj (rezultat) B već desio, a $N(B)$ broj povoljnih događaja (rezultata) B.

Za višestruke uslovne događaje eksperimente važi:

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

Nezavisni događaj-nezavisni rezultati eksperimenta

Događaj (rezultat) A ne zavisi od događaja (rezultata) B, ako je $P(A|B) = P(A)$, pa se dobija:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Tada se kaže da su rezultati eksperimenta A i B statistički nezavisni, ili kraće nezavisni.

Događaji koji se međusobno isključuju, ako nijedan od njih nije skoro nemoguć događaj ($P = 0$) nisu nezavisni.

Za događaje A_1, A_2,...,A_n, da bi činili nezavisan skup događaja nije dovoljno da budu nezavisni po parovima, već je potrebno da bude ispunjeno:

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n).$$

Zadaci

$\boxed{\textbf{4.17}}$ Odrediti verovatnoću da se pri bacanju dva novčića pojave dva grba.

Rešenje:

G-grb;
P-pismo;

mogući ishodi su: $\begin{matrix} GG \\ GP \\ PP \\ PG \end{matrix} \Rightarrow$ 4 moguća ishoda $\Rightarrow \quad P(GG) = \dfrac{1}{4}$

$\boxed{\textbf{4.18}}$ Odrediti verovatnoću da se pri bacanju jednog novčića i jedne kocke pojavi željena kombinacija.

Rešenje:

mogući ishodi su: $\begin{matrix} G1 & P1 \\ G2 & P2 \\ G3 & P3 \\ G4 & P4 \\ G5 & P5 \\ G6 & P6 \end{matrix} \Rightarrow$ 12 mogućih događaja $\Rightarrow \quad P(\text{komb.}) = \dfrac{1}{12}$

4.19 U kutiji sa četiri cedulje označene brojevima 1, 2, 3 i 4 na slučajan način se izvlače jedna po jedna, sve dok se ne izvuče cedulja sa neparnim brojem. Odrediti verovatnoću da se na ovaj način izvuče cedulja sa brojem 4, pa sa brojem 2 i na kraju sa brojem 1.

Rešenje:

Mogući događaji su: $\begin{array}{ccc} 1 & 21 & 241 \\ 3 & 23 & 243 \\ & 41 & 421 \\ & 43 & 423 \end{array} \Rightarrow$ 10 mogućih događaja $\Rightarrow \quad P(421) = \dfrac{1}{10}$

4.20 U kutiji je 5 kuglica, dve bele i tri crne. Iz kutije se na slučajan način izvlači jedna kuglica. Kolika je verovatnoća da je izvučena kuglica bela.

Rešenje:

Mogući događaji su: $\begin{array}{c} B \;\; B \\ C \;\; C \;\; C \end{array} \Rightarrow$ 5 mogućih događaja, 2 događaja su pozitivna, $\Rightarrow \quad P(B) = \dfrac{2}{5}$

4.21 U jednoj prodavnici je k ispravnih sijalica i m neispravnih. Kupac je slučajno odabrao jednu sijalicu. Odrediti verovatnoću da je odabrao ispravnu sijalicu.

Rešenje:

Od $k+m$ mogućih događaja, k je pozitivno, $\quad \Rightarrow \quad P(A) = \dfrac{k}{k+m}$

4.22 Naći verovatnoću da se pri istovremenom bacanju dve kocke dobije zbir 10.

Rešenje:

Pri istovremenom bacanju dve kocke mogući su sledeći događaji:

$$\begin{array}{cccccc} 11 & 21 & 31 & 41 & 51 & 61 \\ 12 & 22 & 32 & 42 & 52 & 62 \\ 13 & 23 & 33 & 43 & 53 & 63 \\ 14 & 24 & 34 & 44 & 54 & \boxed{64} \\ 15 & 25 & 35 & 45 & \boxed{55} & 65 \\ 16 & 26 & 36 & \boxed{46} & 56 & 66 \end{array} \quad \Rightarrow$$

Znači, $6^2 = 36$ događaja odgovaraju postavljenom uslovu, $\quad \Rightarrow \quad P(10) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

4.23 Naći verovatnoću da se pri istovremenom bacanju tri kocke dobije zbir manji od 6.

Rešenje:

Događaji koji odgovaraju uslovima zadatka su:

$$\begin{array}{ccc} 111 & 211 & 311 \\ 112 & 212 & \\ 113 & 221 & \\ 121 & & \\ 122 & & \\ 131 & & \end{array} \quad \Rightarrow$$

Broj mogućih događaja je $6^3 = 216$, a broj pozitivnih događaja je 10 $\quad \Rightarrow \quad P = \dfrac{10}{216} = \dfrac{5}{108}$

4.24 Šta je verovatnije dobiti pri istovremenom bacanju tri kocke, zbir 11 ili 12?

Rešenje:

Mogući događaji pri istovremenom bacanju tri kocke su:

zbir 11;

146	236	326	416	515	614
155	245	344	425	524	623
164	254	353	434	533	632
	263	362	443	542	641
		335	452	551	
			461		

$\Rightarrow$ $6^3 = 216$ mogućih događaja, 27 pozitivnih događaja $\Rightarrow \quad P(11) = \dfrac{27}{216}$

zbir 12;

156	246	336	426	516	615
165	255	345	435	525	624
	264	354	444	534	633
		363	453	543	642
			462	552	651
				561	

$\Rightarrow$ $6^3 = 216$ mogućih događaja, 25 pozitivnih događaja $\Rightarrow \quad P(12) = \dfrac{25}{216}$

$\Rightarrow \quad P(11) > P(12)$

4.25 Izračunati verovatnoću da se u n bacanja novčića m puta pojavi grb.

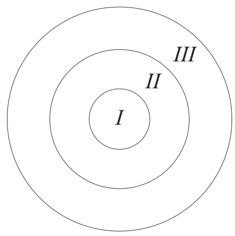
Rešenje:

Neka je n - bacanja novčića (isto je kao i bacanje n novčića odjednom) $\Rightarrow$ 2^n mogućih događaja

broj pozitivnih događaja, odnosno m pojave grba je jednak broju kombinacija od n elemenata n-te klase $\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$

tako da tražena verovatnoć iznosi: $P(m \leq n) = \dfrac{n!}{2^n\, m!\,(n-m)!}$

4.26 Izvodi se gađanje u metu koja se sastoji iz tri oblasti, kao što je prikazano na slici. Verovatnoća pogodaka u zonu I je $P(I) = 5/100$, u zonu II je $P(II) = 10/100$ i u zonu III je $P(III) = 17/100$. Odrediti verovatnoću pogodtka u metu.



Rešenje:

Događaji I, II i III se isključuju, pa se radi o verovatnoći zbira događaja koji se isključuju, pa je tražena verovatnoća:

$$P(I + II + II) = P(I) + P(II) + P(III) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100}$$

4.27 U kutiji se nalazi 8 crvenih, 6 plavih i 14 bezbojnih kuglica. Kolika je verovatnoća da se izvuče plava ili crvena kuglica?

Rešenje:

Onzačimo verovatnoću da se izvuče crvena kuglica sa $P(C)$, a verovatnoću da se izvuče plava kuglica $P(P)$. Sada je:

$$P(C) = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}, \quad P(P) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}; \quad P(C+P) = \frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

4.28 Prilikom gađanja u metu sa tri zone, kao u zadatku 4.26, verovatnoća pogodaka zone I je $P(I) = 0.16$, zone II $P(II) = 0.24$ i zone III $P(III) = 0.17$. Odrediti verovatnoću promašaja mete.

Rešenje:

Verovatnoća pogodka u metu iznosi: $P(I+II+II) = P(I)+P(II)+P(III) = 0.16+0.24+0.17 = 0.57$, pa je verovatnoća promašaja: $P(\text{Prom.}) = 1 - P(I + II + II) = 1 - 0.57 = 0.43$

$\boxed{\textbf{4.29}}$ Bombarduju se tri skladišta municije, pri čemu se baca samo jedna bomba. Verovatnoća da ona padne na prvo skladište iznosi 0.01, na drugo 0.008, a na treće 0.025. Ako bomba padne na jedno od tri skladišta, onda ona uništava sva tri. Naći verovatnoću da će sva tri skladišta biti uništena.

Rešenje:

A - razorena skladišta; $A = I + II + III$ (I, II i III se isključuju)
$P(A) = P(I) + P(II) + P(III) = 0.01 + 0.008 + 0.025 = 0.043$

$\boxed{\textbf{4.30}}$ Izračunati verovatnoću da se u tri bacanja novčića broj (pismo) pojavi najmanje dva puta.

Rešenje:

Prema uslovu zadatka $n = 3$ - broj mogućih ishoda je 2^3
$m \geq 2 \quad \Rightarrow \quad m = 2$ i $m = 3$ - broj pozitivnih ishoda je $\binom{3}{2} = 3$ i $\binom{3}{3} = 1$

$$P = \frac{n!}{2^3\, m_2!\,(n-m_2)!} + \frac{n!}{2^3\, m_3!\,(n-m_3)!} = \frac{3!}{2^3\, 2!\,(3-2)!} + \frac{3!}{2^3\, 3_3!\,(3-3)!} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\textbf{4.31}}$ Jedna lutrija od 10000 lozova ima 150 robnih i 50 novčanih nagrada. Kolika je verovatnoća da jedan loz dobije nagradu, bez obzira da li je novčana ili robna?

Rešenje:

$P(A) = \dfrac{150}{10000}$ - verovatnoća robnih nagrada, $P(B) = \dfrac{50}{10000}$ - verovatnoća novčanih nagrada,
tražena verovatnoća iznosi $P(A+B) = P(A) + P(B) = \dfrac{150}{10000} + \dfrac{50}{10000} = 0.02$

$\boxed{\textbf{4.32}}$ Kolika je verovatnoća da se pri bacanju kocke dobije neparan broj, pod uslovom da je broj koji se ostvario manji od 5?

Rešenje:

Broj mogućih ishoda bacanja kocke je 6, neka je A ishod da se pojavi broj manji od 5, a B ishod da se pojavi neparan broj,
$P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ (jer ima 4 broja manja od 5),
$P(AB) = 2 \cdot \dfrac{1}{6}$ (ima dva neparna broja manja od 5, a verovatnoća javljanja jednog od njih je $1/6$),
tražena verovatnoća iznosi $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$
Ovaj zadatak se može uraditi i korišćenjem klasične definicije verovatnoće:
ima $N = 4$ moguća ishoda, tj. 4 broja manja od 5 i $N(A) = 2$ pozitivna ishoda, tj. dva neparna broja manja od 5 (1 i 3), pa je tražena verovatnoća: $P = \dfrac{N(A)}{N} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\textbf{4.33}}$ Ako se izvlačenjem jedne karte iz špila od 52 karte dobije karta crvene boje, naći verovatnoću da je izvučena desetka.

Rešenje:

Neka je ishod B izvlačenje crvene karte, a njegova verovatnoća je $P(B) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$,
verovatnoća da je izvučena crvena desetka je $P(AB) = \dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}$ (ima dve crvene desetke),
pa verovatnoća da je izvučena crvena desetka, ako je izvučena crvena karta iznosi
$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{26}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{13}$

Prema klasičnoj definiciji verovatnoće:
Znamo da je izvučena crvena karta, u špilu ima 26 crvenih karta, pa je $N = 26$ mogućih ishoda; kako ima po dve karte istog broja i iste boje, tada ima $N(A) = 2$ pozitivna događaja, pa je tražena verovatnoća: $P = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

4.34 U kutiji ima 8 belih i 10 crnih kuglica. Dva puta uzastopno se izvlači po jedna kuglica, bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju. Naći verovatnoću da su obe kuglice bele.

Rešenje:

Neka je A - događaj da je prva izvučena kuglica bela, $P(A) = \frac{8}{18}$,
i neka je $B|A$ - događaj da je druga kuglica bela; kako posle prvog izvlačenja ostaje 17 kuglica u kutiji, od kojih je 7 belih, verovatnoća ovog ishoda je $P(B|A) = \frac{7}{17}$,
Tražena verovatnoća je $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} = \frac{28}{153}$

4.35 Student je došao na ispit znajući 25 od 34 postojećih pitanja. Na ispitu se izvlače tri pitanja. Naći verovatnoću da će student znati odgovor na sva tri pitanja.

Rešenje:

Tražena verovatnoća je $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{25}{34} \cdot \frac{24}{33} \cdot \frac{23}{32} = 0.384$
$P(A) = \frac{25}{34}$ - verovatnoća da zna odgovor na prvo pitanje,
$P(B|A) = \frac{24}{33}$ - verovatnoća da zna odgovor na drugo pitanje, ako je znao prvo,
$P(C|AB) = \frac{23}{32}$ - verovatnoća da zna odgovor na treće pitanje, ako je znao prva dva.

Prema klasičnoj definiciji verovatnoće je: $P = \frac{\binom{25}{3}\binom{9}{0}}{\binom{34}{3}} = 0.384$,

gde je: $\binom{25}{3}$ - verovatnoća da izvuče 3 pitanja od 25 na koja zna odgovor, $\binom{9}{0}$ - verovatnoća da od 9 pitanja koja nezna ne izvuče ni jedno,
$\binom{34}{3}$ - verovatnoća da izvuče 3 pitanja od 34, što u stvari predstavlja sve moguće događaje.

4.36 Verovatnoća da se realizuje događaj A u svakom ponavljanju eksperimenta je ista i iznosi 0.2. Eksperiment se ponavlja dok se ne realizuje događaj A. Naći verovatnoću da se događaj A realizuje u četvrtom eksperimentu.

Rešenje:

$P = 0.2, \quad \overline{P} = 1 - P = 1 - 0.2 = 0.8$ (svaki od eksperimenata je nezavisan)
$P_{\text{uk.}} = \overline{P}\,\overline{P}\,\overline{P}P = (0.8)^3 \cdot 0.2 = 0.1024$

4.37 Iz špila se izvlači 11 karta, jedna po jedna. Kolika je verovatnoća da će tek jedanaesta karta biti as.

Rešenje:

Verovatnoća da se izvuče as;		verovatnoća da se ne izvuče as	
1.)	$P(1) = \frac{4}{52}$	$\overline{P}(1) = 1 - P(1) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52}$,	u prvom izvlačenju
2.)	$P(2) = \frac{4}{51}$	$\overline{P}(2) = 1 - P(2) = 1 - \frac{4}{51} = \frac{47}{51}$,	u drugom izvlačenju

3.) $P(3) = \frac{4}{50}$ $\quad \overline{P}(3) = 1 - P(3) = 1 - \frac{4}{50} = \frac{46}{50}$, u trećem izvlačenju

. . .

10.) $P(10) = \frac{4}{43}$ $\quad \overline{P}(10) = 1 - P(10) = 1 - \frac{4}{43} = \frac{39}{43}$, u desetom izvlačenju

11.) $P(11) = \frac{4}{42}$

tražena verovatnoća iznosi: $P_{\text{uk.}} = \overline{P}(1)\,\overline{P}(2) ... \overline{P}(10)\,P(11) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot ... \cdot \frac{39}{43} \cdot \frac{4}{42} = \frac{164}{4165}$

4.38 U metu se gađa iz dva topa. Verovatnoća da prvi top pogodi metu iznosi 8/10, a da drugi top pogodi metu iznosi 7/10. Naći verovatnoću da meta bude pogođena jednim od topova, ako se gađa istovremeno iz oba topa.

Rešenje:

$P(A) = \frac{8}{10} \qquad P(B) = \frac{7}{10}; \qquad P(A)$ i $P(B)$ se međusobno ne isključuju, a nezavisni su

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{8}{10} + \frac{7}{10} - \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{94}{100}$$

4.39 Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockama dobiti zbir 9, ili ako se to ne dogodi da se pri ponovljenom bacanju dobije zbir 7?

Rešenje:

Broj mogućih događaja pri bacanju dve kocke: $6^2 = 36$

9 se može dobiti kao: 6+3; 5+4; 4+5; 3+6; tj. na 4 načina, pa je

$P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, a da se ne dobije 9 $P(\overline{9}) = 1 - P(9) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Broj 7 se može dobiti kao: 6+1; 5+2; 4+3; 3+4; 2+5; 1+6 tj. na 6 načina, pa je $P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- Verovatnoća da se u prvom bacanju ne dobije 9, a u drugom dobije 7 iznosi:

$$P(\overline{9} \cdot 7) = P(\overline{9}) \cdot P(7) = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{27}$$

- Verovatnoća da se padne 9, ili ako se to ne dogodi, da se drugom bacanju dobije 7 iznosi:

$$P(9 + \overline{9} \cdot 7) = P(9) + P(\overline{9}) \cdot P(7) = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{7}{27}$$

4.40 Jedan eksperiment, u čijem se svakom ponavljanju može sa verovatnoćom 1/9 realizovati slučajan događaj A izvodi se n-puta pod istim uslovima. Koliko treba da bude n pa da verovatnoća nastupanja događaja A ne bude manja od 0.7?

Rešenje:

$P(A) = \frac{1}{9}; \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{8}{9}$

Verovatnoća da se A neće realizovati u n eksperimenata je: $P(\overline{A_n}) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

a verovatnoća da se realizuje bar jednom u n eksperimenata je: $P(A_n) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$

pa je: $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0.7, \quad \Rightarrow \quad 0.3 \geq \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \log 0.3 \geq \log\left(\frac{8}{9}\right)^n = n \log\left(\frac{8}{9}\right)$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{\log(0.3)}{\log(8/9)} = 10.222 \simeq 11$$

4.41 Ako se kocka baca 4 puta, kolika je verovatnoća da će bar jednom pasti šestica?

Rešenje:

$P(6) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\overline{6}) = 1 - P(6) = \frac{5}{6}$ u prvom bacanju

$P(\overline{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2$, u drugom bacanju; $\quad P(\overline{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$ u trećem bacanju

$P(\overline{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$ u četvrtom bacanju; pa je tražena verovatnoća: $P(6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$

4.3 Raspodela verovatnoće diskretnih slučajnih veličina

Događaj, odnosno rezultat eksperimenta koji se unapred ne može odrediti, naziva se slučajni događaj, odnosno slučajni rezultat. Ako se takvom događaju pridruži brojna vrednost neke veličine X, takva veličina se naziva **slučajna veličina** ili **slučajna promenjiva**.

Slučajna veličina X, koja u ispitivanju uzima vrednost iz konačnog ili prebrojivo beskonačnog niza vrednosti x_1, x_2, ... , x_n , pri čemu svakoj vrednosti odgovara verovatnoća p_n, i važi $\sum_n p_n = 1$, naziva se **diskretna slučajna promenjiva**.

Kumulativna raspodela verovatnoća ili **funkcija raspodele** $F(x)$ diskretne slučajne veličine X jednaka je sumi verovatnoća p_i koje odgovaraju vrednostima x_i manjim od x_i, tj. $F(x) = \sum_{x_i<x} p_i$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{za} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ p_2 & \text{za} \quad x_2 < x \leq x_3 \\ - - - - - - - - - - \\ 1 & \text{za} \quad x \leq x_n \end{cases}$$

Kumulativna raspodela verovatnoće potpuno određuje slučajnu veličinu.

Najvažnije osobine funkcije raspodele:

1.) za $x_1 < x_2$; $F(x_1) < F(x_2)$

2.) za sve vrednosti x iz skupa realnih brojeva $0 < F(x) < 1$

Ako slučajna promenjiva uzima vrednost iz prebrojivog skupa $\{x_1, x_2, ...\}$, niz p_1, p_2, ... naziva se **zakonom raspodele verovatnoće**. Zakon raspodele verovatnoće se najčešće prikazuje poligonom.

4.3.1 Parametri diskretnih raspodela

- **Matematičko očekivanje** slučajne veličine X: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$
- **Mod** M_o je vrednost slučajne veličine sa najvećom verovatnoćom javljanja
- **Medijana** M_e je rešenje jednačine $F(x) = \frac{1}{2}$; moguće je da ne postoji jedinstvena vrednost x_i kao rešenje te jednačine, pa je onda medijana jednaka:

$$P(X \leq Me(X)) \leq \frac{1}{2} \leq P(X < Me(X))$$

- **Standardna devijacija** σ i **disperzija** $D(X) = \sigma^2$: $\sigma = E(X - E(X)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 p_i}$
- **Koeficijenat asimetrije** γ_A: $\gamma_A = \frac{E(X - E(X))^3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3 p_i}{\sigma^3}$

- **Koeficijenat spljoštenosti** γ_S^*: $\gamma_S^* = \dfrac{E(X-E(X))^4}{\sigma^4} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4 p_i}{\sigma^4}$

4.3.2 Binomna raspodela

Neka se posmatra u N eksperimenata neki događaj koji se javlja n puta sa verovatnoćom p. U preostalih $N-n$ eksperimenata željeni događaj se ne javlja, a verovatnoća da se ne javi iznosi $1-p$. Kako se pozitivan događaj eksperimenta javlja n puta i nepovoljan $N-n$ puta, što se može ostvariti na $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}$ načina, a verovatnoća nastupanja takvog događaja jednaka je:

$$B_N(n,p) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^n(1-p)^{N-n}$$

Parametri binomne raspodele

- Matematičko očekivanje: $E(X) = Np$
- Standardna devijacija: $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$
- Koeficijent asimetrije: $\gamma_A = \dfrac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$
- Koeficijent spljoštenosti: $\gamma_S^* = \dfrac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$

Rekurentne relacije:

$$B_N(n,p) = \frac{N-n+1}{n}\frac{p}{1-p}B_N(n-1,p)$$

$$B_N(n,p) = \frac{n+1}{N-n}\frac{1-p}{p}B_N(n+1,p)$$

Vrednosti verovatnoća pojavljivanja slučajne veličine sa Binomnom raspodelom date su u tabeli A, na strani 177.

4.3.3 Poasonova raspodela

Binomna raspodela prelazi u Poasonovu kada broj eksperimenata teži beskonačosti i kada je verovatnoća javljanja pozitivnih događaja veoma mala, odnosno:

$$B_N(n,p) \xrightarrow[p\to 0;N\to\infty]{} P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$$

za $\lambda < 1$, λ^n monotono opada sa porastom n, pa $P_\lambda(n)$ opada monotono
za $\lambda > 1$, λ^n raste sa porastom n, pa $P_\lambda(n)$ ima maksimum u okolini $\lambda = n$

Poasonova raspodela je pogodna za opisivanje raspodele verovatnoća veoma retkih događaja ($p \to 0$) koji su međusobno izolovani, ne utiču jedni na druge, tj. koji su proizvod čiste slučajnosti.

Parametri Poasonove raspodele

- Matematičko očekivanje: $E(X) = \lambda$
- Standardna devijacija: $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- Koeficijent asimetrije: $\gamma_A = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$
- Koeficijent spljoštenosti: $\gamma_S^* = \dfrac{1}{\lambda}$

Rekurentna relacija: $P_\lambda(n) = \frac{\lambda}{n} P_\lambda(n-1)$

Vrednosti verovatnoća pojavljivanja slučajne veličine sa Poasonovom raspodelom date su u tabeli B, na strani 180.

Zadaci

$\boxed{\textbf{4.42}}$ Posuda sadrži kuglice numerisane brojevima 1, 2, 3, 4, 5 čiji je odnos u posudi 2 : 5 : 4 : 3 : 1. Definisati slučajnu veličinu X tako da su njene vrednosti cifre označene na kuglicama izvučenim nasumice iz posude, pa naći zakon raspodele verovatnoće te slučajne veličine i prikazati ga tabelarno.

Rešenje:

Ako ukupno ima 15 kuglica, prema klasičnom zakonu verovatnoće, odgovarajuće verovatnoće su: $p_1 = 2/15$, $p_2 = 5/15$, $p_3 = 4/15$, $p_4 = 3/15$ i $p_5 = 1/15$.

Zakon raspodela verovatnoća je dat u tablici.

x_i	p_i
1	2/15
2	5/15
3	4/15
4	3/15
5	1/15

$\boxed{\textbf{4.43}}$ Eksperiment se sastoji u trostrukom bacanju dinara. Ako je u svakom bacanju novčića verovatnoća pojave grba 1/2 (radi se o tzv. „fer” novčićima), i ako X označava broj grbova, naći raspodelu verovatnoće i kumulativnu raspodelu verovatnoće slučajne promenjive X i prikazati ih tabelarno.

Rešenje:

Ukupan broj mogućih realizacija 3 bacanja dinara (mogućih događaja eksperimenta) je 2^3;

Grb se javlja x puta, broj pozitivnih događaja: $\binom{3}{x} = \frac{3!}{x!(3-x)!}$;

verovatnoće bacanja: $P = \frac{3!}{2^3 \cdot x! \cdot (3-x)!}$

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	0.125	0.125
1	0.375	0.5
2	0.375	0.875
3	0.125	1

$\boxed{\textbf{4.44}}$ Dve kocke za igru se bacaju istovremeno. Slučajna veličina je zbir brojeva sa obe kocke.
a) Grafički prikazati raspodelu verovatnoće.
b) Odrediti matematičko očekivanje i standardnu devijaciju ovako definisane slučajne veličine.

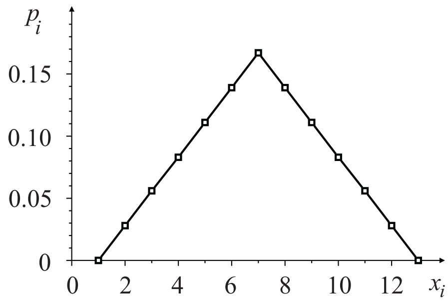
Rešenje:

Mogući događaji su:

$1,1$	$2,1$	$3,1$	$4,1$	$5,1$	$6,1$
$1,2$	$2,2$	$3,2$	$4,2$	$5,2$	$6,2$
$1,3$	$2,3$	$3,3$	$4,3$	$5,3$	$6,3$
$1,4$	$2,4$	$3,4$	$4,4$	$5,4$	$6,4$
$1,5$	$2,5$	$3,5$	$4,5$	$5,5$	$6,5$
$1,6$	$2,6$	$3,6$	$4,6$	$5,6$	$6,6$

x uzima vrednosti 2, 3, ..., 11, 12;
broj mogućih kombinacija je $6^2 = 36$

i	x_i	p_i
1	2	0.028
2	3	0.056
3	4	0.083
4	5	0.111
5	6	0.139
6	7	0.167
7	8	0.139
8	9	0.111
9	10	0.083
10	11	0.056
11	12	0.028



$E(X) = \sum_{i=1}^{11} x_i \cdot p_i = 7;$

$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{11} (x_i - E(X))^2 p_i} = 2.415$

4.45 Nacrtati binomnu raspodelu verovatnoće za 10 eksperimenata, pri čemu se pozitivni događaj javlja sa sledećim verovatnoćama:

a) $p = 0.2$;
b) $p = 0.5$;
c) $p = 0.8$

Sve tri raspodele nacrtati na istom grafiku.

Rešenje:

Računanje verovatnoća za binomni zakon raspodele je najlakše uraditi korišćenjem rekurentnih relacija, npr. relacije:

$$B_N(n,p) = \frac{N-n+1}{n}\frac{p}{1-p}B_N(n-1,p).$$

Naime, najpre se izračuna verovatnoća za $n = 0$, pa preko rekurentne relacije za $n = 1$, i tako redom, dok se ne dobiju sve tražene verovatnoće za traženi binomni zakon verovatnoća.

a) $p = 0.2$; $1 - p = 0.8$; $N = 10$

$$B_{10}(0;0.2) = \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^{10} = 0.1074$$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_N(n,p)$
0	–	–	0.1074
1	10/1	1/4	0.2684
2	9/2	1/4	0.3020
3	8/3	1/4	0.2013
4	7/4	1/4	0.0881
5	6/5	1/4	0.0264
6	5/6	1/4	0.0055
7	4/7	1/4	0.0008
8	3/8	1/4	0.0001
9	2/9	1/4	0
10	1/10	1/4	0

b) $p = 0.5$; $1 - p = 0.5$; $N = 10$

$$B_{10}(0;0.5) = \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot (0.5)^0 \cdot (0.5)^{10} = 0.0010$$

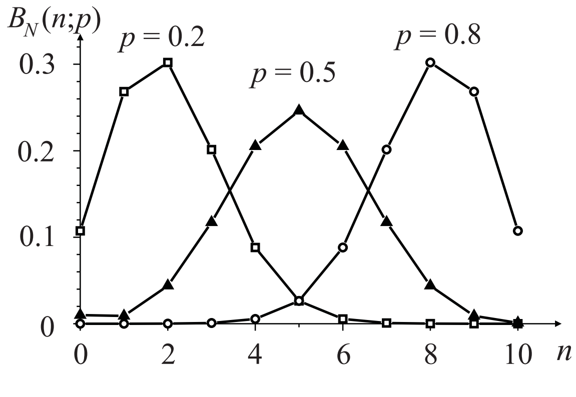
n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_N(n,p)$
0	–	–	0.0100
1	10/1	1	0.0090
2	9/2	1	0.0439
3	8/3	1	0.1172
4	7/4	1	0.2051
5	6/5	1	0.2461
6	5/6	1	0.2051
7	4/7	1	0.1172
8	3/8	1	0.0439
9	2/9	1	0.0098
10	1/10	1	0.0010

c) $p = 0.8$; $1 - p = 0.2$; $N = 10$

$B_{10}(0;0.2) = 0$; $B_{10}(1;0.2) = 0$

$B_{10}(2;0.2) = 0.0001$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_N(n,p)$
0	–	–	0
1	10/1	4	0
2	9/2	4	0.0001
3	8/3	4	0.0008
4	7/4	4	0.0055
5	6/5	4	0.0264
6	5/6	4	0.0881
7	4/7	4	0.2013
8	3/8	4	0.3020
9	2/9	4	0.2684
10	1/10	4	0.1074



4.46 Nacrtati raspodelu verovatnoće u slučaju da se posmatrani događaj uvek javlja sa sa verovatnoćom $p = 0.2$, za seriju od :

a) 6 eksperimenata;
b) 12 eksperimenata;
c) 48 eksperimenata.

Sve tri raspodele nacrtati na istom grafiku.

Rešenje:

Kao i u zadatku **4.45**, verovatnoće po binomnom zakonu raspodele je najlakše izračunati korišćenjem rekurentne relacije:

$$B_N(n,p) = \frac{N-n+1}{n}\frac{p}{1-p}B_N(n-1,p).$$

Najpre se izračuna verovatnoća za $n = 0$, pa preko rekurentne relacije za $n = 1$, i tako redom.

a) $p = 0.2$; $1 - p = 0.8$; $N = 6$

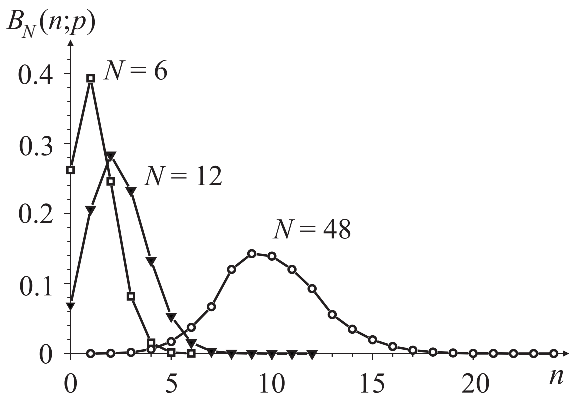
$$B_6(0; 0.2) = \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^6 = 0.2621$$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_N(n,p)$
0	–	–	0.2621
1	6/1	0.25	0.3932
2	5/2	0.25	0.2458
3	4/3	0.25	0.0816
4	3/4	0.25	0.0154
5	2/5	0.25	0.0015
6	1/6	0.25	0.0001

b) $p = 0.2$; $1 - p = 0.8$; $N = 12$

$$B_{12}(0; 0.2) = \frac{12!}{0! \cdot 12!} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^{12} = 0.0687$$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_N(n,p)$
0	–	–	0.0687
1	12/1	0.25	0.2061
2	11/2	0.25	0.2834
3	10/3	0.25	0.2362
4	9/4	0.25	0.1329
5	8/5	0.25	0.0532
6	7/6	0.25	0.0155
7	6/7	0.25	0.0033
8	5/8	0.25	0.0005
9	4/9	0.25	0.0001
10	3/10	0.25	0.0000
11	2/11	0.25	0.0000



c) $p = 0.2$; $1 - p = 0.8$; $N = 48$

$$B_{48}(0; 0.2) = \frac{48!}{0! \cdot 48!} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^{48} = 2.23 \cdot 10^{-5} \simeq 0$$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_N(n,p)$
0	–	–	0.0000
1	48/1	0.25	0.0003
2	47/2	0.25	0.0016
3	46/3	0.25	0.0060
4	45/4	0.25	0.0170
5	44/5	0.25	0.0373
6	43/6	0.25	0.0668
7	42/7	0.25	0.1000
8	41/8	0.25	0.1284
9	40/9	0.25	0.1427
10	39/10	0.25	0.1391
11	38/11	0.25	0.1201
12	37/12	0.25	0.0926
13	36/13	0.25	0.0556
14	35/14	0.25	0.0347
15	34/15	0.25	0.0197
16	33/16	0.25	0.0101
17	32/17	0.25	0.0047
18	31/18	0.25	0.0021
19	30/19	0.25	0.0008
20	29/20	0.25	0.0002
21	28/21	0.25	0.0001
22	27/22	0.25	0.0000
23	26/23	0.25	0.0000

$\boxed{4.47}$ Prikazati grafički Poasonove raspodele verovatnoće za koeficijente:

a) $\lambda = 1$;
b) $\lambda = 2$;
c) $\lambda = 4$;
d) $\lambda = 8$,

u zavisnosti od slučajne veličine n. Sve raspodele nacrtati na istom grafiku.

Rešenje:

Verovatnoće su izračunate korišćenjem rekurentne relacije: $P_\lambda(n) = \dfrac{\lambda}{n} P_\lambda(n-1)$.

a) $\lambda = 1$; $\quad P_1(0) = \dfrac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = 0.3679$

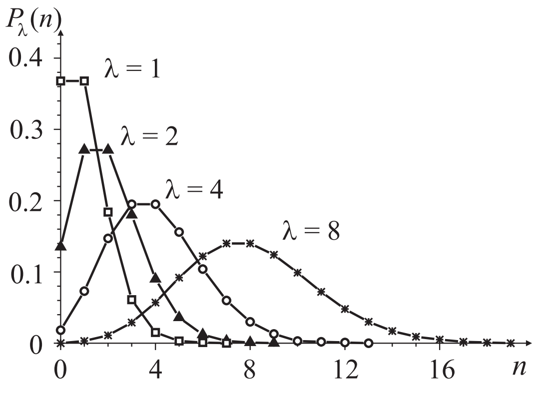
n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_1(\lambda)$
0	–	0.368
1	1/1	0.368
2	1/2	0.184
3	1/3	0.061
4	1/4	0.015
5	1/5	0.003
6	1/6	0.001
7	1/7	0.000

b) $\lambda = 2$; $\quad P_2(0) = \dfrac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0.135$

n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_2(\lambda)$
0	–	0.135
1	2/1	0.271
2	2/2	0.271
3	2/3	0.180
4	2/4	0.090
5	2/5	0.036
6	2/6	0.012
7	2/7	0.003
8	2/8	0.001
9	2/9	0.000

c) $\lambda = 4$; $\quad P_4(0) = \dfrac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} = 0.0183$

n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_4(\lambda)$	n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_4(\lambda)$
0	–	0.018	7	4/7	0.060
1	4/1	0.073	8	4/8	0.030
2	4/2	0.147	9	4/9	0.013
3	4/3	0.195	10	4/10	0.003
4	4/4	0.195	11	4/11	0.002
5	4/5	0.156	12	4/12	0.001
6	4/6	0.104	13	4/13	0.000



d) $\lambda = 8$; $\quad P_8(0) = \dfrac{8^0}{0!} \cdot e^{-8} = 0.00034 \simeq 0$

$$P_8(1) = \frac{8^1}{1!} \cdot e^{-8} = 0.0027 \simeq 0.003$$

n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_8(\lambda)$
0	–	0.000
1	8/1	0.003
2	8/2	0.011
3	8/3	0.029
4	8/4	0.057
5	8/5	0.092
6	8/6	0.122
7	8/7	0.140
8	8/8	0.140
9	8/9	0.124
10	8/10	0.099
11	8/11	0.072
12	8/12	0.048
13	8/13	0.030
14	8/14	0.017
15	8/15	0.009
16	8/16	0.005
17	8/17	0.002
18	8/18	0.001
19	8/19	0.000

$\boxed{4.48}$ Iz partije od 20 proizvoda, od kojih je 7 škart, izabran je na slučajan način uzorak od 4 proizvoda. Ako se sa X označi broj škartova u uzorku, tj. ako je X slučajna veličina, naći raspodelu verovatnoće slučajne veličine X i prikazati je grafički.

Rešenje:

$N = 20$ proizvoda;
$m = 7$ škarta;
$n = 4$ izabrana proizvoda
$\Rightarrow$ Od 20 proizvoda 4 se uzima na slučajan način $\Rightarrow$ broj mogućih događaja je: $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$

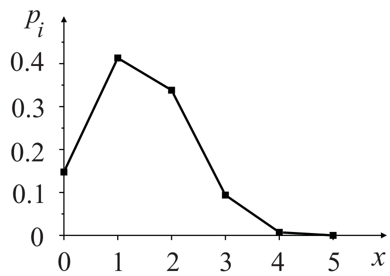
Pozitivni događaji su:
0 škart 4 dobra
1 škart 3 dobra;
2 škarta 2 dobra;
3 škarta 1 dobar;
4 škart 0 dobra;
$\Rightarrow$ pozitivni događaji se mogu ostvariti na: $\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N-m \\ n-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 4-x \end{pmatrix}$ načina

zakon raspodele verovatnoća:

$$P = \frac{\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N-m \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}.$$

Ova raspodela se naziva *hipergeometrijska raspodela*; verovatnoća je uslovna.

x_i	p_i	$F(x_i)$
0	0.1476	0.1476
1	0.4132	0.5608
2	0.3381	0.8989
3	0.0939	0.9929
4	0.0072	1



$\boxed{\textbf{4.49}}$ Izvesti izraze za matematičko očekivanje i standardnu devijaciju binomne raspodele.

Rešenje:

Matematičko očekivanje: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$; za binomnu raspodelu važi: $x = n$, a kako je broj mogućih ishoda N, umesto ∞ se piše N, pa se za matematičko očekivanje dobija:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N} n \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=1}^{N} n \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{N-n} = p \sum_{n=1}^{N} n \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^{n-1} (1-p)^{N-n}$$

$$= p \sum_{n=1}^{N} n \frac{N(N-1)!}{n(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n} = pN \sum_{n=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n} =$$

$$(\textbf{smena } n-1 \to n) = pN \sum_{n=0}^{N} \frac{(N-1)!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-1-n} = pN \sum_{n=0}^{N-1} \begin{pmatrix} N-1 \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{N-1-n} =$$

$$\left(\textbf{Njutnov obrazac } (a+b)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{n!(N-1-n)!} a^{N-1-n} b^n;\ a = 1-p,\ b = p \right) = \boxed{pN}$$

Standardna devijacija: $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^2 - 2xE(X) + E(X)^2) p_i} =$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - 2 \sum_{i=1}^{\infty} xE(X) p_i + \sum_{i=1}^{\infty} E(X)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - 2E(X) \sum_{i=1}^{\infty} x p_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i} =$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}; \quad (E(X))^2 = N^2p^2$$

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{N} n^2 \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \sum_{n=1}^{N} n \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} =$$

$$(\textbf{smena } n-1 \to k) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \frac{N!}{k!(N-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{N-k+1} =$$

$$p\left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{kN(N-1)!}{k(k-1)!(N-k-1)!} p^k (1-p)^{N-k-1} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{k!(N-k-1)!} p^k (1-p)^{N-k-1}\right) =$$

$$= pN \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k-1)!} p^k (1-p)^{N-k-1} + p \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N!}{k!(N-k-1)!} p^k (1-p)^{N-k-1} =$$

$$(\textbf{Njutnov obrazac}) = pN \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k-1)!} p^k (1-p)^{N-k-1} + pN =$$

$$(\textbf{smena } k-1 \to n) = pN \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(N-1)!}{n!(N-n-2)!} p^{n+1} (1-p)^{N-n-2} + pN =$$

$$p^2 N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)(N-2)!}{n!(N-n-2)!} p^{n+1} (1-p)^{N-n-2} + pN = (\textbf{Njutnov obrazac}) = Np^2(N-1) + Np$$

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{Np^2(N-1) + Np - (Np)^2} = \sqrt{Np(1-p)}$$

$\boxed{\textbf{4.50}}$ Izvesti izraze za matematičko očekivanje i standardnu devijaciju Poasonove raspodele.

Rešenje:

Matematičko očekivanje: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$; za Poasonovu raspodelu važi: $x = n$ pa se dobija:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda \lambda^{n-1}}{n(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = (\textbf{smena } n-1 \to n) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \left(\textbf{smena: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}\right) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \boxed{\lambda}$$

Standardna devijacija: $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}; \quad (E(X))^2 = \lambda^2$

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} x_i^2 p_i = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = (\textbf{smena: } n-1 \to k) =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}(k+1) = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}\right) = \left(\textbf{smena: } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}\right) =$$

$$\lambda e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)=\lambda e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}\right)=\lambda+\lambda^2;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}=\sqrt{\lambda+\lambda^2-\lambda^2}=\sqrt{\lambda}$$

$\boxed{\textbf{4.51}}$ Naći verovatnoću da se iz 10 eksperimenata događaj A realizuje 2 puta, ako je njegova verovatnoća pojavljivanja u svakom od 10 eksperimenata ista i iznosi $p = 0.6$.

Rešenje:

$N = 10;$ Na osnovu izraza: $B_N(n,p)=\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$

$n = 2:$

$p = 0.6;$ dobija se: $B_{10}(2;0.6)=\dfrac{10!}{2!\,(10-2)!}(0.6)^2(0.4)^8=0.0106$

$\boxed{\textbf{4.52}}$ Kolika je verovatnoća da se pri 8 bacanja kocke broj 1 pojavi 3 puta?

Rešenje:

$p=\dfrac{1}{6};$
$N = 8:$
$n = 3;$

$$B_N(n,p)=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$$

$$B_8\left(3;\frac{1}{6}\right)=\frac{8!}{3!\,5!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5=0.0149$$

$\boxed{\textbf{4.53}}$ Šta je verovatnije u igri sa ravnopravnim protivnikom, dobiti 3 partije iz 4 ili 5 partije iz 8?

Rešenje:

$p=\dfrac{1}{2};$ $\quad B_N\left(n;\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-n}$

za $N = 4$ i $n = 3;$ $\quad B_4\left(3;\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4!}{3!\,1!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{1}{4}$

za $N = 8$ i $n = 5;$ $\quad B_8\left(5;\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{8!}{5!\,3!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{7}{32}$

$$\Rightarrow\quad B_4\left(3;\frac{1}{2}\right)>B_8\left(5;\frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\textbf{4.54}}$ Izvode se četiri nezavisna eksperimenta. Verovatnoća da se pojavi događaj A je 0.5. Odrediti verovatnoću da se događaj A ne pojavi manje od dva puta.

Rešenje:

$p=\dfrac{1}{2};$
$N = 4:$
$n = 2;$

$$B_N(n,p)=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
B_4\left(2;\frac{1}{2}\right)&=\frac{4!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16};\\
B_4\left(3;\frac{1}{2}\right)&=\frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16};\\
B_4\left(4;\frac{1}{2}\right)&=\frac{4!}{4!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}
\end{aligned}$$

Ukupna verovatnoća da se ishod A ne pojavi manje od 2 puta iznosi:

$$P=B_4\left(2;\frac{1}{2}\right)+B_4\left(3;\frac{1}{2}\right)+B_4\left(4;\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{11}{16},$$

a verovatnoća da se ishod A pojavi manje od 2 puta iznosi: $\quad\overline{P}=1-P=1-\dfrac{11}{16}=\dfrac{5}{16}$

$\boxed{\textbf{4.55}}$ Dinar se baca 5 puta. Pri svakom bacanju verovatnoća pojave grba je 0.5. Nacrtati raspodelu verovatnoće broja pojavljivanja grbova.

Rešenje:

$p = 0.5;$
$N = 5:$

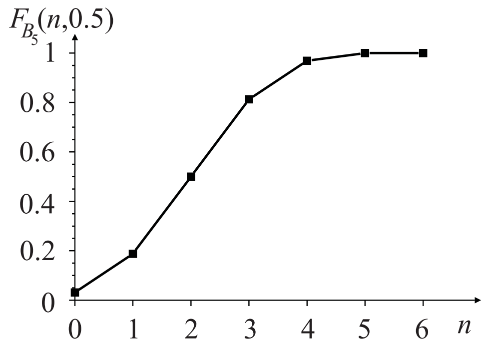
$$B_5(n; 0.5) = \frac{5!}{n!\,(5-n)!}(0.5)^n(0.5)^{5-n},$$
$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$

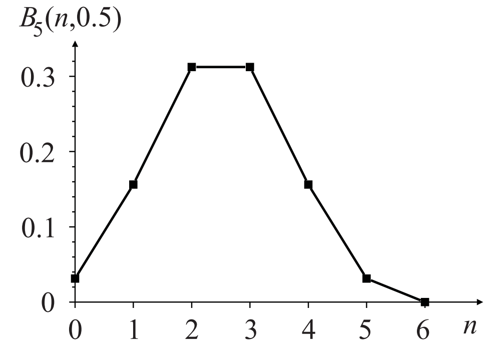
$$B_5(0; 0.5) = \frac{5!}{0!\,5!}(0.5)^0(0.5)^5 = 0.03125,$$

$$B_N(n,p) = \frac{N-n+1}{n}\frac{p}{1-p}B_N(n-1,p).$$

$F(x_i) = \sum_i^N p_i$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_5(n; 0.5)$	$F_{B_5}(n; 0.5)$
0	–	1	0.03125	0.03125
1	5/1	1	0.15625	0.1875
2	4/2	1	0.3125	0.5
3	3/3	1	0.3125	0.8125
4	2/4	1	0.15625	0.96875
5	1/5	1	0.03125	1





$\boxed{\textbf{4.56}}$ U proizvodnji nekih proizvoda, na 100 proizvoda pojavljuje se 75 ispravnih proizvoda. Na slučajan način bira se 5 proizvoda. Nacrtati grafik raspodele verovatnoće ispravnih proizvoda među 5 izabranih. Izračunati matematičko očekivanje i standardnu devijaciju ove slučajne veličine.

Rešenje:

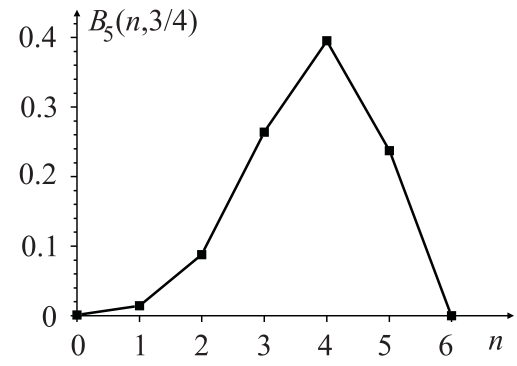
$p = \frac{75}{100} = p = \frac{3}{4}$ verovatnoća ispravnih proizvoda; $\quad 1-p = \frac{1}{4}$ verovatnoća neispravnih proizvoda;

$N = 5$: $\quad \frac{p}{1-p} = \frac{3/4}{1/4} = \frac{4\cdot 3}{4} = 3$

$$B_5(0; 3/4) = \frac{5!}{0!\,5!}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0.00098,$$

$$B_N(n,p) = \frac{N-n+1}{n}\frac{p}{1-p}B_N(n-1,p).$$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_5(n, 3/4)$
0	–	3	0.0009
1	5/1	3	0.0146
2	4/2	3	0.0879
3	3/3	3	0.2637
4	2/4	3	0.3955
5	1/5	3	0.2373



matematičko očekivanje - $E(x) = N \cdot p = 3.75$

standardna devijacija - $\sigma = \sqrt{N \cdot p(1-p)} = 0.968$

$\boxed{\textbf{4.57}}$ Proveravanjem jedne tinjalice ustanovljeno je da se prilikom 100 uključivanja, 75 puta uključi za vreme kraće od 0.5 s. Nacrtati raspodelu verovatnoće i kumulativnu raspodelu verovatnoće broja uključivanja tinjalice za vreme kraće od 0.5 s, ako tinjalicu uključujemo 14 puta.

Rešenje:

$$p = \frac{75}{100} = 0.75; \quad 1-p = 0.25; \quad N = 14; \quad \frac{p}{1-p} = 3;$$

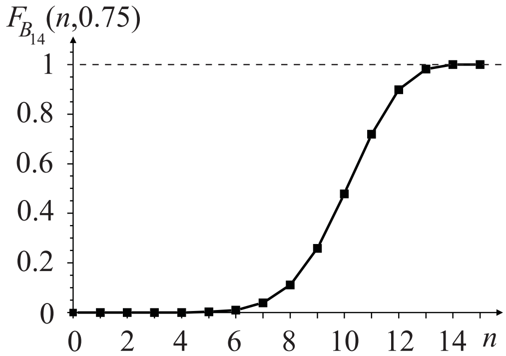
$B_{14}(0; 0.75) = 0; \quad B_{14}(1; 0.75) = 0,$

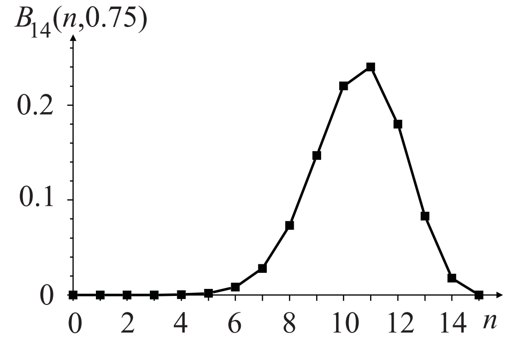
$B_{14}(2; 0.75) = 0; \quad B_{14}(3; 0.75) = 0,$

$$B_{14}(4; 0.75) = \frac{14!}{4!\,10!}(0.75)^4(0.25)^{10} = 0.0003,$$

$$B_N(n,p) = \frac{N-n+1}{n}\frac{p}{1-p}B_N(n-1,p).$$

n	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{1-p}$	$B_{14}(n, 0.75))$	$F_{B_{14}}(n, 0.75)$
0	–	3	0	0
1	14/1	3	0	0
2	13/2	3	0	0
3	12/3	3	0	0
4	11/4	3	0.0003	0.0003
5	10/5	3	0.0018	0.0021
6	9/6	3	0.0082	0.0103
7	8/7	3	0.0280	0.0383
8	7/8	3	0.0734	0.1117
9	6/9	3	0.1468	0.2585
10	5/10	3	0.2202	0.4787
11	4/11	3	0.2402	0.7189
12	3/12	3	0.1802	0.8991
13	2/13	3	0.0832	0.9823
14	1/14	3	0.0178	1.0001





4.58 Izračunati verovatnoće Poasonove raspodele za $\lambda = 1.2$ i $n = 0, 1, 2, 3, 4$ i prikazati ih tabelarno.

Rešenje:

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda};$$

$$n = 0;\ P_{1.2}(0) = \frac{1.2^0}{0!}e^{-1.2} = e^{-1.2} = 0.30119$$

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda}{n}P_\lambda(n-1);$$

n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_{1.2}(n)$
0	–	0.30119
1	1.2/1	0.36143
2	1.2/2	0.21685
3	1.2/3	0.08674
4	1.2/4	0.02602

4.59 Naći verovatnoću da slučajna promenjiva n uzme vrednost 3 ako je njena verovatnoća Poasonova, sa parametrom $\lambda = 5$.

Rešenje:

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}; \qquad P_5(3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5} = 0.14037$$

4.60 Aparat se sastoji od 100 delova. Verovatnoća da otkaže jedan deo u toku godine dana iznosi 0.01, a rad bilo kog dela ne zavisi od drugih delova. Prikazati raspodelu verovatnoće i kumulativnu raspodelu otkazivanja delova, ako je slučajna veličina broj otkazivanja delova u godini dana.

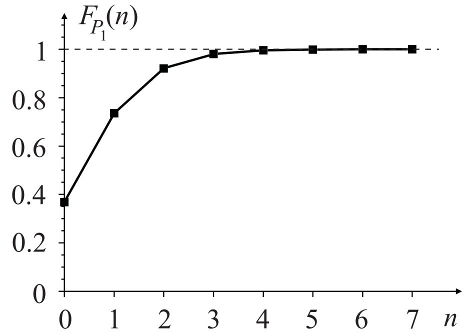
Rešenje:

$\lambda = Np = 1; \quad N = 100; \quad p = 0.01;$

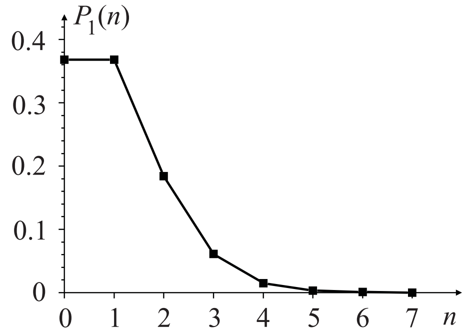
$P_\lambda(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda};$

$P_1(0) = \dfrac{1^0}{0!} e^{-1} = 0.368$

$P_\lambda(n) = \dfrac{\lambda}{n} P_\lambda(n-1);$



n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_\lambda(n)$	$F_{P_\lambda}(n)$
0	–	0.368	0.368
1	1	0.368	0.736
2	1/2	0.184	0.920
3	1/3	0.061	0.981
4	1/4	0.015	0.996
5	1/5	0.003	0.999
6	1/6	0.001	1
7	1/7	0	1



$\boxed{\textbf{4.61}}$ U eksperimentu GM brojač odbrojava impulse sa srednjom brzinom od 0.2 impulsa/s. Ako brojač može da registruje čestice u podintervalu od 1 μs koji su toliko mali da dva kvanta ne mogu upasti u isti interval, nacrtati raspodelu verovatnoće broja impulsa za interval od 0 do 10 s.

Rešenje:

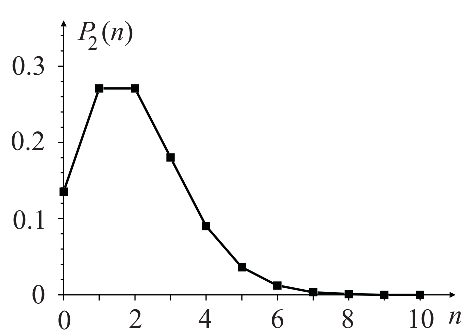
Neka se najpre posmatraju podintervali za koje važi Binomna raspodela.

$m = 0.2$ 1/s; $\quad N = 10^6$ 1/s; $\quad p = \dfrac{m}{N} = \dfrac{0.2}{10^6} = 0.2 \cdot 10^{-6}$

Broj impulsa za 10 s (broj podintervala od 1 μs u 10 s) iznosi: $N = 10 \cdot 10^6 = 10^7$; kako je $N = 10^7 \quad (N \to \infty)$ i $p = 0.2 \cdot 10^{-6} \to 0$, Binomna raspodela prelazi u Poasonovu, sa parametrom: $\lambda = pN = 0.2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7 = 2; \quad P_\lambda(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$; ($n$ broj impulsa u intervalu od 10 s).

$P_2(0) = \dfrac{2^0}{0!} e^{-2} = 0.1353; \qquad P_\lambda(n) = \dfrac{2}{n} P_2(n-1);$

n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_2(n)$
0	–	0.1353
1	2	0.2707
2	2/2	0.2707
3	2/3	0.1804
4	2/4	0.0902
5	2/5	0.0361
6	2/6	0.0120
7	2/7	0.0034
8	2/8	0.0008
9	2/9	0.0002
10	2/10	0



$\boxed{\mathbf{4.62}}$ Proizvodi jedne velike serije, koja sadrži 0.7% škarta, pakuju se po 100 komada u kutiju. Prikazati grafički raspodelu verovatnoće i kumulativnu raspodelu verovatnoće nalaženja škartova u kutiji, ako je broj nalaženja škartova u kutiji slučajna veličina.

Rešenje:

$p = \dfrac{0.7}{100} = 0.007; \quad N = 100; \quad \lambda = N \cdot p = 0.7$

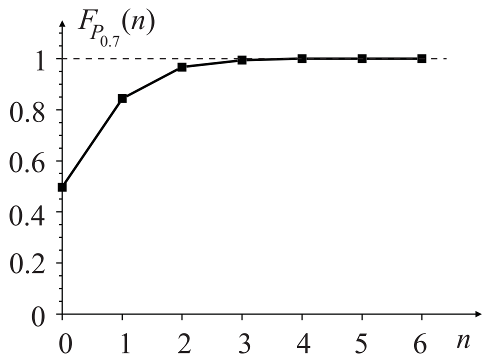
Zbog $p \to 0$ i $N \to \infty$ Binomna raspodela se može zameniti Poasonovom, sa parametrom: $\lambda = 0.7$;

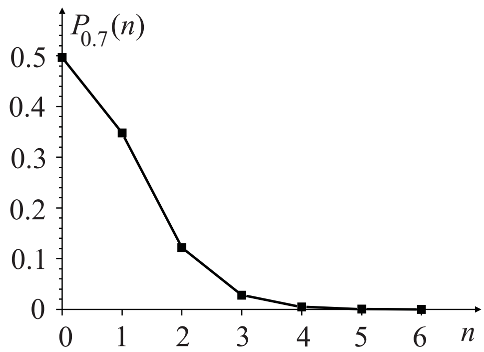
$P_\lambda(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda};$

$P_{0.7}(0) = \dfrac{0.7^0}{0!} e^{-0.7} = 0.4966;$

$P_{0.7}(n) = \dfrac{0.7}{n} P_{0.7}(n-1);$

n	$\frac{\lambda}{n}$	$P_{0.7}(n)$	$F_{P_{0.7}}(n)$
0	–	0.4966	0.4966
1	0.7	0.3476	0.8442
2	0.7/2	0.1217	0.9659
3	0.7/3	0.0284	0.9943
4	0.7/4	0.0050	0.9993
5	0.7/5	0.0007	1
6	0.7/6	0	1





4.4 Raspodela verovatnoće neprekidnih slučajnih veličina

Slučajna veličina X je neprekidna ako može uzeti bilo koju vrednost x iz nekog intervala $[a, b]$, konačnog ili beskonačnog. Verovatnoća da slučajna veličina X bude manja od x naziva se *funkcija raspodele verovatnoće* ili *kumulativna funkcija raspodele verovatnoće* (vidi sliku 4.2. b)):

$$F(x) = P(X < x), \qquad x \in [a, b]$$

Osobine funkcije raspodele $F(x)$ su:

1° $F(x)$ je neopadajuća i neprekidna

2° Verovatnoća nastupanja slučajnog događaja X iz nekog intervala $a \leq x \leq b$ određena je sa:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

3° $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Za neprekidnu slučajnu veličinu X čija je raspodela verovatnoće $F(x)$ definisana je i *funkcija gustine raspodele verovatnoće* $f(x)$ (vidi sliku 4.2. a)):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x), \quad za \quad \forall x \in [a, b]$$

Odnosno: $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

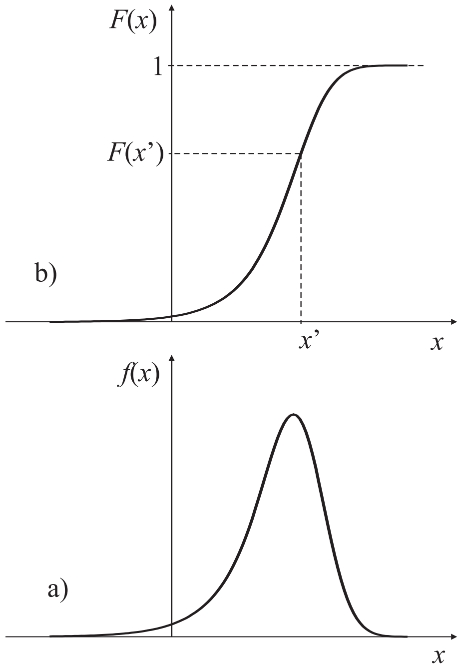
Funkcija raspodele verovatnoće $F(x)$ ima izvod u svakoj tački oblasti definisanosti. Osobine funkcije gustine raspodele verovatnoće su:

1° $f(x) \geq 0$

2° $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3° $F(x') = \int\limits_{-\infty}^{x'} f(x)dx$

Važno je imati u vidu da funkcija gustine raspodele $f(x)$ ne predstavlja nikakvu verovatnoću. (Kod diskretnih slučajnih veličina ne postoji gustina raspodele verovatnoće.)



Slika 4.2. Gustina raspodele verovatnoća $f(x)$ i funkcija raspodele verovatnoća $F(x)$ neprekidne slučajne veličine.

4.4.1 Parametri raspodele verovatnoće neprekidnih slučajnih veličina

- Matematičko očekivanje: $E(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- Mod – vrednost slučjne veličine za koju $f(x)$ ima maksimum.
- Medijana – M_e; $P(x \leq M_e(x)) = P(x \geq M_e(x)), \quad F(M_e) = 1/2$
- Disperzija i standardno odsupanje: $D(x) = \sigma^2 = E(x - E(x))^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx$
- Koeficijent asimetrije: $\gamma_A = \frac{E(x - E(x))^3}{\sigma^3} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^3 f(x)dx}{\sigma^3}$
- Keficijent spljoštenosti: $\gamma_S^* = \frac{E(x - E(x))^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^4 f(x)dx}{\sigma^4} - 3$

4.4.2 Gausova (Normalna) raspodela verovatnoće

Kada u binomnoj raspodeli broj eksperimenata $N \to +\infty$ i verovatnoća slučajnog događaja p ne zavisi od N, a slučajna veličina X uzima x realne vrednosti ($x \in R$), binomna raspodela prelazi u kontinualnu Gausovu raspodelu (vidi sliku 4.3) sa gustinom verovatnoće:

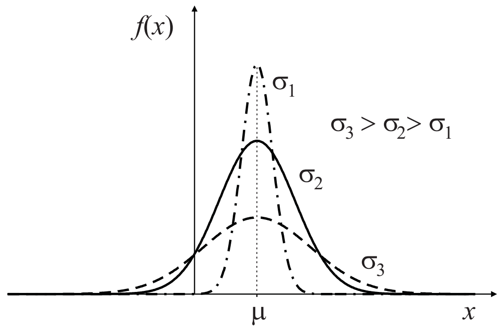
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$\mu = E(x)$ - matematičko očekivanje;
$\sigma = \sqrt{D(x)}$ - standardno odstupanje.

Osobine gustine raspodele verovatnoće:

1° $f(x) > 0$ je pozitivna i definisana za $x \in (-\infty < x < +\infty)$.

2° Horizontalna asimptota je x-osa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.



4.3. Gustina raspodele $f(x)$ slučajne promenjive X sa Gausovom raspodelom, za različite vrednosti standardnih devijacija.

3° Maksimalna vrednost funkcije je za $x = \mu$ i jednaka: $f(x = \mu) = f_{max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

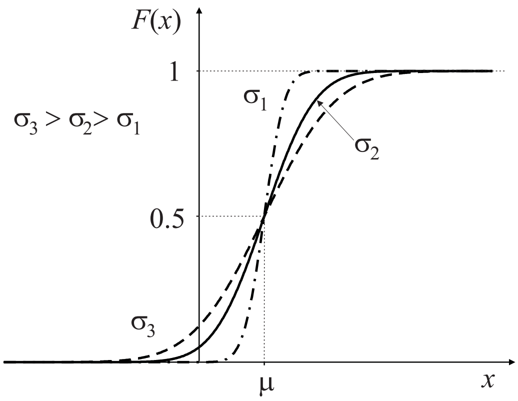
4° Funkcija $f(x)$ je simetrična u odnosu na $x = \mu$.

5° Prevojne tačke $f(x)$ su za $x = \mu - \sigma$ i $x = \mu + \sigma$ a vrednost funkcije $f(x)$ u tim tačkama je: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$

Funkcija raspodele slučajne veličine X sa Gausovom raspodelom (vidi sliku 4.4) koja uzima realne vrednosti x, sa parametrima μ i σ je:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

sa oznakom $X : N(\mu, \sigma)$.



Slika 4.4. Funkcija raspodele $F(x)$ slučajne promenjive X sa Gausovom raspodelom, za različite vrednosti standardnih devijacija.

4.4.3 Laplasova funkcija

Vrednosti funkcije raspodele slučajne promenjive sa Gausovome raspodelom se mogu odrediti samo numerički, pa se zbog jednostavnosti njihove primene koriste tabele Laplasove funkcije (vidi tabelu C na strani 184).

Laplasova funkcija je oblika: $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Osobine Laplasove funkcije su:

1° $\Phi(0) = 0$;

2° $\Phi(+\infty) = 1/2$;

3° $\Phi(-\infty) = -1/2$;

4° $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (neparna funkcija).

Neka slučajna veličina X sa Gausovom raspodelom, za bilo koje vrednosti μ i σ, korišćenjem smene $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, može se svesti na Laplasovu funkciju:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Zbog veze između Gausove funkcije raspodele i Laplasove fnkcije, korišćenjem Laplasove funkcije[1] moguće je odrediti verovatnoću $P(a < X < b)$ slučajne veličine sa Gausovom raspodelom, za bilo koje vrednosti μ i σ, da se nađe unutar intervala (a, b). Tada je[2]:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Za slučaj $a = -\infty$, poslednji izraz postaje[3]: $$P(X < b) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ili za bilo koju vrednost $b = x$ verovatnoća nastupanja slučajne veličine $X \leq x$ jednaka je Gausovoj funkciji raspodele $F(x)$, odnosno:

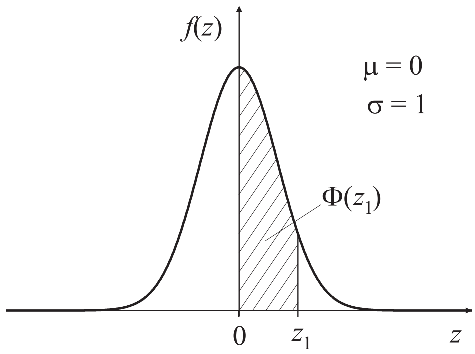
$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Uvođenjem nove slučajne veličine z smenom $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ dobija se Gausova normalna raspodela sa gustinom: $$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ dobijaju se *standardna Gausova gustina raspodele*: $$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

i *standardna Gausova funkcija raspodele verovatnoće* (oznaka $Z : \mathcal{N}(0,1)$): $$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

Standardna Gausova funkcija raspodele verovatnoće naziva se i *standardnom normalnom raspodelom verovatnoće*. Na taj način, Laplasova funkcija $\Phi(x)$ zapravo predstavlja integral standardne Gausove raspodele od nule do vrednosti x, u kojoj računamo Laplasovu funkciju. Standardna Gausova funkcija raspodele verovatnoće prikazana je na slici 4.5.



Slika 4.5. Gustina raspodele $F(z)$ slučajne promenjive Z sa Standardnom Gausovom raspodelom ($\mu = 0$ i $\sigma = 1$). Na slici je prikazana i vrednost Laplasove funkcije u tački z_1.

Na osnovu osobina Laplasove funkcije, za standardnu Gausovu funkciju raspodele može se napisati:

1° $F(-\infty) = 0$, x-osa je prva horizontalna asimptota.

[1] Za izračunavanje Laplasove funkcije može se koristiti aproksimativna formula:

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{za} \qquad 0 \leq x \leq +\infty$$

gde su: $t = \dfrac{1}{1+px}$, $p = 0.33267$, $a_1 = 0.1740121$, $a_2 = 0.0479339$, $a_3 = 0.3739278$.

Aproksimativna greška za $x > 0$ nije veća od $1.25 \cdot 10^{-5}$.

[2] $$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a}^{b} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$
$$= F(b) - F(a) = \Phi\left(\tfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

[3] $$P(X < b) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

2° $F(+\infty) = 1$, je druga horizontalna asipmtota[4].

3° $F(z) = \frac{1}{2} + \Phi(z), \qquad z > 0.$

4° $F(z) = \frac{1}{2} - \Phi(z), \qquad z < 0.$

Verovatnoća da se slučajna veličina $Z : \mathcal{N}(0,1)$ nađe između z_1 i z_2 je:

$$P(z_1 \leq z \leq z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_2)$$

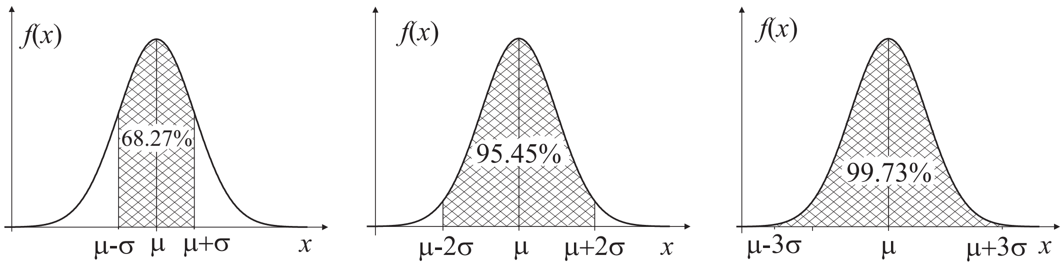
Ako su granice simetrične $|z_1| = |z_2| = |z|$ tada je: $P(z_1 \leq z \leq z_2) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2 \cdot \Phi(z)$

Verovatnoća nalaženja slučajne veličine $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ u simetričnim granicama intervala $\pm k\sigma (k = 1, 2, 3, \ldots)$ oko matematičkog očekivanja μ iznosi (vidi sliku 4.6):

$$P(-1 \leq z \leq 1) = P(-\sigma \leq x - \mu \leq \sigma) = 0.683 = 68.3\%$$

$$P(-2 \leq z \leq 2) = P(-2\sigma \leq x - \mu \leq 2\sigma) = 0.955 = 95.5\%$$

$$P(-3 \leq z \leq 3) = P(-3\sigma \leq x - \mu \leq 3\sigma) = 0.9975 = 99.75\%$$



Slika 4.6. Primer verovatnoća nalaženja slučajne promenjive X u intervalu $x \pm k\sigma$, za vrednosti $k = 1$, 2 i 3.

Za proizvoljan interval $|z'| = z$ verovatnoća nalaženja slučajne veličine je:

$$P(-z' \leq z \leq z') = P(-z' \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq z') = P(-z'\sigma \leq x - \mu \leq z'\sigma) = p$$

Za unapred zadatu verovatnoću p, z' se nalazi iz tabele C, na strani 184 za $p = 2 \cdot \Phi(z')$ ili za najbližu vrednost $\Phi(z')$, ako se tačna vrednost ne nalazi u tabeli.

4.4.4 Raspodela χ^2 (Hi-kvadrat raspodela verovatnoće)

Posmatra se n nezavisnih slučajnih veličina $x_1, x_2, \cdots, x_n$ za koje važi Gausova raspodela verovatnoće $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. Uvodi se bezdimenziona nova slučajna veličina:

$$z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

koja se ponaša prema Gausovoj normalnoj raspodeli $\mathcal{N}(0,1)$.
Formira se nova slučajna veličina sabiranjem kvadrata slučajnih veličina z_i^2 sa oznakom:

$$z = \chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

koja se naziva *hi-kvadrat* (χ_n^2) sa n stepeni slobode (broj merenja).

---

[4] $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.5,$ pa je: $F(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1.$

Polazeći od uopštene Gausove raspodele izvodi se χ^2 gustina raspodele u obliku:

$$f(z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot (z)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

gde je $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ specijalna Gama funkcija. Ova gustina raspodele ima jedan parametar n, koji predstavlja stepen slobode (broj merenja). Tipična χ^2 raspodela prikazana je na slici 4.7.

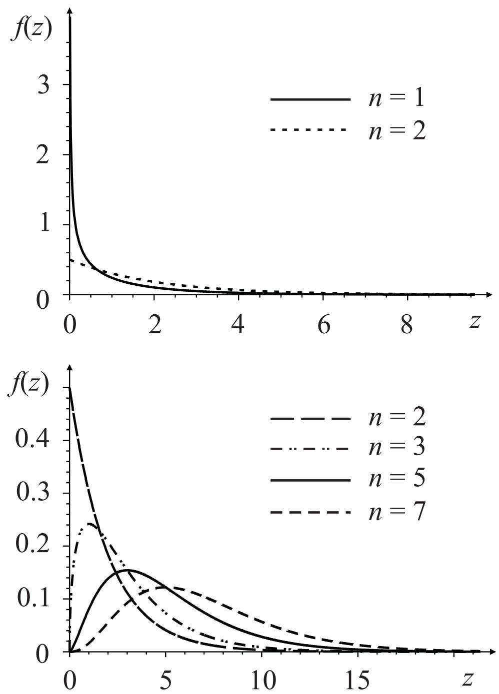
Matematičko očekivanje: $E(z) = n$;

standardno odstupanje: $\sigma = \sqrt{2n}$;

koeficijent asimetrije: $\gamma_A = \dfrac{8}{n}$;

koeficijent spljoštenosti: $\gamma_E = \dfrac{12}{n}$.

Slučajna veličina $z = \chi^2_n$ je uvek pozitivna pa se gustina raspodele nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema, kao na slici. Ako je $n \geq 3$ krive polaze iz koordinatnog početka $(0,0)$, a maksimum je $z_{max} = M_0 = n - 2$, i asimptotski se približavaju z-osi. Ako je $n > 30$, χ^2 raspodela teži Gausovoj normalnoj raspodeli $\mathcal{N}(n, \sqrt{2n})$.



Slika 4.7. Gustina raspodele slučajne promenjive Z sa χ^2 raspodelom.

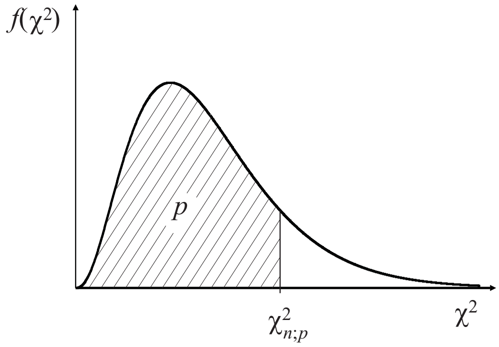
Za ovu raspodelu važi i uslov normiranja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1.$$

Verovatnoća pojavljivanja slučajne veličine $z = \chi^2_n$ za odredjene vrednosti n iznosi:

$$P(\chi^2_n \leq \chi^2_{n,p}) = p$$

što je ilustrovano na slici 4.8. Vrednosti ovih verovatnoća date su u tabeli D, na strani 186.



Slika 4.8. Verovatnoća nastupanja slučajne veličine $\chi^2_{n,p}$.

4.4.5 Studentova raspodela verovatnoće

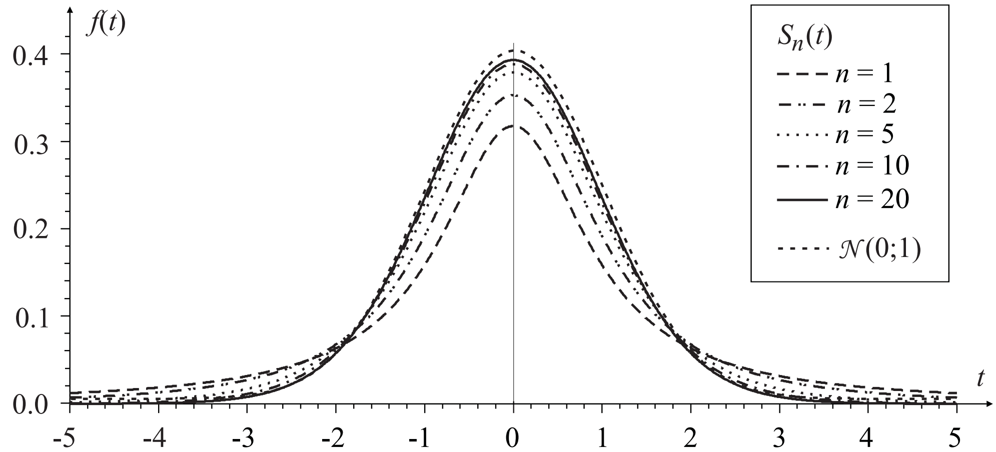
Ako se raspolaže manjim brojem merenja (od 3 do oko 30) za statističku obradu podataka koristi se *Studentova raspodela* ili *t-raspodela* verovatnoće. Ovu raspodelu objavio je W. S. Goset 1908. godine pod pseudonimom "Student" po kome je i dobila naziv Studentova raspodela.
Posmatraju se dve slučajne veličine, od kojih prva X podleže Gausovoj raspodeli, a druga Y podleže χ^2 raspodeli sa n-stepeni slobode. Formira se nova slučajna veličina u obliku:

$$t = \frac{x}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}}$$

Polazeći od upštene Gausove raspodele i χ^2 raspodele izvodi se gustina raspodele verovatnoće slučajne veličine t u obliku:

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \text{za} -\infty < t < \infty$$

gde je n - broj stepeni slobode (broj merenja), $\Gamma(n)$ Gama funkcija. Ilustracija Studentove raspodele data je na slici 4.9.



Slika 4.9. Upoređivanje gustina raspodela slučajne promenjive t sa studentovom raspodelom za $n = 1$, 2, 5, 10 i 20 sa Gausovom raspodelom $\mu = 0$ i $\sigma = 1$.

Funkcija $S(t)$ je parna funkcija, odnosno $S(-t) = S(t)$, i simetrična u odnosu na ordinatu $t = 0$.

Matematičko očekivanje je $E(t) = 0$, a standardno odstupanje je $\sigma = \sqrt{\dfrac{n}{n-2}}$.

Koeficijent asimetrije je $\gamma_A = 0$, a koeficijent spljoštenosti je $\gamma_E = \dfrac{6}{n-4}$.

Vrednosti slučajne promenljive t za dati stepen slobode n i verovatnoću p su date u tabeli E na strani 188.

Verovatnoća da se slučajna promenljiva t_n nađe između 0 i t_{np} iznosi:

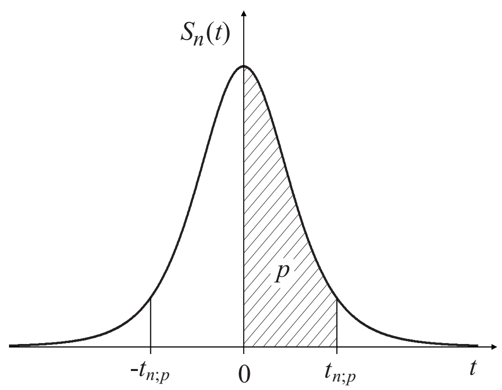
$$P(t_n < t_{n,p}) = p,$$

a verovatnoća da se nađe između $-t_{n,p}$ i $t_{n,p}$, što je ilustrovano na slici 4.10, iznosi:

$$P(|t_n| < t_{n,p}) = 2p$$

Verovatnoća nastupanja sigurnog događaja slučajne veličine t data je uslovom normiranja studentove gustine raspodele verovatnoće.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)dt = 1$$



Slika 4.10. Verovatnoća nastupanja slučajnog događaja između $-t_{n,p}$ i $t_{n,p}$.

4.4.6 Fišerova raspodela verovatnoće

Neka postoje dve grupe slučajnih veličina, od kojih svaka grupa ima isto matematičko očekivanje i standardno odstupanje, odnosno:

$$x_1', x_2', \cdots, x_{n1}' : \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1) \qquad \text{i} \qquad x_1'', x_2'', \cdots, x_{n2}'' : \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$$

Definišu se nove slučajne veličine:

$$z_i' = \frac{x_i' - \mu_1}{\sigma_1} \qquad \text{i} \qquad z_i'' = \frac{x_i'' - \mu_2}{\sigma_2}$$

Ako svaku slučajnu veličinu za prvu i drugu grupu kvadriramo i saberemo dobijaju se nove slučajne veličine u obliku:

$$\chi_{n_1}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} z_i'^2 \qquad \text{i} \qquad \chi_{n_2}^2 = \sum_{i=1}^{n_2} z_i''^2$$

Od ovih slučajnih veličina $\chi_{n_1}^2$ i $\chi_{n_2}^2$ uvodi se nova slučajna y veličina: $y = \dfrac{\frac{\chi_{n_1}^2}{n_1}}{\frac{\chi_{n_2}^2}{n_2}} = f_{n_1,n_2}$

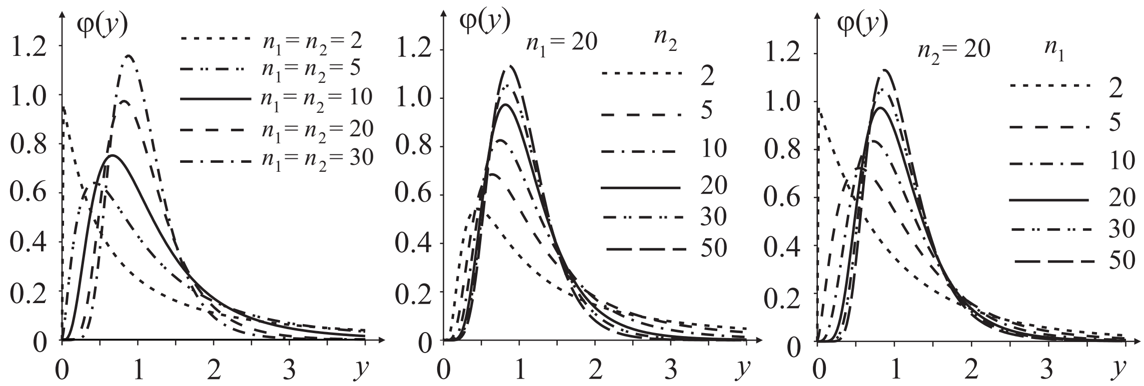
Pri čemu se uvek uzima da je $n_1 > n_2$. Pokazuje sa da ova nova slučajna veličina y ima *Fišerovu raspodelu* čija je gustina:

$$\varphi_{n_1,n_2}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{y^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_2 + n_1 \cdot y)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, \qquad 0 \le y \le +\infty$$

Parametri Fišerove gustine raspodele su n_1 i n_2. Funkcija $\varphi_{n_1,n_2}(y)$ je asimetrična i prolazi kroz koordinatni početak i dostiže svoj maksimum za:

$$y_{max} = M_0 = \frac{n_1 - 2}{n_2 + 2} \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

Na slici 4.11. prikazane su Fišerove raspodele za vrednosti broja stepena slobode naznačenim na slici.



Slika 4.11. Upoređivanje gustina raspodela slučajne promenjive y sa Fišerovom raspodelom za različite stepene slobode n_1 i n_2.

Uslov normiranja Fiserove gustine raspodele je ispunjen jer važi: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n_1,n_2}(y)dy = 1$

Matematičko očekivanje: $E(y) = \dfrac{n_1}{n_2 - 2}, \quad n_2 > 2$

Standardno odstupanje je: $\sigma = \sqrt{D(y)} = \sqrt{\dfrac{2n_1 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{(n_2 - 2)\cdot(n_2 - 4)}}, \quad n_2 > 4.$

U tabelama za Fišerovu raspodelu (tabela F, na strani 189) date su vrednosti $f_{n_1,n_2,p}$ za različite vrednosti n_1 i n_2 stepeni slobode i verovatnoće p, ali tako da slučajna veličina $y = f_{n_1,n_2}$ uzima vrednosti od $f_{n_1,n_2,p}$, sa verovatnoćom p, odnosno:

$$P(f_{n_1,n_2} < f_{n_1,n_2,p}) = p$$

gde f_{n_1,n_2} može uzeti vrednosti u intervalu:

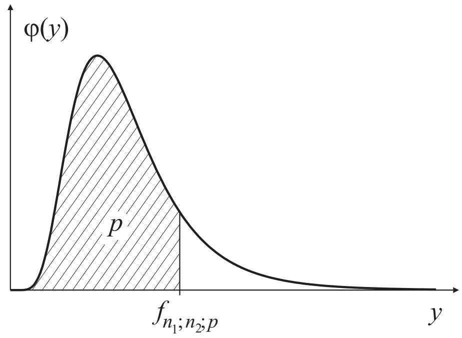
$$0 < f_{n_1,n_2} < f_{n_1,n_2,p},$$

kao što je prikazano na slici 4.12.

Ako slučajna veličina y ima Fišerovu raspodelu verovatnoće, tada i slučajna veličina $1/y$ ima Fišerovu raspodelu verovatnoće, pa je:

$$f_{n_1,n_2,p} = \frac{1}{f_{n_2,n_1,1-p}}$$

Zbog ove osobine u tabelama F su date vrednosti koeficijenata $f_{n_1,n_2,p}$ samo za vrednosti $p \geq 0.75$, a na osnovu prethodnog izraza izračunavaju se vrednosti koeficijenata za verovatnoće $p \leq 0.25$.

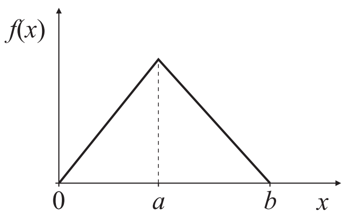


Slika 4.12. Gustina raspodele verovatnoć nastupanja slučajnog događaja između $-t_{n,p}$ i $t_{n,p}$.

Zadaci

4.63 Gustina raspodele verovatnoće neprekidne slučajne promenljive ima oblik trougla i definisana je sa:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za}\, x < 0,\ x > b \\ \dfrac{2x}{ab}, & \text{za}\, 0 \leq x \leq a \\ \dfrac{2x}{ab-b^2} + \dfrac{2}{b-a}, & \text{za}\, a \leq x \leq b \end{cases}$$



naći kumulativnu raspodelu verovatnoće.

Rešenje:

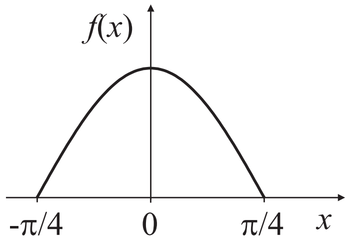
$$F(x) = 0, \quad \text{za} \quad x < 0 \qquad F(x) = \int_0^x \frac{2x}{ab} dx = \frac{x^2}{ab}, \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$F(x) = \int_a^x \left(\frac{2x}{ab-b^2} + \frac{2}{b-a} \right) dx + \int_0^a \frac{2x}{ab} dx = \frac{x^2-a}{ab-b^2} + \frac{2(x-a)}{b-a} + \frac{a}{b}, \quad \text{za} \quad a \leq x \leq b$$

$$F(x) = 1, \quad x > b$$

4.64 Neprekidna slučajna veličina x ima gustinu raspodele verovatnoće:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & \text{za} \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{za} \quad x < -\frac{\pi}{4},\ x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



a.) Odrediti konstantu A,

b.) Naći kumulativnu raspodelu verovatnoće

c.) Izračunati verovatnoću $P(0 < x \leq \frac{\pi}{8})$.

Rešenje:

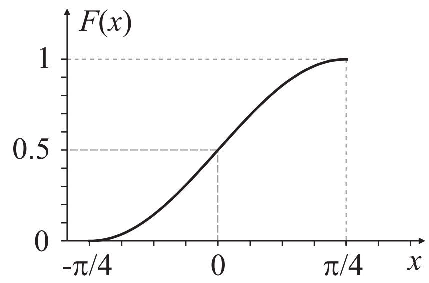
a.) Konstanta A određuje se iz uslova normiranja funkcije gustine raspodele, odnosno:

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} A\cos 2x dx = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} A \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1, \quad \Rightarrow A = 1$$

b.) Funkcija raspodele je:

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}(\sin 2x - 1), \quad \text{za} \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

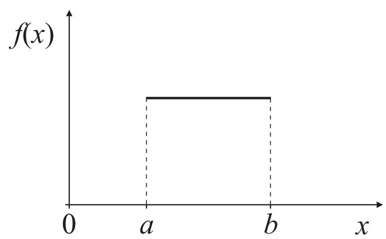
Za $x < -\frac{\pi}{4}$, $F(x) = 0$, a za $x > \frac{\pi}{4}$, $F(x) = 1$



c.) Verovatnoća je: $P(0 < x < \frac{\pi}{8}) = F(\frac{\pi}{8}) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{\textbf{4.65}}$ Uniformna raspodela je defiisana gustinom raspodele:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{za} \quad a < x < b \\ 0, & \text{za} \quad x < a,\ x > b \end{cases}$$



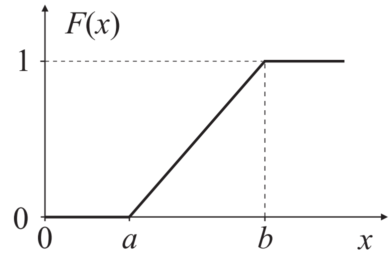
a.) Odrediti funkciju raspodele verovatnoće.

b.) Odrediti matematičko očekivanje i standardno odstupanje ove raspodele.

Rešenje:

a.) Funkcija raspodela verovatnoće je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, & \text{za} \quad a < x < b \\ 1, & \text{za} \quad x > b \end{cases}$$



b.) Matematičko očekivanje:

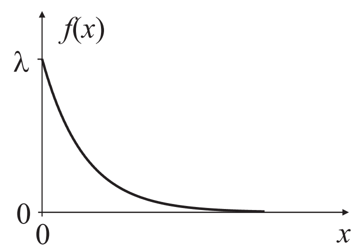
$$E(x) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2},$$

Standardno odstupanje uniformne raspodele je:

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \bar{x}^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}, \Rightarrow \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

$\boxed{\textbf{4.66}}$ Eksponencijalna raspodela je definisana gustinom raspodele:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{za} \quad x > 0, \quad \lambda > 0 \end{cases}$$



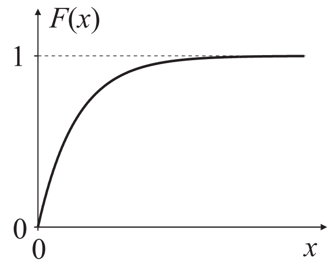
a.) Odrediti kumulativnu raspodelu verovatnoće.

b.) Odrediti matematičko očekivanje i standardno odstupanje eksponencijalne raspodele.

Rešenje:

a.) Funkcija raspodele verovatnoće je:

$F(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{\lambda x}$



b.) Matematičko očekivanje je: $\quad E(x) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$

Ovaj integral rešava se metodom parcijalne integracije:

$\int u dv = uv - \int v du$, sa smenom $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$, tako da se dobija: $E(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$

Standardno odstupanje je: $\quad \sigma^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$

Ovaj integral takođe se rešava dvostrukom parcijalnom integracijom smenom $u = x^2$, $dv = e^{-\lambda x} dx$, i korišćenjem rezultata pod a.), dobija se:
$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda}$, odnosno $\Rightarrow E(x) = \sigma = \frac{1}{\lambda}$

$\boxed{\textbf{4.67}}$ Formirati tabelu Gausove gustine raspodele verovatnoće i Gausove funkcije raspodele verovatnoće i nacrtati ove raspodele, za slučajne veličine X sa sledećim Gausovim raspodelama:

a.) $X : \mathcal{N}(40, 1)$;

b.) $X : \mathcal{N}(40, 2)$;

c.) $X : \mathcal{N}(40,\ 0.5)$,

za vrednosti slučajne veličine z iz Gausove standardne raspodele koje se razlikuju za 0.5.

Rešenje:

a.) Gausova funkcija gustina raspodele verovatnoće definisana je u obliku:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Smenom $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ dobija se standardna Gausova gustina raspodele:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$$

Imajući u vidu Laplasovu funkciju $\Phi(z)$ standardna Gausova funkcija raspodele verovatnoće može se izraziti u obliku:

$$F(z) = \tfrac{1}{2} + \Phi(z), \quad z > 0, \qquad F(z) = \tfrac{1}{2} - \Phi(z), \quad z < 0.$$

Ako je $\mu = 40$ i $\sigma = 1$ tada je $z = \dfrac{x - 40}{1}$, a za različite vrednosti promenljive x (korišćenjem vrednosti $f(z)$ za date vrednosti z iz tabele C na strani 184), dobija se:

$z = 0$ za $x = 40$; $z = 0.5$ za $x = 40.5$;

$z = 1.0$ za $x = 41.0$; ...

a)

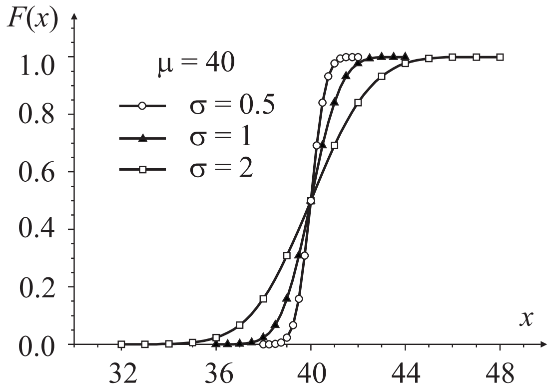
x	z	$f(x)$	$\Phi(z)$	$F(z)$
36.0	-4.0	–	–	–
36.5	-3.5	0.0009	0.4998	0.0002
37.0	-3.0	0.0044	0.4987	0.0013
37.5	-2.5	0.0175	0.4938	0.0062
38.0	-2.0	0.0540	0.4773	0.0227
38.5	-1.5	0.1295	0.4332	0.0668
39.0	-1.0	0.2420	0.3413	0.1587
39.5	-0.5	0.3521	0.1915	0.3087
40.0	0.0	0.3989	0.0	0.5
40.5	0.5	0.3521	0.1915	0.6915
41.0	1.0	0.2420	0.3413	0.8413
41.5	1.5	0.1295	0.4332	0.9332
42.0	2.0	0.0540	0.4773	0.9773
42.5	2.5	0.0175	0.4938	0.9938
43.0	3.0	0.0044	0.4987	0.9987
43.5	3.5	0.0009	0.4998	0.9988
44.0	4.0	0.0	–	0.9988

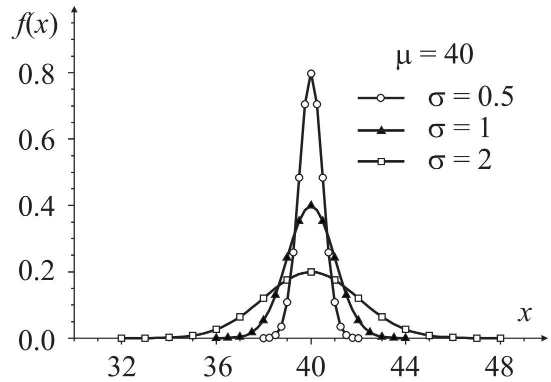
b)

x	z	$f(x)$	$\Phi(z)$	$F(z)$
32.0	-4.0	–	–	–
33.0	-3.5	0.0045	0.4998	0.0002
34.0	-3.0	0.0022	0.4987	0.0013
35.0	-2.5	0.0087	0.4938	0.0062
36.0	-2.0	0.0270	0.4773	0.0227
37.0	-1.5	0.0648	0.4332	0.0668
38.0	-1.0	0.1210	0.3413	0.1587
39.0	-0.5	0.1760	0.1915	0.3087
40.0	0.0	0.1994	0.0	0.5
41.0	0.5	0.1760	0.1915	0.6915
42.0	1.0	0.1210	0.3413	0.8413
43.0	1.5	0.0648	0.4332	0.9332
44.0	2.0	0.0270	0.4773	0.9773
45.0	2.5	0.0087	0.4938	0.9938
46.0	3.0	0.0022	0.4987	0.9987
47.0	3.5	0.0045	0.4998	0.9988
48.0	4.0	–	–	0.9988

c)

x	z	$f(x)$	$\Phi(z)$	$F(z)$
38.00	-4.0	–	–	–
38.25	-3.5	0.0018	0.4998	0.0002
38.50	-3.0	0.0088	0.4987	0.0013
38.75	-2.5	0.0350	0.4938	0.0062
39.00	-2.0	0.1080	0.4773	0.0227
39.25	-1.5	0.2590	0.4332	0.0668
39.50	-1.0	0.4840	0.3413	0.1587
39.75	-0.5	0.7042	0.1915	0.3087
40.00	0.0	0.7978	0.0	0.5
40.25	0.5	0.7042	0.1915	0.6915
40.50	1.0	0.4840	0.3413	0.8413
40.75	1.5	0.2590	0.4332	0.9332
41.00	2.0	0.1080	0.4773	0.9773
41.25	2.5	0.0350	0.4938	0.9938
41.50	3.0	0.0088	0.4987	0.9987
41.75	3.5	0.0018	0.4998	0.9988
42.00	4.0	–	–	0.9988





4.68 Pokazati da je u izrazu za gustinu Gausove raspodele:

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

parametar a jednak matematičkom očekivanju $E(x)$, odnosno srednjoj vrednosti μ, a parametar b jednak standardnom odstupanju σ.

Rešenje:

Matematičko očekivanje definiciji iznosi: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$

Smenom $t = \frac{x-a}{b\sqrt{2}}$, $dx = \sqrt{2}bdt$ dobija se: $E(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{b\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$

Kako je: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, i $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = 0$, dobija se: $E(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = a = \mu$

Standardno odstupanje je prema definiciji: $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2b^2}} dx$

Smenom $t = \frac{x-a}{b\sqrt{2}}$, $dx = \sqrt{2}bdt$ dobija se: $\sigma^2 = \frac{2b^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{t^2} dt$

Kako je po definiciji: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, dobija se: $\sigma^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{2b^2}{\sqrt{\pi}} = b^2, \quad \Rightarrow \sigma = b$

što je i trebalo dokazati.

4.69 Nacrtati gustinu Studentove raspodele verovatnoće ako se vrednosti slučajne veličine t menjaju za 0.5 u opsegu od -3 do 3, za broj stepeni slobode (broj merenja), $n = 3$, $n = 8$ i $n = 20$, zajedno sa standardnom Gausovom raspodelom $\mathcal{N}(0, 1)$.

Rešenje:

Studentova gustina raspodele ima oblik: $S(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = C_n \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

Proračunate vrednosti studentove gustine raspodele, kao vrednosti za Gausovu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$ (iz tabele C na strani 184) date su u sledećim tabelama:

$n = 3$; $C_3 = 0.36376 \simeq 0.364$; $-\frac{n+1}{2} = -2$

$-t$	t	$\frac{t^2}{n}$	$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-2}$	$S(n,t)$
0.0	0.0	0.0	1.0	0.368
-0.5	0.5	0.08	0.8573	0.315
-1.0	1.0	0.33	0.5653	0.208
-1.5	1.5	0.75	0.3265	0.120
-2.0	2.0	1.33	0.1842	0.068
-2.5	2.5	2.08	0.1054	0.039
-3.0	3.0	3.0	0.0625	0.023

$n = 8$; $C_8 = 0.3867 \simeq 0.387$; $-\frac{n+1}{2} = -4.5$

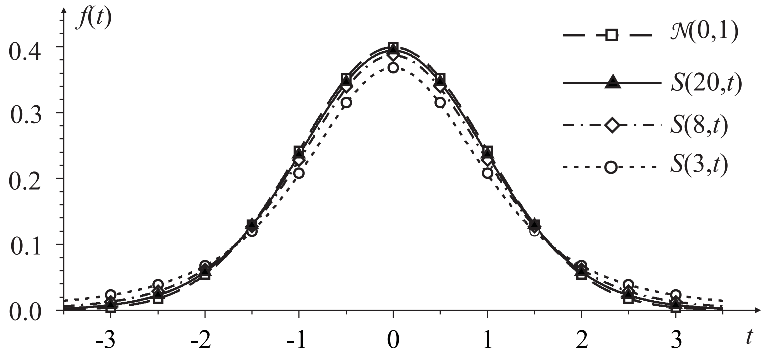
$-t$	t	$\frac{t^2}{n}$	$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-4.5}$	$S(n,t)$
0.0	0.0	0.0	1.0	0.387
-0.5	0.5	0.030	0.8754	0.339
-1.0	1.0	0.125	0.5886	0.228
-1.5	1.5	0.280	0.3239	0.127
-2.0	2.0	0.500	0.1613	0.062
-2.5	2.5	0.781	0.0745	0.029
-3.0	3.0	1.125	0.0336	0.013

Za $n = 20$; $C_{20} = 0.3940 \simeq 0.394$; $-\frac{n+1}{2} = -10.5$

$-t$	t	$\frac{t^2}{n}$	$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-4.5}$	$S(n,t)$
0.0	0.0	0.0	1.0	0.394
-0.5	0.5	0.0125	0.8778	0.346
-1.0	1.0	0.0500	0.5991	0.236
-1.5	1.5	0.1125	0.3265	0.129
-2.0	2.0	0.2000	0.1474	0.058
-2.5	2.5	0.3125	0.0575	0.023
-3.0	3.0	0.4500	0.0202	0.008

$\mathcal{N}(0, 1)$

$-z$	z	$\mathcal{N}(0,1)$
0.0	0.0	0.3989
-0.5	0.5	0.3521
-1.0	1.0	0.2420
-1.5	1.5	0.1300
-2.0	2.0	0.0540
-2.5	2.5	0.0175
-3.0	3.0	0.0044



$\boxed{\textbf{4.70}}$ Nacrtati gustinu χ^2 raspodele sa $n = 2$, $n = 6$ i $n = 10$ ako se vrednosti slučajne veličine $X(\chi^2)$ menjaju za 1. Sve tri raspodele nacrtati na istom grafiku.

Rešenje:

Gustina raspodele χ^2 ima oblik: $\chi^2(n,x) = C'_n x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}}$ gde je: $C'_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

a.) Za $n = 2$; $C'_2 = 0.5$;

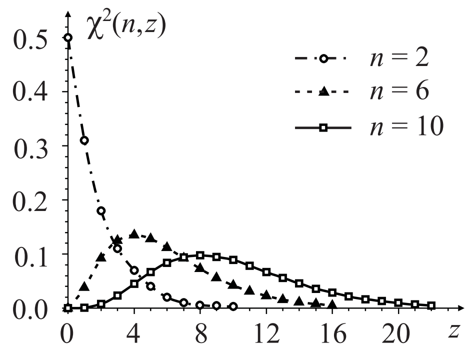
x	$e^{-\frac{x}{2}}$	$\chi^2(2,x)$
0	1	0.50
1	0.607	0.31
2	0.368	0.18
3	0.223	0.11
4	0.135	0.07
5	0.0821	0.04
6	0.0498	0.02
7	0.0302	0.01
8	0.0183	0.009
9	0.0111	0.005
10	0.0062	0.003

b.) Za $n = 6$; $C'_6 = 0.0625$

x	x^2	$e^{-\frac{x}{2}}$	$\chi^2(6,x)$
0	0	1	0.0
1	1	0.607	0.038
2	4	0.368	0.092
3	9	0.223	0.125
4	16	0.135	0.135
5	25	0.0821	0.128
6	36	0.0498	0.112
7	49	0.0302	0.092
8	64	0.0183	0.0732
9	81	0.0111	0.0562
10	100	0.0067	0.0419
11	121	0.0041	0.0310
12	144	0.0025	0.0225
13	169	0.0015	0.0158
14	196	0.00091	0.0111
15	225	0.00055	0.008
16	256	0.00034	0.005

c.) Za $n = 10$; $C'_{10} = 0.001302$;

x	x^4	$e^{-\frac{x}{2}}$	$\chi^2(10,x)$
0	0	1	0.0
1	1	0.607	0.00079
2	16	0.368	0.00767
3	81	0.223	0.0235
4	256	0.135	0.045
5	625	0.082	0.067
6	1296	0.0498	0.084
7	2401	0.0302	0.094
8	4096	0.0183	0.098
9	6561	0.0111	0.095
10	10000	0.0067	0.089
11	14641	0.0041	0.078
12	20736	0.0025	0.067
13	28561	0.0015	0.056
14	38416	0.00091	0.046
15	50625	0.00055	0.036
16	65536	0.00034	0.029
17	83521	0.00020	0.022
18	104976	0.00012	0.016
19	130321	0.000075	0.013
20	160000	0.00004	0.008
21	194481	0.00003	0.007
22	234256	0.00002	0.005

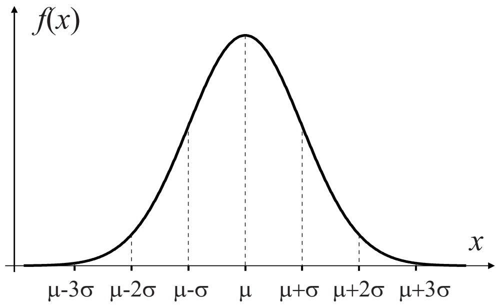


4.71 Ako slučajna veličina X ima Gausovu normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ, tj. $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, izračunati $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$ za $k = 1, 2, 3$.

Rešenje:

Tražena verovatnoća je: $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(-k < \dfrac{x-\mu}{\sigma} < k) = P(-k < Z < k) = 2\Phi(k)$

gde je: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



Za različite vrednosti k verovatnoća iznosi:

$k = 1$; $P_1 = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826$

$k = 2$; $P_2 = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0.4773 = 0.9346$

$k = 3$; $P_3 = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.4986 = 0.9973$

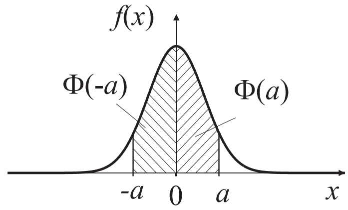
Vrednosti $\Phi(1)$, $\Phi(2)$ i $\Phi(3)$ se čitaju iz tabela C na strani 184.

4.72 a.) Površina ispod Gausove krive od 0 do a iznosi 0.377. Odrediti vrednost a.
b.) Površina ispod Gausove krive levo od b iznosi 0.8621. Naći vrednost b.
c.) Površina ispod Gausove krive između -1.5 i c je 0.0217. Naći vrednost c.

Rešenje:

Standardna Gausova gustina ima oblik:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$; $\mu = 0$, $\sigma = 1$



a.) iz tabele C na strani 184 nalazi se $\Phi(a) = 0.377$;
Gausova raspodela je simetrična, $\Phi(a) = \Phi(-a)$, pa sledi da a može imati vrednosti $a = 1.16$ i $a = -1.16$.

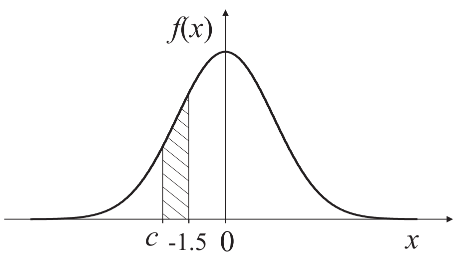
b.) Pošto je površina ispod Gausove krive jednaka verovatnoći, i kako je $\Phi(\infty) = 0.5$ (vidi tabelu C na strani 184) to je:

$0.8621 = 0.5 + \Phi(b) \Rightarrow \Phi(b) = 0.3621$ i iz tablice sledi: $b = 1.09$.

c.) Kako je: $\Phi(c) = \displaystyle\int_{-1.5}^{c} f(z)dz = 0.0217$; $\Phi(1.5) = 0.433$ (vidi tabelu C na strani 184);

i kako je: $0.433 > 0.0217$ i $0.433 + 0.0217 < 0.5$, $\Rightarrow$ c može imati dve vrednosti.

1° Ako je $c < -1.5$ tada je verovatnoća:

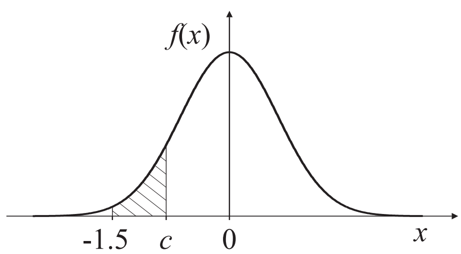


$P(c < z < -1.5) =$
$= P(c < z < 0) - P(-1.5 < z < 0)$

$\Rightarrow 0.0217 = \Phi(c) - 0.4332 \Rightarrow \Phi(c) = 0.4549$

$\Rightarrow c = -1.693$

2° Ako je $c > -1.5$ tada je verovatnoća:



$P(-1.5 < z < c) =$
$= P(-1.5 < z < 0) - P(c < z < 0)$

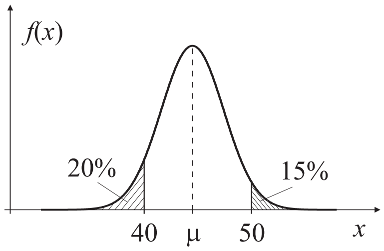
$\Rightarrow 0.0217 = 0.4332 - \Phi(c) \Rightarrow \Phi(c) = 0.4115$

$\Rightarrow c = -1.35$

$\boxed{\mathbf{4.73}}$ Slučajna veličina X ima normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ. Odrediti ove parametre ako se zna da je verovatnoća da veličina X uzme vrednost manju od 40 jednaka 0.2, dok je verovatnoća da uzme vrednost veću od 50 jednaka 0.15.

Rešenje:

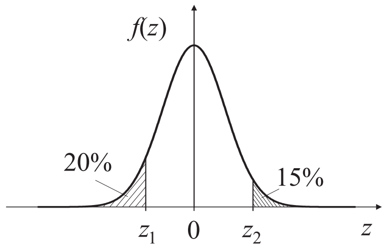
Verovatnoća da slučajna veličina X dobije vrednost veću od 50 i manju od 40 jednaka je verovatnoći da slučajna veličina Z dobije vrednost manju od z_1 i veću od z_2, kao što je prikazano na slikama.



$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

$$z_1 = \frac{40-\mu}{\sigma} \text{ i } z_2 = \frac{50-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow$$



Verovatnoća da slučajna veličina X dobije vrednost veću od 50 jednaka je:

$$P(x > 50) = \int_{50}^{\infty} f(x)dx \quad \Rightarrow \quad P\left(z > \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = P(z > z_2)$$

$$P(z > z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 - \Phi(z_2)$$

$$\Rightarrow \quad 0.15 = 0.5 - \Phi(z_2) \quad \Rightarrow \quad \Phi(z_2) = \Phi\left(\frac{50-\mu}{\sigma}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{50-\mu}{\sigma} = 1.04 \quad \Rightarrow \quad 50 - \mu = 1.04\sigma$$

Slično, verovatnoća da slučajna veličina X dobije vrednost manju od 40 jednaka je:

$$P(x < 40) = \int_{-\infty}^{40} f(x)dx \quad \Rightarrow \quad P\left(z < \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = P(z < z_1); \quad P(z < z_1) = 0.5 - \Phi(z_1)$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 = 0.5 - \Phi(z_1) \quad \Rightarrow \quad \Phi(z_1) = \Phi\left(\frac{40-\mu}{\sigma}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{40-\mu}{\sigma} = 0.84 \quad \Rightarrow \quad 50 - \mu = -0.84\sigma$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$\mu + 1.04\sigma = 50$

$\mu - 0.84\sigma = 40$

$\Rightarrow$ dobijaju se traženi parametri raspodele:

$\mu = 44.468$ i $\sigma = 5.319$.

$\boxed{\mathbf{4.74}}$ Neka slučajna veličina X ima $\mathcal{N}(\mu, 4)$ raspodelu. Naći matematičko očekivanje ove raspodele $E(x) = \mu$, tako da je:

$$P(2 + \mu < x < 2\mu + 4) = 0.2835$$

Rešenje:

Verovatnoća da se slučajna veličina X nađe u intevalu $(2 + \mu, 2\mu + 4)$, jednaka je verovatnoći da se slučajna promenjiva Z nađe u intervalu (z_1, z_2) je:

$$P(z_1 < z < z_2) = P(z_1 < \frac{x-\mu}{\sigma} < z_2) = P(\mu + z_1\sigma < x < \mu + z_2\sigma),$$

odnosno, treba da bude ispunjen uslov: $\mu + z_1 \cdot 4 < x, \quad x < \mu + z_2 \cdot 4, \qquad (1)$

Iz uslova zadatka: $P(2+\mu < x < 2\mu+4) = 0.2835$

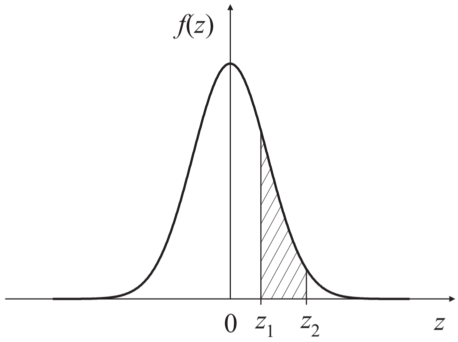
dobijaju se nejednakosti: $2+\mu < x, \quad x < 2\mu+4, \qquad (2)$

Na osnovu sistema nejednakosti (1) i (2), dobijaju se sledeći sistemi nejednakosti:

$\mu + 4z_1 < x, \quad 2+\mu < x, \qquad (3)$
$\mu + 4z_2 > x, \quad 2\mu+4 > x, \qquad (4)$

Rešenje sistema nejednakosti (3) je $z_1 = \dfrac{1}{2}$;
a sistema (4) $z_2 = \dfrac{\mu+4}{4}$,

tako da tražena verovatnoća predstavlja šrafiranu površinu ispod standardne Gausove raspodele, prikazane na slici.



Na taj način se dobija: $P(\mu+2 < x < 2\mu+4) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi\left(\dfrac{\mu+4}{4}\right) - \Phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.2835,$

Kako je $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.1915$ (vidi tabelu C na strani 184) $\Rightarrow \Phi\left(\dfrac{\mu+4}{4}\right) - 0.1915 = 0.2835,$

$\Rightarrow \dfrac{\mu+4}{4} = 1.96 \Rightarrow \mu = 3.84$

$\boxed{\textbf{4.75}}$ Koncentracija soli u morskoj vodi je 20% slučajeva bila veća od 22 mg/l, a u 28% slučajeva manja od 14 mg/l. Odrediti matematičko očekivanje i standardnu devijaciju koncentracije soli, ako je poznato da ona podleže Gausovoj raspodeli.

Rešenje:

Verovatnoća da je koncentracija soli u morkoj vodi veća od od 22 mg/l iznosi 0.2, i da je koncentracija soli manja od 14 mg/l iznosi 0.28, jednaka je istim verovatnoćama da slučajna veličina Z dobije vrednost veću od z_1 i manju od z_2, slično kao u zadatku 4.72.

Korišćenjem smena $z_1 = \dfrac{22-\mu}{\sigma}$ i $z_2 = \dfrac{14-\mu}{\sigma}$, dobija se:

$$P(x > 22) = P\left(z > \frac{22-\mu}{\sigma}\right) = 0.5 - \Phi(z_1) = 0.2; \quad \Rightarrow \Phi\left(\frac{22-\mu}{\sigma}\right) = 0.3, \quad \Rightarrow \frac{22-\mu}{\sigma} = 0.84$$

$$P(x < 14) = P\left(z < \frac{14-\mu}{\sigma}\right) = 0.5 - \Phi(z_2) = 0.28, \quad \Rightarrow \Phi\left(\frac{14-\mu}{\sigma}\right) = 0.22, \quad \Rightarrow \frac{14-\mu}{\sigma} = -0.58$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$\mu + 0.84\sigma = 22$

$\mu - 0.58\sigma = 14$

$\Rightarrow$

dobijaju se traženi parametri raspodele:

$\mu = 17.27$ i $\sigma = 5.63.$

$\boxed{\textbf{4.76}}$ Neka je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & za \quad 0 < x < 2 \\ 0, & za \quad x \le 0, \quad i \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Odrediti C, a zatim naći verovatnoću da slučajna promenljiva uzima vrednosti veće od 1, tj. $P(x > 1)$.

Rešenje:

Konstanta C određuje se iz uslova normiranja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{2} C(4x-2x^2)dx = 1, \quad \Rightarrow \quad C(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{8}$$

Sada je tražena verovatnoća:

$$P(x>1) = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{8}\int_{1}^{2}(4x-2x^2)dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$\boxed{4.77}$ Neka slučajna veličina X ima Studentovu raspodelu sa $n = 11$ stepeni slobode. Odrediti verovatnoću da slučajna veličina ima vrednosti veće od 0.4, odnosno $P(x > 0.4)$.

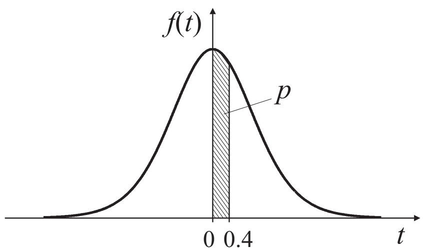
Rešenje:

Ako je gustina Studentove raspodele: $\quad f(t) = C_n\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad n = 11,$

tražena verovatnoća je: $\quad P(x > 0.4) = \displaystyle\int_{0.4}^{+\infty} f(t)dt$

U tabeli za Studentovu raspodelu na strani 188 date su vrednosti $t_{n,p}$ parametara Studentove raspodele. U koloni koja označava broj stepeni slobode $n = 11$ traži se vrednost 0.4. To odgovara verovatnoći da slučajna promenjiva t uzme vrednost od nula do 0.4, pa je:

$$p = 0.15 = \int_{0}^{0.4} f(t)dt.$$



Tražena verovatnoća je: $\quad P(x > 0.4) = \displaystyle\int_{0.4}^{+\infty} f(t)dt = 0.5 - \int_{0}^{0.4} f(t)dt = 0.5 - 0.15 = 0.35$

$\boxed{4.78}$ Ako slučajna veličina X ima studentovu raspodelu verovatnoće sa brojem stepeni slobode $n = 13$, naći verovatnoću da slučajna promenljiva uzme vrednosti između 0.13 i 1.77, tj. $P(0.13 < X < 1.77)$.

Rešenje:

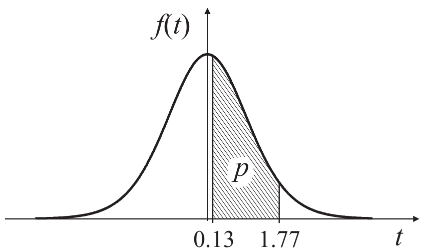
Verovatnoća da se slučajna promenljiva nađe u intervalu $(0.13, 1.77)$ (šrafirani deo na slici) je:

$$P(0.13 < X < 1.77) = P(X < 1.77) - P(0.13 < X) = \int_{0.13}^{1.77} f(t)dt = \int_{0}^{1.77} f(t)dt - \int_{0}^{0.13} f(t)dt$$

Iz tabele za Studentovu raspodelu za $n = 13$ stepeni slobode (na strani 188), nalaze se vrednosti:

$$p_1 = \int_{0}^{1.77} f(t)dt = 0.45, \text{ i } p_2 = \int_{0}^{0.13} f(t)dt = 0.05$$

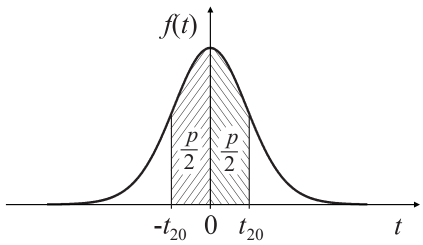
$$\Rightarrow \quad P(0.13 < X < 1.77) = 0.45 - 0.05 = 0.40$$



$\boxed{4.79}$ Neka slučajna promenjiva X ima studentovu raspodelu verovatnoće sa $n = 20$ stepeni slobode. Ako je verovatnoća da se slučajna promenljiva nađe u simetričnom intervalu oko srednje vrednosti 0.683, tj. $P(-t_{20} < X < t_{20}) = 0.683$, naći granične vrednosti.

Rešenje:

Prema defiiciji verovatnoća je data izrazom:



$$P(-t_{20} < X < t_{20}) = \int_{-t_{20}}^{t_{20}} f(t)dt = 2\int_{0}^{t_{20}} f(t)dt = 0.683$$

Iz tabele za Studentovu rapodelu na strani 188 nalazi se:

$$\int_0^{t_{20}} f(t)dt = 0.3415, \quad P(0 < X < t_{20}) = 0.3415, \quad \Rightarrow \quad t_{20} = 1.03, \text{ i } -t_{20} = -1.03$$

4.80 Ako slučajna veličina X ima χ^2 raspodelu verovatnoće sa $n = 10$ stepeni slobode, odrediti verovatnoću da X uzme vrednosti veće od 9.342, $P(X > 9.342)$.

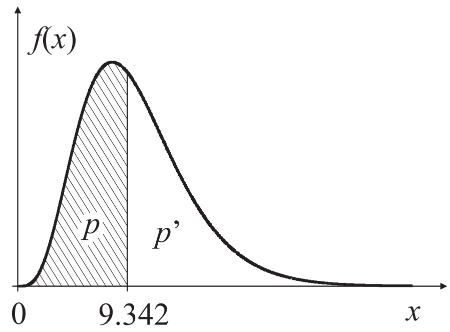
Rešenje:

Gustina raspodele χ^2 ima oblik: $\quad f(x) = C'_n x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

a verovatnoća je: $\quad P(X > 9.342) = \int_{9.342}^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_0^{9.342} f(x)dx$

U tabeli za χ^2 raspodelu na strani 186 date su vrednosti koeficijenata $\chi^2_{n,p}$, za razne vrednosti broja stepeni slobode n i verovatnoće p. Ove vrednosti koeficijenata odgovaraju vrednostima rešenja izraza:

$$\int_0^{\chi^2_{n,p}} f(x)dx = p \text{ po } \chi^2_{n,p}, \quad \text{za dato } n \text{ i } p.$$



Verovatnoća p u tabeli predstavlja verovatnoću da se slučajna veličina X sa χ^2 raspodelom verovatnoće, i sa n stepeni slobode nađe u intervalu $(0, \chi^2_{n,p})$, tj. $P(0 < X < \chi^2_{n,p}) = p$, odnosno predstavlja šrafiranu oblast na slici.

Vrednosti 9.342 za $n = 10$ stepeni slobode odgovara verovatnoća $p = 0.5$ (vidi stranu 186), tražena verovatnoća je tada:

$$p' = P(X > 9.342) = 1 - P(0 < X < 9.342) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

4.81 Odrediti granice intervala oko medijane M_e čije vrednosti može uzeti slučajna veličina X sa χ^2 raspodelom verovatnoće sa $n = 25$ stepeni slobode, sa verovatnoćom $P = 0.9$.

Rešenje:

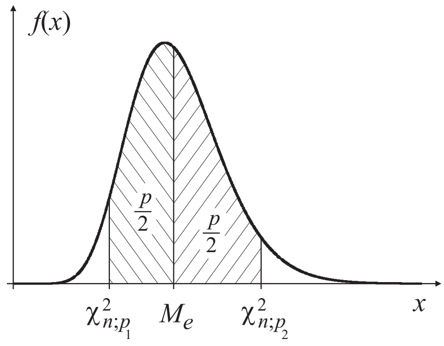
Verovatnoća nalaženja slučajne veličine u okolini medijane M_e prema definiciji jednaka je:

$$P(X \le M_e) = \frac{1}{2}, \quad P(X \ge M_e) = \frac{1}{2}$$

pa je verovatnoća nalaženja slučajne veličine oko medijane M_e, levo i desno jednaka i iznosi $p/2$. Verovatnoća da X uzme vrednosti iz ne šrafiranog intervala iznosi $1-p=0.1$, a zbog simetričnosti su po 0.05, tako da je:

$$\int_0^{\chi^2_{n;p_1}} f(x)dx = p_1 = 0.05, \qquad \int_0^{\chi^2_{n;p_2}} f(x)dx = p_2 = 0.95$$

Na taj način se iz tabele za χ^2 raspodelu za broj stepeni slobode $n=25$ i verovatnoće $p=0.05$ i $p=0.95$ dobijaju tražene vrednosti:



$$\chi^2_{25;0.05} = 14.61, \quad \text{i} \quad \chi^2_{25;0.95} = 37.65$$

$\boxed{\textbf{4.82}}$ Ako slučajna veličina X ima χ^2 raspodelu verovatnoće sa $n=10$ stepeni slobode, odrediti verovatnoću da se X nađe između vrednosti 2.156 i 11.78, tj. $P(2.156 < X < 11.78)$.

Rešenje:

Verovatnoća nalaženja slučajne veličine unutar intervala jednaka je:

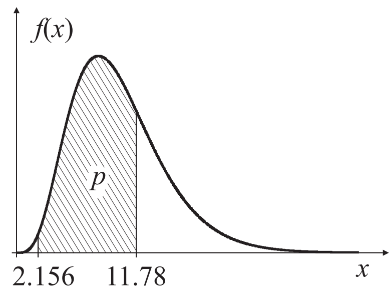
$$P(2.156 < X < 11.78) = \int_{2.156}^{11.78} f(x)dx = \int_0^{11.78} f(x)dx - \int_0^{2.156} f(x)dx = p_2 - p_1$$

Ove verovatnoće određuju se iz tabele za χ^2 raspodelu na strani 186 za broj stepeni slobode $n=10$.

$$p_1 = \int_0^{2.156} f(x)dx = 0.005,$$

$$p_2 = \int_0^{11.78} f(x)dx = 0.7$$

$$\Rightarrow \quad P(2.156 < X < 11.78) = 0.695.$$



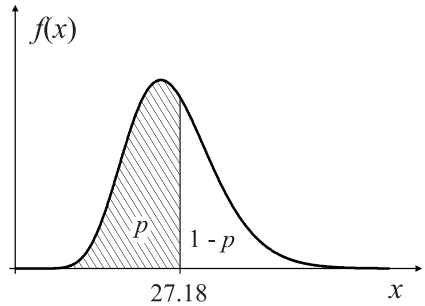
$\boxed{\textbf{4.83}}$ Ako slučajna veličina X koja ima χ^2 raspodelu verovatnoće uzima vrednosti veće od 27.18 sa verovatnoćom 0.4, odrediti njen broj stepeni slobode.

Rešenje:

Uslovom zadatka verovatnoća je: $1-p = P(X>27.18) = 0.4$

$$P(X > 27.18) = \int_{\chi^2_{n;p}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{27.18}^{+\infty} f(x)dx = 0.4,$$

$$\Rightarrow p = \int_0^{\chi^2_{n;p}} f(x)dx = \int_0^{27.18} f(x)dx = 1 - 0.4 = 0.6$$



Kako je $\chi^2_{n;p} = 27.18$, za $p=0.6$, iz tabele za χ^2 raspodelu na strani 186 nalazimo broj stepeni slobode $n=26$.

$\boxed{\textbf{4.84}}$ Ako slučajna veličina X sa χ^2 raspodelom vrovatnoće sa $n=17$ stepeni slobode uzima vrednosti iz simetričnog intervala oko medijane M_e sa verovatnoćom $p=0.7$, odrediti granice ovog intervala.

Rešenje:
Sličnim postupkom kao u zadatku br. 4.81, dobija se rešenje u obliku:

$$\chi^2_{n;p_1} = \chi^2_{17;0.15} = 11.12, \quad \chi^2_{n;p_2} = \chi^2_{17;0.85} = 22.98$$

4.85 Ako slučajna veličina X sa χ^2 raspodelom verovatnoće uzima vrednosti veće od 18.77 sa verovatnoćom 0.6, odnosno $P(X > 18.77) = 0.6$, odrediti njen broj stepeni slobode.

Rešenje:
Sličnim postupkom kao u zadatku 2.82,

$$1 - p = P(X > 18.77) = 0.6 \qquad \Rightarrow \qquad p = P(0 < X < 18.77) = \int\limits_0^{\chi^2_{n;p}} f(x)dx = 0.4$$

Iz tabele za χ^2 raspodelu na strani 186 dobija se: $\quad \chi^2_{n;p} = 18.77, \quad \Rightarrow \quad n = 21.$

4.86 Ako slučajna veličina X ima χ^2 raspodelu verovatnoće sa $n = 30$ stepeni slobode, odrediti verovatnoću da X uzima vrednosti iz intervala $(22.11; 31.32)$, tj. $P(22.11 < X < 31.32)$.

Rešenje:
Slično kao u zadatku 4.81, verovatnoća da slučajna veličina X uzme vrednost iz traženog intervala:

$$P(22.11 < X < 31.32) = \int\limits_{22.11}^{31.32} f(x)dx = \int\limits_0^{31.32} f(x)dx - \int\limits_0^{22.11} f(x)dx = 0.6 - 0.15 = 0.45$$

4.87 Ako slučajna veličina X ima Fišerovu raspodelu verovatnoće sa stepenom slobode $n_1 = 8$ i $n_2 = 4$, odrediti verovatnoću sa kojom slučajna veličina X može uzeti vrednosti veće od 6.041, tj. $P(X > 6.041)$.

Rešenje:

$$P(X > 6.041) = 1 - P(0 < X < 6.041) \Rightarrow \int\limits_{6.041}^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int\limits_0^{6.041} f(x)dx$$

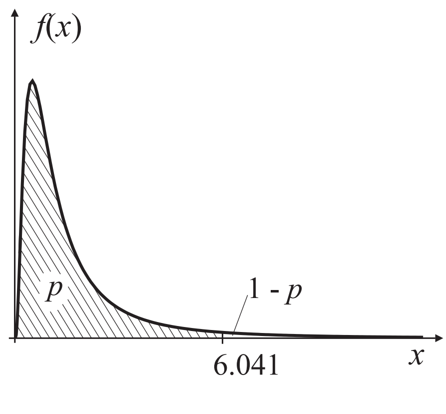
U tabelama F za Fišerovu raspodelu, na stranama od 189 do 194, dati su koeficijenti $f_{n_1;n_2;p}$ koji su rešenje jednačine:

$$\int\limits_0^{f_{n_1;n_2;p}} f(x)dx = p,$$

za određene vrednosti n_1, n_2 i p. Prema konvenciji uvek se bira $n_1 > n_2$. U ovom slučaju u tabeli se traži vrednost 6.041 za $n_1 = a = 8$ i $n_2 = b = 4$, što odgovara verovatnoći:

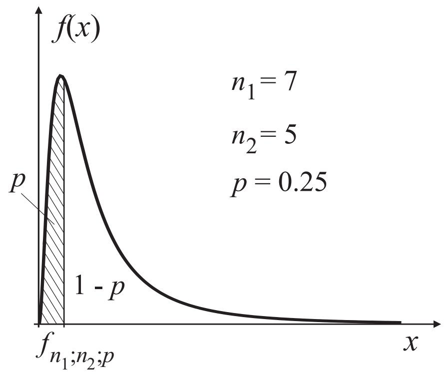
$$p = 0.95 = \int\limits_0^{6.041} f(x)dx \quad \text{(vidi stranu 192)}$$

$$\Rightarrow \quad P(X > 6.041) = 1 - p = 1 - 0.95 = 0.05$$



4.88 Za slučajnu veličinu sa Fišerovom raspodelom verovatnoće sa stepenima slobode $n_1 = 7$ i $n_2 = 5$, odrediti granicu intervala $(0; f_{n_1;n_2;p})$, ako slučajna veličina može uzeti vrednosti iz tog intervala sa verovatnoćom $p = 0.25$, odnosno $P(0 < X < f_{n_1;n_2;p}) = 0.25$.

Rešenje:

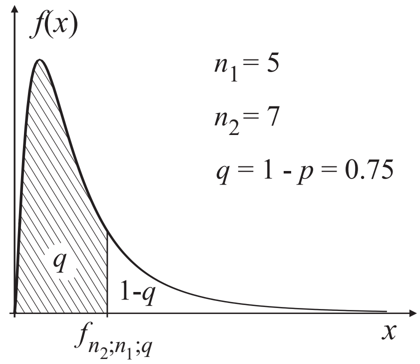


Prema uslovima zadatka je:

$$P(0 < X < f_{n_1;n_2;p}) = \int_0^{f_{n_1;n_2;p}} f(x)dx = 0.25$$

Traži se vrednost $f_{n_1;n_2;p}$ u tabelama F za Fišerovu raspodelu, za sve verovatnoće, sa stepenima slobode $n_1 = 7$ i $n_2 = 5$, koja iznosi p. Kako je verovatnoća $p = 0.25$ manja od 0.5, ove vrednosti nema u tabelama F, pa se koristi sledeća osobina Fišerove raspodele:

$$\int_0^{f_{n_1;n_2;p}} f(x)dx = \int_0^{f^{-1}_{n_2;n_1;1-p}} f(x)dx,$$



pri čemu važi $f_{7;5;0.25} = 1/f_{5;7;0.75}$. Ova osobina je prikazana na slikama desno. Zato se u tabeli za Fišerovu raspodelu na strani 194 traži vrednost $f_{5;7;0.75}$, sa stepenima slobode $n_1 = 5$ i $n_2 = 7$, i verovatnoću $q = 1 - p = 0.75$ (donja slika). Ova vrednost odgovara granici šrafiranog dela, odnosno granici koja određuje površinu.

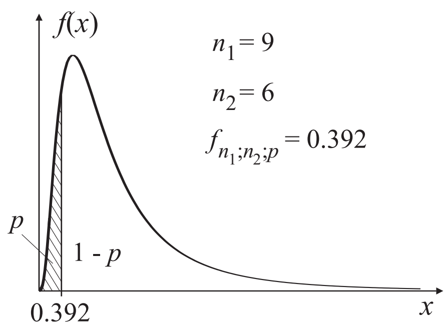
Kako je: $f_{5;7;0.75} = 1.711$, to se dobija

$$\Rightarrow \quad f_{7;5;0.25} = \frac{1}{f_{5;7;0.75}} = \frac{1}{1.711} = 0.584.$$

$\boxed{\textbf{4.89}}$ Ako slučajna veličina X ima Fišerovu raspodelu verovatnoće sa stepenom slobode $n_1 = 9$ i $n_2 = 6$, odrediti verovatnoću sa kojom slučajna veličina može imati vrednosti iz intervala $(0; 0.392)$, tj. naći $P(0 < X < 0.392)$.

Rešenje:

Prema uslovu zadatka je: $\quad P(0 < X < 0.392) = \int_0^{0.392} f(x)dx = \int_0^{f_{n_1;n_2;p}} f(x)dx = p$



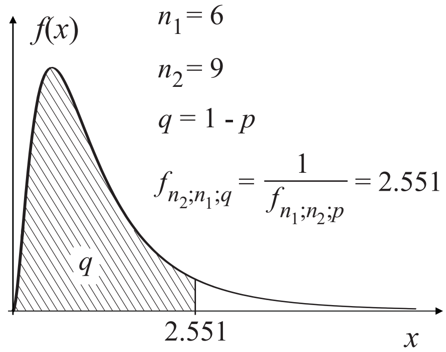
Ova verovatnoća je prikazana šrafiranom površinom na slici desno. Prema tome traži se verovatnoća koja odgovara vrednosti 0.392, u tabelama za Fišerovu raspodelu (na stranama od 189 do 194), za sve verovatnoće, sa stepenima slobode $n_1 = 9$ i $n_2 = 6$. Ovo je analogno traženju površine šrafiranog dela krive (gornja slika), ako znamo granicu koja oivičuje ovu površinu.

Koristeći osobinu Fišerove raspodele (za $q = 1 - p$):

$$f_{6;9;q} = f_{6;9;1-p} = \frac{1}{f_{9;6;p}} = \frac{1}{0.392} = 2.551$$

Sada se ova vrednost traži u tabeli za $n_1 = 6$ i $n_2 = 9$ za sve vrednosti verovatnoća $q = 1 - p$, što je analogno traženju površine šrafiranog dela krive na slici desno, ako znamo granicu koja oivičuje ovu površinu. Ova vrednost iznosi $q = 1 - p = 0.9$ (tabela F sa strane 193), tj. $p = 1 - 0.9 = 0.1$, pa je tražena verovatnoća:

$$P(0 < X < 0.392) = 0.1$$



$\boxed{\textbf{4.90}}$ Ako slučajna veličina X ima Fišerovu raspodelu verovatnoće sa stepenima slobode $n_1 = 7$ i $n_2 = 5$, odrediti verovatnoću da slučajna veličina uzima vrednosti iz intervala $(0; 0.528)$, tj. naći $P(0 < X < 0.528)$.

Rešenje:

U ovom slučaju se traži verovatnoća p:

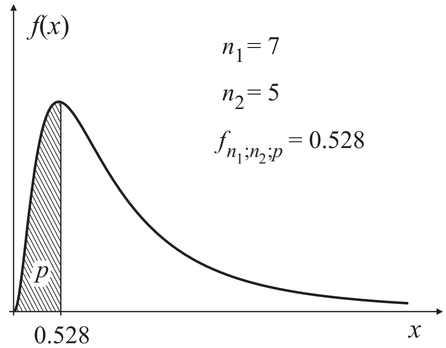
$$p = P(0 < X < 0.528) = \int_0^{0.528} f(x)dx = \int_0^{f_{7;5;p}} f(x)dx$$

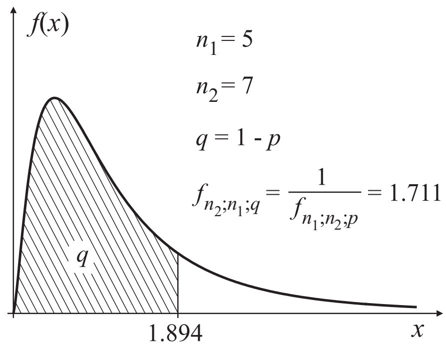
zatim se traže u tabelama F za Fišerovu raspodelu, na stranama od 189 do 194, za sve verovatnoće za vrednosti slučajne promenjive: $f_{7;5;p} = 0.528$ ($n_1 = 7$ i $n_2 = 5$). Ova verovatnoća odgovara šrafiranom delu ispod gustine raspodele na gornjoj slici, a $f_{7;5;p} = 0.528$ označava granicu šrafirane oblasti. Kako ove vrednosti nema koristi se osobina:

$$f_{5;7;1-p} = \frac{1}{f_{7;5;p}} = 1.711,$$

odnosno, u tablici za Fišerovu raspodelu traži se verovatnoća kojoj odgovara $f_{5;7;1-p} = 1.711$, za $n_1 = 5$ i $n_2 = 7$ (što odgovara šrafiranom delu na donjoj slici, a $f_{5;7;1-p} = 1.711$ označava granicu šrafirane oblasti). Iz tabele F na strani 194 nalazi se $1 - p \simeq 0.75$, pa je tražena verovatnoća:

$$p = P(0 < X < 0.528) = 0.25$$





$\boxed{\textbf{4.91}}$ Ako slučajna X veličina ima Fišerovu raspodelu verovatnoće sa stepenima slobode $n_1 = 6$ i $n_2 = 5$, odrediti verovatnoću da slučajna veličina uzima vrednosti veće od 0.3218, tj. naći $P(X > 0.3218)$.

Rešenje:

Tražena verovatnoća je: $$P(X > 0.3218) = \int_{0.3218}^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_0^{0.3218} f(x)dx$$

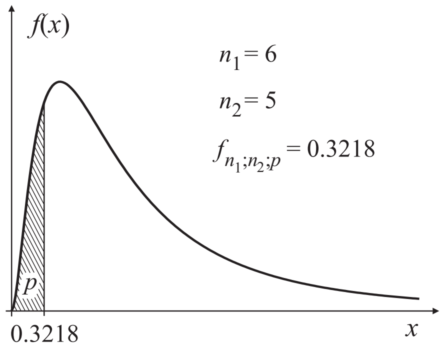
odnosno: $P(X > 0.3218) = 1 - P(0 < X < 0.3218)$,

pri čemu $P(0 < X < 0.3218) = \int_0^{0.3218} f(x)dx$ odgovara šrafiranoj oblasti na slici na gornjoj slici. Prema tome, tražena verovatnoća $P(X > 0.3218)$ odgovara nešrafiranoj površini na gornjoj slici, koju određuje gustina raspodele.

Vrednosti verovatnoće $P(0 < X < 0.3218)$ su date u tabeli za Fišerovu raspodelu za $n_1 = 6$ i $n_2 = 5$.

Kako ove vrednosti nema u tabelama F za Fišerovu raspodelu (na stranama od 189 do 194), koristi se osobina za koeficijente ove raspodele ($q = 1-p$): $f_{n_1;n_2;p} = f^{-1}_{n_2;n_1;q}$, pa se dobija:

$$f_{5;6;q} = \frac{1}{f_{6;5;p}} = 3.108.$$



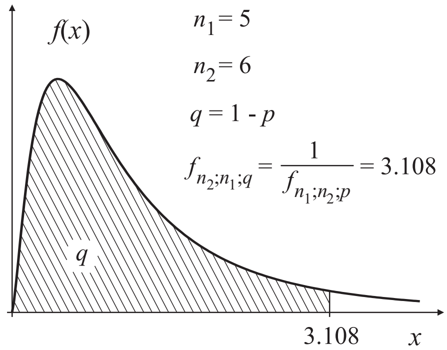
Koeficijentu $f_{5;6;q} = 3.108$ u tabeli F za Fišerovu raspodelu, na strani 193 odgovara verovatnoća $q = 1 - p = 0.90$. Ova verovatnoća odgovara šrafiranoj površini na donjoj slici.

Na taj način se dobija površina šrafiranog dela na gornjoj slici,

$P(0 < X < 0.3218) = 0.1$

Tada je tražena verovatnoća:

$$P(X > 0.3218) = 1-P(0 < X < 0.3218) = 1-0.1 = 0.9$$



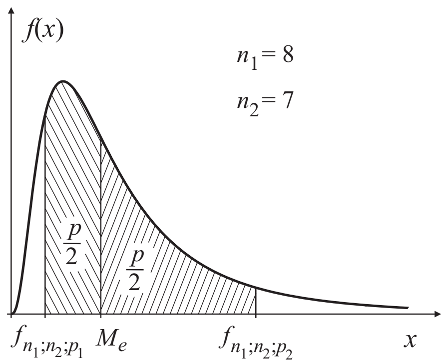
$\boxed{\textbf{4.92}}$ Odrediti granice simetričnog intervala oko M_e, čije vrednosti može uzeti slučajna veličina X sa Fišerovom raspodelom sa stepenima slobode $n_1 = 8$ i $n_2 = 7$, sa verovatnoćom $p = 0.8$.

Rešenje:

Verovatnoća da slučajna promenjiva uzima vrednosti manje (ili veće)od medijane iznosi:

$$P(X \leq M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}.$$

Pošto je prema uslovima zadatka interval, sa središtem u medijani, ovaj interval je simetričan u odnosu na M_e. U levom i desnom delu oko M_e verovatnoće su $p/2 = 0.4$, tako da su granice intervala određene površinama, koje odgovaraju verovatnoćama p_1 i p_2:



$$p_1 = 0.5 - \frac{p}{2} = 0.5 - 0.4 = 0.1; \qquad \text{i} \qquad p_2 = 0.5 + \frac{p}{2} = 0.5 + 0.4 = 0.9$$

Pri čemu su granice intervala $f_{8;7;0.1}$ i $f_{8;7;0.9}$ određene izrazima:

$$P(0 < X < f_{8;7;0.9}) = \int_0^{f_{8;7;0.9}} f(x)dx = 0.9 \qquad \text{i} \qquad P(0 < X < f_{8;7;0.1}) = \int_0^{f_{8;7;0.1}} f(x)dx = 0.1,$$

Granice intervala se čitaju iz tabele F za Fišerovu raspodelu na strani 193, za stepene slobode $n_1 = 8$ i $n_1 = 7$, i verovatnoće $p_1 = 0.1$ i $p_1 = 0.9$, tako da se dobija:

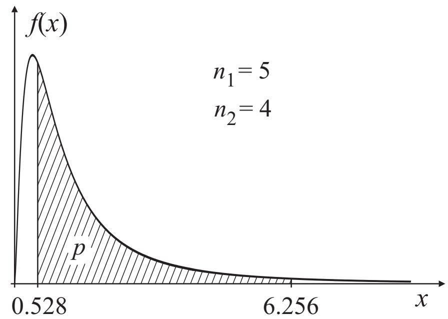
$$f_{8;7;0.9} = 2.752; \quad f_{8;7;0.1} = \frac{1}{f_{7;8;0.9}} = \frac{1}{2.624} = 0.381$$

$\boxed{\textbf{4.93}}$ Ako slučajna veličina X ima Fišerovu raspodelu verovatnoće sa $n_1 = 5$ i $n_2 = 4$ stepena slobode, odrediti verovatnoću da X uzme vrednosti iz inervala $(0.528; 6.256)$, tj. $P(0.528 < X < 6.256)$.

Rešenje:

Traži se: $P(0.528 < X < 6.256) = P(0 < X < 6.256) - P(0 < X < 0.528) = p_2 - p_1$

Iz tabela F za Fišerovu raspodelu (od strane 189 do strane 194), za stepeni sloboda $n_1 = 5$ i $n_2 = 4$, za verovatnoće p_1 i p_2 se dobija.



Za $f_{5;4;p_2} = 6.256$ verovatnoća je: $p_2 = 0.95$.

p_1 se nalazi koristeći: $f_{4;5;1-p_1} = \dfrac{1}{f_{5;4;p_1}} = \dfrac{1}{0.528} =$ 1.8939

odakle se dobija: $1 - p_1 = 0.75$, odnosno: $p_1 = 0.25$.

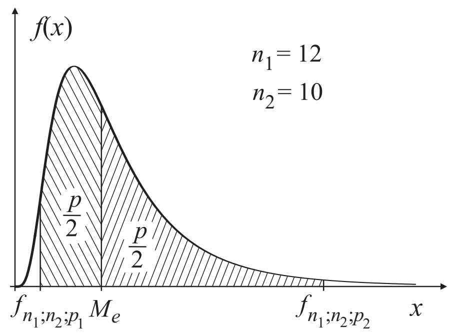
Tako da je tražena verovatnoća:

$P(0.528 < X < 6.256) = p_2 - p1 = 0.95 - 0.25 = 0.7$

$\boxed{\mathbf{4.94}}$ Neka slučajna veličina X ima Fišerovu raspodelu verovatnoće sa brojevima stepeni slobode $n_1 = 12$ i $n_2 = 10$. Odrediti granice simetričnog intervala oko medijane M_e, ako slučajna veličina X može imati vrednosti iz ovog intervala sa verovatnoćom $p = 0.95$.

Rešenje:

$p_1 = 0.5 - 0.475 = 0.025$ i $p_2 = 0.5 + 0.475 = 0.975$,



Tako da su granice intervala $f_{12;10;0.975}$ i $f_{12;10;0.025}$.

Iz tabela F za Fišerovu raspodelu na stranama 191 i 194, za stepene sloboda $n_1 = 12$ i $n_2 = 10$ se nalazi:

$$f_{12;10;0.975} = 3.621,$$
$$f_{12;10;0.025} = \frac{1}{f_{10;12;1-0.025}} = \frac{1}{3.374} = 0.296$$

Granice simetičnog interva su $(0.296; 3.621)$.

Glava 5

Izražavanje grešaka merenja

5.1 Slučajne greške direktnih merenja

Osnovni zadatak merenja je određivanje vrednosti merene fizičke veličine (u matematičkoj statistici se zajedničko svojstvo elemenata posmatranog skupa naziva *obeležje*) u posmatranom fizičkom sisitemu (u matematičkoj statistici se za skup posmatranih elemenata koristi termin *populacija*). Obzirom, da svako merenje sadrži greške, to se idealno tačna vrednost merene veličine ne može odrediti. Pored toga, za neko tačnije određivanje vrednosti fizičke veličine potrebno je ispitati sve elemente posmatranog skupa. Kako je to praktično nemoguće, na slučajan način se uzima njegov jedan deo koji se naziva *uzorak*.

Prilikom merenja može doći do slučajnih grešaka koje nastaju zbog same prirode fizičke veličine i procesa merenja, a i sistematskih grešaka koje nastaju zbog nesavršenosti tehničko-tehnoloških osobina mernih uređaja. Zbog toga, ako se merenja ponavljaju pod istim uslovima dolazi do rasturanja (rasejanja) izmerenih vrednosti. Svaki rezultat merenja je drugačiji. Eksperimentalni rezultati su slučajne veličine. Prillikom merenja sledeća vrednost se ne može precizno predvideti, ali može predvideti verovatnoća njenog pojavljivanja u određenom mernom opsegu.

Merenjem se, prema tome, može odrediti samo gustina raspodele pojavljivanja fizičke veličine i proceniti njena srednja vrednost, standardna devijacija i drugi parametri.

Prema matematičkoj statistici uzorak dobro opisuje fizički sistem ako broj merenja teži beskonačnosti. Tada je relativna frekvencija f_i/n slučajna veličina i teži verovatnoći (prema klasičnoj definiciji verovatnoće), tj. histogram relativnih frekvenci za veliki broj merenja teži gustini raspodele verovatnoće (odnosno raspodeli verovatnoće u slučaju diskretnih fizičkih veličina) posmatrane fizičke veličine. Relativna frekvenca tada predstavlja verovatnoću nalaženja fizičke veličine u datom (određenom) intervalu.

- Najbolja ocena srednje vrednosti (matematičkog očekivanja) gustine raspodele verovatnoće neke fizičke veličine u određenom fizičkom sistemu, odnosno prava vrednost fizičke veličine je srednja vrednost $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Najbolja ocena standardne devijacije gustine raspodele verovatnoće neke fizičke veličine je eksperimentalna standardna devijacija σ_E (ili procenjena standardna devijacija):

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

  Standardna devijacija je mera širine raspodele. Njena vrednost se ne smanjuje sa povećanjem broja merenja. Sa povećanjem broja merenja javlja se veći broj većih odstupanja. Povećanjem broja merenja povećava se samo tačnost njenog odredjivanja. Standardna devijacija se može smanjiti samo povećanjem preciznosti merenja. Treba imati u vidu da σ_E ne definiše tačnost određivanja $\bar{x}$, već rasturanje, odnosno ponovljivost (preciznost) pojednih merenja oko $\bar{x}$.

Gustinu raspodele neke fizičke veličine možemo odrediti samo ako je osetljivost merenja dovoljna. Ako je Δx moć razlaganja mernog uređaja, odnosno najmanji podeok na instrumentu, a σ_E mera širine raspodele eksperimentalne standardne devijacije, smatra se da je osetljivost dovoljna za ispoljavanje slučajnog karaktera rezultata i pouzdanu statističku obradu, ako je $\Delta x \leq \sigma_E/4$.

Korekcija $n-1=n_s$, predstavlja broj stepeni slobode, a ne broj merenja. Broj stepeni slobode predstavlja broj merenja umanjen za broj parametara određenih iz skupa merenja. Kod srednje vrednosti ne uzima se minus jedan, jer je ona prethodno određena. Ova korekcija je značajna samo za malo n, kada $n \to \infty$, postaje $n-1 \to n$.

U praksi je uočeno da zbir velikog broja slučajnih veličina može imati približno normalnu raspodelu, iako su nezavisne i čak ako nemaju istu raspodelu. Imajući u vidu ovu činjenicu u fizici se najčešće pretpostavlja da su gustine raspodele merenih fizičkih veličina normalne. Na osnovu toga pretpostavlja se da mnoštvo raznih uticaja implicira jedinstven uticaj sa normalnom raspodelom.

Centralna granična teorema daje teorijski osnov za primenu normalne raspodele u obradi rezultata merenja, a ona glasi:

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne veličine sa standardnom devijacijom σ i matematičkim očekivanjem μ, tada slučajna veličina:

$$Z_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad za \quad n \to +\infty$$

odnosno, teži normalnoj raspodeli sa $E(Z_n) = \mu = 0$ i $\sigma = 1$, kad broj slučajnih veličina n teži beskonačnosti.

Na osnovu toga, ako eksperimentalnu standardnu devijaciju σ_E možemo smatrati za slučajnu grešku kojoj odgovara određeni nivo poverenja, rezultat merenja neke fizičke veličine može se izraziti u obliku:

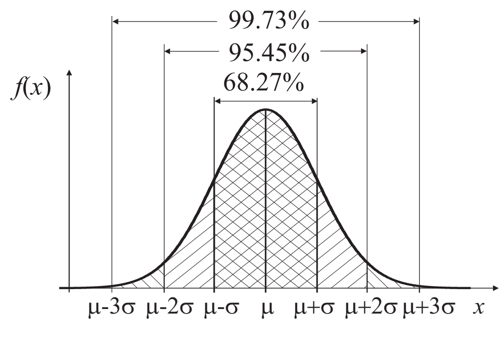
$$x = \overline{x} \pm k \cdot \sigma_E$$

gde je k prirodan broj. Ako je:

$k = 1$, nivo poverenja je $p = 68.27\%$,
$k = 2$, nivo poverenja je $p = 95.45\%$,
$k = 3$, nivo poverenja je $p = 99.73\%$.

Grafički prikaz nivoa poverenja p i odgovarajućih granica intervala $z_{p/2}$, prikazani su na slici 5.1.

Ako je nivo poverenja slučajne greške 68.27%, tada treba očekivati da će se 2/3 budućih merenja fizičke veličine x naći unutar intervala $\overline{x} \pm \sigma_E$. Da bi ova procena bila pouzdana potrebno je uraditi veći broj merenja.



Slika 5.1. Grafički prikaz nivoa poverenja p i odgovarajućih granica intervala $z_{p/2}$.

5.1.1 Računanje standardne greške

Na osnovu centralne granične teoreme: $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx Z$ gde Z ima normalnu raspodelu: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Množenjem slučajne promenjive Z sa $\sigma/\sqrt{n}$, dobija se:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \approx \mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z$$

Odnosno, sledi da aritmetička sredina $\overline{x}$ ima približno normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Ovo u praksi znači da postoji n ponovljenih grupa od N merenja. Iz svake od ovih grupa od po N merenja se računaju srednja vrednost $\overline{x}$ i eksperimentalna standardna devijacija σ_E. Na taj način se dobija n odgovarajućih srednjih vrednosti $\overline{x}$ i eksperimentalnih standardnih devijacija σ_E, odnosno $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ i $\sigma_{E1}, \sigma_{E2}, \ldots, \sigma_{En}$. Svaka od ovih vrednosti $\overline{x}_i$ predstavlja po jednu slučajnu veličinu X_i, tako da se dobija:

$$\overline{x}_{\overline{x}} = \overline{x}(\overline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i \quad - \quad \text{Srednja vrednost pojedinačnih srednjih vrednosti,}$$

$$S_{\overline{x}} = S(\overline{x}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_i - \overline{x}(\overline{x}))^2} \quad - \quad \text{Standardna greška ili standardna devijacija srednjih vrednosti merene fizičke veličine,}$$

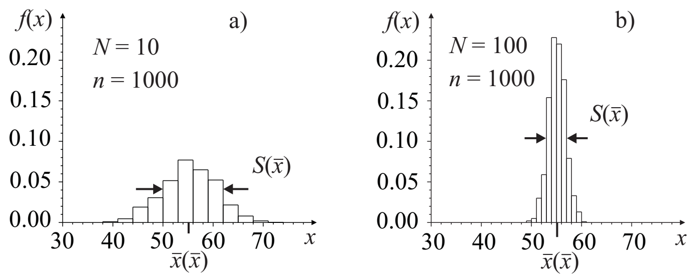
$$\overline{\sigma_E} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{E_i} \quad - \quad \text{Srednja vrednost pojedinačnih standarnih devijacija merene fizičke veličine}$$

$$S_{\overline{\sigma_E}} = S(\overline{\sigma_E}) = \sigma_E(\overline{\sigma_E}) = \sigma_{\overline{\sigma_E}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{E_i} - \overline{\sigma_E})^2} \quad - \quad \text{Standarna devijacija pojedinačnih standardnih devijacija.}$$

Veza između ovih vrednosti je:

$$S(\overline{x}) = \frac{\overline{\sigma_E}}{\sqrt{N}} \quad \text{i} \quad S(\overline{\sigma_E}) = \frac{\overline{\sigma_E}}{\sqrt{2N}}$$

Vrednosti $S(\overline{x})$ i $S(\overline{\sigma_E})$ su obrnuto proporcionalne korenu iz broja merenja N unutar jedne grupe merenja. Ovo ukazuje da tačnost određivanja raspodele srednjih vrednosti ovih grupa zavisi od broja merenja unutar svake grupe merenja.



Slika 5.2. Histogrami srednjih vrednosti: a) od $N = 10$ podataka i b) od $N = 100$ podataka.

Ovo se jasno vidi sa histograma na slici 5.2. Na slici je prikazana numerička generacija Gausove raspodele za parametre $m = 55$ i $\sigma = 17$. Raspodela levo je nacrtana iz $n = 1000$ srednjih vrednosti od po $N = 10$ podataka a raspodela desno iz $n = 1000$ srednjih vrednosti od po $N = 100$. Jasno se uočava da se raspodela sužava sa porastom broja podataka u pojedinoj grupi N, odnosno da se smanjuje standardna devijacija, tj. standardna greška srednjih vrednosti $S(\overline{x})$.

Rezultat ovakve serije od n puta po N merenja se daje u obliku $\overline{x}(\overline{x}) \pm S(\overline{x})$. Pri tome standardna devijacija srednje vrednosti, odnosno standardna greška srednje vrednosti predstavlja interval oko srednje vrednosti u kome se nalazi 68.27% svih srednjih vrednosti. Ova vrednost predstavlja ono što se naziva *slučajna greška* konačnog rezultata, $\overline{x}(\overline{x})$[1].

Standardna greška se najlakše nalazi preko srednje vrednosti pojedinčnih standardnih devijacija $\overline{\sigma_E}$, tj. kao: $S(\overline{\sigma_E}) = \overline{\sigma_E}/\sqrt{2N}$. Tada greška prilikom određivanja srednje vrednosti standarne devijacije $S(\overline{\sigma_E})$ služi za procenu tačnosti u poznavanju standardne greške. Na osnovu poznavanja ove tačnosti može se odrediti broj značajnih cifara u standardnoj grešci. Naime, relativna greška srednje standardne devijacije je jednaka: $S(\overline{\sigma_E})/\overline{\sigma_E} = 1/\sqrt{2N}$. Tako se pokazuje:

$$\left.\begin{array}{l} n \cong 1000; \quad 1/\sqrt{2n} \sim 2\% \\ n \cong 100; \quad 1/\sqrt{2n} \sim 7\% \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{2 značajne cifre}$$

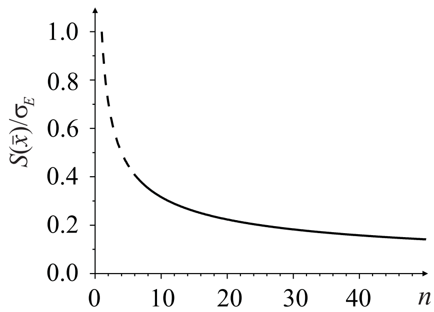
$$n \cong 10; \quad 1/\sqrt{2n} \sim 22\% \qquad \Rightarrow \quad \text{1 značajna cifra.}$$

[1]Očigledno je da slučajna greška nije nikakva greška, već ona predstavlja objektivnu meru rasejanja rezultata oko srednje vrednosti.

Međutim, u praksi se grupa od N merenja nikada ne ponavlja. Sve čime se raspolaže je skup od n merenja x_1, x_2, x_3, ... x_n, sa jednom srednjim vrednošću $\overline{x}$ i standardnom devijacijom σ_E. Ovo u stvari znači da za svaku od ovih pojedinačnih vrednosti smatra da je srednja vrednost od N merenja. Zato se srednja vrednošt $\overline{x}$ i standardna devijacija σ_E uzimaju kao vrednosti $\overline{x}(\overline{x})$ i $\overline{\sigma_E}$, pa se vrednost $\sigma_E/\sqrt{n}$ uzima kao procena za $S(\overline{x})$, tako da se konačan rezultat serije od n merenja piše u obliku: $\overline{x} \pm \sigma_E/\sqrt{n}$, odnosno standardna greška se izražava u obliku:

$$S(\overline{x}) = \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Kako je eksperimentalna standardna devijacija σ_E stalna veličina, nezavisna od broja merenja, možemo reći da standardna greška zavisi od broja merenja. Raspodele srednjih vrednosti se sužavaju sa povećanjem broja merenja, što dovodi do preciznosti određivanja srednje vrednosti. Ovo se jasno vidi sa slike 5.3, na kojoj je data zavisnost $S(\overline{x})/\sigma_E = f(n)$. Deo krive za $n \leq 6$ je dat isprekidanom linijom, jer manje od šest merenja nije dovoljan uzorak za računanje standardne devijacije.



Slika 5.3. Zavisnost odnosa $S(\overline{x})/\sigma_E$ od broja merenja.

Imajući sve ovo u vidu, rezultati merenja se najčešće izražavaju u obliku: $$x = \overline{x} \pm k \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}$$

na željenom nivou poverenja zavisno od vrednosti prirodnog broja k. Ako je $k = 1$ nivo poverenja je 68.27%, za $k = 2$ nivo poverenja je 95.45%, a za $k = 3$ nivo poverenja je 99.73%. Na osnovu prethodnog, sledi da za svako sledeće merenje postoji verovatnoća, da srednja vrednost upadne u ovaj interval, koja je jednaka nivou poverenja.

Za dovoljno veliko n, za željeni nivo poverenja p koeficijent k nalazi se iz tabele C (strana 184) za Gausovu raspodelu kao $Z_{p/2}$, pa je interval poverenja za srednju vrednost, na nivou poverenja p:

$$x = \bar{x} \pm Z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}$$

i uvek se navede nivo poverenja p u %, kao i broj merenja.

5.1.2 Slučajna greška u slučaju malog broja merenja

U slučaju malog broja merenja slučajna veličina: $$t_{n-1} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_E/\sqrt{n}}$$

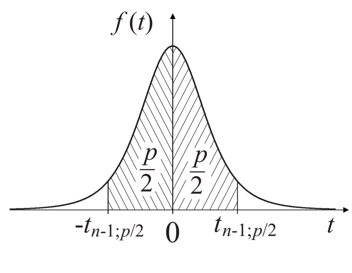
ima Studentovu raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode, za n merenja. U tom slučaju, za određivanje intervala poverenja za pravu vrednost fizičke veličine μ računa se verovatnoća p da se slučajna veličina t_{n-1} iz n eksperimenata, $m = np$ puta nađe u simetričnom intervalu $(-t_{n-1;\ p/2},\ t_{n-1;\ p/2})$ oko nule $(E(t_n))$, kao što je prikazano na slici 5.4.

Na taj način se dobija interval poverenja za pravu vrednost fizičke veličine u obliku:

$$\mu = \left(\bar{x} \ \pm t_{n-1;\ p/2} \ \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$$

i navede se nivo poverenja u % i iz koliko merenja je izračunata.

Vrednost $t_{n-1;\ p/2}$ se čita iz tabele za Studentovu raspodelu (tabela E na strani 188). Ako je broj merenja manji od 6, a radi se o nivou poverenja 68.27%, razlika između $t_{n-1;\ p/2}$ i $Z_{p/2}$ je znatna.



Slika 5.4. Dvostrani interval poverenja sa verovatnoćom p za Studentovu raspodelu.

U slučaju da je broj merenja $6 < n < 30$, razlika između $t_{n-1;\ p/2}$ i $Z_{p/2}$ je mala i smanjuje sa povećanjem broja merenja. Za $n \geq 30$ važi aproksimacija $t_{n-1;\ p/2} \cong Z_{p/2}$. Za veće nivoe poverenja, 95.45%, 99%, 99.73%, zbog većih repova studentove raspodele razlika je veća, pa se zbog toga ovi nivoi poverenja najčešće ne koriste za izražavanje grešaka.

5.1.3 Intervalna ocena standardne devijacije merene fizičke veličine

Intervalna ocena nepoznate standardne devijacije zasniva se na činjenici da slučajna veličina:

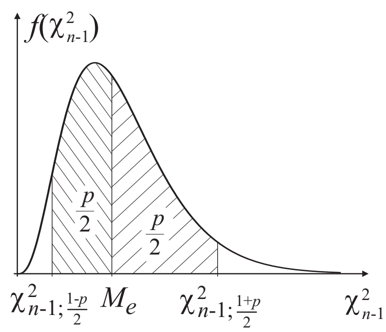
$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)\sigma_E^2}{\sigma^2}$$

ima χ^2 raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode. Ovo se pokazuje polazeći od izraza za eksperimentalnu standardnu devijaciju, koristeći činjenicu da slučajna promenjiva $\chi^2_{n-1} = \sum_{i=1}^{n}\left((x_i - \bar{x})/\sigma\right)^2$ ima χ^2 raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode, na sledeći način:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\frac{\sigma^2}{\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_E^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_E^2(n-1)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$$

Broj stepeni slobode odgovara broju merenja umanjenom za broj parametara određenih merenjem, a to je jedan, jer je za određivanje σ_E potrebno najpre odrediti $\bar{x}$.

Za nalaženje intervala poverenja za standardnu devijaciju na nivou poverenja p, računa se verovatnoća da se u n merenja slučajna veličina χ^2_{n-1} nađe $m = np$ puta u intervalu $\left(\chi^2_{n-1;\frac{1-p}{2}};\chi^2_{n-1;\frac{1+p}{2}}\right)$ oko $M_e(\chi^2)$.



Slika 5.5. Dvostrani interval poverenja za standardnu devijaciju sa nivoom poverenja p.

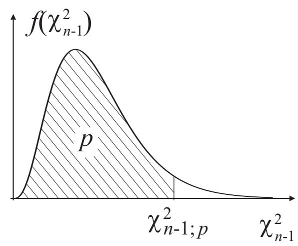
Na taj način se dobija dvostrani interval poverenja za standardnu devijaciju (slika 5.5):

$$\frac{(n-1)\sigma_E^2}{\chi^2_{n-1;\ \frac{1+p}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\sigma_E^2}{\chi^2_{n-1;\ \frac{1-p}{2}}}$$

i uvek navede nivo poverenja u % i broj merenja.

Ponekad, ali retko, koristi se i jednostrani interval poverenja za standardnu devijaciju na nivou poverenja p (slika 5.6):

$$0 \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\sigma_E^2}{\chi^2_{n-1;\ p}}$$



Slika 5.6. Jednostrani interval poverenja za standardnu devijaciju sa nivoom poverenja p.

Koeficijenti $\chi^2_{n-1;\ \frac{1+p}{2}}$ i $\chi^2_{n-1;\ p}$ se čitaju iz tabele za χ^2-raspodelu (tabela D na strani 186).

Napomena

Treba imati u vidu, da nivo poverenja u % ne znači da je verovatnoća da se nepoznati parametar μ ili σ nađe u ovom intervalu sa verovatnoćom p, već da se od više intervala iz više uzoraka istog obima n, pri merenju iste fizičke veličine, njih p% zahvata pravu vrednost fizičke veličine.

U slučaju intervalne ocene parametara raspodela, granice intervala (ili u slučaju jednostranog intervala jedna granica) moraju biti statistike uzorka. To znači da moraju biti neke funkcije od uzorka i da ne zavise od nepoznatih parametara raspodela fizičkih veličina.

Najčešće se koriste intervali poverenja sa velikim nivoom poverenja $p = 95\%$ ili $p = 99\%$.

Zadaci

5.1 Pokazati da srednja vrednost $\bar{x}$ rezultata merenja pri velikom broju merenja teži pravoj vrednosti merene fizičke veličine $\mu = x_0$ koristeći sledeće stavove Gausove teorije grešaka:

1° Pri velikom broju ponovljenih merenja, jednaka je verovatnoća da se pojave apsolutna odstupanja iste vrednosti ali suprotnog znaka, tj. verovatnoće pojavljivanja pozitivnog i negativnog apsolutnog odstupanja ili apsolutnih grešaka su iste.

2° Verovatnoće pojavljivanja većih apsolutnih odstupanja je mnogo manja od verovatnoće nastupanja manjih odstupanja.

Rešenje:

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izmerene vrednosti neke fizičke veličine, a $\mu = x_0$ njena prava vrednost.

Apsolutna odstupanja izmerene veličine od prave vrednosti fizičke veličine su:

$$\Delta x_{10} = x_1 - x_0,\ \Delta x_{20} = x_2 - x_0,\ \Delta x_{30} = x_3 - x_0\ \ldots,\ \Delta x_{n0} = x_n - x_0$$

Sabiranjem apsolutnih odstupanja se dobija:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0} = \Delta x_{10} + \Delta x_{20} + \cdots + \Delta x_{n0} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nx_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n}(\Delta x_{10} + \Delta x_{20} + \cdots + \Delta x_{n0}) = \overline{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}$$

Imajući u vidu Gausove pretpostavke 1° i 2° iz teorije grešaka sledi:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}, \qquad \text{kako važi} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \text{dobija se} \qquad \Rightarrow \qquad x_0 \cong \bar{x}$$

Znači pri velikom broju merenja srednja vrednost neke fizičke veličine približno je jednaka pravoj vrednosti fizičke veličine $\bar{x} \cong x_0$, što je i trebalo dokazati.

5.2 Izračunati srednju vrednost svih apsolutnih odstupanja od srednje vrednosti.

Rešenje:

Aka je apsolutno odstupanje: $\quad \Delta x_i = x_i - \overline{x}, \quad$ tada je srednja vrednost apsolutnog odstupanja:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \overline{\Delta x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\cdot n\bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Dobijeni rezultat da je srednja vrednost apsolutnog odstupanja merene fizičke veličine jednaka nuli je posledica pretpostavke da se odstupanja jednako javljaju sa pozitivnim i negativnim vrednostima.

5.3 Izvesti izraz za eksperimentalnu standardnu devijaciju, uspostavljajući vezu između apsolutnih odstupanja od prave vrednosti Δx_{i0} i apsolutnog odstupanja od srednje vrednosti Δx_i.

Rešenje:

Standardna devijacija merene fizičke veličine oko prave vrednosti x_0 fizičke veličine se određuje kao:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 p_i}\ ; \quad \text{za} \quad n \to \infty \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{m_i}{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 \cdot m_i}$$

Neka je $\Delta x_{i0} = x_i - x_0$ apsolutno odstupanje merene fizičke veličine od prave vrednosti x_0, a $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ apsolutno odstupanje merene fizičke veličine od srednje vrednosti $\bar{x}$.

Ako se pođe od izraza: $\Delta x_{i0} = x_i - x_0 = (x_i - \bar{x}) - (x_0 - \bar{x})$ i izvrši sumiranje od 1 do n, dobija se:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x}) - (x_0 - \bar{x}))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_0 - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}(x_0 - \bar{x})^2$$

Kako prema zadataku 3.2 važi: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, i kako je: $\sum_{i=1}^{n}(x_0 - \bar{x})^2 = n(x_0 - \bar{x})^2$,

dobija se: $$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 + n(x_0 - \bar{x})^2$$

Dalje je (prema zadataku 3.1): $x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}$, pa se dobija:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 + n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_E^2 \cong \sigma^2$$

Konačno, izraz za eksperimentalnu standardnu devijaciju je oblika: $\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

$\boxed{\mathbf{5.4}}$ Izvesti izraz za standardnu grešku $S(\bar{x})$ merene fizičke veličine za n merenja, bez razvrstavanja izmerenih vrednosti po grupama.

Rešenje:

U zadatku 3.1 je pokazano da je greška izjednačavanja srednje vrednosti izmerene fizičke veličine sa njenom pravom vrednošću:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}.$$

Ovu grešku nikada tačno nije moguće odrediti, ali njenu verovatnu vrednost moguće je proceniti, pretpostavljajući da je raspodela verovatnoće izmerene fizičke veličine Gausova raspodela.

Standardna devijacija izmerenih vrednosti oko prave vrednosti fizičke veličine je: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2}$

Množenjem standardne devijacije sa brojem merenja i kvadriranjem, dobija se:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}\right]^2 = (\Delta x_{10} + \Delta x_{20} + \cdots + \Delta x_{n0})^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}\Delta x_{i+1,0}$$

Proizvod $\Delta x_{i0}\Delta x_{i+1,0}$ je beskonačno mala veličina za dovoljno veliki broj merenja tako da važi:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}^2 \cong \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0}\right]^2 = n\sigma^2$$

Korenovanjem dobijenog izraza i deljenjem sa $1/n$ dobija se izraz za standardnu grešku $S(\overline{x})$ pri određivanju prave vrednosti fizičke veličine:

$$S(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i0} = \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

5.5 Pri merenju jačine struje dobijene su srednja vrednost $\bar{x}$ i eksperimentalna standardna devijacija σ_E u mA. Ako je broj merenja veliki izraziti rezultat merenja u kome figuriše standardna greška, na nivou poverenja:

a.) 68.27%; b.) 80%; c.) 90%; d.) 95.45%.

Rešenje:
Srednja vrednost i eksperimentalna standardna devijacija su definisane izrazima:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Rezultat merenja u obliku u kome figuriše standardne greška se izražava kao: $x = \left(\bar{x} \pm z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$ mA

Pritom se koeficijenat $z_{p/2}$ čita iz tabele za Gausovu raspodelu (tabela C na strani 184), uzimajući za vrednost p tražene nivoe poverenja.

Za $p = 68.27\%$ je tada: $2\Phi(z) = 0.6827$, $\Phi(z) = 0.34139$, pa se u tablicama za Gausovu raspodelu traži vrednost $z_{0.34139}$ koja iznosi 1.00.

Za $p = 80\%$ je tada: $2\Phi(z) = 0.8$, $\Phi(z) = 0.4$, $\Rightarrow z_{0.34139}$ koja iznosi 1.28.

Za $p = 90\%$ je tada: $2\Phi(z) = 0.90$, $\Phi(z) = 0.45$, $\Rightarrow z_{0.45}$ koja iznosi 1.64.

Za $p = 95.45\%$ je tada: $2\Phi(z) = 0.9545$, $\Phi(z) = 0.47725$, $\Rightarrow z_{0.47725}$ koja iznosi 2.00.

a.) $x = \left(\bar{x} \pm 1.00 \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$ mA na nivou poverenja 68.27% sa standardnom greškom iz n merenja.

b.) $x = \left(\bar{x} \pm 1.28 \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$ mA na nivou poverenja 80% sa standardnom greškom iz n merenja.

c.) $x = \left(\bar{x} \pm 1.64 \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$ mA na nivou poverenja 90% sa standardnom greškom iz n merenja.

d.) $x = \left(\bar{x} \pm 3.00 \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$ mA na nivou poverenja 95.45% sa standardnom greškom iz n merenja.

5.6 Prilikom 100 merenja dužine nekog predmeta dobijena je srednja vrednost $\bar{x} = 51$ cm i eksperimentalna standardna devijacija $\sigma_E = 1.07$ cm. Izraziti rezultat merenja u kome figuriše standardna greška na nivou poverenja od:

a.) 95%; b.) 99%.

Rešenje:
Rezultat merenja se izražava u obliku: $x = \left(\bar{x} \pm z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$

a.) za nivo poverenja $p = 95\%$, $\Rightarrow z_{0,475} = 1.96$ (vidi tabelu C na strani 184), tako da je:
$z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.07}{\sqrt{100}} = 0.20972$. Izmerena vrednost fizičke veličine može se izraziti u obliku:

$x = (51 \pm 0.21)$ cm sa standardnom greškom na nivou poverenja 95% iz 100 merenja.

b.) za nivo poverenja $p = 95\%$, $z_{0.495} = 2.58$ (vidi tabelu C na strani 184), pa je:
$z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{1.07}{\sqrt{100}} = 0.27606$. Izmerena vrednost fizičke veličine može se izraziti u obliku:

$x = (51 \pm 0.28)$ cm sa standardnom greškom na nivou poverenja 99% iz 100 merenja.

$\boxed{\mathbf{5.7}}$ Pri 10 ponovljenih merenja otpornosti nekog provodnika dobijena je srednja vrednost $\overline{R} = 40.78\,\Omega$ i eksperimentalna standardna devijacija $\sigma_E = 0.079\ \Omega$. Napisati rezultat u kome figuriše standardna greška na nivou poverenja od 95%.

Rešenje:

U slučaju malog broja merenja rezultat se izražava u obliku: $\quad x = \left(\overline{x} \pm t_{n-1,p/2} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right)$

Koeficijenti $t_{n-1,p/2}$ se čitaju iz tabele za Studentovu raspodelu (vidi tabelu E na strani 188), za odgovarajuće nivoe poverenja p i stepene sloboda n .

Kako je koeficijenat $t_{n-1,p/2} = t_{9;\,0.475} = 2.262$, odnosno $t_{9,0.475} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 2.262 \cdot \dfrac{0.079}{\sqrt{10}} = 0.05007\ \Omega$, to je rezultat merenja otpornosti:

$R = (40.78 \pm 0,05)\,\Omega$ sa standardnom greškom iz 10 merenja na nivou poverenja od 95%.

$\boxed{\mathbf{5.8}}$ Neka je $\overline{x} = 16.4$ cm i $\sigma_E = 0.31$ cm iz 6 merenja. Napisati rezultat merenja u obliku u kome figuriše standardna greška na nivoima poverenja:

a.) 90%, b.) 95%.

Rešenje:

a.) $t_{5;\,0.45} = 2.015$ (tabela E na strani 188); $t_{5;\,0.45} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0.25501$ cm, rezultat se izražava u obliku:

$x = (16.4 \pm 0.3)$ cm sa standardnom greškom iz 6 merenja na nivou poverenja od 90%

b.) $t_{5;\,0.475} = 2.571$ (tabela E na strani 188), $t_{5;\,0.475} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0.32538$ cm, rezultat se izražava u obliku:

$x = (16.4 \pm 0.3)$ cm sa standardnom greškom iz 6 merenja na nivou poverenja od 95%.

$\boxed{\mathbf{5.9}}$ Neka su pri merenju jačine struje kroz neki otpornik dobijene sledeće vrednosti u mA:

5.615 5.622 5.624 5.618 5.620 5.633 5.628 5.624 5.613

Izraziti rezultat merenja u obliku u kome figuriše standardna greška na nivou poverenja 68.27%.

Rešenje:

Srednja vrednost i eksperimentalna standardna devijacija su: $\overline{I} = 5.6219$ mA, i $\sigma_E = 0.00627$ mA.
parametar iz tabele E za Studentovu raspodelu (strana 188) $t_{8;\,0.34135} = 1.067$,
pa je: $t_{8;\,0.34135} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{9}} = 0.00223$ mA. Na taj način se rezultat merenja struje može izraziti u obliku:

$I = (5.622 \pm 0.002)$ mA sa standardnom greškom iz 9 merenja na nivou poverenja 68.27%.

$\boxed{\mathbf{5.10}}$ Pri merenju otpornosti nekog otpornika dobijene su sledeće vrednosti u Ω:

147.20 147.40 147.90 147.10 147.10 147.50 147.60 147.40 147.60 147.50

Napisati rezultat merenja u obliku u kome figuriše standardna greška na nivou poverenja od 68.27%.

Rešenje:

$\overline{R} = 147.43\ \Omega$; $\sigma_E = 0.2497\ \Omega$; $t_{9;\,0.34135} = 1.059$ (tabela E na strani 188)

$\Rightarrow \quad t_{9;\,0.34135} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0.08362\ \Omega.$

Rezutat merenja električne otpornosti dat je u obliku:

$\overline{R} = (147.43 \pm 0.08)\,\Omega$ sa standardnom greškom iz 10 merenja na nivou poverenja od 68.27%.

5.11 Prilikom 7 kvarova jedne mašine imereni su sledeći vrednosti vremena t (h) neprekidnog rada mašine do kvara:

53 48 50 54 51 50 51

Izraziti prosečan broj časova neprekidnog rada mašine u obliku u kome figuriše greška na nivou poverenja 99%.

Rešenje:

$\bar{t} = 51$ h; $\sigma_E = 2$ h; $t_{6;\,0.495} = 3.707$ (tabela E na strani 188) pa je $t_{6;\,0.495} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{7}} = 2.80223$ h.

Srednje vreme neprekidnog rada mašine do kvara iznosi:

$t = (51 \pm 3)$ h sa standardnom greškom iz 7 merenja na nivou poverenja od 99%.

5.12 Pri baždarenju tega na kome je naznačeno 1000g, izvršeno je 20 merenja njegove mase. U sledećoj tabeli su date vrednosti odstupanja od mase naznačene na tegu, raspoređene u klase širine 4g.

Δm	(-12; -8)	(-8; -4)	(-4; 0)	(0; 4)	(4; 8)	(8; 12)
f_i	1	3	7	6	2	1

Izraziti odstupanje od vrednosti naznačene na tegu sa standardnom greškom na nivou poverenja 80%.

Rešenje:

Rezultati merenja i proračunate vredenosti date su u tabeli:

klase	k_i	f_i	$k_i f_i(g)$	$k_i - \bar{x}(g)$	$f_i(k_i - \bar{x})^2(g^2)$
-12; -8	-10	1	-10	-9.6	92.16
-8; -4	-6	3	-18	-5.6	94.80
-4; 0	-2	7	-14	-1.6	17.92
0; 4	2	6	12	2.4	34.56
4; 8	6	2	12	6.4	81.92
8; 12	10	1	10	10.4	108.16
$\sum_i$		20	-8		428.8

Srednja vrednost: $\bar{x} = \dfrac{\sum k_i f_i}{20} = -0.4$ g,

eksperimentalna standardna devijacija: $\sigma_E = \sqrt{\dfrac{1}{n-1} \sum f_i (k_i - \bar{x})^2} = 4.7506$ g.

$t_{19;\,0.40} = 1.328$ (tabela E na strani 188) pa je $t_{19;\,0.40} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{20}} = 1.4128$ g.

Rezultat odstupanja baždarenog tega od vrednosti naznačenog na njemu znosi:

$\Delta m = (0 \pm 1)$ g sa standardnom greškom iz 20 merenja na nivou poverenja od 80%.

5.13 Na jednom fakultetu je ispitivana prosečna ocena diplomiranih studenata. Ispitivanje je obuhvatilo 60 studenata. Prosečne ocene su razvrstane po klasama na sledeći način:

klase	6.0-6.5	6.5-7.0	7.0-7.5	7.5-8.0	8.0-8.5	8.5-9.0	9.0-9.5	9.5-10	10
k_i	6.25	6.75	7.25	7.75	8.25	8.75	9.25	9.75	10
f_i	3	5	11	15	9	7	5	3	2

Pri tome su u poslednjoj klasi studenti sa prosečnom ocenom 10. Izraziti prosečnu ocenu tako da figuriše standardna greška ovog ispitivanja na nivou poverenja 80%.

Rešenje:

Podaci o studentima i proračunate vrednosti date su sledećoj tabeli:

klase	k_i	f_i	$k_i f_i$	$k_i - \bar{x}$	$f_i(k_i - \bar{x})^2$
6.0-6.5	6.2	3	18.75	-1.742	9.104
6.5-7.0	6.75	5	33.75	-1.242	7.713
7.0-7.5	7.25	11	79.75	-0.742	6.056
7.5-8.0	7.75	15	116.25	-0.242	0.878
8.0-8.5	8.25	9	74.25	0.258	0.599
8.5-9.0	8.75	7	61.25	0.758	4.022
9.0-9.5	9.25	5	46.25	1.258	7.913
9.5-10	9.75	3	29.25	1.758	9.272
10	10	2	20	2.008	8.064
$\sum_i$		60	479.5		53.621

$$\bar{x} = \frac{\sum k_i f_i}{60} = 7.992, \quad \sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum f_i(k_i - \bar{x})^2} = 0.9533, \quad z_{0.40} = 1.28, \quad z_{0.40} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{60}} = 0.15753.$$

Vrednost parametra z_0 se čita iz tabele za Gausovu raspodelu (tabela C na strani 184).

Prosečna ocena studenata u toku studija iznosi:

$x = (8.0 \pm 0.2)$ sa standardnom greškom na nivou poverenja od 80% za 60 studenata.

$\boxed{\textbf{5.14}}$ Neka je prilikom 30 merenja dužine nekog predmeta dobijen rezultat: $x = (3.88 \pm 0.02)$ mm, u kome figuriše slučajna standardna greška na nivou poverenja od 68.27%. koliki treba da bude broj merenja da bi se dobila slučajna standardna greška 0.015 na nivou poverenja od 90%.

Rešenje:

Kako je srednja vrednost $\overline{x} = 3.88$ mm, $z_{0.34135} = 1$ za nivo poverenja od $p = 68.27\%$,

tako da je $z_{0.34135} \cdot \sigma_E/\sqrt{30} = 0.02 \quad \Rightarrow \quad \sigma_E = 0.02 \cdot \sqrt{30} = 0.10954$ mm.

Za slučaj nivoa poverenja $p = 90\%$ i n merenja važi $z_{0.45} \cdot \dfrac{\sigma'_E}{\sqrt{n}} = 1.64\dfrac{\sigma'_E}{\sqrt{n}} = 0.015$ mm,

odakle sledi: $\sqrt{n} = \dfrac{1.64}{0.015} \cdot \sigma'_E$, kako je $\sigma_E = \sigma'_E \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = \dfrac{1.64}{0.014} \cdot 0.02 \cdot \sqrt{30} \quad \Rightarrow \quad n \approx 144$ merenja.

$\boxed{\textbf{5.15}}$ Neka su prilikom merenja dužine nekog predmeta dobijene sledeće vrednosti u mm:

3.90 3.81 3.90

Koliki treba da bude broj merenja da bi greška merenja na nivou poverenja od 90% bila 0.05 mm.

Rešenje:

$\overline{x} = 3.87$ mm, $\sigma_E = 0.0519$ mm, $t_{2;\,0.34135} = 1.321$, (tabela E na strani 188). Slučajna greška iznosi:

$t_{2;\,0.34135}\dfrac{\sigma_E}{\sqrt{3}} = 0.039583 \approx 0.04$ mm na nivou poverenja od 68.27% iz tri merenja.

Iz uslova zadatka 0.05 mm $= t_{n-1;\,0.45}\dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = t_{n-1;\,0.45}\dfrac{0.0519}{\sqrt{n}}$, pa se traženo n određuje probanjem.

Za $n = 5$, $t_{4;\,0.45} = 2.132$ tako da je standarna greška $2.132 \cdot \dfrac{0.0519}{\sqrt{5}} = 0.04948 \approx 0.05$.

Znači tražena vrednost broja merenja jednaka je $n = 5$. Ako se odmah ne pogodi broj merenja, nastavi se metod probe dok se ne dobije odgovarajuća vrednost.

5.16 U proizvodnji čokolada radi se procesna kontrola njihove mase. Na slučajnom uzorku od 20 čokolada merenjem mase u g dobijene su sledeće vrenosti:

100.2	99.5	99.0	100.1	99.3	99.2	100.3	100.0	99.5	99.8
99.8	99.8	100.0	101.0	100.2	99.2	99.9	101.0	100.3	99.9

Koliki treba da bude broj merenja da bi greška merenja na nivou poverenja od 95% bila 0.15 g.

Rešenje:

Rezultati merenja sređeni po rastućem redosledu dati su u sledećoj tabeli

99.0	99.2	99.2	99.3	99.5	99.5	99.8	99.8	99.8	99.9
99.9	100.0	100.0	100.1	100.2	100.2	100.3	100.3	101.0	101.0

Mereni podaci i proračunate vrednosti statističkih veličina dati su u sledećoj tabeli:

br. merenja	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$ (g)	$f_i(x_i - \bar{x})^2$ (g^2)
1	99.0	1	99.0	-0.9	0.81
2	99.2	2	198.4	-0.7	0.98
3	99.3	1	99.3	-0.6	0.36
4	99.5	2	199.0	-0.4	0.32
5	99.8	3	299.4	-0.1	0.03
6	99.9	2	199.8	0.0	0.00
7	100.0	2	200.0	0.1	0.02
8	100.1	1	100.1	0.2	0.04
9	100.2	2	200.4	0.3	0.18
10	100.3	2	200.6	0.4	0.32
11	101.0	2	202.0	1.1	2.42
$\sum_i$		20	1998		5.48

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} xif_i}{20} = 99.9 \text{ g}, \ \sigma_E = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(xi-\bar{x})^2 \cdot f_i} = 0.53705 \text{ g},$$

$t_{19;\,0.34135} = 1.027$ (tabela E na strani 188). Standardna greška iznosi: $t_{19;\,0.34135} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0.1233$ g.

Rezultat merenja se tako može izraziti u obliku:

$x = (99.9 \pm 0.1)$ g   sa standardnom greškom na nivou poverenja od 68.27% iz 20 merenja.

Broj merenja n, za $n < 30$ nalazi se isprobavanjem, nalaženjem vrednosti $t_{n-1;\,0.475}$.

Za $n = 28$, $t_{27;\,0.475} = 2.052$, pa je: $2.052 \cdot \dfrac{0.53705}{\sqrt{28}} = 0.20826$ g.

Za $n = 29$, $t_{28;\,0.475} = 2.048$, pa je: $2.048 \cdot \dfrac{0.53705}{\sqrt{29}} = 0.20424$ g.

Za $n = 30$, $t_{29;\,0.475} = 2.045$, pa je: $2.045 \cdot \dfrac{0.53705}{\sqrt{30}} = 0.20052$ g.

Za $n \geq 30$ $t_{n-1;\,0.475} \to z_{0.475} = 1.96$, što daje: $1.96 \cdot \dfrac{0.53705}{\sqrt{n}} = 0.15$ g $\Rightarrow$ $n = 49.245 \approx 50$.

5.17 Pri dvadeset ponovljenih merenja temperature mržnjenja vode dobijena je vrednost za eksperimentalnu standardnu devijaciju $\sigma = 0.00981$°C. Naći granice unutar kojih se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

Granice standardne devijacije su: $\sigma_E\sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1+p}{2}}}} \le \sigma \le \sigma_E\sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}}}}$

gde je p nivo poverenja a $n-1$ broj stepeni slobode, n broj merenja. Kako je $p = 0.9$ i $n = 20$ sledi:

$$\chi^2_{n-1;\,\frac{1+p}{2}} = \chi^2_{19;\,0.95} = 30.143; \quad \chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}} = \chi^2_{19;\,0.05} = 10.117 \text{ (vidi tabelu D na strani 186)}$$

Dalje sledi:

$$\sigma_E\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1+p}{2}}}} = 0.00981\sqrt{\frac{19}{30.143}} = 0,007789; \quad \sigma_E\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}}}} = 0.00981\sqrt{\frac{19}{10.117}} = 0.01344$$

Granice standardne devijacije su: $(0.008 \le \sigma \le 0.013)^\circ$C, na nivou poverenja 90% iz 20 merenja.

5.18 Iz serijske proizvodnje visokoomskih otpornika, radi procesne kontrole slučajno je uzeto 10 komada. Merenjem su dobijene sledeće vrednosti odstupanja otpornosi u kΩ:

red.br.otporanika	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odstupanje (kΩ)	1	3	-2	2	4	2	5	3	-2	4

Naći granice u kojima se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 80%.

Rešenje:

Rastući niz izmerenih vrednosti: -2 -2 1 2 2 3 3 4 4 5

Rezultati merenja odstupanja otpornosti i proračinate vrednosti date su u sledćoj tabeli:

red.broj	x_i	f_i	$x_i f_i$	Δx(kΩ)	$\Delta x^2 f_i$ (kΩ)^2
1	-2	2	-4	-4	32
2	1	1	1	-1	1
3	2	2	4	0	0
4	3	2	6	1	2
5	4	2	8	2	8
6	5	1	5	3	9
$\sum i$		10	20		52

$$\overline{x} = 2\,\text{k}\Omega, \qquad \sigma_E = \sqrt{\frac{52}{9}} = 2.40\,\text{k}\Omega.$$

Za $p = 0.8$ i $n = 10$ koeficijenti χ^2 raspodele (tabela D na strani 186) iznose:

$$\chi^2_{9;\,0.9} = 14.684, \quad \chi^2_{9;\,0.1} = 4.168 \quad \Rightarrow 2.40\cdot\sqrt{\frac{9}{14.684}} \le \sigma \le \ 2.40\cdot\sqrt{\frac{9}{4.168}}, \quad \Rightarrow \quad 1.879 \le \sigma \le 3.527$$

Granice standardne devijacije su $(2 \le \sigma \le 4)\,\text{k}\Omega$, na nivou poverenja 80% iz 10 merenja.

5.19 Pri kontroli mase tegova izvršeno je 30 merenja i date su vrenosti odstupanja od vrednosti na njemu zapisane u u mg. Ove vrednosti su razvrstane po klasama kao što je zapisano u tabeli

Δm_i(mg)	(-9; -6)	(-6; -3)	(-3; 0)	(0; 3)	(3; 6)	(6; 9)	(9; 12)
f_i	1	3	4	10	6	4	2

a.) Izraziti odstupanje mase tega dobijeno merenjem u obliku kome će figurisati slučajna greška na nivou poverenja 90%.

b.) Odrediti granice između kojih se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

a.) Merene i proračunate vrednosti date su sledećoj tabeli:

br.klase	klase	k_i(mg)	f_i	$k_i f_i$(mg)	Δm_i(mg)	$\Delta {m_i}^2 f_i$ (mg)^2
1	-9;-6	-7.5	1	-7.5	-9.7	94.0 9
2	-6;-3	-4.5	3	-13.5	-6.7	134.67
3	-3;0	-1.5	4	-6	-3.7	54.76
4	0;3	1.5	10	15	-0.7	4.9
5	3;6	4.5	6	27	2.3	31.74
6	6;9	7.5	4	30	5.3	112.36
7	9;12	10.5	2	21	8.3	137.78
$\sum_i$			30	66		570.3

$\overline{\Delta m_i} = 2.2$ mg, $\sigma_E = 4.435$ mg. Za $p = 0.9$ i $n = 30$, parametar za Studentovu raspodelu iznosi $t_{29;\,0.45} = 1.699$ (vidi tabelu E na strani 188) $\Rightarrow$ $t_{n-1;\,0.45} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 1.3757$

$\Delta m = (\Delta m_i \pm t_{n-1;\,0.45} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}}) = (2 \pm 1)$ mg na nivou poverenja 90% iz 30 merenja.

b.) Granice standardne devijacije date su u obliku: $\sigma_E \sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1+p}{2}}}} \leq \sigma \leq \sigma_E \sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}}}}$

za $p = 0.9$ i $n = 30$ dobija se: $\chi^2_{n-1;\,\frac{1+p}{2}} = \chi^2_{29;\,0.95} = 42.557$; $\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}} = \chi^2_{29;\,0.05} = 17.708$

Ovi parametri za χ^2 raspodelu se čitaju iz tabele D na strani 186.

$$\Rightarrow \quad \sigma_E \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1+p}{2}}}} = 4,435\sqrt{\frac{29}{42.557}} = 3.6611; \quad \sigma_E \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}}}} = 4,435\sqrt{\frac{29}{17.708}} = 5.6755$$

Tražene granice standardne devijacije su: $(4 \leq \sigma \leq 6)$ mg, na nivou poverenja 90% iz 30 merenja.

$\boxed{\textbf{5.20}}$ Merenjem napona na krajevima nekog otpornika dobijene su sledeće vrednosti u voltima (V):

5.7 5.5 6.1 5.8 5.8 5.6 5.4 5.7 5.6 5.7 5.7 5.8 5.6 5.9 6.1

a.) Napisati rezultat merenja sa standardnom greška merenja na nivou poverenja 90%.

b.) Odrediti interval u kome se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

a.) Rastući niz rezultata merenja je:

5.4 5.5 5.6 5.6 5.6 5.7 5.7 5.7 5.7 5.8 5.8 5.8 5.9 6.1 6.1

Rezultati merenja i proračunate vrednosti date su sledećoj tabeli:

br. merenja	U_i(V)	f_i	$U_i f_i$(V)	ΔU_i(V)	$f_i \Delta U_i^2$ (V^2)
1	5.4	1	5.4	-0.333	0.111
2	5.5	1	3.5	-0.233	0.054
3	5.6	3	16.8	-0.133	0.053
4	5.7	4	22.8	-0.033	0.004
5	5.8	3	17.4	0.067	0.013
6	5.9	1	5.9	0.167	0.028
7	6.1	2	12.2	0.367	0.269
$\sum_i$		15	86		0.532

$\overline{U} = 5.733$ V, $\sigma_E = 0.195$ V, za $p = 0.9$ i $n = 15$, $t_{14;\,0.45} = 1.761$, pa je: $t_{14;\,0,45} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{15}} = 0.0887$ V.

Parametar za Studentovu raspodelu $t_{n-1;\,p/2}$ se čita iz tabele E na strani 188.

$$\Rightarrow \quad U = (\overline{U} \pm t_{n-1;\,0.45} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}) = (5.73 \pm 0.09)\text{ V. na nivou poverenja 90\% iz 15 merenja.}$$

b.) za $p = 0.9$ i $n = 15$, $\chi^2_{14;\,0.05} = 6.571$ i $\chi^2_{14;\,0.95} = 23.685$ (vidi tabelu D na strani 186).

$$\Rightarrow \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}}}} = 0.195 \cdot \sqrt{\frac{14}{6.571}} = 0.2846\text{V} \quad \text{i} \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\,\frac{1-p}{2}}}} = 0.195 \cdot \sqrt{\frac{14}{23.685}} = 0.1499\,\text{V}.$$

Traženi interval standardne devijacije je: $(0.1 \leq \sigma \leq 0.3)$ V, na nivou poverenja 90% iz 15 merenja.

5.21 Merenjem jačine struje kroz neki opornik dobijene su sledeće vrednosti struje u mA:

0.75 0.83 0.75 0.69 0.88 0.55 0.95 0.99 0.78 0.95 0.73 0.92 0.83 0.70

a.) Napisati rezultat merenja u obliku u kome figuriše greška merenja na nivou poverenja 90%.
b.) Odrediti interval u kome se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 90%.

Rešenje:
a.) $\overline{I} = 0.80714$ mA, $\sigma_E = 0.1234$ mA, $t_{13;\,0.45} = 1.771$ (vidi tabelu E na strani 188),

pa je: $t_{13;\,0.45} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{14}} = 0.05841$ mA. Tako da se dobija:

$$I = (\overline{I} \pm t_{n-1;\,0.45} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}) = (0.81 \pm 0.06)\text{ mA, na nivou poverenja 90\% iz 14 merenja.}$$

b.) $\chi^2_{13;\,0.05} = 5.892$ i $\chi^2_{13;\,0.95} = 22.362$ (vidi tabelu E na strani 188)

$$\Rightarrow \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{13}{5.892}} = 0.1833\text{ mA} \quad \text{i} \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{13}{22.362}} = 0.0941\text{ mA}$$

Tražene granice su: $(0.09 \leq \sigma \leq 0.18)$ mA, na nivou poverenja 90% iz 14 merenja.

5.22 Neka su prilikom 5 merenja prečnika sfere dobijene vrednosti u cm:

6.33 6.37 6.36 6.32 6.37

Izraziti prečnik sfere u obliku u kome figuriše greška merenja i interval u kome se nalazi standardna devijacija, na nivou poverenjka 95%.

Rešenje:

$$\overline{x} = 6.35\text{ cm}, \quad \sigma_E = 0.023\text{ cm}, \quad t_{4;\,0.475} = 2.776, \quad t_{4;\,0.475} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 2.776 \cdot \frac{0.023}{\sqrt{5}} = 0.02855\text{ cm},$$

$$\chi^2_{4;\,0.025} = 0.484 \quad \text{i} \quad \chi^2_{4;\,0.975} = 11.143 \quad \Rightarrow \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{4}{0.484}} = 0.0661\text{ cm} \quad \text{i} \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{4}{11.143}} = 0.0138\text{ cm}.$$

Koeficijenti $t_{4;\,0.475}$, $\chi^2_{4;\,0.025}$ i $\chi^2_{4;\,0.975}$ se čitaju iz odgovarajućih tabela na stranama 188 i 186.

Tako se dobija: $R = (6.35 \pm 0.03)$ cm, $(0.01 \leq \sigma \leq 0.07)$ cm na nivou poverenja 95% iz 5 merenja.

5.23 Procesna kontrola dimenzije nekog proizvoda fabrike 30 puta izmerila je dimenzije proizvoda, pri čemu su dobijene sledeće vrednosti u cm:

3.83	3.75	4.04	3.95	3.77	3.97	3.93	3.92	3.85	3.81
3.90	3.80	3.92	3.82	4.04	3.83	3.75	3.95	4.04	3.97
3.97	3.78	3.88	3.94	3.94	3.72	3.92	3.76	3.83	3.88

Napisati rezultate merenja u obliku u kome figuriše greška merenja i odrediti interval u kome se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 80%.

Rešenje:

Rastući niz izmerenih dimenzija proizvoda je:

3.72	3.75	3.75	3.76	3.77	3.78	3.80	3.81	3.82	3.83
3.83	3.83	3.85	3.88	3.88	3.90	3.92	3.92	3.92	3.93
3.93	3.94	3.94	3.95	3.97	3.97	3.97	4.04	4.04	4.04

Izmerene i proračunate vrednosti date su u sledećoj tabeli:

red. broj	x_i(cm)	f_i	$x_i f_i$(cm)	Δx_i(cm)	$f_i \Delta x_i^2$ (cm^2)
1	3.72	1	3.72	-0.161	0.026
2	3.75	2	7.5	-0.131	0.034
3	3.76	1	3.76	-0.121	0.015
4	3.77	1	3.77	-0.111	0.012
5	3.78	1	3.78	-0.101	0.010
6	3.80	1	3.80	-0.081	0.0066
7	3.81	2	3.81	-0.071	0.0051
8	3.82	1	3.82	-0.061	0.0038
9	3.83	3	11.49	-0.051	0.0079
10	3.85	1	3.85	-0.0313	0.00098
11	3.88	2	7.76	-0.0013	0.0000036
12	3.90	1	3.90	0.0187	0.00035
13	3.92	3	11.76	0.0387	0.0045
14	3.93	2	7.86	0.0487	0.0047
15	3.94	2	7.88	0.0587	0.0069
16	3.95	1	3.95	0.0687	0.0047
17	3.97	3	11.91	0.0887	0.0236
18	4.04	3	12.12	0.1587	0.075
$\sum_i$		30	116.44		0.241

$\overline{x} = 3.881$ cm, $\quad \sigma_E = 0.0912$ cm, $\quad t_{29;\,0.4} = 1.311, \quad t_{29;\,0,4} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0,0218.$

$$\chi^2_{29;\,0.1} = 19.768 \quad \text{i} \quad \chi^2_{29;\,0.9} = 39.087 \quad \Rightarrow \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{29;\,0,1}}} = 0.11046 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{29;\,0.9}}} 0,07856 \text{ cm}.$$

Koeficijenti $t_{29;\,0.4}$, $\chi^2_{29;\,0.9}$ i $\chi^2_{4;\,0.1}$ se čitaju iz odgovarajućih tabela na stranama 188 i 186.

Tako se dobija: $\left\{ \begin{array}{l} x = (3.88 \pm 0.02)\,\text{cm}, \\ (0.08 \leq \sigma \leq 0.11)\,\text{cm}, \end{array} \right\}$ na nivou poverenja 80% iz 30 merenja.

5.2 Sistematske greške direktnih merenja

Sistematske greške prilikom direktnih merenja (apsolutna greška mernih instrumenta) predstavljaju odstupanje izmerene vrednosti x od prave vrednosti x_0 merene fizičke veličine. Pošto se radi o odstupanju od prave vrednosti ova greška se obeležava sa Δx. Kao prava vrednost u praksi se koristi dogovorena vrednost ili vrednost dobijena nekim preciznim, etalonskim instrumentom.

$$\Delta x = x - x_0$$

Pored toga, važno je definisati i relativnu grešku instrumenta δx kao:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0} \,(\cdot 100\%).$$

Relativna greška se može izraziti i u procentima, i tada se dobijena vrednost množi sa 100.

5.2.1 Karakterisike mernih instrumenata

Sistematske greške su najčešće naznačene na samim uređajima. Međutim u zavisnosti od vrste mernih instrumenata razlikuju se načini označavanja sistematskih grešaka. Neke od najčešće korišćenih oznaka pri označavanju mernih instrumenata su:

1) **Osetljivost instrumenta** S predstavlja odnos pokazivanja instrumenta α sa promenom merene veličine x. Za instrumente sa skazaljkom α se izražava ili u podelama skale ili u uglovnim jedinicama.

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x}, \qquad \text{kada } \Delta x \to 0, \qquad S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

Za složeni merni sistem, koji se sastoji od senzora, pretvarača, instrumenta za merenje, ukupna ostljivost S_{ukup} iznosi: $S_{ukup} = S_{senz} \cdot S_{pretv} \cdot S_{instr}$.

U slučaju linearnog instrumenta kome se uvek teži, $\alpha = k{\cdot}x$-linearna zavisnost merene veličine x i odziva α, k predstavlja nagib linearne zavisnosti, osetljivost iznosi: $S = k$. Linearni instrumenti imaju istu osetljivost u celom mernom opsegu, kao i linearnu skalu.

Za istu vrednost merenog signala na ulazu, osetljivost intrumenta je veća za veću promenu odziva na izlazu (npr. za veće skretanje skazaljke.)

2) **Merni opseg** $x_{max} - x_{min}$

Kod instrumenata razlikujemo merni i pokazni opseg.

Pokazni opseg obuhvata celu dužinu skale, a brojno je jednak onoj vrednosti merene veličine koja izaziva skretanje skazaljke do poslednjeg podeoka.

Ukoliko se na celoj skali intrumenta ne može meriti sa naznačenom preciznošću, na instrumentu se naznačava merni opseg. Merni opseg predstavlja samo onaj deo pokaznog opsega na kome se može meriti sa traženom preciznošću.

3) **Konstanta instrumenta** C predstavlja odnos promene veličine x i odgovarajućeg odziva instrumenta α.

$$C = \frac{\Delta x}{\Delta\alpha} = \frac{1}{S}, \qquad \text{kada } \Delta x \to 0, \qquad C = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta\alpha} = \frac{\partial x}{\partial\alpha}$$

Brojčano, konstanta instrumenta predstavlja onu vrednost merene veličine koja izaziva jedinični odziv, tj. jedinično skretanje skazaljke α.

Apsolutna vrednost veličine ispod koje instrument ne reaguje naziva se prag instrumenta, i on određuje njegovu tačnost.

4) **Klasa tačnosti instrumenta** k_t predstavlja meru razlike čitanja instrumenta i prave vrednosti.

$$k_t = \frac{\Delta x}{x_{max}} \cdot 100$$

x_{max} predstavlja maksimalnu vrednost mernog opega. Klasa tačnosti predstavlja neku vrstu relativne greške, maksimalne relativne greške δx_{max} izražene u procentima prave vrednosti:

$$\delta x_{max} = \frac{x_{max}}{x} \cdot k_t$$

Ako klasa tačnosti nije naznačena na instrumentu, računa se preko konstante instrumenta, tj. najmanjeg podeoka na skali instrumenta, na sledeći način:

$$\Delta x = \frac{1}{2}C \quad \Rightarrow \quad k_t = \frac{C}{2 \cdot x_{max}} \cdot 100$$

Instrumenti se prema klasama tačnosti dele na:

za	$k_t < 0.2$	-	etalonski
za	$0.2 < k_t < 5$	-	laboratorijski
za	$k_t \geq 5$	-	industrijski

5.2.2 Citiranje grešaka

Greške nastale prilikom merenja se mogu citirati na dva načina.

1° Sistematske i slučajne greške se citiraju odvojeno

$$x = (\overline{x} \pm \Delta x)\ [...], \quad \text{i}$$

$$x = \left(\overline{x} \pm t_{n-1;\,p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}}\right) [...], \quad \text{iz } n \text{ merenja, na nivou poverenja } p\%.$$

2° Sistematske i slučajne greške se citiraju zajedno

$$x = \left(\overline{x} \pm \left\{t_{n-1;\,p/2} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} + \Delta x\right\}\right) [...], \quad \text{iz } n \text{ merenja, na nivou poverenja } p\%.$$

Koeficijenat $t_{n-1;\,p/2}$ se čita iz tabele E za Studentovu raspodelu, na strani 188.

Pri svakom od ova dva načina citiranja grešaka potrebno je naglasiti iz koliko merenja je izračunata slučajna greška i na kom nivou poverenja je napisana.

Iza naznačenih vrednosti potrebno je obavezno napisatati jedinice merene veličine. To je u gornjem izrazu naglašeno stavljenjem tri tačke u srednjoj zagradi.

Za dobijanje manje greške prilikom merenja, gde god je moguće, potrebno je povećati broj merenja. Naime, broj merenja povećava preciznost $\simeq \sqrt{n}$.

Zadaci

$\boxed{\textbf{5.24}}$ Odrediti osetljivost analitičke vage, ako kazaljka skrene za 10 podeoka kada se na jedan tas vage stavi teg od 1 mg.

Rešenje:

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{10\ \text{pod.}}{1\ \text{mg}} = 10\ \frac{\text{pod.}}{\text{mg}}$$

$\boxed{\textbf{5.25}}$ Izračunati konstantu manometra ako je njegov merni opseg od 1000 mbar izdeljen na 2000 podeoka.

Rešenje:

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{2000}{1000} = 2\ \frac{\text{pod.}}{\text{mbar}}, \qquad C = \frac{1}{S} = \frac{\Delta x}{\Delta\alpha} = \frac{1}{2} = 0.5\ \frac{\text{mbar}}{\text{pod.}}.$$

$\boxed{\textbf{5.26}}$ Pri merenju otpornosti otpornika dobijena je vrednost 48.6 kΩ. Korišćenjem vrlo precizne metode dobijeno je da je vrednost otpora ovog otpornika 50.087 kΩ. Odrediti apsolutnu i relativnu sistematsku grešku merenja, ako se smatra da je drugo merenje izvršeno bez ikakve greške i tu vrednost uzeti za pravu vrednost.

Rešenje:

Kako je $R = 48,6$ kΩ i $R_0 = 50,087$ kΩ, apsolutna sistematska greška iznosi:

$\Delta R = R - R_0 = -1.487$ kΩ

Relativna sistematska greška iznosi: $\delta R = \dfrac{\Delta R}{R_0} \cdot 100 = -\dfrac{1.487}{50.087} \cdot 100 = -2.96\%$

$\boxed{5.27}$ Ako instrument ima skalu od 100 podeoka izračunati konstantu instrumenta, ako je merni opseg 100 mA i brojnu vrednost izmerene struje, ako je kazaljka na 65. podeoku.

Rešenje:

$$C = \frac{1}{S} = \frac{\Delta x}{\Delta \alpha} = \frac{100}{100} = 1\ \frac{\text{mA}}{\text{pod.}}.$$

$$\Delta x' = c\Delta\alpha' \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = 1\ \frac{\text{mA}}{\text{pod.}} \cdot 65\ \text{pod.} = 65\ \text{mA}$$

$\boxed{5.28}$ Odrediti apsolutnu sistematsku grešku merenja mase analitičkom vagom, ako se izvrši jedno merenje i dobije vrednost mase m, ako minimalna masa koja izaziva skretanje za jedan podeok iznosi 10 mg.

Rešenje:

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{1\ \text{pod.}}{10\ \text{mg}} = 0.1\ \frac{\text{pod.}}{\text{mg}}.$$

Apsolutna sistematska greška iznosi: $\Delta m = \frac{1}{2} \cdot C = 5$ mg

$\boxed{5.29}$ Odrediti opseg u kome se nalazi prava vrednost debljine nekog predmeta, ako je prilikom merenja nonijusom sa konstantom $C = 0.1$ mm dobijena vrednost 6.62 cm.

Rešenje:

$$d = 66.2\ \text{mm}, \quad \Delta d = \frac{1}{2} \cdot C = 0.05\ \text{mm} = d - d_0 \quad \Rightarrow \quad d_0 = (66.20 \pm 0.05)\ \text{mm}.$$

$\boxed{5.30}$ Neka je osetljivost termometra sa živom $S = 20$ pod./°C i apsolutna sistematska greška merenja usled promene zapremine stakla sa temperaturom u opsegu $\Delta T = (0.05 \div 0.1)$ °C. Ako je maksimalna vrednost mernog opsega 200°C, odrediti klasu tačnosti termometra.

Rešenje:

$$\Delta T = 0.1\ °\text{C - uvek se uzima maksimalna vrednost greške;} \quad \Rightarrow \quad k_t = \frac{\Delta T}{T_{max}} \cdot 100 = \frac{0.1}{200} \cdot 100 = 0.05$$

$\boxed{5.31}$ Merenjem struje ampermetrom klase tačnosti 0.5 i maksimalnog mernog opsega 500 mA dobijena je vrednost struje 150 mA. Odrediti granice između kojih se nalazi prava vrednost struje.

Rešenje:

$$k_t = \frac{\Delta I}{I_{max}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta I = \frac{k_t \cdot I_{max}}{100} = 2.5\ \text{mA} \quad \Rightarrow \quad I = (150 \pm 3)\ \text{mA}$$

$\boxed{5.32}$ Odrediti apsolutnu i maksimalnu relativnu sistematsku grešku pri merenju struje od 1 A ampermetrom sa skalom punog skretanja od 3 A i klase tačnosti 1.5.

Rešenje:

$$k_t = \frac{\Delta I}{I_{max}} \cdot 100$$

$\Rightarrow$ Apsolutna sistematska greška iznosi: $\Delta I = \frac{k_t \cdot I_{max}}{100} = 0.045$ A

$\Rightarrow$ Maksimalna relativna sistematska greška iznosi: $\delta I_{max} = \frac{I_{max}}{I} \cdot k_t = 4.5\%$

$\boxed{\textbf{5.33}}$ U kolo su redno vezana dva ampermetra. Prvi je klase tačnosti $k_{t1} = 0.5$ sa mernim opsegom $I_{max1} = 30$ A i drugi klase tačnosti $k_{t1} = 1.5$ sa mernim opsegom $I_{max2} = 5$ A. Ako oba ampermetra pokazuju vrednost $I = 4$ A, koji je rezultat tačniji?

Rešenje:

$$k_t = \frac{\Delta I}{I_{max}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta I = \frac{k_t \cdot I_{max}}{100} \quad \Rightarrow$$

Za prvi ampermetar: $\Delta I_1 = \dfrac{0.5 \cdot 30}{100} = 0.15 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_1 = (4.0 \pm 0.2) \text{ A}$ i

Za drugi ampermetar: $\Delta I_2 = \dfrac{1.5 \cdot 5}{100} = 0.075 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_2 = (4.00 \pm 0.08) \text{ A}$

Maksimalna relativna sistematska greška iznosi: $\quad \delta I_{max} = \dfrac{I_{max}}{I} \cdot k_t \quad$ pa se dobija:

Za prvi ampermetar: $\delta I_{max1} = \dfrac{30}{4} \cdot 0.5 = 3.75\%$; Za drugi ampermetar: $\delta I_{max2} = \dfrac{5}{4} \cdot 1.5 = 1.88\%$

Tačniji rezultat se dobija sa ampermetrom manje klase tačnosti. Prema tome, *uvek treba birati takav merni opseg da rezultat bude blizu kraja opsega.*

$\boxed{\textbf{5.34}}$ Temperatura se meri termoelementom koji ima osetljivost $S_{TE} = 54 \ \frac{\mu\text{V}}{^\circ\text{C}}$. Nastala elektromotorna sila se meri potenciometarskom metodom, lenjirom sa milimetarskom podelom. Lenjir je baždaren normalnim elementom čija je elektromotorna sila $E = 1.0183$ mV, pri čemu je klizač na 82. milimetru. Kolika je osetljivost i konstanta ove metode?

Rešenje:

$$S_{lenj.} = \frac{82 \text{ mm}}{1.0183 \text{ mV}} = 80.5 \ \frac{\text{mm}}{\text{mV}}$$

ukupna osetljivost: $\quad S_{ukup.} = S_{TE} \cdot S_{lenj.} = 54 \dfrac{\mu V}{^\circ\text{C}} \cdot 80.5 \ \dfrac{\text{mm}}{\text{mV}} = 4.347 \ \dfrac{\text{mm}}{^\circ\text{C}}$

ukupna konstanta: $\quad C_{ukup.} = \dfrac{1}{S_{ukup.}} = 0.23 \ \dfrac{^\circ\text{C}}{\text{mm}}$

$\boxed{\textbf{5.35}}$ Struja se meri ampermetrom klase tačnosti 0.5 sa mernim opsegom 5 mA. Dobijene su sledeće vrednosti:

4.4 4.1 4.3 3.9 3.85 4.15 4.2 4.4 3.9 4.15

Izračunati greške merenja i rezultat izraziti u obliku u kome figuriše ukupna greška merenja.

Rešenje:

Sistematska greška: $\quad k_t = \dfrac{\Delta I}{I_{max}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta I = \dfrac{k_t \cdot I_{max}}{100} = 0.025 \text{ mA}$

Slučajna greška: $\quad \overline{I} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} I_i}{n} = 4.135 \text{ mA}, \quad \sigma_E = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(I_i - \overline{I})^2}{n-1}} = 0.201 \text{ mA}$

$t_{9;0.34135} = 1.059$ (vidi tabelu E na strani 188), $\quad \Rightarrow \quad t_{9;0.34135} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0.06704$ mA,

Ukupna greška: $\quad t_{9;0.34135} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} + \Delta I = 0.09204$ mA

Tražena struja: $\quad I = (4.14 \pm 0.09)$ mA, $\quad$ na nivou poverenja 68.27% iz 10 merenja

$\boxed{\textbf{5.36}}$ Merenjem napona na krajevima nekog otpornika voltmetrom klase tačnosti 1, sa mernim opsegom 300 V, dobijene su sledeće vrednosti u voltima:

256	256	261	258	258
258	255	258	260	257
257	257	256	256	257

a.) Izraziti rezultat merenja u obliku u kome figuriše ukupna greška merenja na nivou poverenja 90%.

b.) Odrediti interval u kome se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja od 90%.

Da li je osetljivost merne opreme (voltmetra) dovoljna za ispoljavanje slučajnog karaktera merenja?

Rešenje:

a.) Sistematska greška: $k_t = \dfrac{\Delta U}{U_{max}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \dfrac{k_t \cdot U_{max}}{100} = 2.61 \text{ V} \simeq 3 \text{ V}$

Slučajna greška: $\overline{U} = \dfrac{\sum_{i=1}^{15} U_i}{n} = 257.2 \text{ V}, \quad \sigma_E = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{15}(U_i - \overline{U})^2}{n-1}} = 1.6125 \text{ V}$

Iz odnosa $\Delta U = 3$ V i $\sigma_E = 1.6$ V može se zaključiti da osetljivost opreme nije dovoljna za ispoljavanje slučajnog karaktera merenja.

$$t_{14;0.45} = 1.761 \text{ (vidi tabelu E na strani 188)}, \quad \Rightarrow \quad t_{14;0.45} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 3.733 \text{ V},$$

Ukupna greška: $t_{14;0.45} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} + \Delta U = 0.733 \text{ V}$

Traženi napon: $U = (257 \pm 4)$ V, na nivou poverenja 90% iz 15 merenja.

b.) $\chi^2_{n-1;0.05} = \chi^2_{14;0.05} = 6.571$ i $\chi^2_{n-1;0.95} = \chi^2_{14;0.95} = 23.685$ (vidi tabelu D na strani 186)

$$\sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;0.05}}} = 2.3537 \text{ V} \quad \text{i} \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;0.95}}} = 1.2399 \text{ V}$$

Interval standardne devijcije: $(1 \leq \sigma \leq 2)$ V, na nivou poverenja 90% iz 15 merenja.

$\boxed{\textbf{5.37}}$ Neka se u nekom eksperimentu napon meri digitalnim voltmetrom, pri čemu je najmanja cifra koja se u datom opsegu može očitati 0.1 V. Neka su izmerene vrednosti napona:

10.2	9.5	9.8	11.7	10.3	11.2	11.3	10.7	10.5	9.2	10.9	9.9

a.) Izraziti rezultat u obliku u kome figuriše ukupna greška merenja na nivou poverenja 95%.

b.) Odrediti opseg u kome se nalazi standardna devijacija na nivou poverenja 95%.

Da li je osetljivost voltmetra dovoljna za ispoljavanje slučajnog karaktera merenja?

Rešenje:

a.) Kod digitalnih instrumenata sistematska greška odgovara polovini najmanjeg digita, najmanje cifre na displeju.

Sistematska greška: $\Delta U = \dfrac{1}{2} \cdot C = 0.05 \text{ V}$

Slučajna greška: $\overline{U} = \dfrac{\sum_{i=1}^{12} U_i}{n} = 10.433 \text{ V}, \quad \sigma_E = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{12}(U_i - \overline{U})^2}{n-1}} = 0.762 \text{ V}$

Iz odnosa $\Delta U = 0.05$ V i $\sigma_E = 1.6$ V, tj. pošto je $\sigma_E > 4 \cdot \Delta U$, može se zaključiti da je osetljivost voltmetra dovoljna za ispoljavanje slučajnog karaktera merenja.

$$t_{11;0.475} = 2.201 \text{ (vidi tabelu E na strani 188)}, \quad \Rightarrow \quad t_{11;0.475} \cdot \frac{\sigma_E}{\sqrt{n}} = 0.484 \text{ V},$$

Ukupna greška: $\quad t_{11;0.475} \cdot \dfrac{\sigma_E}{\sqrt{n}} + \Delta U = 0.534$ V

Traženi napon: $\quad U = (10.4 \pm 0.5)$ V, $\quad$ na nivou poverenja 95% iz 12 merenja.

b.) $\chi^2_{n-1;0.025} = \chi^2_{11;0.025} = 3.816$ i $\chi^2_{n-1;0.975} = \chi^2_{11;0.075} = 21.920$ (vidi tabelu D na strani 186)

$$\sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;0.025}}} = 1.294 \text{ V} \quad \text{i} \quad \sigma_E \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;0.975}}} = 0.540 \text{ V}$$

Interval standardne devijcije: $\quad (0.5 \leq \sigma \leq 1.3)$ V, $\quad$ na nivou poverenja 95% iz 12 merenja.

5.3 Greške indirektno merenih veličina

Poznato je da se samo mali broj fizičkih veličina može *direktno* ili *neposredno* meriti. Najveći broj fizičkih veličina je funkcionalno zavisan od drugih fizičkih veličina koje se mogu meriti. Merenja takvih fizičkih veličina nazivaju se *indirektna* merenja ili *posredna* merenja. Zadatak se svodi na to da se na osnovu grešaka direktno merenih veličina odrede greške indirektno merene fizičke veličine.

5.3.1 Sistematska greška indirektno merene veličine

Zavisnost indirektno merene veličine y od direktno merenih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može se izraziti u obliku funkcije: $\quad y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Greška ovako indirektno merenih veličina se izražava preko grešaka direktno merenih veličina: $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

1° Neka je y funkcija samo jedne veličine $y = f(x)$. Ako je merenjem učinjena greška Δx, tj. ako je rezultat merenja u obliku $x = \overline{x} \pm \Delta x$ tada je:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Posle razvijanja ove funkcije u Tajlorov red za $\forall x \in R$ dobija se:

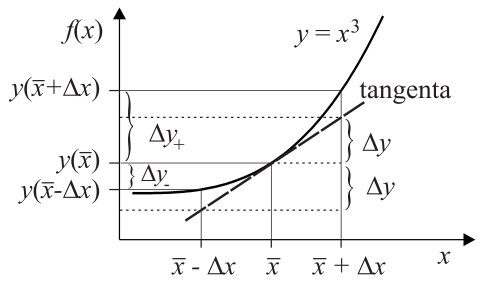
$$y + \Delta y = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \cdots$$

i ako se zanemare članovi višeg reda od prvog $f'(x)$ dobija se: $\quad \Delta y = f'(x)\Delta x$

Ova veličina naziva se *sistematska greška* indirektno merene veličine.

Ovde je potrebno napomenuti da je aproksimacija zanemarivanja članova višeg reda opravdana samo ako je greška Δx mala. Neko se, na primer, razmatra funkcionalna zavisnost $y = x^3$ i neka je rezultat merenja veličine x dat u obliku $x = \overline{x} \pm \Delta x$ (ovo je prikazano na slici 5.1). Ukoliko se zavisnost $y = x^3$ predstavi grafički, može se zapaziti da su veličine Δy_+ i Δy_-, definisane kao:

$$\Delta y_+ = y(x + \Delta x) - y(x)$$
$$\Delta y_- = y(x - \Delta x) - y(x)$$



Slika 5.1. Grafički prikaz indirektnog merenja, za funkcionalnu zavisnost oblika $y = x^3$.

u opštem slučaju različite. Iako postoji ova razlika, za određivanje greške Δy dobra aproksimacija može biti prvi korak u razvoju funkcije $y = f(x)$ u Tejlorov red oko vrednosti $\overline{x}$, što ustvari znači da je funkcija aproksimirana tangentom u datoj tački (vidi sliku 5.1). U tom slučaju se dobijaju simetrični intervali oko $y = f(\overline{x})$. Tako da se traženi slučaj dobija $\Delta y = 3x^2\Delta x$. Ova aproksimacija je dobra samo ako je greška Δx mala.

2° Ako je indirektno merena veličina $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcija više nezavisnih direktno merenih veličina x_i, simultani uticaj grešaka Δx_i nije jednoznačno određen. Neko odstupanje može da smanjuje a neko da povećava rezultat. U ovom slučaju, jedino sto se može proceniti je maksimalno odstupanje veličine y, koje bi se dobilo kao simultan najnepovoljniji uticaj grešaka direktno merenih veličina. Ovaj najnepovoljniji uticaj je u slučaju kad sve greške direktnih merenja ili smanjuju ili povećavaju grešku. Zbog toga je sistematska greška indirektno merene veličine y data u obliku u kome figurišu apsolutne vrednosti svih sabiraka:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2| + \ldots + \left|\frac{\partial y}{-}\partial x_n\right| |\Delta x_n| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|$$

Ova greška predstavlja maksimalnu sistematsku grešku. Ovako dobijena vrednost greške je ponekad nerealno velika, ali tačnija procena najčešće nije potrebna a ni opravdana.

Najčešće se u praksi koristi izraz za tačnu vrednost indirektno merene veličine u obliku:

$$y_0 = \bar{y} \pm \Delta y$$

a ove granice nazivaju se *sigurnim granicama.*

Relativna sistematska greška

1° Za slučaj: $y = f(x)$, relativna greška ima oblik: $\delta_y = \dfrac{\Delta y}{y}$

Kada $\Delta x \to dx$ i $\Delta y \to dy$ tada je: $\delta_y = \dfrac{\Delta y}{y} \to \dfrac{dy}{y} = \dfrac{f'(x)dx}{y} = d(\ln y) = d[\ln f(x)]$

2° Za slučaj: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, relativna greška je: $\delta_y = \dfrac{dy}{y} = d[\ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$

što znači da je δ_y jednaka totalnom diferencijalu prirodnog logaritma indirektno merene veličine.

5.3.2 Slučajna greška indirektno merene veličine

Srednja vrednost indirektno merene veličine $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je data u obliku:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

Za izražavanje slučajnih grešaka, način primenjen na apsolutne greške nije pogodan. Do pogodnijeg načina se može doći kvadriranjem izraza za sistematske greške, tj:

$$\Delta y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j$$

Članovi dvostruke sume $\sum_i \sum_j$ sadrže odstupanja dve veličine od srednje vrednosti. Ova odstupanja mogu biti pozitivna i negativna. Ako su veličine x_i i x_j nezavisne-nekolerisane, kao i njihova odstupanja Δx_i i Δx_j tada se članovi dvostruke sume zanemaruju, pa je:

$$\Delta y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2$$

Deljenjem dobijenog izraza sa brojem merenja, tj sa brojem merenja minus jedan $(n-1)$, članovi koji sadrže Δ svode se na standardne devijacije. Ako se sa σ_i označi standardno odstupanje x_i, tada se standardna devijacija indirektno merene veličine $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ može dati izrazom:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2$$

Ova formula je jedna od najvažnijih u obradi i analizi rezultata merenja, jer su direktna merenja skoro uvek u funkciji merenja i određivanja neke zavisno promenljive veličine, odnosno indirektno merene fizičke veličine. Ona se koristi pri svakom eksperimentu, kako pri njegovom planiranju, postavljanju, uhodavanju, tako i pri stalnom izvođenju. Procenjuje se preciznost merene veličine, određuje merna nesigurnost stvarnih rezultata merenja na određenom nivou poverenja.

Deljenjem gornjeg izraza sa $\sqrt{n}$ dobija se izraz za standardnu grešku indirektno merene veličine y:

$$S(\overline{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 S(\overline{x_1})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 S(\overline{x_2})^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 S(\overline{x_n})^2 \Rightarrow S(\overline{x_n})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S(\overline{x_n})^2$$

Standardna greška idirektno merene veličine, odnosno merena nesigurnost, citira se kao i kod direktnih merenja na nivou poverenja p. Izrazi za greške indirektno merenih veličina u opštem slučaju važe i za različit broj direktnih merenja x_i, ako su definisani na istom nivou poverenja. Treba imati u vidu da navedeni izrazi važe za nezavine slučajne veličine.

Pored toga, koristeći navedene izraze za standardnu devijaciju indirektno merene veličine y može se izračunati i **relativna standardna devijacija** indirektno merene veličine: $\eta_y = \dfrac{\sigma_y}{y}$

5.3.3 Tipični matematički izrazi grešaka indirektno merenih veličina

Neka je merena veličina x data svojom srednjom vrednošću $\bar{x}$ i mernom nesigurnošću $\sigma(x)$ u obliku:

$x = \bar{x} \pm \sigma(x)$

U ovom delu biće navedeni najčešći matematički izrazi koji se koriste za izračunavanje grešaka indirektno merenih veličina zavisno od broja promenljivih i njihove funkcionalne zavisnosti (vidi tabele 5.1 i 5.2). Pretpostavlja se da je c konstantna veličina.

Relativna apsolutna greška definisana je sa: $\delta_x = \dfrac{\Delta x}{x}, \quad \delta_y = \dfrac{\Delta y}{y}$

a relativno standardno odstupanje definisano je u obliku: $\delta_\sigma(x) = \dfrac{\sigma(x)}{x}, \quad \delta_\sigma(y) = \dfrac{\sigma(y)}{y}$

Tabela 5.1. Sistematska greška, relativna greška, standardna devijacija i relativna apsolutna greška u slučaju kada je indirektno merena veličina funkcija jedne merene veličine.

	$y = f(x)$	Δy	δy	$\sigma(y)$	$\delta_\sigma(y)$
1°	$y = cx$	$\Delta y = \lvert c\rvert \Delta x$	$\delta_y = \delta_x$	$\sigma(y) = \lvert c\rvert \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = \delta_\sigma(x)$
2°	$y = \frac{c}{x}$	$\Delta y = \left\lvert -\frac{c}{x^2}\right\rvert \Delta x$	$\delta_y = \delta_x$	$\sigma(y) = \left\lvert -\frac{c}{x^2}\right\rvert \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = \delta_\sigma(x)$
3°	$y = x^c$	$\Delta \left\lvert cx^{c-1}\right\rvert \Delta x$	$\delta_y = c\delta_x$	$\sigma(y) = \left\lvert cx^{c-1}\right\rvert \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = c\delta_\sigma(x)$
4°	$y = c^x$	$\Delta y = \lvert y \ln c\rvert \Delta x$	$\delta_y = \lvert x \ln c\rvert \delta_x$	$\sigma(y) = \lvert c^x \ln c\rvert \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = \lvert x \ln c\rvert \delta_\sigma(x)$
5°	$y = \log_c x$	$\Delta y = \left\lvert \frac{1}{x} \ln c\right\rvert \Delta x$	$\delta_y = \frac{1}{\lvert y\rvert} \lvert \ln c\rvert \delta_x$	$\sigma(y) = \left\lvert \frac{1}{x} \ln c\right\rvert \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = \left\lvert \frac{\ln c}{y}\right\rvert \delta_\sigma(x)$
6°	$y = \ln x$	$\Delta y = \frac{1}{\lvert x\rvert} \Delta x$	$\delta_y = \frac{1}{\lvert y\rvert} \delta_x$	$\sigma(y) = \frac{1}{\lvert x\rvert} \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = \frac{1}{\lvert y\rvert} \delta_\sigma(x)$
7°	$y = e^x$	$\Delta y = e^x \Delta x$	$\delta_y = \lvert x\rvert \delta_x$	$\sigma(y) = e^x \sigma(x)$	$\delta_\sigma(y) = \lvert x\rvert \delta_\sigma(x)$

Tabela 5.2. Sistematska greška, relativna greška, standardna devijacija i relativna apsolutna greška u slučaju kada je indirektno merena veličina funkcija dve merene veličine.

	$y = f(x)$	Δy	δy	$\sigma(y)$	$\delta_\sigma(y)$
1°	$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \pm\{\lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert\}$	$\delta_y = \pm\left\{\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1+x_2}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta x_2}{x_1+x_2}\right\rvert\right\}$	$\sigma(y) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	$\delta_\sigma(y) = \frac{\sigma(x)}{y} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{x_1+x_2}$ $= \frac{\sqrt{\delta_{\sigma_1}^2 x_1^2 + \delta_{\sigma_2}^2 x_2^2}}{x_1+x_2}$
2°	$y = x_1 - x_2$	$\Delta y = \pm\{\lvert\Delta x_1\rvert + \lvert\Delta x_2\rvert\}$	$\delta_y = \pm\left\{\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1-x_2}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta x_2}{x_1-x_2}\right\rvert\right\}$	$\sigma(y) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	$\delta_\sigma(y) = \frac{\sigma(x)}{y} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{x_1-x_2}$ $= \frac{\sqrt{\delta_{\sigma_1}^2 x_1^2 + \delta_{\sigma_2}^2 x_2^2}}{x_1-x_2}$
3°	$y = x_1 \cdot x_2$	$\Delta y = \pm\{\lvert x_2\Delta x_1\rvert + \lvert x_1\Delta x_2\rvert\}$	$\delta_y = \pm\left\{\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert\right\}$ $= \pm\{\lvert\delta_{x_1}\rvert + \lvert\delta_{x_2}\rvert\}$	$\sigma(y) = \sqrt{x_2^2\sigma_1^2 + x_1^2\sigma_2^2}$	$\delta_\sigma(y) = \frac{\sigma(x)}{y} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{x_2^2}}$ $= \sqrt{\delta_{\sigma_1}^2 + \delta_{\sigma_2}^2}$
4°	$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\Delta y = \pm\left\{\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert\right\}$	$\delta_y = \pm\left\{\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}\right\rvert + \left\lvert\frac{x_1\Delta x_2}{x_2^2}\right\rvert\right\}$ $= \pm\left\{\lvert\delta x_1\rvert + \left\lvert\frac{x_1}{x_2}\delta_{x_2}\right\rvert\right\}$	$\sigma(y) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{x_2^2} + \frac{x_1^2\sigma_2^2}{x_2^4}}$	$\delta_\sigma(y) = \frac{\sigma(x)}{y} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{x_2^2}}$ $= \sqrt{\delta_{\sigma_1}^2 + \delta_{\sigma_2}^2}$

Zadaci

5.38 Odrediti granice unutar kojih se nalazi prava vrednost pritiska vazduha pomoću U cevi sa lenjirom sa milimetarskom podelom, ako je izmerena visina Hg stuba $h = 752$ mm. Prilikom računanja za gustinu žive uzeti $\rho_{\text{Hg}} = 13.5461$ g/cm^3, gustinu vazduha zanemariti u odnosu na gustinu žive $\rho_{\text{vazd.}} \ll \rho_{\text{Hg}}$. Pritisak izraziti u paskalima.

Rešenje:

Pritisak se određuje pomoću U cevi, sa papirom sa milimetarskom podelom, korišćenjem izraza

$$p = g \cdot \left(\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{vazd.}}\right) \cdot h$$

Konstanta lenjira za merenja visine živinog stuba, tj. milimetarskog papira iznosi: $C = 1\ \frac{\text{mm.}}{\text{pod}}$, pa apsolutna sistematska greška merenja visine iznosi: $\Delta h = \frac{1}{2}C = 0.5$ mm.

Visina žive iznosi: $h = (752.0 \pm 0.5)$ mm

Odgovarajući pritisak u Paskalima iznosi $p = g \cdot \rho_{\text{Hg}} \cdot h = 99931.204$ Pa $\left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$

Apsolutna sistematska greška merenja pritiska tada iznosi: $\Delta p = g \cdot \rho_{\text{Hg}} \cdot \Delta h = 66.44$ Pa.

Traženi pritisak iznosi: $p = (99930 \pm 70)$ Pa.

5.39 Odrediti sistematsku grešku merenja mase merenjem zapremine istisnute tečnosti, pri čemu je za gustinu istisnute tečnosti dobijena vrednost $\rho = 0.998$ g/cm^3, sa sistematskom apsolutnom greškom 0.1 g/cm^3 i za zapreminu istisnute tečnosti dobijena vrednost $V = 50$ ml, sa sistematskom apsolutnom greškom 0.5 ml.

Rešenje:

Masa m i zapremina V se povezani izrazom:

$$m = \rho V,$$

odakle sledi $\quad m = \rho \cdot V = 49.9$ g.

Apsolutna sistematska greška indirektnog merenja mase Δm iznosi:

$$\Delta m = \left|\frac{\partial m}{\partial \rho}\right| \Delta\rho + \left|\frac{\partial m}{\partial V}\right| \Delta V = V\Delta\rho + \rho\Delta V = 5.499 \text{ g}$$

Rezultat ovog indirektnog merenja iznosi:

$$m_0 = (m \pm \Delta m) = (50 \pm 6) \text{ g}.$$

5.40 Kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška sa kojom može da se odredi ubrzanje slobodnog pada g, pomoću matematičkog klatna, ako je dužina klatna $l = (1.431 \pm 0.001)$ m, a njegov period oscilovanja $T = (2.4 \pm 0.1)$ s? Broj π uzeti sa tri sigurne cifre.

Rešenje:

Koristeći izraz za period oscilovanja matematičkog klatna dobija se: $\qquad g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T^2}$

gde je l dužina matematičkog klatna, T period oscilovanja. Na osnovu prethodnog izraza tražena apsolutna greška data je u obliku:

$$\Delta g = \frac{8\pi l}{T^2}|\Delta\pi| + \frac{4\pi^2}{T^2}|\Delta l| + \frac{8\pi^2 l}{T^3}|\Delta T| = 0.032 \text{ m/s}^2$$

pošto je $\pi = 3.14$, $|\Delta\pi| = 0.00159$, $l = 1.431$m, $|\Delta l| = 10^{-3}$m, $T = 2,4$s i $|\Delta T| = 0.1$s,

dok je odgovarajuća relativna greška:

$$\delta g = \frac{2\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T} \approx 0.08332$$

Shodno prethodnim vrednostima ubrzanje slobodnog padanja iznosi:

$$g = (9.79 \pm 0.03)\ \mathrm{m/s}^2.$$

$\boxed{\mathbf{5.41}}$ Pri određivanju koeficijenta površinskog napona vode metodom kapilare izmereno je da je visina vode u kapilari $h = (49.0 \pm 0.5)$ mm, a poluprečnik kapilare $r = (0.30 \pm 0.02)$ mm, dok je poznato da je ubrzanje slobodnog padanja $g = (9.81 \pm 0.02)$ m/s^2, a gustina vode $\varrho = (1000 \pm 1)$ kg/m^3. Odrediti maksimalnu apsolutnu i relativnu grešku pri određivanju koeficijenta površinskog napona α ovom metodom.

Rešenje:

Koeficijent povšinskog napona, po metodi kapilare definisan je relacijom:

$$\alpha = \frac{1}{2} rh\varrho g$$

a odgovarajuća maksimalna apsolutna greška jednaka je:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2}(h\varrho g|\Delta r| + rhg|\Delta\varrho| + rh\varrho|\Delta g| = 6.49 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N/m}$$

pošto je: $\Delta r = 2 \cdot 10^{-5}$ m, $\Delta h = 5 \cdot 10^{-3}$ m, $\Delta\varrho = 1$ kg/m^3, $\Delta g = 0.02$ m/s^2, a maksimalna relativna greška iznosi:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta\varrho}{\varrho} + + \frac{\Delta g}{g} = 0.09$$

gde je $r = 0.30 \cdot 10^{-3}$ m, $h = 0.049$ m, $\varrho = 10^3$ kg/m^3, $g = 9.81$ m/s^2. Prema tome, koeficijent površinskog napna je:

$$\alpha = (72 \pm 7)\ \mathrm{mN/m}.$$

$\boxed{\mathbf{5.42}}$ Da bi se odredio moment inercije tela nepravilnog oblika, koristi se torziono klatno. Vrednost torzione konstante je određena i iznosi $c = (0.70 \pm 0.02)$ m·N/rad, dok period torzionih oscilacija tela, čiji se moment inercije određuje, iznosi $T = (0.42 \pm 0.01)$s. Ako je $\pi = 3.1416 \pm 0.0016$, kolike su maksimalna apsolutna i relativna grevska koje nastaju pri određivanju momenta inercije tela nepravilnog oblika ovm metodom?

Rešenje:

Period oscilacija torzionog klatna dat je izrazom $T = 2\pi\sqrt{I/c}$, pa je moment inercije tela:

$$I = \frac{cT^2}{4\pi^2}$$

Sada je maksimalna apsolutna geška određivanja momenta inercije ovom metodom:

$$\Delta I = \frac{T^2}{4\pi^2}|\Delta c| + \frac{cT}{2\pi^2}|\Delta T| + \frac{cT^2}{2\pi^3}|\Delta\pi| = 2.38 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg{\cdot}m}^2$$

pošto je $c = 0.70$ m·N/rad, $|\Delta c| = 0.02$ m·N/rad, $T = 0.42$ s, $|\Delta T| = 0.01$ s, $\pi = 3,1416$, $\Delta\pi = 0.0016$, dok je odgovarajuća relativna greška:

$$\delta I = \frac{|\Delta c|}{c} + 2\frac{\Delta T}{T} + 2\frac{\Delta \pi}{\pi} = 0.0343$$

što znači da je moment inercije: $I = (3.1 \pm 0.3)$ kg·m^2.

5.43 Telo mase $m = (2.0 \pm 0.1)$ kg, nalazi se na visini $h = (3.0 \pm 0.1)$ m, od podloge. Ako je ubrzanje slobodnog padanja na tom mestu $g = (9.80 \pm 0.03)$ m/s^2, izračunati kolika je maksimalna apsolutna, a kolika maksimalna relativna grešaka kojima je određena gravitaciona potencijalna energija tela.

Rešenje:

Potencijalna gravitaciona energija tela, u odnosu na podlogu data je relacijom:

$$E = mgh.$$

Maksimalna apsolutna greška definisana je izrazom:

$$\Delta E_p = \frac{\partial E_p}{\partial m}|\Delta m| + \frac{\partial E_p}{\partial g}|\Delta g| + \frac{\partial E_p}{\partial h}|\Delta h| = gh|\Delta m| + mh|\Delta g| + mg|\Delta h| = 5.08 \text{ J}$$

Pošto je $m = 2.0$ kg, $|\Delta m| = 0.1$ kg, $h = 3.0$ m, $|\Delta h| = 0.1$ m, $g = 9.80$ m/s^2 i $|\Delta g| = 0.03$ m/s^2. Maksimalna relativna grevska je:

$$\delta E_p = d(\ln m + \ln g + \ln h) = \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta g|}{g} + \frac{|\Delta h|}{h} = 0.086.$$

Proveriti da li je opravdano u ovom slučaju za apsolutnu i relativnu grešku koristi izraze:

$$\Delta E_p \approx mh|\Delta g| + mg|\Delta h|\,; \quad \delta E_p \approx \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta h|}{h}.$$

5.44 Da bi se izračunala otpornost provodnika nepoznate otpornosti R, meri se struja koja protiče kroz provodnik i napon na njegovim krajevima. Najmanja podela na skali ampermetra je 0.1 A, a na skali voltmetra 0.25 V. Ako je pokazivanje instrumenta bilo:

- na ampermetru $I = 1.6$ A,
- na voltmetru $U = 12.5$ V,

a) kolike su maksimalne apsolutna i relativna greška pri određivanju nepoznate otpornosti?

b) Kolika je nepoznata otpornost?

Rešenje:

Otpornost nekog provodnika, ukoliko se poznaje vrednost struje koja protiče korz njega i napon na njegovim krajevima se može odrediti korišćenjem Omovog zakona $R = U/I$.

a) Maksimalna apsolutna greška je:

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial U}|\Delta U| + \frac{\partial R}{\partial I}|\Delta I| = \frac{\Delta U}{I} + \frac{U \Delta I}{I^2} = 0.64\ \Omega$$

a odgovarajuća maksimalna relativna greška je:

$$\delta R = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 0.0825$$

gde je $\Delta U = 0.25$ V i $\Delta I = 0.1$ A.

b) Vrednost na ovaj način određene otpornosti može se napisati kao:

$$R = \frac{U}{I} \pm \frac{U}{I}\delta R = (7.8 \pm 0.7)\ \Omega$$

$\boxed{5.45}$ Odrediti sistematsku grešku pri merenju inteziteta struje kroz neki otpornik indirektnom metodom, merenjem napona na otporniku i vrednosti otpornosti i proceniti gde je korisnije povećati preciznost merenja, pri merenju napona U, ili otpornosti R. Prilikom merenja su dobijene sledeće vrednosti: napon na otporniku $U = 1000$ V sa sistematskom greškom od 20 V, kao i otpornost otpornika $R = 10\ \Omega$ sa sistematskom greškom od 1 Ω.

Rešenje:

Struja se može odredtiti korišćenjem Omovog zakona:

$$I = \frac{U}{R},$$

Izmerena vrednosti napona i otpornost iznose: $U = (1000 \pm 20)$ V i $R = (10 \pm 1)\ \Omega$.

Indirektno izmeren intenzitet električne struje iznosi: $I = \dfrac{U}{R} = 100$ A.

Sistematska greška intenziteta električne struje iznosi:

$$\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial U}\right| \Delta U + \left|\frac{\partial I}{\partial R}\right| \Delta R = \left|\frac{1}{R}\right| \Delta U + \left|-\frac{U}{R^2}\right| \Delta R = \frac{20}{10} + \frac{1000}{100} = 12\, A$$

a relativna sistematska greška intenziteta električne struje je:

$$\delta_I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta R}{R} = 0.12 = 12\%$$

Indirektno izmerena vrednost električne struje iznosi: $I = (100 \pm 12)$ A.

Relativna sistematske greške prilikom merenja napona i otpornosti iznose:

$$\delta_U = \frac{\Delta U}{U} \cdot 100 = 2\% \quad \text{i} \quad \delta_R = \frac{\Delta R}{R} \cdot 100 = 10\%$$

Poređenjem vrednosti δ_U i δ_R vidi se da je relativna sistematska greška otpornosti δ_R mnogo već od relativne sistematske greške napona δ_U. Na osnovu toga treba veću pažnju obratiti na povećanje preciznosti merenja otpornosti, kako bi se smanjila ova relativna greška, a time povećala preciznost merenja inteziteta električne struje.

$\boxed{5.46}$ Kolika je maksimalna relativna greška pri izračunavanju kapacitivnosti ravnog vazdušnog kondenzatora, čije su ploče oblika kvadrata stranice $a = (10.0 \pm 0.1)$ cm, ako je rastojanje izmedju njih $d = (2.0 \pm 0.1)$mm? Relativna permitivnost vazduha iznosi $\varepsilon_r = (1.00058 \pm 0.00001)$, dok je dielektrična konstanta vakuuma $\varepsilon_0 = (8.85418 \pm 0.00001) \cdot 10^{-12}$ F/m.

Rešenje:

Kapacitivnost ravnog kondenzatora data je izrazom:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a^2}{d}$$

pa je maksimalna relativna grška pri izračunavanju njegove kapacitivnosti:

$$\delta C = d(\ln \varepsilon_0 + \ln \varepsilon_r + 2 \ln a + \ln d) = \frac{|\Delta \varepsilon_0|}{\varepsilon_0} + \frac{|\Delta \varepsilon_r|}{\varepsilon_r} + \frac{2|\Delta a|}{a} + \frac{|\Delta d|}{d} \approx \frac{2|\Delta a|}{a} + \frac{|\Delta d|}{d} = 0.7$$

gde je $\Delta a = 0.1$ cm, $\Delta d = 0.1$mm, $a = 10$ cm, $d = 2$ mm. Prema prethodnim podacima kapacitivnost ovog kondenzatora je:

$$C = (44 \pm 4) \text{ pF}.$$

Napomena. Dobijeni rezultat ukazuje da se u ovom, i drugim slučajevima, vazduh po svojim električnim svojstvima može smatrati kao vakuum.

5.47 Prilikom eksperimentalnog određivanja specifične toplotne kapacitivnosti vode pomoću kalorimetra sa stacionarnim tokom dobijeni su sledeći podaci:

- napon na krajevima grejača $U = (22 \pm 1)$ V
- jačina struje kroz grejač $I = (1.5 \pm 0.1)$ A
- maseni protok vode $m' = (8.0 \pm 0.5)$ g/s
- temperatura vode na ulazu u kalorimetar $t_1 = (15.0 \pm 0.1)$ °C
- temperatura vode na izlazu iz kalorimetra $t_2 = (16.0 \pm 0.1)$ °C

Kolika je maksimalna relativna greška određivanja specifične toplotne kapacitivnosti ovom metodom?

Rešenje:

Specifična toplotna kapacitivnost vode u vodenom kalorimetru sa stacionarnim tokom se može odrediti pomoću izraza:

$$c = \frac{UI}{m'(t_2 - t_1)}$$

Na osnovu izmerenih podataka, za specifičnu toplotnu kapacitivnost vode se dobija: $c = 4125 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$.

Maksimalna relativna greška određivanja specifične toplotne kapacitivnosti se može odrediti pomoću izraza:

$$\frac{\Delta c}{c} = d[\ln U + \ln I + \ln m + \ln(t_2 - t_1)] = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta m'}{m'} + \frac{|\Delta t_2| - |\Delta t_1|}{t_2 - t_1} = 0.375.$$

Apslotna greška prilikom ovog merenja iznosi: $\Delta c = 1546.874 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$

tako da se može pisati:

$$c = (4000 \pm 2000) \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$$

5.48 Pri eksperimentalnom određivanju elektrohemijskog ekvivalenta bakra, masa katode (načinjene od bakarnog lima) iznosila je $m_1 = (90.252 \pm 0.005)$ g, na početku eksperimenta. Posle elektrolize, koja je trajala $t = (900 \pm 1)$ s, pri čemu je jačina struje kroz elektrolit bila stalna i iznosila $I = (1.2 \pm 0.1)$ A, izmereno je da je masa katode $m_2 = (90.610 \pm 0.005)$ g.
Kolike su apsolutna i relativna greška određivanja elektrohemijskog ekvivalenta u ovom eksperimentu? Koliki je elektrohemijski ekvivalent bakra prema ovim podacima?

Rešenje:

Elektrohemijski ekvivalent određen je izrazom: $k = \frac{m_2 - m_1}{It} = 3.31480 \cdot 10^{-7} \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C}}$.

Apsolutna greška u ovom eksperimentu iznosi:

$$\begin{aligned}\Delta k &= \frac{\partial k}{\partial (m_2 - m_1)}(\Delta m_2 + \Delta m_1) + \frac{\partial k}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial k}{\partial t}\Delta t \\ &= \frac{(|\Delta m_2| + |\Delta m_1|)}{It} + \frac{|m_2 - m_1|}{I^2 t}\Delta I + \frac{|m_2 - m_1|}{It^2}\Delta t = 3.72 \cdot 10^{-8} \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C}},\end{aligned}$$

a relativna greška iznosi:

$$\delta k = d[\ln(m_2 - m_1) + \ln I + \ln t] = \frac{(\Delta m_2 + \Delta m_1)}{|m_2 - m_1|} + \frac{|\Delta I|}{I} + \frac{\Delta t}{t} = 0.112,$$

gde je $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ kg, $\Delta I = 0.1$ A, $\Delta t = 1$ s, $m_1 = 90.252$ g, $m_2 = 90.610$ g, $I = 1.2$ A, $t = 900$ s.

Prema tome elektrohemijski ekvivalent bakra je:

$$k = (3.3 \pm 0.4) \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C}}$$

5.49 Kolika se relativna greška načini pri izračunavanju rezonantne frekvencije jednog LC-kola ako su, prema deklaraciji proizvođača vrenosti kapacitivnosti i induktivnosti u kolu $C = 10\ \mu\mathrm{F} \pm 1$ i $L = 0.5\ \mathrm{H} \pm 0.05$? Broj π uzeti sa tri značajne cifre.

Rešenje:

Prema uslovu zadatka, apsolutna greška s kojom su određeni kapacitivnost i induktivnost u kolu jesu:

$$|\Delta C| = 1\ \mu\mathrm{F} \quad \mathrm{i} \quad |\Delta \mathrm{L}| = 0.05\ \mathrm{H}$$

Kako je rezonatna frekvenca LC-kola jednaka:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

to je maksimalna relativna greška pri jednom izračunavanju:

$$\delta\nu = d\left(\ln \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right) \approx \frac{|\Delta C|}{2C} + \frac{|\Delta L|}{2L} = 0.1$$

gde je $C = 10\ \mu$F i $L = 0.5\,$H.

5.50 Bikonveksno sočivo, žižne daljine $f_1 = (20.0 \pm 0.5)$ cm, i bikonkavno sočivo žižne daljine $f_2 = (-10.0 \pm 0.5)$ cm, dodiruju se sfernim površinama.

a) Kolika se maksimalna relativna greška čini pri određivanju ekvivalentne žižne daljine ovog sistema sočiva računskim putem?

b) Da li je moguće eksperimentalno odrediti ekvivalentnu žižnu daljinu ovog sistema sočiva?

c) Kolika je ekvivalentna žižna daljina?

Rešenje:

a) Ekvivalentana žižna daljina datog sistema sočiva se izračunava prema izrazu:

$$f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = -20\ \mathrm{cm}$$

pa je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju:

$$\delta f_e = \left|\frac{f_2}{f_1(f_1 + f_2)}\right| \cdot |\Delta f_1| + \left|\frac{f_1}{f_2(f_1 + f_2)}\right| \cdot |\Delta f_2| = 0.125$$

b) Nije moguće, jer njihova kombinacija predstavlja rasipno sočivo.

c) Ekvivalentna žižna daljina sočiva jednaka je:

$$f_e = (-20 \pm 3)\ \mathrm{cm}.$$

5.51 Pri određivanju talasne dužine monohromatske svetlosti difrakcionom rešetkom korišćena je optička rešetka čija je konstanta $d = 1/50$ mm. Spektar drugog reda ($k = 2$) video se pod uglom (u odnosu na spektar nultog reda) $\theta = (3°12' \pm 12')$.

a) Koliko iznose maksimalna apsolutna i maksimalna relativna greška pri određivanju talasne dužine na ovom spektrometru?

b) Kolika je talasna dužina ove monohromatske svetlosti?

Rešenje:

Talasna dužina monohromatske svetlosti u eksperimentu sa difrakcionom rešetkom se može odrediti korišćenjem izraza:

$$\lambda = \frac{d \sin\theta}{k}$$

a) Maksimalna apsolutna greška definisana je izrazom:

$$\Delta\lambda = \frac{d}{k} \cdot \frac{d}{d\theta_k} \sin\theta_k |\Delta\theta_k| = \frac{d}{k} \cos\theta_k \cdot |\Delta\theta_k| = 34.8 \text{ nm}$$

dok je maksimalna relativna greška

$$\delta\lambda = \cot\theta_k \cdot \Delta\theta_k = 0.062$$

gde je $\theta_k = 32°12' = 0.056$ rad, i $|\Delta\theta_k| = 3.5 \cdot 10^{-3}$ rad.

b) Tražena talasna dužina iznosi:

$$\lambda = (560 \pm 40) \text{ nm}$$

5.52 Kolika se maksimalna relativna greška načini pri izračunavanju Bolcmanove konstante ako je:

$$T_0 = 273.16 \text{ K}$$

$$p_0 = 101.325 \text{ Pa}$$

$$V_0 = (22.4138 \pm 0.0007) \cdot 10^{-3}\ m^3/\text{mol}$$

$$N_A = (6.02204 \pm 0.00003) \cdot 10^{23}\ \tfrac{1}{\text{mol}}$$

Rešenje:

Bolcmanova konstanta pomoću datih konstanti određena je izrazom:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{p_0 V_0}{T_0 N_A}$$

pa je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju

$$\delta k = d\left(\frac{p_0 V_0}{T_0 N_A}\right) = \frac{|\Delta P_0|}{p_0} + \frac{|\Delta V_0|}{V_0} + \frac{|\Delta T_0|}{T_0} + \frac{|\Delta N_A|}{N_A}$$

Kako je $\Delta p_0 = 0$ i $\Delta T_0 = 0$ (prema međunarodnoj konvenciji), dobija se:

$$\delta k = \frac{|\Delta V_0|}{V_0} + \frac{|\Delta N_A|}{N_A} \approx 36 \cdot 10^{-6}$$

pa je Bolcmanova konstanta

$$k = (1.38066 \pm 0.00005) \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$\boxed{\textbf{5.53}}$ Kolika je maksimalna relativna greška sa kojom je izračunata Komptonova talasna dužina za elektron ako je poznto da je:

$$h = (6.626176 \pm 0.000034) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s},$$

$$m_e = (9.109534 \pm 0.000046) \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg},$$

$$c = (299792458.0 \pm 1.2)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}?$$

Rešenje:

Komptonova talasna dužina definisana je relacijom:

$$\lambda_C = \frac{2h}{m_e c}$$

pa je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju jednaka:

$$\delta\lambda_C = d\left(\ln\frac{2h}{m_e c}\right) = \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta m_e|}{m_e} + \frac{|\Delta c|}{c}$$

Kako je $\Delta c/c \ll \Delta m_e/m_e$ i $\Delta c/c \ll \Delta h/h$, prethodna relacija se može uprostiti na oblik

$$\delta\lambda_C = \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta m_e|}{m_e} \approx 10 \cdot 10^{-6}$$

pa je Komptonova talasna dužina iznosi:

$$\lambda_C = (4.85262 \pm 0.00005) \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

$\boxed{\textbf{5.54}}$ Odrediti srednju brzinu kojom automobil pređe put s za vreme $t = (900 \pm 5)$ s, kao i standardnu devijaciju brzine pod predpostavkom da se kreće uniformnom brzinom za:

a.) dužinu puta $s = 10$ km $= const.$,

b.) dužinu puta $s = (10.0 \pm 0.1)$ km.

Rešenje:

a.) Srednja brzina i standardna devijacija brzine automobila iznose:

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = 40\ \mathrm{km/h} \quad \text{i} \quad \sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2} = \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \sigma_t = \left|-\frac{s}{t^2}\right| \sigma_t = 0.224\ \frac{km}{h}$$

Tražena brzina iznosi:

$$v = (40.0 \pm 0.2)\ \frac{km}{h}$$

Kada se nista ne napiše podrazumeva se da je mereni rezultat na nivou poverenja 68.27% sa standardnom devijacijom.

b.) Za $t = (0.2500 \pm 0.0014)$ h i $s = (10.0 \pm 0.1)$ km srednja brzina i standardna devijacija brzine automobila iznose:

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = 40\ \mathrm{km/h} \quad \text{i} \quad \sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2} = \sqrt{\left(-\frac{s}{t^2}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 \sigma_s^2} = 0.458\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Na osnovu ovog tražena brzina iznosi:

$$v = (40.0 \pm 0.5)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

5.55 Dva otpornika, otpornosti $R_1 = (100 \pm 1)\ \Omega$ i $R_2 = (60 \pm 1)\ \Omega$, vezani su:

a) redno,

b) paralelno.

Kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška pri izračunavanju ekvivalentne otpornosti obe veze otpornika?

Rešenje:

a) Ekvivalenta otpornost redno vezanih otpornika iznosi:

$$R_e = R_1 + R_2.$$

Maksimalna apsolutna greška pri izračunavanju ekvivalentne otpornosti iznosi:

$$\Delta R_e = |\Delta R_1| + |\Delta R_2| = 2\ \Omega.$$

pošto je $|\Delta R_1| = 1\ \Omega$ i $|\Delta R_2| = 1\ \Omega$, maksimalna relativna greška iznosi:

$$\delta R_e = \frac{|\Delta R_1| + |\Delta R_2|}{R_1 + R_2} = 0.0125.$$

b) Kod paralelne veze otpornika ekvivalenta otpornost iznosi:

$$R_e = R_1 R_2/(R_1 + R_2),$$

Maksimalna apsolutna greška pri izračunavanju ekvivalentne otpornosti, u ovom slučaju iznosi:

$$\Delta R_e = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}|\Delta R_1| + \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot |\Delta R_2| = 0.53\ \Omega$$

a relativna greška iznosi:

$$\delta R_e = \frac{\Delta R_e}{R_e} = 0.014.$$

5.56 Odrediti standardnu devijaciju određivanja naelektrisanja u Milikenovom eksperimentu i napisati rezultat u obliku u kome figuriše standardna greška na nivou poverenja 90%, ako je iz 50 merenja dobijeno: $r = (1.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-4}$ cm; $\rho = (1.0 \pm 0.1)$ g/cm^{-3}; $d = (2.50 \pm 0.05)$ cm; $V_1 - V_2 = (3000 \pm 10)$ V.

Rešenje:

U Milikenovom ogledu uravnotežuju se sila elektrostatičkog privlačenja kapi i njena težina: $qE = G$. Kako je sila elektrostatičkog privlačenja $E = \dfrac{V_1 - V_2}{d}$ i sila težine $G = \dfrac{4}{3}\pi\rho g r^3$, to se za naelektrisanje dobija izraz u obliku:

$$q = \frac{4\pi g}{3} \cdot \frac{d\rho r^3}{V_1 - V_2}$$

Srednja vrednost naelektisanja iznosi: $\quad \overline{q} = \dfrac{4\pi g}{3} \cdot \dfrac{\bar{d}\,\overline{\rho}\,\overline{r}^3}{\overline{u}} = 3.42 \cdot 10^{-12}$ C

gde je: $u = V_1 - V_2$ razlika napona.

Standardno odstupanje naelektrisanja dato je u obliku:

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \rho}\right)^2 \sigma_\rho^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 \sigma_u^2}$$

Vrednosti pojedinih parcijalnih izvoda iznose:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{4\pi g}{3} \cdot \frac{d\rho 3r^2}{u} = 1.027 \cdot 10^{-7}; \qquad \frac{\partial q}{\partial \rho} = \frac{4\pi g}{3} \cdot \frac{dr^3}{u} = 3.42 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{\partial q}{\partial d} = \frac{4\pi g}{3} \cdot \frac{\rho r^3}{u} = 1.37 \cdot 10^{-12}; \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{4\pi g}{3} \cdot \frac{d\rho r^3}{u^2} = 1.14 \cdot 10^{-15}$$

Posle izračunavanja standardno odstupanje naelektrisanja iznosi: $\sigma_q = 2.08 \cdot 10^{-12}$ C

Kako je $p = 90\%$, $t_{n-1;\,0.45} = t_{49;\,0.45} \rightarrow z_{0.45} = 1.64$ (vidi tabelu C na strani 184)

pa se dobija: $z_{0.45} \cdot \dfrac{\sigma_q}{\sqrt{50}} = 4.85 \cdot 10^{-13}$

Naelektrisanja elektrona iznosi: $q = (3.40 \pm 0.05) \cdot 10^{-12}$ C, na nivou poverenja 90% iz 50 merenja.

5.57 Odrediti Jungov moduo elastičnosti i rezultat izraziti u obliku u kome figuriše standardna greška merenja na nivou poverenja 95%, ako su iz 10 merenja dobijeni sledeći rezultati: površina poprečnog preseka žice $S = (0.40 \pm 0.01)$ cm^2; izduženje žice $\Delta l = (0.200 \pm 0.005)$ cm; dužina žice $l = (2.00 \pm 0.01)$ m i masa tega kojim je opterećivana žica $m = (457.0 \pm 0.4)$ kg. Ovi rezultati dati su u obliku u kome figuriše standardno odstupanje na niou poverenja 68.27%. Ubrzanje zemljine teže uzeti konstantno $g = 9.81$ m/s^2.

Rešenje:

Jungov moduo elastičnosti, na osnovu Hukovog zakona, se može izraziti kao:

$$E_y = \frac{l}{\Delta l}\frac{mg}{S}$$

Srednja vrednost Jungovog modula elastičnosti: $\overline{E}_y = 1.1208 \cdot 10^{11}$ N/m^2.

Standardno odstupanje indirektno merene fizičke veličine Jungovog modua elastičnosti dato je u obliku:

$$\sigma_{E_y} = \sqrt{\left(\frac{\partial E_y}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial S}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial \Delta l}\right)^2 \sigma_{\Delta l}^2}$$

Vrednosti parcijalnih izvoda iznose:

$$\frac{\partial E_y}{\partial m} = \frac{g\,l}{S\Delta l}; \quad \left(\frac{g\,l}{S\Delta l}\right)^2 = 6.015 \cdot 10^{16}; \qquad \frac{\partial E_y}{\partial l} = \frac{m\,g}{S\Delta l}; \quad \left(\frac{m\,g}{S\Delta l}\right)^2 = 3.14 \cdot 10^{21}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial S} = \frac{m\,g\,l}{\Delta l}\left(-\frac{1}{S^2}\right); \quad \left(-\frac{m\,g\,l}{S^2\Delta l}\right)^2 = 7.85 \cdot 10^{30};$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial \Delta l} = \frac{m\,g\,l}{S}\left(-\frac{1}{\Delta l^2}\right); \quad \left(-\frac{m\,g\,l}{S\Delta l^2}\right)^2 = 3.14 \cdot 10^{27}$$

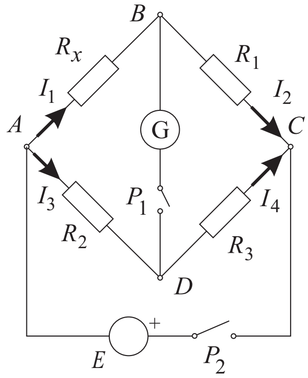
Tako se za standardnu devijaciju Jungovog Modua elastičnosti dobija: $\sigma_{E_y} = 4 \cdot 10^9$ N/m^2.

$p = 0.9$, $t_{9;0.475} = 2.262$ (vidi tabelu E na strani 188), $t_{9;0.475} \cdot \dfrac{\sigma_{E_y}}{\sqrt{10}} = 5.10995 \cdot 10^9$ N/m^2.

Jungov Moduo elastičnosti iznosi:

$E_y = (1.12 \pm 0.05) \cdot 10^{11}$ N/m^2, na nivou poverenja 95% iz 10 merenja.

$\boxed{\textbf{5.58}}$ Odrediti vrednost nepoznate otpornosti R_x korišćenjem Vinstonovog mosta. Vinstonov most se sastoji od poznatih otpornosti: R_1, R_2 i R_3. Vrednosti ovih otpornosti, dobijene iz šest merenja nekim etalonskim Ommetrom, iznose: $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 615\ \Omega$ i $R_3 = 100\ \Omega$, sa eksperimentalnom standarnom devijacijom: $\sigma_{R_1} = 5\ \Omega$, $\sigma_{R_2} = 6.15\ \Omega$ i $\sigma_{R_3} = 0.5\ \Omega$ i apsolutnom sistematskom greškom $\Delta R_1 = 1\ \Omega$, $\Delta R_2 = 2\ \Omega$ i $\Delta R_3 = 0.3\ \Omega$. Izačunati ukupnu grešku ovog merenja na nivou poverenja 68.27%.



Rešenje:

Otpornost otpornika R_x se može odrediti Vitstonovim mostom korišćenjem izraza:

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

Otpornost u ovom slučaju se piše u obliku: $R_x = \left(\overline{R}_x \pm \left\{t_{n-1;\,0.34135}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} + \Delta R_x\right\}\right)\ \Omega$

Na osnovu dobijenih merenja srednja vrednost nepoznate otpornosti je: $\overline{R}_x = \dfrac{\overline{R}_1 \cdot \overline{R}_2}{\overline{R}_3} = 3075\ \Omega$

Standardna devijacija nepoznate otpornosti je data u obliku:

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial R_1}\right)^2 \sigma_{R_1}^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2}\right)^2 \sigma_{R_2}^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_3}\right)^2 \sigma_{R_3}^2}$$

Odnosno:

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \sigma_{R_1}^2 + \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^2 \sigma_{R_2}^2 + \left(-\frac{R_1 R_2}{R_3^2}\right)^2 \sigma_{R_3}^2} = 46.12\ \Omega$$

Ukupno apsolutna sistematska greška je data u obliku:

$$\Delta R_x = \left|\frac{R_2}{R_3}\right| \Delta R_1 + \left|\frac{R_1}{R_3}\right| \Delta R_2 + \left|-\frac{R_1 R_2}{R_3^2}\right| \Delta R_3 = 25.375\ \Omega$$

Kako je $p = 0.6827 \quad \Rightarrow \quad t_{5;\,0.34135} = 1.111$ (vidi tabelu E na strani 188).

Slučajna geška tada iznosi: $t_{n-1;\,0.34135} \cdot \dfrac{\sigma_{R_x}}{\sqrt{n}} = 1.11 \cdot \dfrac{46.12}{\sqrt{6}} = 20.90\ \Omega.$

Ukupna greška, tj. zbir slučajne i apsolutne greške iznosi: $t_{n-1;\,0,3415} \cdot \dfrac{\sigma_{R_x}}{\sqrt{n}} + \Delta R_x = 46.275\ \Omega.$

Nepoznata otpornost iznosi: $R_x = (3075 \pm 46)\ \Omega$, na nivou poverenja 68.27% iz 6 merenja.

Zbog malog broja merenja greška se piše sa jednom sigurnom cifrom. Rezultat $\overline{R}_x$ ima poslednju značajnu cifru na mestu poslednje značajne cifre greške.

$\boxed{\textbf{5.59}}$ Izračunati ukupnu grešku merenja specifične otpornosti ρ nekog provodnika na nivou poverenja 95%, ukoliko je izvršeno 10 merenja i rezultati dati u obliku u kome figuriše standardna greška: otpornost provodnika $R = (90 \pm 1)\ \Omega$ na nivou poverenja 80% sa sistematskom greškom 0.1 Ω, a dužina provodnika $l = (1.00 \pm 0.01)$ km na nivou poverenja 90% sa sistematskom greškom 1 m i poprečni presek provodnika $S = (1.0 \pm 0.1)\ \text{mm}^2$ na nivou poverenja 99% sa sistemskom greškom 0.05 mm^2.

Rešenje:

Specifična otpornost provodnika je određena izrazom: $\rho = \dfrac{RS}{l}.$

Iz otpornosti provodnika $R = (90 \pm 1)\ \Omega$, na nivou poverenja 80% sa sistematskom greškom $\Delta R = 0.1\ \Omega$, dobija se:

$$t_{9;\,0.40} \cdot \frac{\sigma_R}{\sqrt{10}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1.383 \cdot \frac{\sigma_R}{\sqrt{10}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_R = \frac{\sqrt{10}}{1.383} = 2.292\,\Omega$$

Iz dužine provodnika $l = (1000 \pm 10)$ m na nivou poverenja 90% sa sistematskom grešom $\Delta l = 1$ m, dobija se:

$$t_{9;\,0.45} \cdot \frac{\sigma_l}{\sqrt{10}} = 10 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad 1.833 \cdot \frac{\sigma_l}{10\sqrt{10}} = 10 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \sigma_l = \frac{\sqrt{10}}{1.833} = 17.280 \text{ m}$$

Iz površine provodnika $S = (1.0 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$ m^2, na nivou poverenja 99% sa sistematskom greškom $\Delta S = 0.05 \cdot 10^{-6}$ m^2, dobija se:

$$t_{9;\,0.495} \cdot \frac{\sigma_S}{\sqrt{10}} = 0.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad \Rightarrow 3.250 \cdot \frac{\sigma_S}{\sqrt{10}} = 0.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_S = \frac{\sqrt{10} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}{3.250} = 9.7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$$

Koeficijenti $t_{9;\,0.40} = 1.383$, $t_{9;\,0.45} = 1.833$ i $t_{9;\,0.495} = 3.250$ se čitaju iz tabele E na strani 188.

Srednja vrednost specifične otpornosti jednaka je: $\quad \bar{\rho} = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{S}}{\bar{l}} = \dfrac{90 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1000} = 9 \cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot$m

Standardna devijacija specifične otpornosti iznosi: $\quad \sigma_\rho = \sqrt{\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial S}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2}$

Vrednosti parcijalnih izvoda iznose:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial R}\right)^2 = \left(\frac{S}{l}\right)^2 = 1 \cdot 10^{-18}; \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)^2 = \left(\frac{R}{l}\right)^2 = 81 \cdot 10^{-4}; \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)^2 = \left(-\frac{R \cdot S}{l^2}\right)^2 = 8,1 \cdot 10^{-21}$$

Tako da se za standardnu devijaciju specifične otpornosti dobija: $\sigma_\rho = 9.159 \cdot 10^{-9}\ \Omega\cdot$m.

Za $p = 0.95$ i $n = 9$, $\quad t_{9;\,0.475} = 2.262$ (vidi tabelu E na strani 188),

slučajna geška iznosi: $\quad t_{9;\,0.475} \cdot \dfrac{\sigma_\rho}{\sqrt{10}} = 6.546 \cdot 10^{-9}\ \Omega$m.

Ukupna apsolutna sistematske greška data je u obliku:

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial R}\right| \Delta R + \left|\frac{\partial\rho}{\partial S}\right| \Delta S + \left|\frac{\partial\rho}{\partial l}\right| \Delta l = 4.69 \cdot 10^{-9}\ \Omega\text{m}$$

Specifična električna otpornost u ovom slučaju se piše u obliku: $\quad \rho = \left(\bar{\rho} \pm \left\{\dfrac{t_{n-1;\,o,475} \cdot \sigma_\rho}{\sqrt{n}} + \Delta\rho\right\}\right)$

Tražena specifična otpornost iznosi:

$\rho_u = (9 \pm 1) \cdot 10^{-8}\ \Omega$m, sa ukupnom greškom iz 10 merenja na nivou poverenja 95%.

$\boxed{\textbf{5.60}}$ Neka su prilikom indirektnog merenja jačine struje I, merenjem pada napona U i otpornosti R, na osnovu većeg broja merenja ($n > 30$) dobijene sledeće vrednosti: $U = (1550 \pm 50)$ V sa instrumentom klase tačnosti 1.5 sa mernim opsegom 2000 V i $R = (250 \pm 30)\ \Omega$ instrumentom klase tačnosti 1.5 sa mernim opsegom 500 Ω. Izračunati ukupnu grešku merenja i prikazati rezultat merenja na nivou poverenja 95%.

Rešenje:

Jačina struje se prilikom indirektnog merenja može odrediti korišćenjem Omovog zakona: $\quad I = \dfrac{U}{R}$

Srednja vrednost jačine struje iznosi: $\overline{I} = \dfrac{\overline{U}}{\overline{R}} = 6.2$ A

Kako su za voltmetar klasa tačnosti $k_t = 1.5$ i maksimalna vrednost mernog opsega $U_{max} = 2000$ V, to je sistematska greška merenja napona jednaka:

$$k_t = \frac{\Delta U}{U_{max}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{k_t \cdot U_{max}}{100} = 30 \text{ V}$$

Klasa tačnosti k_t i maksimalni merni opeg R_{max} ommetra iznose: $k_t = 1.5$ i $R_{max} = 500\ \Omega$, sistematska greška merenja otpornosti iznosi:

$$k_t = \frac{\Delta R}{R_{max}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta R = \frac{k_t \cdot R_{max}}{100} = 7.5\ \Omega$$

Sistematska greška jačine struje pri indirektrnom merenju iznosi:

$$\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial U}\right| \Delta U + \left|\frac{\partial I}{\partial R}\right| \Delta R = \left|\frac{1}{R}\right| \Delta U + \left|-\frac{U}{R^2}\right| \Delta R = 0.306 \text{ A}$$

Nivo poverenja nije naglašen, pa se može uzeti $p = 68.27\%$, i kako je $n > 30$ sledi da je $z_{0.34135} = 1$ (vidi tabelu C na strani 184), za odgovarajuće greške pri merenju napona i otpornosti dobija se:

$$S(\overline{U}) = z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_U}{\sqrt{n}} = 50 \text{ V}, \qquad S(\overline{R}) = z_{p/2} \cdot \frac{\sigma_R}{\sqrt{n}} = 30\ \Omega$$

Standardna greška pri indirektnom merenju jačine struje iznosi:

$$\frac{\sigma_I}{\sqrt{n}} = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial U}\right)^2 \frac{\sigma_U^2}{n} + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \frac{\sigma_R^2}{n}} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \frac{\sigma_U^2}{n} + \left(-\frac{U}{R^2}\right)^2 \frac{\sigma_R^2}{n}} = 0.77 \text{ A}$$

Kako je traženi nivo poverenja 95%, $z_{p/2} = z_{0.475} = 1.96$ (vidi tabelu C na strani 184), pa slučajna greška $S(\overline{I})$ i ukupna greška $S(\overline{U}) + \Delta I$ merenja struje iznose:

$$S(\overline{I}) = z_{0.475} \cdot \frac{\sigma_I}{\sqrt{n}} = 1.5092 \text{ A} \qquad \text{i} \qquad S(\overline{I}) + \Delta I = z_{0.475} \cdot \frac{\sigma_I}{\sqrt{n}} + \Delta I = 1.8152 \text{ A}$$

Jačina struje iznosi:

$I = (6.2 \pm 1.8)$ A, na nivou poverenja 95% iz $n > 30$ merenja.

Glava 6

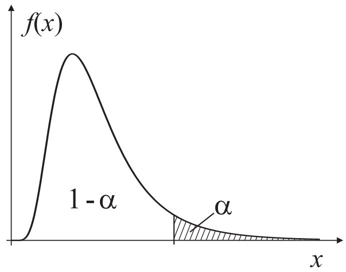
Primena statističkih testova u fizici

Statističke hipoteze predstavljaju vid statističkog zaključivanja koji se primenjuje u cilju potvrde različitih tvrđenja. Ova tvrđenja mogu biti različita, počev od utvrđivanja raspodele neke fizičke veličine, pa sve do utvrđivanja određenih veza među izučavanim pojavama.

6.1 Testiranje statističkih hipoteza

U cilju potvrde, ili pak odbacivanja nekih tvrđenja, najpre je potrebno uvesti pretpostavke, tj. hipoteze. Obično se uvode dve pretpostavke: H_0 **nulta hipoteza** i H_1 **alternativna hipoteza**, koja je suprotna od polazne hipoteze. Opšti princip za izbor nulte i alternativne hipoteze ne postoji. Prilikom testiranja hipoteza, korišćen je princip da je polazna hipoteza baš ono tvrđenje koje se želi pokazati, npr. slaganje neke raspodele sa eksperimentalno dobijenim raspodelama ili recimo slaganje standardnih devijacija dobijenih od uzoraka različite tačnosti (tj. iz različitog broja merenja)[1]. Proces verifikacije statističkih hipoteza naziva se **testiranje hipoteze**.

Pravilo za testiranje hipoteze H_0 je **statistički test**. Statistički test najčešće koristi neku statistiku (**test statistiku**) S, odnosno neku funkciju slučajnih promenjivih koja ne zavisi direktno od nepoznatih parametara raspodele. Hipoteza H_0 se odbacuje ukoliko statistika S ima vrednost koja pripada takozvanoj kritičnoj oblasti testa α, odnosno oblasti odbacivanja testa. Korišćena test statistika uvek ima neku raspodelu, zbog toga se testiranje najčešće svodi na ispitivanje da li test statistika pripada nekom intervalu verovatnoće α, kao što je prikazano na slici 6.1, slučajne promenjive x sa raspodelom koju ima test statistika.



Slika 6.1. Primer kritične oblasti testa, sa verovatnoćom α

Ovo testiranje se praktično svodi na ispitivanje da li test statistika pripada nekom intervalu verovatnoće (nivo valjanosti testa ili nivo poverenja) $p = 1 - \alpha$ (vidi sliku) slučajne promenjive x sa raspodelom koju ima test statistika. Ukoliko test statistika ima vrednost koja pripada pomenutom intervalu verovatnoće $p = 1 - \alpha$, statistika H_0 se prihvata. Međutim, prilikom biranja ovih verovatnoća treba biti obazriv, jer prilikom testiranja može doći do dve vrste grešaka.

Greška prve vrste, koja nastaje ako se hipoteza H_0 odbaci iako je tačna.

Greška druge vrste, koja nastaje ako se hipoteza H_0 prihvati iako je pogrešna.

S obzirom na to da uvek moramo doneti neki zaključak, postavlja se pitanje koju od navedene dve vrste grešaka je opasnije napraviti. S' obzirom na uvedene pretpostavke, opasnije je napraviti grešku druge vrste, odnosno ako prihvatimo neko tvrđenje kao tačno (u ovom slučaju hipotezu H_0) iako

[1] Nasuprot tome, u matematici se za nultu hipotezu najčešće uzima ona koju je lakše verifikovati, tj. za koju je lakše utvrditi verovatnoće izvođenja pogrešnog zaključka. To ustvari znači da se za nultu hipotezu uzima suprotno tvrđenje od onog koje hoćemo da pokazemo.

ona nije tačna[2]. Međutim, uvek treba voditi računa da prilikom donošenja bilo kakvog zaključka treba obe vrste grešaka svesti na najmanju moguću meru. U tom slučaju se postavlja pitanje, koju verovatnoću treba uzeti za kriterijum valjanosti (ili nivo poverenja) statističkog testa?

Ukoliko se nivo poverenja testa povećava, tj. smanjuje kritična oblast testa α, povećava se verovatnoća greške druge vrste, tj. da prihvatimo hipotezu H_0 iako nije tačna. Nasuprot tome, ako povećavamo kritičnu oblast testa, verovatnoća greške druge vrste se smanjuje, dok se povećava verovatnoća greške prve vrste. Zbog toga, se u cilju smanjenja obe greške, a vodeći računa o tome koju je grešku opasnije napraviti, biraju se nivoi valjanosti testa od 90%, 95% ili 99% (što odgovara kritičnim oblastima testa od 10%, 5% ili 1%). Neki uopšteni kriterijum za kritične vrednosti statističih testiranja ne postoje. Najčešće sami kriterijumi zavise od broja merenja. Naime što je broj merenja veći, kritična oblast testa se može smanjivati.

6.2 Ispitivanje konzistentnosti rezultata merenja

Za izračunavane grešaka merenja kako istih tako i različitih preciznosti, dobijenih različitim metodama ili različitim uređajima najpre je potrebno ispitati konzistentnost – slaganje dobijenih rezultata. Ispitivanje konzistentnosti je potrebno da bi se detektovale anomalije u eksperimentu, neuračunate sistematske greške, promene nekih uslova u eksperimentu i slično.

Pored toga, u praksi je često potrebno izvršiti veliki broj merenja neke fizičke veličine. Ovakva merenja veoma često traju više dana, ili više nedelja. Tada se postavlja pitanje konzistentnosti (slaganja) ovih merenja, odnosno da li su ova merenja iste tačnosti, da li postoji neki uticaj koji se javlja određenih dana? Ovo je potrebno ispitati pre bilo kog računanja srednje vrednosti ovih merenja ili izražavanje greške ovih merenja.

6.2.1 Greške ponovljenih merenja

Neka kao rezultat istraživanja postoji n grupa merenja, od kojih svaka sadrži različit broj izmerenih vrednosti. Slučaj većeg broja grupa merenja različitih obima, može se prikazati jednačinama na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{x_1}; \ \ \sigma_E(x_1); \ \ S(\overline{x_1}) = \frac{\sigma_E(x_1)}{\sqrt{N_1}} \\
&x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2N_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{x_2}; \ \ \sigma_E(x_2); \ \ S(\overline{x_2}) = \frac{\sigma_E(x_2)}{\sqrt{N_2}} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nN_n} \quad \Rightarrow \quad \overline{x_n}; \ \ \sigma_E(x_n); \ \ S(\overline{x_n}) = \frac{\sigma_E(x_n)}{\sqrt{N_n}}
\end{aligned}
$$

Neka je broj merenja u svakoj od ovih grupa dovoljno veliki, tako da se može reći da je raspodela ovih vrednosti Gausova.

Srednja vrednost ovakve grupe merenja najbolje može da se proceni preko srednje vrednosti srednjih vrednosti različitih grupa merenja. U tom slučaju srednja vrednost pojedinačnih srednjih vrednosti $\overline{X}$ se može dobiti sabiranjem svih vrednosti i deljenjem sa ukupnim brojem merenja, kao:

$$
\overline{X} = \overline{x}(\overline{x_j}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{N_2} x_{2i} + \ldots + \sum_{i=1}^{N_n} x_{ni}}{\sum_{j=1}^{n} N_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_j \overline{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} N_j}
$$

Kako iz $S(\overline{x_j}) = \sigma_E(x_j)/\sqrt{N_j} \Rightarrow$

$$N_j = \sigma_E(x_j)^2 / S(\overline{x_j})^2$$

[2] Nasuprot tome, ako se pretpostavi suprotno, da je za nultu hipotezu H_0 izabrano suprotno tvrđenje od onoga što želimo da pokažemo, a za alternativnu hipotezu H_1 željeno tvrđenje, opasnije je napraviti grešku prve vrste. Naime, u tom slučaju je opasnije odbaciti hipotezu H_0 iako je tačna, jer se u tom slučaju prihvata tvrđenje koje nije tačno.

za srednju vrednost se dobija:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_E(x_j)^2}{S(\overline{x_j})^2}\overline{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_E(x_j)^2}{S(\overline{x_j})^2}}$$

Kako sve grupe merenja predstavljaju rezultat merenja iste fizičke veličine, i kako se radi o dovoljno velikom broju merenja u svakoj od grupa, može se smatrati da su standardne devijacije $\sigma_E(x_j)$ svih grupa jednake, tj: $\sigma_E(x_1) = \sigma_E(x_2) = ... = \sigma_E(x_n)$. Uz ovu pretpostavku izraz za srednju vrednost pojedinačnih srednjih vrednosti se svodi na izraz:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S(\overline{x_j})^2}\overline{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S(\overline{x_j})^2}} = \sum_{j=1}^{n} w_j \overline{x_j}$$

$$w_j = \frac{\frac{1}{S(\overline{x_j})^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S(\overline{x_j})^2}} = \frac{N_j}{\sum_{j=1}^{n} N_j},$$

w_j se naziva **statistička težina**.

Srednja vrednost predstavljena ovim izrazom se naziva **otežana srednja vrednost**.

Za izražavanje rezultata merenja, pored srednje vrednosti potrebno je odrediti i **mernu nesigurnost**, tj. grešku ovako dobijenih merenja. Merna nesigurnost se često naziva i **interna greška** otežane srednje vrednosti S_{int}. Interna greška se može odrediti kao otežana srednja vrednost grešaka pojedinih grupa merenja, tj. kao:

$$S_{int}^2 = S(\overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j S(\overline{x_j})^2 \qquad \text{odakle se dobija:} \qquad S_{int} = S(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S(\overline{x_j})^2}}}$$

Slično internoj grešci, može se odrediti i **interna standardna devijacija** kao otežana srednja vrednost standardnih devijacija pojednih grupa merenja:

$$\sigma_{Eint}^2 = \overline{\sigma_E}^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma(x_j)^2.$$

Veza između interne greške i interne standardne devijacije je data izrazom:

$$S_{int}^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j S(\overline{x_j})^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\sigma_E(x_j)^2}{N_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_E(x_j)^2}{N} = \left(\sum_{j=1}^{n} N_j = N\right) = \frac{\sigma_{Eint}^2}{N}$$

Najvažnije osobine ovako dobijenih srednjih vrednosti pojedinačnih srednjih vrednosti $\overline{X}$, interne greške srednje vrednosti S_{int} i interne standardne devijacije σ_{Eint} za grupe merenja različitih obima, su:

1) Srednja vrednost je privučena rezultatu najveće težine, tj. najveći uticaj u određivanju srednje vrednosti ima najtačnije određena srednja vrednost

2) Interna greška srednje vrednosti je manja od najmanje pojedinačne greške, dok je interna standardna devijacija manja od najmanje pojedinačne standardne devijacije.

Interna greška opisuje odnos pojedinih vrednosti, tj. daje unapred interval unutar koga bi na nekom nivou poverenja trabalo da se nalaze pojedine srednje vrednosti, pa se zato ova greška zove i greška *a priori*. Rezultat ovakvih ponovljenih merenja se izražava u obliku $\overline{X} \pm kS_{int}$, gde k označava nivo poverenja.

U slučaju da su ponovljene grupe merenja istog obima, otežana vrednost se svodi na aritmetičku srednju vrednost a interna greška se svodi na računanje aritmetičke srednje vrednosti pojedinačnih grešaka merenja, što se ustvari svodi na računanje ukupnog odstupanja pojedinih srednjih vrednosti od ukupne srednje vrednosti svih merenja, kao što je i prikazano u odeljku 3.1.

Da bi se rezultat ovakvih ponovljenih merenja mogao izraziti u obliku $\overline{X} \pm S_{int}$ najpre je potrebno ispitati konzistentnost merenja.

6.2.2 Konzistencija dve grupe merenja

Da bi se za dve grupe merenja različitih obima, koje podležu Gausovoj raspodeli:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \Rightarrow \quad \bar{x}; \;\; \sigma_{Ex}; \;\; S(\overline{x}) = \frac{\sigma_{Ex}}{\sqrt{n}}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \quad \Rightarrow \quad \bar{y}; \;\; \sigma_{Ey}; \;\; S(\overline{y}) = \frac{\sigma_{Ey}}{\sqrt{m}}$$

moglo reći da su konzistentna (saglasna, tj. da se mogu upoređivati), potrebno je ispitati konzistenciju standardnih devijacija i srednjih vrednosti.

Konzistencija standardnih devijacija dve grupe merenja

Za ispitivanje konzistencije standardnih devijacija dve grupe merenja različitih obima koje podležu Gausovoj raspodeli može se koristiti F – test. Ovim testom se vrši ispitivanje jednakosti standardnih devijacija σ_x i σ_y. Ovaj test zasniva se na sledećem:

$$\sigma_{Ex}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Ex}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} = \frac{\sigma_{Ex}^2}{\sigma_x^2}$$

Kako važi: $$\frac{\dfrac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}{\dfrac{\chi_{m-1}^2}{m-1}} = F_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{\sigma_{Ex}^2}{\sigma_x^2}}{\dfrac{\sigma_{Ey}^2}{\sigma_y^2}} = F_0;$$ tada statistika F_0 ima Fišerovu raspodelu sa $n-1$ i $m-1$ stepeni slobode.

Neka je polazna hipoteza $\sigma_x = \sigma_y$, odnosno $\sigma_x/\sigma_y = 1$. Pri računanju se uvek uzima takav odnos, da je eksperimentalna standardna devijacija uzorka većeg obima uvek u brojiocu statistike F_0.

Tada dvostruki interval poverenja za f_0, realizovanu vrednost statistike F_0, iznosi:

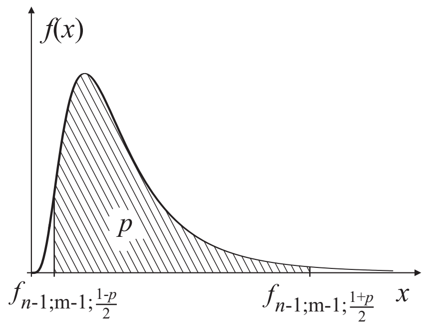
$$P\left(f_{n-1,m-1;\frac{1-p}{2}} \leq f_0 \leq f_{n-1,m-1;\frac{1+p}{2}}\right) = P\left(f_{n-1,m-1;\frac{1-p}{2}} \leq \frac{\sigma_{Ex}^2/\sigma_x^2}{\sigma_{Ey}^2/\sigma_y^2} \leq f_{n-1,m-1;\frac{1+p}{2}}\right) = p,$$

odakle iz $\dfrac{\sigma_{Ex}^2/\sigma_x^2}{\sigma_{Ey}^2/\sigma_y^2} = \dfrac{\sigma_{Ex}^2/\sigma_{Ey}^2}{\sigma_x^2/\sigma_y^2}$, iznosi:

$$P\left(f_{n-1,m-1;\frac{1-p}{2}} \leq \frac{\sigma_{Ex}^2/\sigma_{Ey}^2}{\sigma_x^2/\sigma_y^2} \leq f_{n-1,m-1;\frac{1+p}{2}}\right) = p.$$

Kako važi: $$f_{n-1,m-1;\frac{1-p}{2}} = \frac{1}{f_{m-1,n-1;\frac{1+p}{2}}},$$

to je interval poverenja za konzistenciju standardnih devijacija σ_x i σ_y, tj. za odnos σ_x/σ_y na nivou poverenja p%:



Slika 6.2. Dvostruki interval poverenja za ispitivanje konzistencije standardnih devijacija dve grupe merenja.

$$\left(\frac{\sigma_{Ex}^2}{\sigma_{Ey}^2} \cdot \frac{1}{f_{m-1,n-1;\frac{1+p}{2}}} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{\sigma_{Ex}^2}{\sigma_{Ey}^2} \cdot \frac{1}{f_{n-1,m-1;\frac{1-p}{2}}} = \frac{\sigma_{Ex}^2}{\sigma_{Ey}^2} \cdot f_{m-1,n-1;\frac{1+p}{2}}\right)$$

Pošto je polazna hipoteza $\sigma_x/\sigma_y = 1$, i ako je jedinica unutar ovog intervala (šrafirana oblast na slici 6.2), polazna hipoteza o jednakosti standardnih devijacija se prihvata.

Koeficijenti $f_{n-1,m-1;\frac{1+p}{2}}$ i $f_{m-1,n-1;\frac{1+p}{2}}$ se čitaju iz tabela za Fišerovu raspodelu (vidi tabelu F na strani 189).

Konzistencija srednjih vrednosti dve grupe merenja

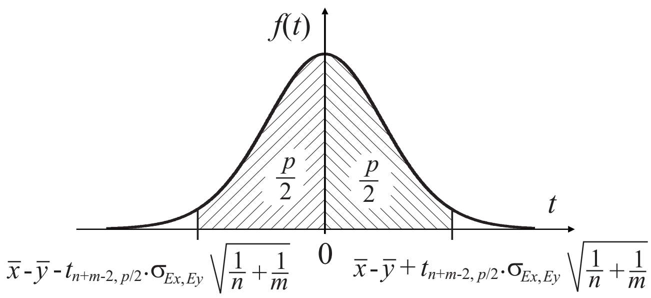
Za ispitivanje konzistencije (slaganja) matematičkih očekivanja μ_x i μ_y dve grupe merenja različitih obima m i n koje podležu normalnoj raspodeli: $\bar{x}$; σ_{Ex}; $S(\overline{x}) = \sigma_{Ex}/\sqrt{n}$ i $\bar{y}$; σ_{Ey}; $S(\overline{y}) = \sigma_{Ey}/\sqrt{m}$, ako su matematička očekivanja uzorka μ_x i μ_y nepoznate, a standardne devijacije jednake i nepoznate koristi se statistika:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma^2_{Ex,\,Ey}\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} \qquad \text{koja ima studentovu raspodelu } t_{n+m-2},$$

pri čemu je standardna devijacija $\sigma_{Ex,\,Ey}$ oblika:

$$\sigma^2_{Ex,\,Ey} = \frac{(n-1)\sigma^2_{Ex} + (m-1)\sigma^2_{Ey}}{n+m-2}$$

Neka je nulta hipoteza H_0 jednakost matematičkih očekivanja uzoraka, $\mu_x = \mu_y$. Nulta hipoteza H_0 se prihvata na nivou poverenja $p\%$, ako se nula nalazi unutar dvostrukog intervala poverenja (unutar šrafirane oblasti na slici 6.3.), koji je definisan izrazom:



Slika 6.3. Dvostruki interval poverenja za ispitivanje konzistencije srednjih vrednosti dve grupe merenja, za slučaj malog obima uzorka.

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{n+m-2;\,p/2} \cdot \sigma^2_{Ex,\,Ey}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} < \mu_x - \mu_y = 0 < \bar{x} - \bar{y} + t_{n+m-2;\,p/2} \cdot \sigma^2_{Ex,\,Ey}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

Koeficijenat $t_{n+m-2;\,p/2}$ se čita iz tabela za Studentovu raspodelu (vidi tabelu E na stranu 188).

Aproksimativni oblik za veliki obim uzorka

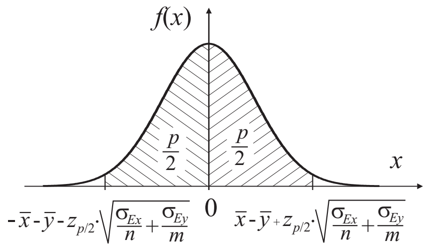
U slučaju velikog broja merenja za ispitivanje slaganja srednjih vrednosti koristi se sledeća aproksimacija. Pretpostavlja se da razlika matematičkih očekivanja ove dve grupe merenja ima normalnu raspodelu oblika: $\mathcal{N}\left(\mu_x - \mu_y;\ \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} + \dfrac{\sigma_y}{\sqrt{m}}\right)$.

Tada slučajna promenljiva:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2_{Ex}}{n} + \dfrac{\sigma^2_{Ey}}{m}}},$$

ima približno normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$

Neka je sada nulta hipoteza H_0 jednakost matematičkih očekivanja uzoraka, $\mu_x = \mu_y$. Nulta hipoteza se prihvata na nivou poverenja $p\%$, ako se nula nalazi unutar dvostrukog intervala poverenja, prikazanog na slici 6.4 šrafiranom oblašću ispod Gausove krive. Granice ove šrafirane oblasti, odnosno dvostrukog intervala poverenja su definisane izrazom:



Slika 6.4. Dvostruki interval poverenja za ispitivanje konzistencije srednjih vrednosti dve grupe merenja, u slučaju velikog obima uzorka.

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - z_{p/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2_{Ex}}{n} + \frac{\sigma^2_{Ey}}{m}} < \mu_x - \mu_y = 0 < \bar{x} - \bar{y} + z_{p/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2_{Ex}}{n} + \frac{\sigma^2_{Ey}}{m}}\right)$$

Jednostrani intervali poverenja se retko koriste, naprimer za ispitivanje $\sigma_A > \sigma_B$ ili $E(x) > E(y)$.

Koeficijenat $z_{p/2}$ se čita iz tabela za Gausovu raspodelu (vidi tabelu C na strani 184).

6.2.3 Konzistencija više grupa merenja

Prilikom ispitivanja konzistencije n grupa merenja:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{x_1};\ \sigma_E(x_1);\ S(\overline{x_1}) = \frac{\sigma_E(x_1)}{\sqrt{N_1}}$$

$$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2N_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{x_2};\ \sigma_E(x_2);\ S(\overline{x_2}) = \frac{\sigma_E(x_2)}{\sqrt{N_2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nN_n} \quad \Rightarrow \quad \overline{x_n};\ \sigma_E(x_n);\ S(\overline{x_n}) = \frac{\sigma_E(x_n)}{\sqrt{N_n}}$$

koje podležu Gausovoj raspodeli, kao nulta hipoteza H_0 uzima se tvrđenje da su matematička očekivanja n grupa merenja jednaka, odnosno:

$$H_0: \quad \overline{\mu_1} = \overline{\mu_2} = \ldots = \overline{\mu_n}$$

Kako se matematičko čekivanje ocenjuje srednjom vrednošću, u cilju ispitivanja ispravnosti polazne hipoteze H_0 potrebno je formirati statistiku od interne standardne devijacije σ_{Eint} (standardnih devijacija za svaku pojedinačnu grupu merenja), kao i standardne devijacije između različitih grupa merenja, tj. od odstupanja srednjih vrednosti $\overline{x_j}$ od ukupne srednje vrednosti $\overline{X}$).

Standardna devijacija izmađu različitih grupa merenja se naziva **eksterna standardna devijacija** σ_{Eext}:

$$\sigma_{Eext} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j(\overline{x_j} - \overline{X})^2}.$$

Koristeći eksternu standardnu devijaciju može se definisati i **eksterna greška** S_{ext}, kao:

$$S_{ext} = \frac{\sigma_{Eext}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} w_j(\overline{x_j} - \overline{X})^2}{n}}$$

Eksterna greška uzima u obzir i međusobni odnos pojedinih srednjih vrednosti, tj. rasturanje oko otežane srednje vrednosti, koja nastaje usled različitih uticaja pri ponavljanju merenja, pa se zato zove još i greška *a posteriori*.

Koristeći internu standardnu devijaciju σ_{Eint} i eksternu standardnu devijaciju σ_{Eext}, može se formirati statistika:

$$F_0 = \frac{\frac{\sigma^2_{Eext}}{\sigma^2}}{\frac{\sigma^2_{Eint}}{\sigma^2}} = \frac{\frac{\chi^2_{ext}}{n-1}}{\frac{\chi^2_{int}}{N-n}}.$$

Pošto sve izmerene vrednosti predstavljaju rezultat merenja iste fizičke veličine, standardne devijacije mogu da se skrate, tako da se dobija:

$$F_0 = \frac{\sigma^2_{Eext}}{\sigma^2_{Eint}} = \frac{nS^2_{ext}}{\sigma^2_{Eint}} = \frac{nS^2_{ext}}{NS^2_{int}}$$

koja ima Fišerovu raspodelu sa $n-1$ i $N-n$ stepeni slobode (N ukupni broj merenja; n broj grupa merenja).

Statistika F_0 predstavlja količnik dve statistike: statistike $\chi^2_{ext}/(n-1)$ sa $n-1$ stepeni sloboda i $\chi^2_{int}/(N-n)$ sa $N-n$ stepeni slobode. Brojevi stepeni slobode za ove dve statistike se određuju tako što se broj merenja smanjuje za broj nepoznatih parametara koje je potrebno odrediti da bi se odredila statistika.

- Za određivanje statistike $\sigma_{Eint}/\sigma_{int}$, potrebno je najpre odrediti N_j srednjih vrednosti $\overline{x_j}$. Tako da je broj stepeni slobode u tom slučaju $\sum_{j=1}^{n}(N_j - 1) = \sum_{j=1}^{n} N_j - n = N - n$.

- Za određivanje statistike $\sigma_{Eext}/\sigma_{ext}$, potrebno je odrediti ukupnu srednju vrednost $\overline{X}$ iz n pojedinačnih srednjih vrednosti $\overline{x_j}$, pa je za ovu statistiku broj stepeni slobode $n-1$

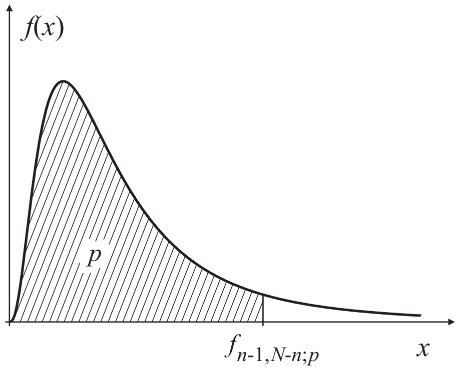
Nulta hipoteza H_0 o jednakosti matematičkih očekivanja pojedinih grupa merenja se prihvata na nivou poverenja p ako je za f_0, tj. realizovanu vrednost statistike F_0, ispunjen uslov:

$$f_0 \leq f_{n-1,N-n;p},$$

pri čemu se vrednosti $f_{n-1,N-n;p}$ čitaju iz tabele za Fišerovu raspodelu (vidi tabelu F na strani 189).

Ovo ustvari znači da je hipoteza H_0 ispunjena ako f_0, koja ima Fišerovu raspodelu, upada u šrafiranu oblast na slici 6.5, koja je ograničena vrednošću $f_{n-1,N-n;p}$. Ovaj test se u matematičkoj statistici naziva *analiza disperzija.*

U slučaju prihvatanja polazne hipoteze, tj. zaključka da su merenja u različitim laboratorijama konzistentna, ili da tokom više dana merenja u jednoj laboratoriji ne postoji neki sistematski faktor, može se izraziti ukupni rezultat merenja u obliku $x = \overline{X} \pm S_{int}$. U suprotnom, treba izvršiti testiranje svih merenja pojedinačno, tj. po dve grupe merenja. Pa tek na osnovu toga se može zaključiti tokom koje od ovih grupa merenja deluje neki sistematski faktor. Naravno, može se zaključiti da sistematski faktor deluje neprestano. Tada treba ispitati koji je to faktor koji utiče na merenja, pa ga pre narednih merenja treba ukloniti.



Slika 6.5. Interval poverenja za ispitivanje konzistencije više grupa merenja.

6.2.4 Aproksimativni način ispitivanja konzistencije

Ovaj način ispitivanja konzistencije se upotrebljava u slučaju kada se grupe od po N_i merenja ne ponavljaju, već se raspolaže samo sa n merenja x_j, sa greškama merenja Δx_j, koje su najčešće sistematske greške mernih uređaja. Ovo se često događa u praksi, recimo kada se žele uporediti rezultati svog istraživanja sa rezultatima drugih istraživača, iz pojedinih naučnih saopštenja. U najvećem broju naučnih saopštenja se rezultati pišu u obliku $\overline{x} \pm S(\overline{x})$, kaže se na kom nivou poverenja je citirana greška i iz koliko merenja. Međutim, u velikom broju slučajeva ne može se izvršiti ponovljeno merenje, pa se raspolaže samo sa jednim merenjem (ne može se izazvati veštački erupcija na Suncu, prolazak neke komete pored Zemlje i slično). U tom slučaju se ne može koristiti pomenuti F test. Naime, slučajna promenjiva F_0 predstavlja odnos $\chi^2_{ext}/(n-1)$ sa $\chi^2_{int}/(N-n)$. Tada je ukupan broj merenja jednak broju grupa merenja $N = n$, a deljenje nulom nije definisano. Međutim, za ovo ispitivanje se može iskoristiti statistika:

$$\chi_0^2 = (n-1)\frac{\sigma^2_{Eext}}{\sigma^2}. \qquad \text{koja ima } \chi^2 \text{ raspodelu sa } n-1 \text{ stepenom slobode}^3.$$

Da bi se ova statistika mogla primeniti, potrebno je uvesti aprksimaciju da je $S^2_{int} = S^2$, odnosno da je interna standardna devijacija $\sigma_{Eint} = \sigma^2$ jednaka standardnoj devijaciji merene fizičke veličine σ^2. Kao što je ranije rečeno, ova greška je manja od svih pojedinih grešaka merenja, i odeđuje interval u kome treba da se nalaze pojedine srednje vrednosti, a interna standardna devijacija predstavlja najbolju ocenu nepoznate standardne devijacije merene fizičke veličine. Najčešće je ova aproksimacija opravdana. Na taj način se dobija statistika:

$$\chi_0^2 = (n-1)\frac{\sigma^2_{Eext}}{\sigma^2} \simeq (n-1)\frac{\sigma^2_{Eext}}{\sigma^2_{Eint}} = (n-1)\frac{S^2_{Eext}}{S^2_{Eint}} = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\overline{x_j}-\overline{X})^2}{S(\overline{x_j})^2},$$

koja ima χ^2 raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode.

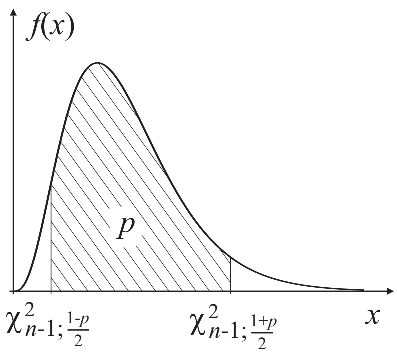
Iz izraza za eksternu i internu grešku je logično očekivati da je $(\overline{x_j} - \overline{X})^2 \simeq S(\overline{x_j})^2$, odnosno da je $S^2_{ext}/S^2_{int} \simeq 1$ jednak jedinici. Ukoliko ovaj odnos nije jednak, ili približan jedinici, to ukazuje da na rastur pojedinačnih rezultata utiču neki dodatni prarametri, tj. može se zaključiti da rezultati nisu konzistentni.

[3] Broj stepeni slobode je broj grupa merenja, tj. u ovom slučaju ukupan broj merenja, umanjen za broj nepoznatih parametara raspodele koje je potrebno odrediti da bi se formirala željena statistika, a to je u ovom slučaju $n-1$ stepeni slobode.

Zato se kao polazna hipoteza prilikom ispitivanja konzistentnosti više merenja različitih preciznosti, kao nulta hipoteza H_0 usvaja da je $S^2_{ext} = S^2_{int}$. Kako do odstupanja od jedinice može doći i ako je veća eksterna greška (dobija se $S^2_{ext}/S^2_{int} > 1$) i ako je interna greška veća (dobija se $S^2_{ext}/S^2_{int} < 1$), to je za testiranje ove hipoteze najbolje koristiti dvostrani interval poverenja. Tada se polazna hipoteza o jednakosti interne i eksterne greške prihvata ($S^2_{ext} = S^2_{int}$) na nivou poverenja p, ako je ispunjeno:

$$\chi^2_{n-1;\frac{1-p}{2}} \le \chi^2_0 \le \chi^2_{n-1;\frac{1+p}{2}}.$$

Grafički predstavljeno, ovo odgovara situaciji kada realizovana vrednost statistike χ^2_0 pripada šrafiranoj oblasti na slici 6.6.



Slika 6.6. Dvostruki interval poverenja za aproksimativno ispitivanje konzistencije više grupa merenja.

Načešće se dobija da je eksterna greška veća od interne greške, pa se tada koristi jednostrani interval poverenja. U tom slučaju se polazna hipoteza prihvata na nivou poverenja p ako je ispunjeno:

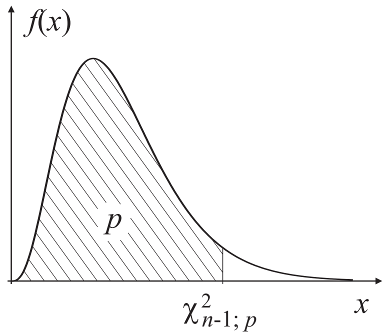
$$\chi^2_0 \le \chi^2_{n-1;p},$$

što ustvari znači da realizovana vrednost statistike χ^2_0 pripada šrafiranoj oblasti na slici 6.7.

Koeficijenti $\chi^2_{n-1;\frac{1-p}{2}}$, $\chi^2_{n-1;\frac{1+p}{2}}$ i $\chi^2_{n-1;p}$ se čitaju iz tabele za χ^2 raspodelu koja je data na strani 186.

Napomena:

Kao što je već ranije rečeno, grupe merenja od po N_i merenja se najčešće ne ponavljaju, već raspolažemo sa n merenja x_j, sa greškama merenja Δx_j, koje su najčešće sistematske greške mernih uređaja. U tom slučaju se u gornjem χ^2 testu umesto standardnih grešaka merenja uzimaju pojedinačne greške merenja Δx_j. Tada se statističke težine w_j mogu shvatiti kao recipročne vrednosti kvadrata grešaka pojedinih merenja $w_j = (1/\Delta x_j)/(\sum_{j=1}^{n} 1/\Delta x_j)$.



Slika 6.7. Jednostruki interval poverenja za aproksimativno ispitivanje konzistencije više grupa merenja.

U tom slučaju, otežana srednja vrednost $\overline{X}$, interna S^2_{int} i eksterna greška S^2_{ext} se mogu prikazati u obliku:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Delta^2 x_j} x_j}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Delta^2 x_j}}, \qquad S^2_{int} = \sum_{j=1}^{n} w_j \Delta^2 x_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Delta^2 x_j}}$$

$$S^2_{ext} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j (x_j - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j \Delta_j^2}{n}, \qquad \text{gde je:} \qquad \Delta_j^2 = x_j - \overline{x}.$$

Tada se za odnos eksterne i interne greške, tj. statistiku χ^2_{n-1}, dobija:

$$\chi^2_{n-1} = (n-1)\frac{S^2_{ext}}{S^2_{int}} = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j - \overline{x})^2}{\Delta x_j^2} = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_j^2}{\Delta x_j^2},$$

odnosno da je jednaka sumi količnika iz kvadrata odstupanja pojedinih vrednosti od srednje vrednosti $\Delta_j^2 = x_j - \overline{x}$ i kvadrata grešaka pojedinačnih merenja Δx_j^2.

Zadaci

$\boxed{\mathbf{6.1}}$ Neka je pomoću dva različita instrumenta A i B merena neka fizička veličina, pri čemu su standardne devijacije σ_A^2 i σ_B^2 nepoznate. Iz 10 merenja instrumentom A dobijena je vrednost za eksperimentalnu standardnu devijaciju $\sigma_{EA}^2 = 5.29$ i iz 8 merenja instrumentom B vrednost $\sigma_{EB}^2 = 2.25$. Proveriti da li su standardne devijacije oba merenja iste i odrediti interval u kome se nalazi σ_A/σ_B na nivou poverenja od 95%.

Rešenje:

Rezultati merenja instrumentom A su: $\sigma_{EA}^2 = 5.29$, broj stepeni slobode $n_s = n - 1 = 9$,

Rezultati merenja instrumentom B su: $\sigma_{EB}^2 = 2.25$ i broj stepeni slobode $m_s = m - 1 = 7$,

Odnos eksperimentalnih standardnih devijacija instrumenata A i B iznosi: $\sigma_{EA}^2/\sigma_{EB}^2 = 2.35$

Pošto je nivo poverenja $p = 0.95$ to je: $(1-p)/2 = 0.025$ i $(1+p)/2 = 0.975$, a slučajna veličina $f_{9;7;0.975} = 4.823$ je određena iz tabele za Fišerovu raspodelu (Tabela F, strana 191). Kako važi uslov $f_{9;7;0.975} = f_{7;9;0.025}^{-1}$ to je $f_{7;9;0.975} = 4.197$. Prema definiciji dvostruki interval poverenja je:

$$\left(\frac{\sigma_{EA}^2}{\sigma_{EB}^2} \cdot \frac{1}{f_{9;\ 7;\ 0.975}} \le \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \le \frac{\sigma_{EA}^2}{\sigma_{EB}^2} \cdot \frac{1}{f_{9;\ 7;\ 0.025}} = \frac{\sigma_{EA}^2}{\sigma_{EB}^2} \cdot f_{7;\ 9;\ 0.975}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(0.487 \le \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \le 9.863\right)$$

Na taj način se dobija traženi interval poverenja odnosa standardnih devijacija:

$$\left(0.5 \le \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \le 9.9\right) \qquad \text{na nivou poverenja od 95\,\% sa } \sigma_A \text{ iz 10 merenja i } \sigma_B \text{ iz 8 merenja.}$$

Odavde sledi da je $\sigma_A = \sigma_B$, jer je interval širok zbog malog broja merenja. Na osnovu ovog može se zaključiti, da su rezultati konzistentni, uređaji su iste ili približno iste tačnosti, nisu prisutne sistematske greške, ili su prisutne u oba slučaja. Zato je potrebno znati klase tačnosti oba instrumenata da bi mogao da se izvede određeniji zaključak.

$\boxed{\mathbf{6.2}}$ Pri merenju elektromotorne sile galvanskog spoja Cu – Zn u dve serije merenja dobijene su sledeće eksperimentalne standardne devijacije: $\sigma_{E1}^2 = 10.20$ iz 11 merenja i $\sigma_{E2}^2 = 2.05$ iz 6 merenja. Proveriti da li su standardne devijacije u oba merenja iste $\sigma_1 = \sigma_2$ i odrediti interval u kome se nalazi σ_1/σ_2 na nivou poverenja od 90%.

Rešenje:

Odnos standardnih devijacija prve i druge serije merenja iznosi: $\sigma_{E1}^2/\sigma_{E2}^2 = 4.976$.

Broj stepeni slobode prve serije iznosi: $n_s = n - 1 = 10$, a broj stepeni slobode druge serije merenja je: $m_s = m - 1 = 5$. Kako je nivo poverenja 90% to je $(1-p)/2 = 0.05$ i $(1+p)/2 = 0.95$, a slučajna veličina $f_{10;5;0.95} = 4.74$ je određena iz tabele za Fišerovu raspodelu (Tabela F, strana 192), dok je $f_{5;10;0.95} = 3.33$. Sada je prema definiciji dvostruki interval poverenja jednak:

$$\left(\frac{\sigma_{E1}^2}{\sigma_{E2}^2} \cdot \frac{1}{f_{10;\ 5;\ 0.95}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\sigma_{E1}^2}{\sigma_{E2}^2} \cdot \frac{1}{f_{10;\ 5;\ 0.05}} = \frac{\sigma_{E1}^2}{\sigma_{E2}^2} \cdot f_{5;\ 10;\ 0.95}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(1.05 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 16.57\right)$$

pa traženi interval poverenja iznosi:

$$\left(1 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 17\right), \text{ na nivou poverenja 90\% za } \sigma_1 \text{ iz 11 merenja i } \sigma_2 \text{ iz 6 merenja.}$$

Na osnovu dobijenog rezultata sledi da je $\sigma_1 \neq \sigma_2$ jer se jedan ne nalazi unutar intervala. Zatim sledi i zaključak da postoji neka sistematska greška, naprimer zbog promenljivih uslova merenja za obe serije merenja.

$\boxed{\mathbf{6.3}}$ Postoje dve kutije sa otpornicima od različitih proizvođača koje imaju obeleženu istu vrednost. Iz prve kutije uzmu se 8, a iz druge 5 opornika i izmere njihove vrednosti. Dobijene vrednosi su date u sledećoj tabeli:

Broj otpornika	1	2	3	4	5	6	7	8
$R_A\,(k\Omega)$	8.6	8.0	7.4	6.8	8.2	5.6	7.4	9.2
$R_B\,(k\Omega)$	7.2	8.0	5.8	6.2	8.2	-	-	-

Proveriti da li ovi otporonci imaju iste standardne devijacije na nivou poverenja od 99% i odrediti interval u kome se nalazi σ_A/σ_B na istom nivou poverenja.

Rešenje:

Za otpornike iz grupe A se dobija: $\overline{R_A} = 7.65$ kΩ i $\sigma^2_{EA} = 1.25$ kΩ, dok se za otpornike iz grupe B dobija: $\overline{R_B} = 7.08$ kΩ i $\sigma^2_{EB} = 2.03$ kΩ. Odnos eksperimentalnih standardnih devijacija iznosi $\sigma^2_{EA}/\sigma^2_{EB} = 0.62$. Stepen slobode prve grupe otpornika $n_s = n - 1 = 7$, a stepen slobode druge grupe otpornika je $m_s = m - 1 = 4$. Kako je nivo poverenja 99%, to je $(1 - p)/2 = 0.005$, a $(1 + p)/2 = 0.995$, pa je slučajna veličina $f_{7;\,4;\,0.005} = 21.622$ (vidi Tabelu F na strani 189), pa je $f_{4;\,7;\,0.995} = 10.05$. Traženi interval poverenja tada iznosi:

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma^2_{EA}}{\sigma^2_{EB}}\cdot\frac{1}{f_{7;\ 4;\ 0.995}}} \le \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \le \sqrt{\frac{\sigma^2_{EA}}{\sigma^2_{EB}}\cdot f_{4;\ 7;\ 0.995}}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(0.170 \le \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \le 2.496\right)$$

odnosno:

$$\left(0.2 \le \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \le 2.5\right)\ \text{k}\Omega \qquad \text{na nivou poverenja 99\% za } \sigma_A \text{ iz 8 merenja i } \sigma_B \text{ iz 5 merenja.}$$

Pošto se jednica nalazi unutar intervala, može se zaključiti da je $\sigma_A = \sigma_B$, na nivou poverenja 99%.

6.4 Dati su uzorci:

Uzorak x	44	44	56	46	47	38	58	53	49	35	46	30	41
Uzorak y	35	47	55	29	40	39	32	41	42	57	51	39	-

Naći dvostruki interval poverenja za razliku $\mu_x - \mu_y$ i proveriti jednakost $\mu_x = \mu_y$ na nivou poverenja 95%.

Rešenje:

Za uzorak x se dobija: $\overline{x} = 45.15$ i $\sigma^2_{Ex} = 63.97$, a za uzorak y: $\overline{y} = 42.25$ i $\sigma^2_{Ey} = 76.38$.

Za ispitivanje konzistentnosti matamatičkih očekivanja uzoraka koristi se statistika:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma^2_{x,\,y}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \qquad \text{koja ima Studentovu raspodelu sa } n + m - 2 \text{ stepena slobode}$$

u kojoj standardna devijacija $\sigma^2_{x,\,y}$ iznosi: $\sigma^2_{x,\,y} = \dfrac{(n-1)\sigma^2_x + (m-1)\sigma^2_y}{n+m-2} = 69.91$

Vrednost $t_{23;\,0,475} = 2.07$ se čita iz tablica za Studentovu raspodelu (Tabela D, strana 186). Razlika matematičkih očekivanja uzoraka iznosi:

$$\mu_x - \mu_y = \overline{x} - \overline{y} \pm t_{n+m-2}\cdot\sigma^2_{x,\,y}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = \overline{x} - \overline{y} \pm t_{23;\,0,475}\cdot\sigma^2_{x,\,y}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$$

Odavde sledi da je interval poverenja

$$\left(\overline{x} - \overline{y} - t_{23;\,0.475}\cdot\sigma^2_{x,\,y}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \le \mu_x - \mu_y \le \overline{x} - \overline{y} + t_{23;\,0.475}\cdot\sigma^2_{x,\,y}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$$

odnosno:

$$(-4.02 \le \mu_x - \mu_y \le 9.83) \qquad \text{na nivou poverenja 95\% za } \mu_x \text{ iz 13 merenja i } \mu_y \text{ iz 12 merenja.}$$

Poređenjenem razlike srednjih vrednosti prve i druge grupe uzoraka $\overline{x} - \overline{y} = 2.9$ sa dobijenim intervalom, vidi se da se ova vrednost nalazi unutar intervala $(-4.02 \leq \mu_x - \mu_y \leq 9.83)$, pa je $\mu_x \simeq \mu_y$ na nivou poverenja 95%.

$\boxed{\textbf{6.5}}$ Prilikom ispitivanja dva signala, iz dva različita uređaja izvršeno je po $n = m = 10000$ merenja, pri čemu je dobijeno: $\bar{x} = 2.11$; $\sigma_{Ex}^2 = 0.31$ i $\bar{y} = 1.13$; $\sigma_{Ey}^2 = 0.29$. Ispitati konzistentnost merenja i odrediti interval poverenja za matematička očekivanja μ_x i μ_y na nivou poverenja od 95%.

Rešenje:

Za prvu grupu merenja signala srednja vrednost je $\bar{x} = 2.11$ a standardno odstupanje je $\sigma_{Ex}^2 = 0.31$, dok je za drugu grupu srednja vrednost $\bar{y} = 1.13$ i standardno odstupanje je $\sigma_{Ey}^2 = 0.29$ iz $n = m = 10000$ merenja. Broj stepeni slobode je $n_s = n - 1 = m_s = m - 1 \simeq 10000$ tako da je $n_s = m_s \to \infty$. Odnos standardnih odstupanja iznosi:

$$\sigma_{Ex}^2/\sigma_{Ey}^2 = 0.31/0.29 = 1.068.$$

Kako je nivo poverenja 95%, to je $(1 - p)/2 = 0.025$ i $(1 + p)/2 = 0.975$, pa su slučajne veličine $f_{\infty;\,\infty;\,0.975} = 1.0$ i $f_{\infty;\,\infty;\,0.025} = f_{\infty;\,\infty;\,0.975}^{-1} = 1.0$ (tabela F na strani 191). Kada je broj stepeni slobode $n_s = m_s \to \infty$ tada slučajna veličina ima vrednost 1.0 za svaku vrednost verovatnoće p.

Zbog toga se u ovom slučaju za ispitivanje slaganja ove dve grupe merenja koristi aproksimativni test $\mu_x = \mu_y$ za veliki obim uzorka.

Razlika srednjih vrednosti iznosi: $$\mu_x - \mu_y = \bar{x} - \bar{y} \pm z_{p/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{Ex}^2}{n} + \frac{\sigma_{Ey}^2}{m}}$$

a granice intervala poverenja su: $$\left(\bar{x} - \bar{y} - z_{0.475} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{Ex}^2}{n} + \frac{\sigma_{Ey}^2}{m}}\,;\, \bar{x} - \bar{y} + z_{0.475} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{Ex}^2}{n} + \frac{\sigma_{Ey}^2}{m}} \right)$$

Kako je $\sigma_{Ex}^2/n = 3.1 \cdot 10^{-5}$ i $\sigma_{Ey}^2/m = 2.9 \cdot 10^{-5}$ tada je $\sqrt{\dfrac{\sigma_{Ex}^2}{n} + \dfrac{\sigma_{Ey}^2}{m}} = 0,00775$, a slučajna veličina $z_{p/2} = z_{0.475} = 1.96$ (tabela C na strani 184). Granice intervala poverenja su $(0.96481\,;\,0.99519)$, pa je:

$$(0.96481 \leq \mu_x - \mu_y \leq 0.99519)$$

Kako razlika srednjih vrednosti uzorka $\bar{x} - \bar{y} = 0.98$ pripada intervalu poverenja, tada sledi da je:

$$(0.965 \leq \mu_x - \mu_y \leq 0.995)$$

na nivou poverenja od 95% sa 10000 merenja za μ_x i μ_y.

Pored toga, kako interval poverenja ne obuhvata nulu, polazna hipoteza $\mu_x = \mu_y$ se odbacuje , a prihvata se hipoteza da je $\mu_x \neq \mu_y$ na nivou poverenja od 95% sa 10000 merenja za μ_x i μ_y.

$\boxed{\textbf{6.6}}$ Merenjem napona pomoću dva voltmetra iste klase tačnosti dobijene su sledeće vrednosti:

Br. merenja	1	2	3	4	5	6	7	8
V_1 (V)	28.0	27.2	28.2	26.2	25.2	-	-	-
V_2 (V)	28.6	26.8	28.2	25.6	27.4	28.0	29.2	27.5

Proveriti da li su merenja pomoću dva voltmetra iste klase tačnosti konzistentna i odrediti interval poverenja u kome se nalazi σ_1/σ_2, kao i interval poverenja za $\mu_1 - \mu_2$ na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

Za prvi voltmetar srednja vrednost merenih vrednosti napona ie $\overline{V}_1 = 26.96\,\mathrm{V}$, a standardno odstupanje iznosi $\sigma_{E1} = 1.26\,\mathrm{V}$, dok za drugi voltmetar srednja vrednost je $\overline{V}_2 = 27.66\,\mathrm{V}$ i standardno odstupanje je $\sigma_{E2} = 1.12\,\mathrm{V}$. Odnos standardnih odstupanja iznosi $\sigma^2_{E2}/\sigma^2_{E1} = 0.790$, a slučajna veličina je $f_{7;\,4;\,0.95} = 6.094$, odnosno $f_{4;\,7;\,0.95} = 4.120$ je određena iz tabele za Fišerovu raspodelu (tabela F na strani 192). Interval poverenja sada je:

$$\left(\frac{\sigma^2_{E2}}{\sigma^2_{E1}} \cdot \frac{1}{f_{7;\ 4;\ 0.95}} \le \frac{\sigma^2_2}{\sigma^2_1} \le \frac{\sigma^2_{E2}}{\sigma^2_{E1}} \cdot f_{4;\ 7;\ 0.95}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(0.130 \le \frac{\sigma^2_2}{\sigma^2_1} \le 3.255\right)$$

Kako odnos standardnih odstupanja pripada intervalu i sadrži jedinicu, može se zaključiti sledi, da je $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ na nivou poverenja 90% sa 8 merenja za σ_{E2} i 5 merenja za σ_{E1}. Posle sređivanja interval poverenja za σ_1/σ_2 jednak je:

$$\left(2.8 \ge \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ge 0.6\right) \text{ na nivou poverenja 90\% sa 5 merenja za } \sigma_{E1} \text{ i 8 merenja za } \sigma_{E2}.$$

Za ispitivanje konzistencije srednjih vrednosti, kako je mali obim uzorka, koristi se Studentova raspodela sa $n + m - 2$ stepeni slobode. Standardno odstupaje u ovom slučaju je:

$$\sigma^2_{E1,\,2} = \frac{(n-1)\sigma^2_1 + (m-1)\sigma^2_2}{n+m-2} = 1.171$$

Razlika srednjih vrednosti iznosi $\overline{V}_1 - \overline{V}_2 = -0.7$. Slučajna veličina $t_{n+m-2;\,0.45} = t_{11;\,0,45} = 1.80$ određena je iz tablica (tabela E, strana 188). Razlika srednjih vrednosti u ovom slučaju je:

$$\mu_1 - \mu_2 = \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \pm t_{n+m-2} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \pm t_{11;\,0.45} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

Odavde sledi da je interval poverenja

$$\left(\overline{V}_1 - \overline{V}_2 - t_{11;\,0.45} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}; \quad \overline{V}_1 - \overline{V}_2 + t_{11;\,0,95} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

odnosno:

$(-1.9;\ 0.5) \Rightarrow (-1.9 \le \mu_1 - \mu_2 \le 0.5)$ na nivou poverenja 95% za μ_1 iz 5 merenja i μ_2 iz 8 merenja.

Poređenjenem razlike srednjih vrednosti prve i druge grupe merenja $\mu_1 - \mu_2$ utvrđeno je, da se nalazi unutar intervala $(-1.9 \le \mu_1 - \mu_2 \le 0.5)$, pa je $\mu_1 = \mu_2$ na nivou poverenja 90%.

6.7 Za potrebe nekog eksperimenta napravljena su dva šanta za smanjenje napona. Naponi na njihovim ulazima i izlazima za prvu grupu merenja su:

Br. merenja	1	2	3	4	5	6	7
V_{ul1} (V)	10	20	40	60	80	100	112
V_{iz1} (V)	0.48	0.94	1.89	2.83	3.78	4.73	5.26

a za drugu grupu merenja su:

Br. merenja	1	2	3	4	5	6	7
V_{ul2} (V)	10	20	40	60	80	100	112
V_{iz2} (V)	0.46	0.92	1.84	2.75	3.87	4.59	5.12

a) Izračunati srednji nivo pretvaranja oba pretvarača i izraziti rezultate u obliku u kome figuriše greška merenja na nivou poverenja 95%.
b) Odrediti granice unutar kojih se nalaze greške merenja za oba pretvarača na nivou poverenja 95%.
c) Proveriti da li su merenja nivoa pretvarača konzistentna, tj. proveriti da li je $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ i $\mu_1 - \mu_2 = 0$ i izraziti intervale u kojima se nalaze σ^2_1/σ^2_2 i $\mu_1 - \mu_2$ na nivou poverenja 95%.

Rešenje:

a) Neka je nivo pretvaranja definisan u obliku $k = \dfrac{U_{iz}}{U_{ul}}$.

Za prvu grupu merenja nivo pretvaranja iznosi:

Br. mer.	U_{ul1}	U_{iz1}	k_1
1	10	0.48	0.0480
2	20	0.94	0.0470
3	40	1.89	0.0423
4	60	2.83	0.0472
5	80	3.78	0.0473
6	100	4.78	0.0473
7	112	5.26	0.0470

Za drugu grupu merenja nivo pretvaranja iznosi:

Br. mer.	U_{ul1}	U_{iz1}	k_1
1	10	0.46	0.0460
2	20	0.92	0.0460
3	40	1.84	0.0460
4	60	2.75	0.0458
5	80	3.67	0.0459
6	100	4.59	0.0459
7	112	5.12	0.0459

Za prvu grupu merenja srednja vrednost nivoa pretvaranja je $\bar{k}_1 = 0.0473$, standardno odstupanje iznosi $\sigma_{E1} = 0.0003367$, tako da je $\sigma_{E1}/\sqrt{n} = 0.000127$. Slučajna veličina iznosi $t_{6;\,0.475} = 2.45$ (tabela E na strani 188) pa je slučajna greška $t_{6;\,0.475} \cdot \dfrac{\sigma_{E1}}{\sqrt{n}} = 0.000311$.

Sada se rezultat merenja srednje vrednosti niova pretvanja može izraziti u obliku:

$$\bar{k}_1 = (0.0473 \pm 0.0003)$$

sa standardnom greškom iz 7 merenja na nivou poverenja 95%.

Slično, za drugu grupu merenja srednja vrednost nivoa pretvaranja je $\bar{k}_2 = 0.0459$, standardno odstupanje iznosi $\sigma_{E2} = 0.0001155$, tako da je $\sigma_{E2}/\sqrt{n} = 0.0000436$. Slučajna veličina iznosi $t_{6;\,0.475} = 2.45$ pa je slučajna greška $t_{6;\,0.475} \cdot \dfrac{\sigma_{E2}}{\sqrt{n}} = 0.000107$.

Rezultat merenja srednje vrednosti niova pretvaranja u ovom slučaju može se izraziti u obliku:

$$\bar{k}_2 = (0.0459 \pm 0.0001)$$

sa standardnom greškom iz 7 merenja na nivou poverenja 95%.

b) Za nivo poverenja od 95% je $(1+p)/2 = (1+0.95)/2 = 0.975$, i $(1-p)/2 = (1-0.95)/2 = 0.025$, a slučajne veličine $\chi^2_{6;\,0.975} = 14.45$ i $\chi^2_{6;\,0.025} = 1.237$ su određene iz tablica za χ^2-raspodelu (tabela D na strani 186).

Za prvu grupu merenja, prema definiciji granice poverenja su:

$$\sigma_{E1} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{6;\,0.975}}} = 0.000217 \quad \text{i } \sigma_{E1} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{6;\,0.025}}} = 0.000742.$$

Na osnovu dobijenih rezultata interval poverenja je:

$$(0.0002 \le \sigma_1 \le 0.0007) \quad \text{na nivou poverenja 95\% iz 7 merenja.}$$

Interval poverenja standardne greške je:

$$\left(0.00008 \le \frac{\sigma_1}{\sqrt{7}} \le 0.00028\right) \quad \text{na nivou poverenja 95\% iz 7 merenja.}$$

Za drugu grupu merenja, prema definiciji granice poverenja su:

$$\sigma_{E2} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{6;\,0.975}}} = 0.000744 \quad \text{i } \sigma_{E2} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{6;\,0.025}}} = 0.000254.$$

Na osnovu dobijenih rezultata interval poverenja je:

$$(0.00007 \le \sigma_2 \le 0.00025) \quad \text{na nivou poverenja 95\% iz 7 merenja.}$$

Interval poverenja standardne greške je:

$$\left(0.00003 \le \frac{\sigma_2}{\sqrt{7}} \le 0.00010\right) \qquad \text{na nivou poverenja 95\% iz 7 merenja.}$$

c) Odnos standardnih odstupanja jednak je $\sigma^2_{E1}/\sigma^2_{E2} = 8.498$ dok je slučajna veličina $f_{6;\,6;\,0.975} = 5.82$, odnosno $f_{6;\,6;\,0.025} = 5.82^{-1} = 0.1718$ (vidi tabelu F na strani 191). Interval poverenja sada je:

$$\left(\frac{\sigma^2_{E1}}{\sigma^2_{E2}} \cdot \frac{1}{f_{6;\ 6;\ 0.975}} \le \frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2} \le \frac{\sigma^2_{E1}}{\sigma^2_{E2}} \cdot f_{6;\ 6;\ 0.975}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(1.4601 \le \frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2} \le 49.4584\right)$$

na nivou poverenja 95% iz 7 merenja za σ_1 i σ_2. Kako jedinica ne pripada ovom intervalu poverenja to sledi da je $\sigma_1 \neq \sigma_2$ na nivou poverenja 95% iz 7 merenja za σ_1 i σ_2.

Za ispitivanje srednje vrednosti, kako je mali obim uzorka, koristi se Studentova raspodela sa $n+m-2$ stepeni slobode. Standardno odstupanje u ovom slučaju je:

$$\sigma^2_{E1,\,2} = \frac{(n-1)\sigma^2_1 + (m-1)\sigma^2_2}{n+m-2} = 0.000226$$

Razlika srednjih vrednosti iznosi $\bar{k}_1 - \bar{k}_2 = 0.0014$. Slučajna veličina $t_{n+m-2;\,0.475} = t_{12;\,0.475} = 2.18$ određena je iz tablica (tabela E na strani 188). Razlika srednjih vrednosti u ovom slučaju je:

$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \pm t_{n+m-2} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \pm t_{12;\,0.475} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

Odavde sledi da je interval poverenja

$$\left(\bar{k}_1 - \bar{k}_2 - t_{n+m-2;\,0.475} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}};\quad \bar{k}_1 - \bar{k}_2 + t_{n+m-2;\,0.475} \cdot \sigma^2_{E1,\,2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right)$$

Ovaj izraz važi samo kada je $\sigma_{E1} = \sigma_{E2}$, a u ovom slučaju se ne može primeniti jer je $\sigma_{E1} \neq \sigma_{E2}$. Međutim, ako zamenimo dobijene vrednosti dobija se:

$$(-0.0161;\ 0.0190) \quad \Rightarrow \quad (-0.0161 \le \mu_1 - \mu_2 \le 0.019)$$

na nivou poverenja 95% za μ_1 iz 7 merenja i μ_2 iz 7 merenja. Poređenjem razlike srednjih vrednosti prve i druge grupe merenja $\mu_1 - \mu_2$ utvrđeno je, da se nalazi unutar intervala $(-0.0161 \le \mu_1 - \mu_2 \le 0.0197)$, pa je $\mu_1 = \mu_2$ na nivou poverenja 95%, ali ovaj zaključak nije opravdan, jer je $\sigma_{E1} = \sigma_{E2}$ i ne može se koristiti prethodni izraz. Na osnovu toga izvodi se zaključak da je $\mu_1 \neq \mu_2$ na nivou poverenja 95% za μ_1 iz 7 merenja i μ_2 iz 7 merenja.

$\boxed{\textbf{6.8}}$ Najtačnija merenja brzine svetlosti do 1965. godine bila su:

Ime istraživača	godina	c (m/s)	S (m/s)
Bergstrand	1951.	299793.1	0.3
Froome	1954.	299793.0	0.3
Bergstrand	1957.	299792.85	0.16
Froome	1958.	299792.50	0.10

Ispitati konzistentnost ovih merenja na nivou poverenja 95%.

Rešenje:

Srednja vrednost brzine svetlosti dobijene na osnovu svih merenja iznosi:

$$\overline{c} = \sum_{i=1}^{4} \omega_i c_i = 299792.66 \text{ m/s}$$

Odgovarajuće statističke težine za pojedina merenja date izrazom:

$$\omega_i = \frac{\dfrac{1}{S(\overline{x_i})^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{S(\overline{x_i})^2}}$$

na osnovu koga se dobijaju sledeće vrednosti: $\omega_1 = \omega_2 = 0.0689$; $\omega_3 = 0.2419$; $\omega_2 = 0.6203$.

Merna nesigurnost ovako dobijene srednje vrednosti, tzv. otežane srednje srednje vrednosti (tzv. interna greška otežane srednje vrednosti) iznosi:

$$S_{int} = S(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S(\overline{x_j})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{11.1 + 11.1 + 39 + 100}} = 0.0788 \text{ m/s}$$

Za ispitivanje konzistentnosti ovako dobijenih grupa merenja potrebno je uporediti internu grešku sa eksternom greškom, tj. sa odstupanjem pojedinih vrednosti merenja brzina svetlosti c_i sa srednjom vrednošću brzine svetlosti $\overline{c}$. Eksterna greška ovih merenja iznosti:

$$S_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} w_i (c_i - \overline{c})^2}{4}} = 0.1071 \text{ m/s}.$$

Primenom aproksimativnog izraza za ispitivanje konzistentnosti merenja, dobija se:

$$\chi_0^2 = (n-1)\frac{S_{Eext}^2}{S_{Eint}^2} = 5.5418.$$

Upoređivanjem dobijene vrednosti za koeficijenat χ_0^2 sa vrednošću $\chi^2_{n-1;0.95} = \chi^2_{3;0.95} = 7.815$ (tabela D na strani 186) može se zaključiti da su dobijena merenja konzistentna.

$\boxed{\textbf{6.9}}$ Merenjem neke fizičke veličine x dobijena je vrednost: $x_1 = 188.4(12)$.

Proveriti konzistentnost ovog merenja na nivou poverenja od 95% sa vrednostima sakupljenim iz literature:

$x_2 = 186.1(13)$ $x_2 = 185.1(12)$ $x_2 = 187.0(13)$ $x_2 = 188.1(8)$ $x_2 = 184.8(13)$

$x_7 = 186.3(20)$ $x_8 = 187.9(14)$ $x_9 = 185.7(18)$ $x_{10} = 183.6(13)$ $x_{11} = 186.6(22)$

Rešenje:

Izmerene vrednosti x_i, kao i vrednosti potrebne za izračunavanje ukupne srednje vrednosti i eksterne i interne greške su prikazane u sledećoj tabeli:

n	x_i	$S(x_i)$	$1/S(x_i)^2$	ω_i	$\omega_i x_i$	$\omega_i(x_i - \overline{x})^2$
1	188.4	1.2	0.69444	0.10532	19.84214	0.34335
2	186.1	1.3	0.59172	0.08974	16.70051	0.02194
3	185.1	1.2	0.69444	0.10532	19.49459	0.23521
4	187.0	1.3	0.59172	0.08974	16.78128	0.01476
5	188.1	0.8	1.5625	0.23697	44.57373	0.53715
6	184.8	1.3	0.59172	0.08974	16.58385	0.28896
7	186.3	2.0	0.25	0.03791	7.06355	0.00329
8	187.9	1.4	0.5102	0.07738	14.53921	0.13189
9	185.7	1.8	0.30864	0.04681	8.69235	0.03745
10	183.6	1.3	0.59172	0.08974	16.47616	0.80466
11	186.6	2.2	0.20661	0.03133	5.84704	$9.721 \cdot 10^{-7}$
$\sum_{i=1}^{11}$			6.59371		186.59443	2.41865

Srednja vrednost merene fizičke veličine iznosi: $$\overline{x} = \sum_{i=1}^{11} \frac{\frac{1}{S(\overline{x_i})^2}}{\sum_{i=1}^{12} \frac{1}{S(\overline{x_i})^2}} x_i = \sum_{i=1}^{12} \omega_i x_i = 186.59443$$

Interna i eksterna greška ovih merenja iznose:

$$S_{int} = S(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{S(\overline{x_i})^2}}} = 0.3894 \quad \text{i} \quad S_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} w_i (x_i - \overline{x})^2}{11}} = 0.4689.$$

Primenom aproksimativnog izraza za ispitivanje konzistentnosti merenja, dobija se:
$$\chi_0^2 = (n-1)\frac{S_{Eext}^2}{S_{Eint}^2} = 15.9500.$$

Upoređivanjem dobijene vrednosti za koeficijenat χ_0^2 sa vrednošću $\chi^2_{n-1;0.95} = \chi^2_{10;0.95} = 18.307$ (vidi tabelu D na strani 186) može se zaključiti da su dobijena merenja konzistentna.

$\boxed{6.10}$ Merenjem sastava neke mineralne vode za koncentraciju Bikarbonata HCO_3^- u različitim laboratorijama, dobijene su sledeće vrednosti:

$c_1 = 120.1 \pm 0.9$ mg/l; $c_2 = 119.1 \pm 1.3$ mg/l; $c_3 = 129.1 \pm 0.8$ mg/l; $c_4 = 120.5 \pm 0.9$ mg/l;

$c_5 = 121.1 \pm 0.9$ mg/l; $c_6 = 120.8 \pm 0.7$ mg/l; $c_7 = 119.5 \pm 0.8$ mg/l; $c_8 = 121.4 \pm 0.9$ mg/l.

Proveriti konzistentnost dobijenih rezultata na nivou poverenja od 95%.

Rešenje:
Izmerene vrednosti x_i, kao i vrednosti potrebne za izračunavanje ukupne srednje vrednosti i eksterne i interne greške su prikazane u sledećoj tabeli:

n	x_i	$S(x_i)$	$1/S(x_i)^2$	ω_i	$\omega_i x_i$	$\omega_i(x_i-\overline{x})^2$
1	120.1	0.9	1.23457	0.11543	13.8626	0.30182
2	119.1	1.3	0.59172	0.05532	6.58888	0.3789
3	129.1	0.8	1.5625	0.14609	18.85962	7.96281
4	120.5	0.9	1.23457	0.11543	13.90877	0.17097
5	121.1	0.9	1.23457	0.11543	13.97803	0.04395
6	120.8	0.7	2.04082	0.19081	23.04929	0.16046
7	119.5	0.8	1.5625	0.14609	17.4572	0.71806
8	121.4	0.9	1.23457	0.11543	14.01265	0.0116
$\sum_{i=1}^{8}$			10.6958		121.71705	9.74857

Srednja vrednost merene fizičke veličine iznosi: $$\overline{x} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\frac{1}{S(\overline{x_i})^2}}{\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{S(\overline{x_i})^2}} x_i = \sum_{i=1}^{8} \omega_i x_i = 121.50135$$

Interna i eksterna greška ovih merenja iznose:

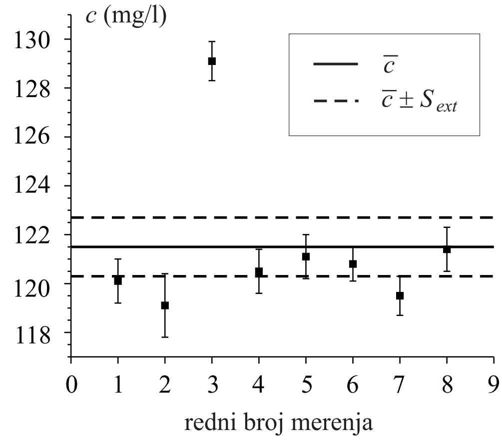
$$S_{int} = S(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{S(\overline{x_i})^2}}} = 0.3058 \quad \text{i} \quad S_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} w_i(x_i - \overline{x})^2}{8}} = 1.1039.$$

Primenom aproksimativnog izraza za ispitivanje konzistentnosti merenja, dobija se:

$$\chi_0^2 = (n-1)\frac{S_{Eext}^2}{S_{Eint}^2} = 91.2184.$$

Upoređivanjem dobijene vrednosti za koeficijenat χ_0^2 sa vrednošću $\chi_{n-1;0.95}^2 = \chi_{7;0.95}^2 = 14.067$ može se zaključiti da dobijena merenja nisu konzistentna.

Detaljnijom analizom se može utvrditi koje od navedenih merenja odstupaju od ostalih merenja. Jednostavnom analizom eksperimentalnih rezultata koji su na grafiku prikazani tačkama i pripadajućim greškama, a ukupna srednja vrednost i ukupni opseg greške ($\bar{c} \pm S_{ext}$), može se videti da treće merenje, $c_3 = 126.1 \pm 0.8$ mg/l; odstupa od ostalih merenja.



Ako se treće merenje izbaci, i za preostale vrednosti proverava konzistentnost merenja, potrebni među koraci za izračunavanje srednje vrednosti i eksterne i interne greške prikazani su u tabeli.

n	x_i	$S(x_i)$	$1/S(x_i)^2$	ω_i	$\omega_i x_i$	$\omega_i(x_i-\overline{x})^2$
1	120.1	0.9	1.23457	0.13517	16.23418	0.01694
2	119.1	1.3	0.59172	0.06479	7.71609	0.11877
3	120.5	0.9	1.23457	0.13517	16.28825	2.86024E-4
4	121.1	0.9	1.23457	0.13517	16.36935	0.05641
5	120.8	0.7	2.04082	0.22345	26.9925	0.02675
6	119.5	0.8	1.5625	0.17108	20.44373	0.1557
7	121.4	0.9	1.23457	0.13517	16.4099	0.12097
$\sum_{i=1}^{7}$			9.1333		120.454	0.49583

U ovom slučaju se dobija:

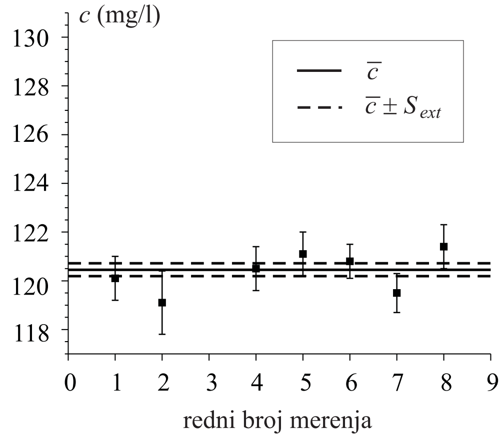
Srednja vrednost merene fizičke veličine: $\overline{x} = \sum_{i=1}^{7} \omega_i x_i = 120.454$

Interna i eksterna greška ovih merenja iznose:

$$S_{int} = S(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{S(\overline{x_i})^2}}} = 0.33089 \quad \text{i} \quad S_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7} w_i(x_i - \overline{x})^2}{7}} = 0.2661.$$

Odgovarajući χ_0^2 koeficijenat iznosi: $\chi_0^2 = (n-1)S_{Eext}^2/S_{Eint}^2 = 3.8804.$

Upoređivanjem sa koeficijentom $\chi^2_{6;0.95} = 12.592$ (tabela D na strani 186) može se zaključiti da su ovi podaci konzistentni. Ovo se jasno može videti sa sledećeg grafika, koji je prikazan na istoj skali kao grafik sa izbačenim merenjem. Međutim, ovaj pristup nije u potpunosti ispravan. Analiza eksperimenta bi trebala biti detaljnija. Potrebno je uraditi detaljnu analizu konzistentnosti Fišerovim testom. Kada se ustanovi odstupanje jednog od podataka potrebno je pronaći i uzrok ovog odstupanja. Moguć je i zaključak da svi ostali eksperimenti imaju sistematsku grašku. Najispravniji postupak je ponavljanje svih eksperinata sa većom pažnjom.



6.3 Testiranje raspodela

6.3.1 Pirsonov χ^2 test

Ovim postupkom moguće je testirati model raspodele verovatnoće u odnosu na eksperimentalno dobijenu raspodelu. Najpre se vrednosti dobijene eksperimentim podele na klase (kao što je rađeno u trećem delu - Glava 3). Na osnovu izraza:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i^{th} - f_i)^2}{f_i^{th}}$$

gde je k - broj klasa, izračuna se ukupno odstupanje eksperimentalno dobijenih frekvencija f_i od teorijskih predviđenih f_i^{th}. Ako je frekvencija po klasama $f_i^{th} < 5$, što se često dešava u početnim i krajnjim klasama, ove klase se uključuju u susednu.

Da bi se ustanovilo da li se eksperimentalna i predložena teorijska raspodela slažu, na nivou poverenja p, odnosno sa verovatnoćom p, uvodi se broj $\chi^2_{k-1-m;\,p}$ koji se očitava iz tabele za χ^2-raspodelu (tabela D na strani 186). Pošto χ_0^2 ima χ^2 raspodelu sa $k-1-m$ stepeni slobode, teorijska raspodela se prihvata sa nivoom poverenja p, ako je:

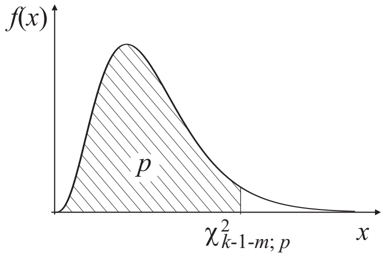
$$P\left(\chi_0^2 \le \chi^2_{k-1-m;\,p}\right) = p$$

gde je je m - broj nezavisnih parametara eksperimentalne raspodele koju određujemo, p - nivo poverenja geometrijski šrafirana površina na slici 6.8.

U ovom slučaj se radi o jednostranom nivou poverenja. Najčešće se uzima da je $p = 0.9$; $p = 0.95$ ili $p = 0.99$. Model se prihvata ako je gornja nejednakost ispunjena, tj. ako je:

$$\chi_0^2 \le \chi^2_{k-1-m;\,p}$$

na nivou poverenja p. Kada imamo raspodelu dobijenu eksperimentalno, da bi mogli proceniti koja raspodela odgovara, računa se: aritmetička sredina, procenjuje se standardna devijacija, koeficijent asimetrije i spljoštenosti.



Slika 6.8. Jednostrani nivo poverenja za Pirsonov test.

Na osnovu ovih dobijenih vrednosti i oblika histograma može se naslutiti koja raspodela najbolje odgovara. Kvantitativna potvrda da li je pretpostavka odgovarajuća ili ne utvrđuje se primenom Pirsonovog χ^2 testa.

Zadaci

$\boxed{6.11}$ Istovremeno se baca sedam novčića i registruje se broj pojavljivanja grba. U Tabeli su dati dobijeni rezultati.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	12	78	270	456	386	252	69	13

gde je f_i broj bacanja u kojima se javilo x_i grbova. Koristeći χ^2 test proveriti saglasnost ovako dobijenih podataka sa Binomnom raspodelom, na nivou poverenja 95%, ako je verovatnoća pojavljivanja grba $p = 1/2$.

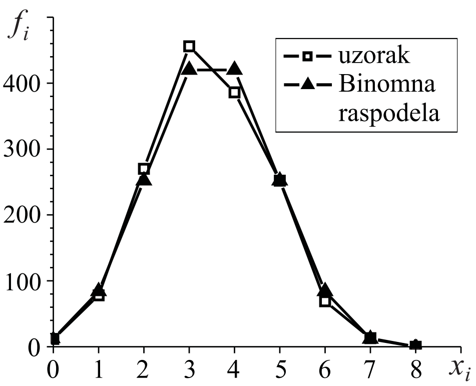
Rešenje:

Za Binomnu raspodelu važi rekurzivna formulma: $B_N(n,p) = \dfrac{N-n+1}{n} \cdot \dfrac{p}{1-p} B_N(n-1,p)$

gde je $p = 0.5$ verovatnoća pojavljivanja grba. Primenom ove formule za Binomnu raspodelu dobuja se $B_7(0;\,0.5) = \frac{7!}{0!\cdot 7!}(0.5)^0 \cdot (0.5)^7 = 0.0078$, a ostale izračunate vrednosti date su sledećoj tabeli.

Br. klase	x_i	f_i	$\frac{N-n+1}{n}$	$\frac{p}{p-1}$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	0	12	-	1	0.0078	11.98	0.00003
2	1	78	7/1	1	0.0547	84.02	0.431
3	2	270	6/2	1	0.1641	252.06	1.277
4	3	456	5/3	1	0.2734	419.94	3.096
5	4	386	4/4	1	0.2734	419.94	2.743
6	5	252	3/5	1	0.1641	252.06	0.0001
7	6	69	2/6	1	0.0547	84.02	2.685
8	7	13	1/7	1	0.0078	11.98	0.087
$\sum_1^8$		1536					$\chi_0^2 = 10.319$

Kako je $\chi_0^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{8} \frac{(f_i^{th} - f_i)^2}{f_i^{th}} = 10.319$ i kako je $\chi^2_{k-1;\,0.95} = \chi^2_{7;\,0.95} = 14.04$ (tabela D na strani 186), sledi da je $\chi_0^2 \leq \chi^2_{7;\,0.95}$, pa se Binomna raspodela prihvata na nivou poverenja 95%.
Najbolja provera slaganja uzorkovane raspodele i teorijski dobijene raspodele, u ovom slučaju Binomne raspodele, je njihovo vizuelno upoređivanje. Iako vizuelno upoređivanje ne daje ocenu saglasnosti, nije loše uvek nakon izračunavanja χ_0^2 koeficijenta i upoređivanja sa vrednošću $\chi^2_{n;\,p}$ nacrtati ove dve raspodele, tj ova dva histograma ili poligona. Ovakvo crtanje može ukazati na neku grešku koja se može napraviti prilikom izračunavanja.



$\boxed{6.12}$ U jednakim vremenskim intervalima u tankom sloju rastvora zlata registrovan je broj čestica zlata koje padaju u vidno polje mikroskopa. Rezultati su dati u tabeli

Br. čestica x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	112	168	130	68	32	5	1	1

Ispitati saglasnost dobijenih rezultata sa Poasonovom raspodelom na nivou poverenja 95%.

Rešenje:

Izračunate vrednosti date su u sledećoj tabeli.

Br. klasa	x_i	f_i	$x_i f_i$	$\frac{\lambda}{n}$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	0	112	0	-	0.214	110.64	0.0167
2	1	168	168	1.544/1	0.330	170.61	0.0399
3	2	130	260	1.544/2	0.255	131.84	0.0257
4	3	68	204	1.544/3	0.131	67.73	0.0011
5	4	32	128	1.544/4	0.051	26.37	0.2020
6	5	5	25	1.544/5	0.016	8.27	1.3720
7	6	1	6	1.544/6	0.004	2.07	
8	7	1	7	1.544/7	0.001	0.52	
$\sum_1^8$		517					$\chi_0^2 = 2.657$

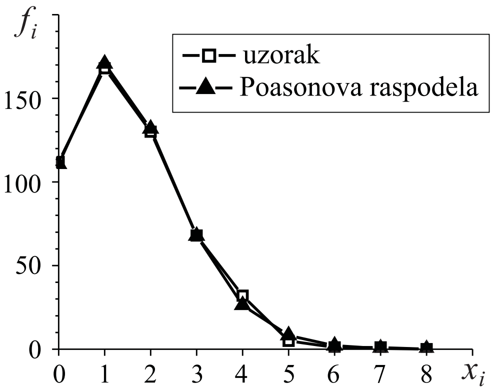
Pošto je vrednost klase $f^{th} < 5$, smanjuje se broj klasa za dva, pa se poslednja tri člana u koloni f_i sabiraju i njihov zbir je 7, a sabiraju se i poslednja tri člana u koloni f^{th} i njihov zbir je 10.86. Sad je broj klasa jednak $k-1-m = 8-1-2-1 = 4$, jer je umanjen za 2 zbog $f^{th} < 5$, i umanjen je za 1 zbog izračunavanja $\bar{x}$. Srednja vrednost jednaka je

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{798}{517} = 1.544$$

pa je $\lambda = \bar{x} = 1.544$.

Dalje sledi da je $\chi^2_{k-1-m;\,0.95} = \chi^2_{4;\,0.95} = 9.49$ (tabela D na strani 186). Na osnovu dobijenih vrednosti za $\chi_0^2 = 2.657$ i $\chi^2_{4;\,0.95} = 9.49$ sledi:

$\chi_0^2 < \chi^2_{4;\,0.95}$ eksperimentalna raspodela odgovara Poasonovoj raspodeli na nivou poverenja 95%.



$\boxed{\textbf{6.13}}$ Posmatra se radioaktivna supstanca u toku jednakih vremenskih interala od po 7.5 s. Registruje se broj čestica koje padaju u brojač za svaki od ovih intervala. U donjoj tabeli su brojevi intervala f_i u koje upadne x_i čestica.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

Proveriti da li se ovako dobijena raspodela slaže sa Poasonovom raspodelom.

Rešenje:

Poasonova raspodela definisana je u obliku: $P_\lambda(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

Primenom rekurzivne formule za Poasonovu raspodelu: $P_\lambda(n+1) = \dfrac{\lambda}{n} P_\lambda(n)$,

počev od vrednosti $P_\lambda(0) = \dfrac{3.867^0}{0!} e^{-3.867} \simeq 0.021$ proračunate su i sledeće vrednosti, a njihove vrednosti date su u sledećoj tabeli.

Br. klasa	x_i	f_i	$x_i f_i$	$\frac{\lambda}{n}$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	0	57	0	-	0.021	54.77	0.091
2	1	203	203	3.867/1	0.081	211.25	0.322
3	2	383	766	3.867/2	0.156	406.85	1.398
4	3	525	1575	3.867/3	0.202	526.82	0.006
5	4	532	2128	3.867/4	0.195	508.56	1.080
6	5	408	2040	3.867/5	0.151	393.81	0.511
7	6	273	1638	3.867/6	0.097	252.38	1.584
8	7	139	973	3.867/7	0.054	140.83	0.024
9	8	45	360	3.867/8	0.026	67.71	7.673
10	9	27	243	3.867/9	0.011	28.69	0.099
11	10	16	160	3.867/10	0.004	10.43	2.970
$\sum_{1}^{11}$		2608	10086				$\chi_0^2 = 15.738$

Srednja vrednost jednaka je: $$\bar{x} = \lambda = \frac{\sum\limits_{i=1}^{11} x_i f_i}{\sum\limits_{i=1}^{11} f_i} = \frac{10086}{2608} = 3.867$$

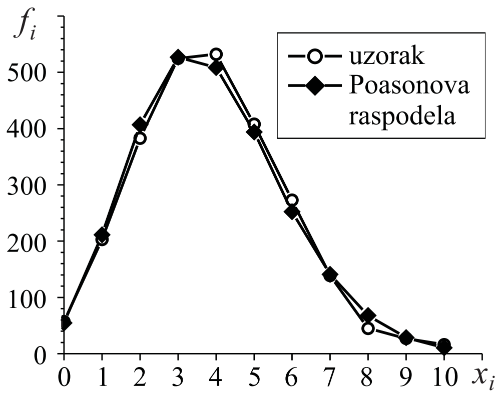
Slučajna veličina iznosi:

$\chi^2_{k-1-m;\,0.95} = \chi^2_{94;\,0.95} = 16.92$ (tabela D na strani 186).

Na osnovu dobijenih vrednosti za $\chi_0^2 = 15.738$ i $\chi^2_{9;\,0.95} = 16.92$ sledi da je:

$$\chi_0^2 < \chi^2_{4;\,0.95},$$

odnosno, da eksperimentalna raspodela odgovara Poasonovoj na nivou poverenja 95%.



6.14 Merenjem mase nekog tela analitičkom vagom više puta dobijene su sledeće vrednosti:

Br. merenja x_i	1	2	3	4	5	6	7
m (mg)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
f_i	5	10	20	30	15	14	6

Proveriti da li se ovako dobijena eksperimentalna raspodela slaže sa Gausovom na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

Proračunate vrednosti date su u sledećoj tabeli.

Br.	Klase (mg)	k_i(mg)	f_i	$k_i f_i$	Δk_i	$\Delta k_i^2 fi$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	0-2	1	5	5	-6.12	187.272	0.036	3.6	-
2	2-4	3	10	30	-4.12	169.744	0.108	10.8	0.025
3	4-6	5	20	100	-2.12	89.888	0.202	20.2	0.00198
4	6-8	7	30	210	-0.12	4.320	0.258	25.8	0.684
5	8-10	9	15	135	1.88	53.016	0.212	21.2	1.813
6	10-12	11	14	154	3.88	210.762	0.119	11.9	0.371
7	12-14	13	6	78	5.88	207.446	0.084	8.4	0.686
$\sum_{1}^{7}$			100	712		922.448			$\chi_0^2 = 3.581$

Prva klasa je manja od 5 i ona je spojena sa drugom klasom, a zbog toga je prva vrednost u poslednjoj koloni za $\chi_0^2 = 0.025$. Sada je broj stepeni slobode $n_s = (k-1) - 1 - m = (7-1) - 1 - 2 = 3$. Srednja vrednost merene mase je $\bar{x} = 7.12$ mg, a standardno odstupanje iznosi $\sigma_E \simeq 3.052$ mg. Kako su $\bar{x} = \mu$ i σ parametri Gausove raspodele to je: $\mathcal{N}(\mu, \sigma) = \mathcal{N}(7.12; 3.052)$. Slučajna veličina ima oblik: $z = \dfrac{x - 7.12}{3.052}$, a srednja vrednost $\mu = 7.12$ mg pada u klasu 6-8. Zavisnost slučajne veličine $z(x)$ i vrednosti funkcije verovatnoće $\Phi(z)$ date su sledećoj tabeli.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	15	16	-
z	-2.333	-1.678	-1.022	-0.367	0.288	0.944	1.598	2.254	2.582	2.909	3.0
$\Phi(z)$	0.490	0.454	0.346	0.144	0.114	0.326	0.445	0.488	0.495	0.498	0.499

Na osnovu ovih vrednosti sada je:

$$P_1 = \Phi(2.333) - \Phi(1.678) = 0.036 \qquad P_2 = \Phi(1.678) - \Phi(1.022) = 0.108$$

$$P_3 = \Phi(1.022) - \Phi(0.367) = 0.202 \qquad P_4 = \Phi(0.367) - \Phi(0.288) = 0.258$$

$$P_5 = \Phi(0.944) - \Phi(0.288) = 0.212$$

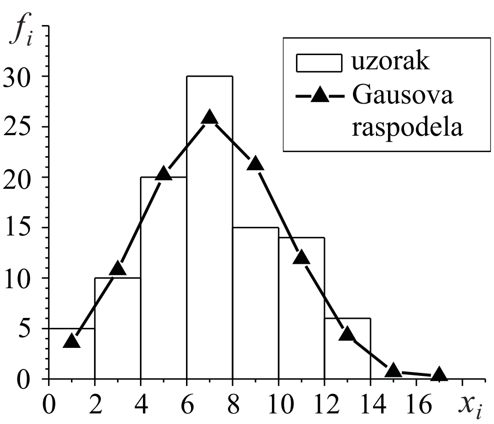
$$P_6 = \Phi(1.598) - \Phi(0.944) = 0.119$$

$$P_7 = \Phi(3.0) - \Phi(1.598) = 0.084$$

Kako je broj stepeni slobode $n_s = 3$ to je slučajna veličina $\chi^2_{3;\,0.90} = 6.251$ (tabela D na strani 186). Na osnovu dobijenih vrednosti za $\chi_0^2 = 3.581$ i $\chi^2_{3;\,0.90} = 6.251$ sledi da je:

$$\chi_0^2 < \chi^2_{3;\,0.90}$$

pa se može zaključiti da eksperimentalna raspodela odgovara Gausovoj na nivou poverenja 90%.



Napomena: Prilikom crtanja Gausove raspodele ne koristi se celokupna kolona f_i^{th}. Naime, prilikom izračunavanja vrednosti f_i^{th} za χ^2-test izvršeno je sažimanje klasa. Za sedmu klasu vrednost teorijske frekvencije je izračunata kao: $P_7 = \Phi(3.0) - \Phi(1.598) = 0.084$. Međutim za crtanje raspodele, za sedmu klasu frekvenciju je potrebno izračunati kao: $f_7' = P_7' \cdot n$, gde je: $P_7' = \Phi(2.254) - \Phi(1.598) = 0.043$, tako da se dobija: $f_7' = 0.043 \cdot 100 = 4.3$, (gde je n=100 ukupan broj merenja). Osma klasa se dobija na osnovu izraza: $f_8' = P_8' \cdot n$, gde je: $P_8' = \Phi(2.582) - \Phi(2.254) = 0.007$, tako da se dobija: $f_8' = 0.007 \cdot 100 = 0.7$. Za devetu klasu se dobija: $P_9' = \Phi(2.909) - \Phi(2.582) = 0.003$, a odgovarajuća frekvencija je: $f_9' = P_9' \cdot n = 0.003 \cdot 100 = 0.3$. Ovo računanje se ovde može prekinuti.

6.15 Rezultati merenja debljine nekog predmeta dati su u sledećoj tabeli:

k_i(mm)	98.0	98.5	99.0	99.5	100.0	100.5	101.0	101.5	102.0	102.5
f_i	21	47	87	158	181	201	142	97	41	25

Proveriti da li se ovako dobijena raspodela slaže sa Gausovom raspodelom na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

Proračunate vrednosti eksperimentalne raspodele date su u sledećoj tabeli.

Br.	Klase (mm)	k_i(mm)	f_i	$k_i f_i$	Δk_i	$\Delta k_i^2 fi$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	97.75-98.25	98.0	21	2058.0	-2.254	106.69	0.00128	12.8	5.253
2	98.25-98.75	98.5	47	4629.5	-1.754	144.596	0.00426	42.6	0.454
3	98.75-99.25	99.0	87	8613.0	-1.254	136.81	0.0920	92.0	0.272
4	99.25-99.75	99.5	158	15721.0	-0.754	89.83	0.1488	148.8	0.569
5	99.75-100.25	100.0	181	18100.0	-0.254	11.68	0.1949	194.9	0.991
6	100.25-100.75	100.5	201	20200.5	0.246	12.16	0.19146	191.46	0.475
7	100.75-101.25	101.0	142	14342.0	0.146	79.02	0.1499	149.9	0.416
8	101.25-101.75	101.5	97	9845.5	1.246	150.59	0.099	93.1	0.163
9	101.75-102.25	102.0	41	4182.0	1.746	124.99	0.0433	43.3	0.122
10	102.25-102.75	102.5	25	2562.5	2.246	126.11	0.0212	22.1	0.381
$\sum_1^{10}$			1000	100254.0		982.476			$\chi_0^2 = 9.097$

Na osnovu proračunatih vrednosti srednja vrednost debljine predmeta je $\bar{x} = 100.254$ mm, standardno odstupanje $\sigma_E = 0.992$ mm, pa je slučajna veličina $z = \dfrac{x - 100.254}{0.992}$. Zavisnost slučajne veličine $z(x)$ i vrednosti funkcije verovatnoće $\Phi(z)$ date su sledećoj tabeli.

x	-	97.25	97.75	98.25	98.75	99.25	99.75	100.25
z	-4	-3.028	-2.524	-2.020	-1.516	-1.012	-0.508	-0.004
$\Phi(z)$	0.4999	0.4988	0.4943	0.4783	0.4357	0.3437	0.1949	0

x	100.75	101.25	101.75	102.25	102.75	103.25	-
z	0.5	1.004	1.508	2.012	2.515	3.020	4
$\Phi(z)$	0.19146	0.3413	0.4345	0.4778	0.4941	0.4987	0.4999

Na osnovu ovih vrednosti sada je:

$P_1 = \Phi(4.000) - \Phi(2.020) = 0.0216$ $\quad$ $P_2 = \Phi(2.020) - \Phi(1.516) = 0.0426$

$P_3 = \Phi(1.516) - \Phi(1.012) = 0.0920$ $\quad$ $P_4 = \Phi(1.012) - \Phi(0.508) = 0.1488$

$P_5 = \Phi(0.508) - \Phi(0.004) = 0.1949$ $\quad$ $P_6 = \Phi(0.004) + \Phi(0.500) = 0.19146$

$P_7 = \Phi(1.004) - \Phi(0.500) = 0.1499$ $\quad$ $P_8 = \Phi(1.508) - \Phi(1.004) = 0.0931$

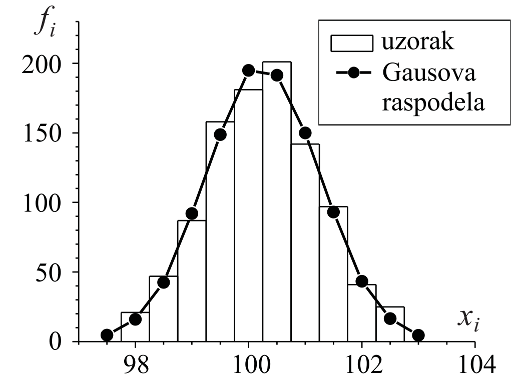
$P_9 = \Phi(2.012) - \Phi(1.508) = 0.0433$ $\quad$ $P_{10} = \Phi(4.000) - \Phi(2.012) = 0.0221$

Kako je broj stepeni slobode $n_s = k - 1 - m = 10 - 1 - 2 = 7$ to je slučajna veličina $\chi^2_{7;\,0.90} = 12.02$ (tabela D na strani 186). Na osnovu dobijenih vrednosti za $\chi_0^2 = 9.097$ i $\chi^2_{7;\,0.90} = 12.02$ sledi da je:

$$\chi_0^2 < \chi^2_{7;\,0.90}$$

pa se može zaključiti da eksperimentalna raspodela odgovara Gausovoj raspodeli na nivou poverenja 90%.

Kao i u zadatku 6.14, prilikom crtanja Gausove raspodele potrebno je izračunati dodatne teorijske frekvencije f_0' i f_1', kao i f_{10}' i f_{11}':



$P_1' = \Phi(3.028) - \Phi(2.524) = 0.00047$ $\quad$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_0' = P_1' \cdot n = 4.7$

$P_1'' = \Phi(2.524) - \Phi(2.020) = 0.016$ $\quad$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_1' = P_1'' \cdot n = 16$

$P_{10}' = \Phi(2.515) - \Phi(2.012) = 0.0163$ $\quad$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_{10}' = P_{10}' \cdot n = 16.3$

$P_{10}'' = \Phi(3.020) - \Phi(2.515) = 0.0046$ $\quad$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_{11}' = P_{10}'' \cdot n = 4.6$

gde je: $P_1 = P_1' + P_1'' + ...$ kao i $P_{10} = P_{10}' + P_{10}'' + ...$

6.16 Izmerene brzine elektrona iz snopa elektrona koji se koristi u eksperimentima rasejanja, date su u sledećoj tabeli:

v(km/s)	0.78-0.92	0.92-1.06	1.06-1.20	1.20-1.34	1.34-1.48	1.48-1.62	1.62-1.76	1.761.90	1.90-2.04
f_i	13	25	37	53	56	53	25	19	20

Proveriti da li se ovako dobijena eksperimentalna raspodela slaže sa Gausovom na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

Proračunate vrednosti eksperimentalne raspodele date su u sladećoj tabeli.

n	v(km/s)	k_i(km/s)	f_i	$k_i f_i$	Δk_i	$\Delta k_i^2 fi$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	0.78-0.92	0.85	13	11.05	-0.553	3.982	0.0461	13.8761	0.05531
2	0.92-1.06	0.99	25	24.75	-0.413	4.274	0.0695	20.9195	0.79593
3	1.06-1.20	1.13	37	41.81	-0.273	2.767	0.1250	37.6250	0.01038
4	1.20-1.34	1.27	53	67.31	-0.133	0.944	0.1709	51.4409	0.04725
5	1.34-1.48	1.41	56	78.96	-0.007	0.002	0.1935	58.2435	0.08642
6	1.48-1.62	1.55	53	82.15	0.147	1.138	0.1670	50.2670	0.14859
7	1.62-1.76	1.69	25	42.25	0.287	2.052	0.1191	35.8491	3.28329
8	1.76-1.90	1.83	19	34.77	0.427	3.456	0.0648	19.5048	0.01306
9	1.90-2.04	1.97	20	39.40	0.567	6.419	0.0413	12.4313	4.60814
$\sum_1^9$			301	422.45		25.034			$\chi_0^2 = 9.04839$

Srednja vrednost merene veličine je $\bar{x} = 1.403$ km/s, a standardno odstupanje $\sigma_E = 2.289$ km/s. Slučajna veličina ima oblik: $z = \dfrac{x - 1.403}{0.289}$. Zavisnost slučajne veličine $z(x)$ i vrednosti funkcije verovatnoće $\Phi(z)$ date su u sledećoj tabeli.

x		0.64	0.78	0.92	1.06	1.20	1.34
z	-3.0	-2.640	-2.156	-1.671	-1.187	-0.702	-0.218
$\Phi(z)$	0.4986	0.4959	0.4846	0.4525	0.3830	0.2580	0.0871
x	1.48	1.62	1.76	1.90	2.04	2.18	
z	0.266	0.751	1.235	1.720	2.204	2.689	3.0
$\Phi(z)$	0.1064	0.2734	0.3925	0.4573	0.4861	0.4964	0.4986

Na osnovu ovih vrednosti sada je:

$$P_1 = \Phi(3.000) - \Phi(1.671) = 0.0461 \qquad P_2 = \Phi(1.671) - \Phi(1.187) = 0.0695$$

$$P_3 = \Phi(1.187) - \Phi(0.702) = 0.1250 \qquad P_4 = \Phi(0.702) - \Phi(0.218) = 0.1709$$

$$P_5 = \Phi(0.218) + \Phi(0.266) = 0.1935 \qquad P_6 = \Phi(0.266) - \Phi(0.751) = 0.1670$$

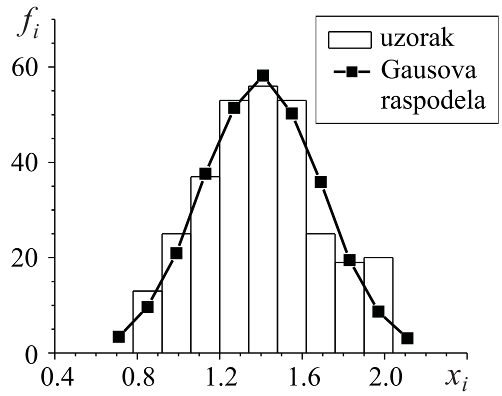
$$P_7 = \Phi(0.751) - \Phi(1.235) = 0.1191 \qquad P_8 = \Phi(1.235) - \Phi(1.720) = 0.0648$$

$$P_9 = \Phi(1.720) - \Phi(3.000) = 0.0413$$

Kako je broj stepeni slobode $n_s = k - 1 - m = 9 - 1 - 2 = 6$ to je slučajna veličina $\chi^2_{6;\,0.90} = 10.64$ (tabela D na strani 186). Na osnovu dobijenih vrednosti za $\chi_0^2 = 9.04839$ i $\chi^2_{6;\,0.90} = 10.64$ sledi da je:

$$\chi_0^2 < \chi^2_{6;\,0.90}$$

pa se može zaključiti da eksperimentalna raspodela odgovara Gausovoj na nivou poverenja 90%.



Kao i u zadacima 6.14 i 6.15, prilikom crtanja Gausove raspodele potrebno je izračunati dodatne teorijske frekvencije:

$P_0' = \Phi(2.640) - \Phi(2.156) = 0.0113$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_0' = 3.4013$

$P_1' = \Phi(2.156) - \Phi(1.671) = 0.0321$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_1' = 9.6621$

$P_9' = \Phi(2.204) - \Phi(1.720) = 0.0288$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_9' = 8.6688$

$P_{10}' = \Phi(2.689) - \Phi(2.204) = 0.0103$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f_{10}'' = 3.1003$

$\boxed{\textbf{6.17}}$ Merenjem mase nekog predmeta, dobijene su vrdnosti koje su razvrstane u klase i date u sledćoj tabeli:

k_i(kg)	362	363	364	365	366	367	368	369
f_i	2	8	11	10	8	6	3	2

Proveriti da li se dobijena raspodela slaže sa normalnom raspodelom na nivou poverenja 90%.

Rešenje:

Proračunate vrednosti eksperimentalne raspodele date su u sladećoj tabeli.

n	klase m(kg)	k_i(kg)	f_i	$k_i f_i$	Δk_i	$\Delta k_i^2 fi$	p_i^{th}	f_i^{th}	$\frac{(f_i^{th}-f_i)^2}{f_i^{th}}$
1	361.5-362.5	362	2	724	-3.08	18.97	0.0211	1.055	
2	362.5-363.5	363	8	2904	-2.08	34.61	0.1133	5.665	0.24381
3	363.5-364.5	364	11	4004	-1.08	12.83	0.1866	9.333	0.29775
4	364.5-365.5	365	10	3650	-0.08	0.064	0.2241	11.205	0.12959
5	365.5-366.5	366	8	2928	0.92	6.27	0.1962	9.810	0.33396
6	366.5-367.5	367	6	2202	1.92	22.12	0.1252	6.260	1.8582
7	367.5-368.5	368	3	1104	2.92	25.58	0.0576	2.880	
8	368.5-369.5	369	2	738	3.92	30.73	0.0251	1.255	
$\sum_1^8$			50	18254		151.67			$\chi_0^2 = 2.8633$

Kako je $f_i < 5$ prva klasa pridružena je drugoj klasi, zatim sedma i osma klasa su pridružene šestoj klasi. Sada je $k = 8 - 3 = 5$, pa je broj stepeni slobode $n_s = k - 1 - m = 5 - 1 - 2 = 2$.

Srednja vrednost izmerenih vrednisti mase jednaka je $\bar{x} = 365.08\,\mathrm{kg}$, a standardno odstupanje je $\sigma_E = 1.76\,\mathrm{kg}$, pa je slučajna veličina jednaka $z = \dfrac{x - 365.08}{1.76}$. Zavisnost slučajne veličine $z(x)$ i vrednosti funkcije verovatnoće $\Phi(z)$ date su sledećoj tabeli.

x		359.5	360.5	361.5	362.5	363.5	364.5	365.5
z	-4.000	-3.170	-2.602	-2.034	-1.466	-0.898	-0.330	0.239
$\Phi(z)$	0.4999	0.4992	0.4953	0.4788	0.4292	0.3159	0.1293	0.0948

x	366.5	367.5	367.5	368.5	369.5	370.5	
z	0.807	1.375	1.375	1.943	2.511	3.079	+4.000
$\Phi(z)$	0.2910	0.4162	0.4162	0.4738	0.4940	0.49897	0.4999

Na osnovu ovih vrednosti sada je:

$P_1 = \Phi(4.000) - \Phi(2.034) = 0.0211$ $P_2 = \Phi(1.466) - \Phi(0.898) = 0.1133$

$P_3 = \Phi(0.898) - \Phi(0.330) = 0.1866$ $P_4 = \Phi(0.330) + \Phi(0.239) = 0.2241$

$P_5 = \Phi(0.807) - \Phi(0.239) = 0.1962$ $P_6 = \Phi(1.375) - \Phi(0.807) = 0.1252$

$P_7 = \Phi(1.943) - \Phi(1.375) = 0.0576$ $P_8 = \Phi(4.000) - \Phi(1.943) = 0.0251$

Kako je broj stepeni slobode $n_s = 2$ to je slučajna veličina $\chi^2_{2;\,0.90} = 4.605$.

Na osnovu dobijenih vrednosti za $\chi_0^2 = 2.8633$ (tabela D na strani 186) i $\chi^2_{2;\,0.90} = 4.605$ sledi da je:

$$\chi_0^2 < \chi^2_{2;\,0.90}$$

na osnovu čega se može zaključiti da eksperimentalna raspodela odgovara normalnoj (Gausovoj) raspodeli na nivou poverenja 90%.

Kao i u zadacima 6.14, 6.15 i 6.16, prilikom crtanja Gausove raspodele potrebno je izračunati dodatne teorijske frekvencije:

$P'_{-1} = \Phi(3.170) - \Phi(2.602) = 0.0039$

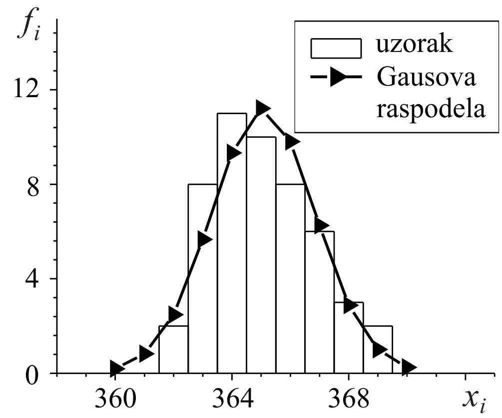
odgovarajuća frekvencija iznosi $f'_{-1} = 0.195$

$P'_0 = \Phi(2.602) - \Phi(2.034) = 0.825$

odgovarajuća frekvencija iznosi $f'_0 = 0.825$

$P'_1 = \Phi(2.034) - \Phi(1.466) = 0.0496$

odgovarajuća frekvencija iznosi $f'_1 = 2.48$



$P'_8 = \Phi(2.511) - \Phi(1.943) = 0.0202$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f'_8 = 1.01$

$P'_9 = \Phi(3.079) - \Phi(2.511) = 0.00497$ odgovarajuća frekvencija iznosi $f'_9 = 0.2485$

Glava 7

Regresija i korelacija

U mnogobrojnim fizičkim eksperimentima postoji veza između fizičkih veličina, a jedan od najvažnijih zadataka je nalaženje funkcionalne zavisnosti između njih. Ta zavisnost može biti čvrsta ili slaba. Ako je međusobna zavisnost čvrsta tada važi određeni zakon, a međusobna zavisnost data je određenom funkcijom. U slučaju slabe međusobne zavisnosti ta zavisnost je statistička ili stohastička funkcija. Ova statistička zavisnost izražava se *regresijom* i *korelacijom.*

U statistici se pod regresijom podrazumeva zavisnost jedne slučajne veličine od druge ili više njih, odnosno:

$$Y = f(X) + \varepsilon,$$

gde je $f(X)$ funkcija kojom je opisana zavisnost između slučajnih veličina X i Y, a ε je slučajna greška, odnosno slučajna promenljiva koja prati Gausovu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma)$.

7.1 Korelacija između dve grupe merenja

Neka su merene dve fizičke veličine X i Y i kao rezultat dobijene vrednosti

$$\begin{array}{lcl} x_1, x_2, \ldots, x_n & \Rightarrow & \bar{x}_n;\ \ \sigma_{Ex} \\ y_1, y_2, \ldots, y_n & \Rightarrow & \bar{y}_n;\ \ \sigma_{Ey} \end{array}$$

Zavisnost ovih dveju veličina izražava se stepenom korelacije između njih $\varrho(x, y)$, pomoću izraza:

$$\varrho(x, y) = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sigma_{Ex}\sigma_{Ey}}$$

Ovako definisana vrednost koeficijenta korelacije može imati vednosti u intervalu: $-1 \leq \varrho(x, y) \leq 1.$

Zavisno od vrednosti koeficijenta korelacije slučajne veličine X i Y mogu biti slabije ili jače korelisane (zavisne). Koeficijent korelacije ima sledeće osobine:

1° Ako je $\varrho(x, y) \cong 0$, x i y su nekorelisane.

2° Ako je $\varrho(x, y) > 0$, x i y su pozitivno korelisane.

3° Ako je $\varrho(x, y) < 0$, x i y su negativno korelisane.

4° Ako je $\varrho(x, y) = \pm 1$, x i y su linearno korelisane, odnosno postoji linearna zavisnost između slučajnih veličina:

$$y = a \pm b \cdot x.$$

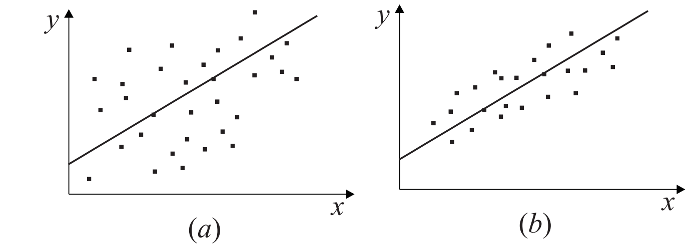
Zbog toga se koeficijent korelacije u primenama koristi kao mera linearne zavisnosti dve slučajne veličine.

Slučajne veličine X i Y su nekorelisane samo ako su nezavisne. Obrnuto ne važi. Ako su X i Y nekorelisane, nisu obavezno nezavisne. Stepen korelacije se, prema tome, koristi kao provera zavisnosti slučajnih veličina X i Y.

Primer: Na slici 7.1 pod (a) i (b) date su merene vrednosti neke fizičke veličine. U oba slučaja važi linearna zavisnost:

$$y = a + bx.$$

Međutim u slučaju (b) korelacija je bliža jedinici nego u slučaju pod (a), pa je linearna zavisnost izraženija u slučaju (b).



Slika 7.1. Primer slabokorelisane linearne zavisnosti a) i dobrokorelisane linearne zavisnoti bliske jedinici b).

7.2 Regresija

Neka su rezultati merenja fizičke veličine Y zavisno od promenljive X parovi vrednosti:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n).$$

Potrebno je odrediti najpogodniji oblik funkcionalne zavisnosti merene fizičke veličine. Pretpostavlja se da pri merenju veličine X nije napravljena nikakva greška, tako da se Y može odrediti sa najvećom tačnošću. Dijagram koji prikazuje skup merenih tačaka $(x_i, y_i), (i = 1, 2, \ldots, n)$ naziva se *dijagram rasturanja.* Funkcije koja najpodobnije povezuje i opisuje obeležje merene fizičke veličine Y zavisno od parametara X naziva se *regresionom krivom.*

7.2.1 Linearna regresija

Ako je veza između obeležja linearna tada se funkcija naziva *linearnom regresijom.* Ako linearna regresija zavisi od jednog parametra naziva se *jednostrukom linearnom regresijom*, a ako zavisi od više parametara naziva se *višestrukom linearnom regresijom.*

Neka su merene vrednosti parovi tačaka (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$ opisane linearnom funkcijom oblika:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gde su a i b određeni brojevi, a ε slučajna promenljiva sa konačnim matematičkim očekivanjem $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$ i konačnim standardnim odstupanjem $\sigma(\varepsilon) = \sigma$, a koja prati Gausovu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma)$.

Na osnovu eksperimentalnih vrednosti $(x_i, y_i), (i = 1, 2, \ldots, n)$ potrebno je odrediti vrednosti a i b pretpostavljene prave.

Uvodi se pomoćna prava: $$y'_i = a + bx_i + \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a greška koja se pri tome čini je: $\pm\varepsilon = y_i - y'_i$, ali tako da je: $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \to 0.$

Najbolja vrednost y, određuje se prema metodi najmanjih kvadrata, a biće ona koja daje minimalnu sumu kvadrata odstupanja:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y'_i)^2 \to min$$

Prema metodi najmanjih kvadrata formira se pomoćna funkcija u obliku:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx'_i)]^2$$

Vrednosti a i b nalaze se iz uslova da funkcija $S(a, b)$ ima minimum, tj. iz uslova:

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (a+bx_i)\right](-1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (a+bx_i)\right](-x_i) = 0$$

Posle sređivanja dobija se sistem jednačina:

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se tražene vrednosti a i b u obliku:

$$a = \bar{y}_n - b \cdot \bar{x}_n\,; \qquad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n \cdot \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}_n^2} \qquad \text{gde je:} \qquad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{i} \quad \bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Ukoliko se uvedu sledeće smene:

$$\Delta_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2, \qquad \Delta_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2$$

$$\Delta_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_i - \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

gde su Δ_x^2 i Δ_y^2 zbirovi kvadrata odstupanja od srednje vrednosti dobija se: $b = \dfrac{\Delta_{xy}}{\Delta_x^2}\,; \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$

Odavde se može videti da određena regresiona prava uvek prolazi kroz tačku $(\bar{x}, \bar{y})$. Koristeći izraz za koeficijent korelacije parametar b može se napisati u obliku: $b = \varrho(x,y) \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}.$

Na taj način jednačina regresione prave se može napisati u obliku: $y = \bar{y} + \varrho(x,y) \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

U opštem slučaju se ispituje zazavisnost $y = a + bx$ i $x = c + dy$, jer su obe promenljive slučajne. Zatim se vrši analiza zavisno od ugla između ovih pravih, a time se određuje zavisnost slučajnih veličina. Ako je $\varrho = \pm 1$ regresione prave se poklapaju, pa postoji potpuna linearna zavisnost između promenljivih x_i i y_i. Ako je $\varrho = 0$ tada su jednačine regresionih pravih $y = \bar{x}$ i $x = \bar{y}$ i one stoje normalno jadna na drugoj. U ovom slučaju nema linearne zavisnosti između x_i i y_i.

7.2.2 Konzistentnost rezultata merenja linearne zavisnosti

Ocenjene vrednosti parametara regresione prave mogu se izraziti u obliku: $\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}\,; \quad \hat{b} = \dfrac{\Delta_{xy}}{\Delta_x^2}$

Zbir kvadrata odstupanja y_i od vrednosti na dobijenoj regresionoj pravoj je:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y} + b\bar{x} - bx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}) - 2b\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \Delta_y^2 - 2b\Delta_{xy} + b^2\Delta_x^2$$

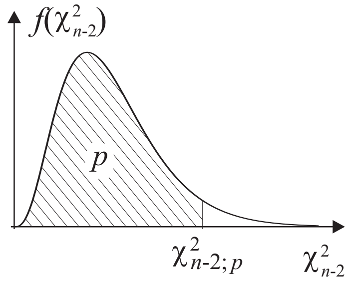
$$= \Delta_y^2 - 2b\Delta_x^2 + b^2\Delta_x^2 = \Delta_y^2 - b^2\Delta_x^2$$

Ocena standardne devijacije σ je: $\sigma_E^2 = \dfrac{\Delta^2}{n-2} \cdot \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{n-2}{\sigma^2} \cdot \sigma_E^2 = \dfrac{\Delta^2}{\sigma^2}\chi_{n-2}^2 = \chi_0^2.$

Na osnovu toga se konzistentnost nerenja, tj. slaganje predloženog modela regresione prave sa merenjima, može proveriti na nivou poverenja $p\,[\%]$, χ^2 - testom, odnosno:

$$P(\chi_0^2 \leq \chi^2_{n-2;\,p}) = p$$

Vrednosti $\chi^2_{n-2;\,p}$ se određuju iz tablica za χ^2 raspodelu (tabela D na strani 186). Odavde sledi da se za $\chi_0^2 \leq \chi^2_{n-2;\,p}$ model regresione prave prihvata na nivou poverenja p, ukoliko promenjiva upada u šrafiranu oblast na slici 7.2.



Slika 7.2. Primer jednostranog intervala poverenja za proveru konzistentnosti rezultata linearne zavisnosti.

7.2.3 Polinomna regresija

U ovom slučaju pretpostavlja se polinomna zavisnost slučajnih veličina Y i X u obliku:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + \varepsilon$$

Postupak određivanja koeficijenata polinomne regresije isti je kao i za linearnu regresiju prvog reda. Na primer za polinom drugog reda koeficijenti su a, b i c. Ovi koeficijenti određuju se metodom najmanjih kvadrata. Formira se pomoćna funkcija u obliku:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i + cx_i^2)]^2$$

Vrednosti koeficijenata a, b i c određuju se iz uslova da funkcija $S(a,b,c)$ ima minimum, odnosno:

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a} = 0\,; \quad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b} = 0\,; \quad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c} = 0$$

Odavde sledi sistem jednačina:

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se traženi koeficijenti a, b i c.

7.2.4 Provera saglasnosti regresionog modela

U slučaju da se χ^2-testom pokaže da više modela odgovaraju eksperimentalnim vrednostima (linearni, parabolični ili neki drugi) kao kriterijum pri izboru modela koristi se indeks krivolinijske korelacije r.

Neka je procenjena regresiona prava $y = \hat{a} + \hat{b}x$. Zbir kvadrata odstupanja y_i od procenjene vrednosti na regresionoj pravoj (ili regresionoe krive) je:

$$\Delta^2 = \Delta_y^2 - \hat{b}^2\Delta_x^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y^2 = \hat{b}^2\Delta_x^2 + \Delta^2$$

Za idealno tačan model je $\Delta^2 = 0$ ($\varepsilon = 0$) sledi da je Δ^2 - zbir kvadrata odstupanja usled slučajne greške, a $\hat{b}^2\Delta_x^2$ - je objašnjeni deo zbira kvadrata ako bi model bio idealno tačan. Na osnovu prethodnih jednačina indeks krivolinijske korelacije uzorka predstavlja odnos objašnjenog dela $\hat{b}^2\Delta_x^2$ i Δ_y^2 ukupnog zbira kvadrata odstupanja y_i od srednje vrednosti $\bar{y}_i$, odnosno:

$$r = \frac{\hat{b}^2 \Delta_x^2}{\Delta_y^2} = 1 - \frac{\Delta^2}{\Delta_y^2}\,; \quad 0 \le r \le 1$$

Ako je vrednost indeksa r bliska jedinici, onda to ukazuje na dobru saglasnost modela sa eksperimentalnim podacima. Za linearnu regresiju ovaj indeks krivolinijske korelacije jednak je koeficijentu korelacije, odnosno:

$$r = \left(\frac{\Delta_{xy}^2}{\Delta_x \Delta_y} \right)^2 = \varrho^2(x, y)$$

Ovaj model važi i kada regresioni model nije prava linija. Model koji daje veće r, odnosno bliže jedinici je bolji.

Zadaci

$\boxed{\textbf{7.1}}$ Prava linija je povučena kroz tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Pokazati da je jednačina ove prave:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Rešenje:

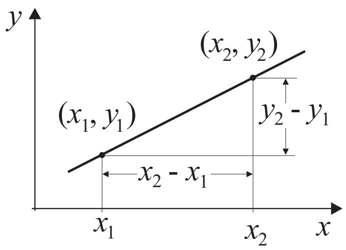
Jednačina prave u opštem obliku je: $y = a + bx$.

Tada tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) leže na pravoj. Njihove vrednosti prema prethodnoj jednačini su:

$$y_1 = a + bx_1\,; \quad y_2 = a + bx_2 \quad \text{pa je:}$$

$$y - y_1 = b(x - x_1), \quad \text{i} \quad y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{gde je } b \text{ nagib prave.}$$



Posle zamene vrednosti za b u prvu prethodnu jednačinu dobija se jednačina tražene prave u obliku:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\boxed{\textbf{7.2}}$ Izračunati stepen korelacije između fizičkih veličina X i Y, za vrednosti x i y date u tabeli:

x :	1	1	2	4
y :	7	8	6	3

Rešenje:
Zavisnost dveju fizičkih veličina data je stepenom korelacije:

$$\varrho(x, y) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sigma_{Ex}\sigma_{Ey}}$$

Da bi se odredio stepen korelacije proračunate su vednosti $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_{Ex} i σ_{Ey} i ostali članovi prethodnog izraza, kao u sledećoj tabeli:

n	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1	-1	1	7	1	1	-1
2	1	-1	1	8	2	4	-2
3	2	0	0	6	0	0	0
4	4	2	4	3	-3	9	-6
$\sum_{i=1}^{n}$	8		6	24		14	-9

Na osnovu vrednosti iz ove tabele dobijaju se srednje vrednosti: $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4} x_i}{4} = 2$, i $\bar{y} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4} y_i}{4} = 6$,

i standardna odstupanja: $\sigma_{Ex} = \sqrt{\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2} = 1.2225$, i $\sigma_{Ey} = \sqrt{\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2} = 1.871$,

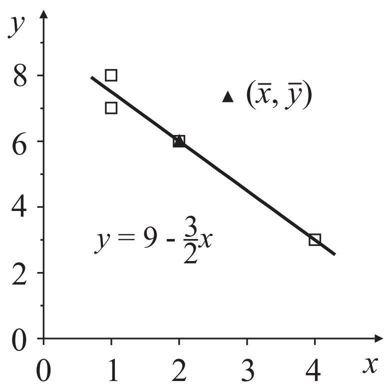
a stepen korelacije između fizičkih veličina x i y iznosi: $\varrho(x, y) = \dfrac{-9 \cdot 1/4}{1.225 \cdot 1.871} = -0.982$

$\boxed{\mathbf{7.3}}$ Naći regresionu pravu koja najbolje opisuje zavisnost fizičkih veličina Y od X na osnovu vrednosti iz sledeće tabele:

x :	1	1	2	4
y :	7	8	6	3

Rešenje:

Neka je jednačina regresione prave oblika: $y = a + bx$



Da bi se odredili koeficijenti prave formira se sledeća tabela:

n	x	y	$y = a + bx$	$xy = ax + bx^2$
1	1	7	$7 = a + b$	$7 = a + b$
2	1	8	$8 = a + b$	$8 = a + b$
3	2	6	$6 = a + 2b$	$12 = 2a + 4b$
4	4	3	$3 = a + 4b$	$12 = 4a + 16b$
$\sum_{i=1}^{n}$			$24 = 4a + 8b$	$39 = 8a + 22b$

Odavde sledi sledeći sistem jednačina:

$$4a + 8b = 24, \quad a + 22b = 39$$

Rešenja ovog sistema jednačina su: $a = 9$ i $b = -3/2$, pa je jednačina regresione prave: $y = 9 - \dfrac{3}{2}x$

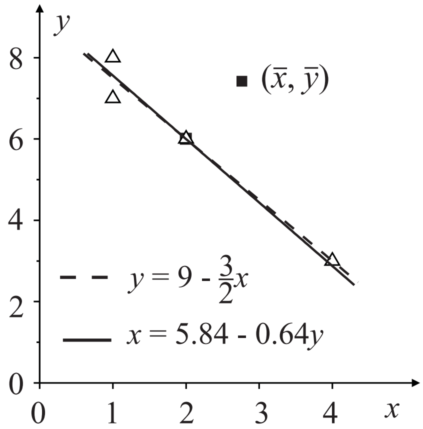
Dobijena prava prolazi kroz tačku $(\bar{x} = 2, \bar{y} = 6)$.

$\boxed{\mathbf{7.4}}$ Naći regresionu pravu koja najbolje opisuje zavisnost X od Y na osnovu merenih podataka iz tabele:

x:	1	1	2	4
y:	7	8	6	3

Rešenje:

Neka je jednačina regresione prave oblika: $x = c + dy$



Da bi se odredili koeficijenti prave formira se sledeća tabela:

n	x	y	$x = c + dy$	$xy = cx + dy^2$
1	1	7	$1 = c + 7d$	$7 = 7c + 49d$
2	1	8	$1 = c + 8d$	$8 = 8c + 64d$
3	2	6	$2 = c + 6d$	$12 = 6c + 36d$
4	4	3	$4 = c + 3d$	$12 = 3c + 9d$
$\sum_{i=1}^{n}$			$8 = 4c + 24d$	$39 = 24c + 158d$

Odavde sledi sistem jednačina:

$$4c + 24d = 8, \;\; 24c + 158d = 39$$

Rešenja ovog sistema jednačina su: $c = 5.84$ i $d = -0.64$,

pa je jednačina regresione prave: $x = 5.84 - 0.64y$

Prava prolazi kroz tačku ($\bar{x} = 2, \bar{y} = 6$). Ova regresiona prava $x = 5.84 - 0.64y$ i regresiona prava iz prethodnog zadatka $y = 9 - 1.5x$ skoro se poklapaju (videti sliku), što znači da se eksperimentalni podaci dobro opisuju pravom linijom.

$\boxed{\textbf{7.5}}$ Odrediti jednačinu prave ako su u sledećoj tabeli dati parovi vrednosti izmerenih rezultata:

$x:$	1	2	3	4	5
$y:$	2	3	7	7	11

Rešenje:

Neka je jednačina regresione prave oblika: $y = a + bx$

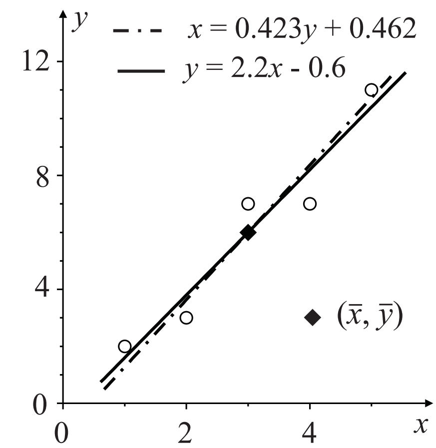
Da bi se odredili koeficijenti prave koristi se metod najmanjih kvadrata, pa se dobija sistem jednačina:

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se tražene vrednosti koeficijenata a i b. Formira se pomoćna tabela u obliku:

x	y	$y = a + bx$	$xy = ax + bx^2$
1	2	$2 = a + b$	$2 = a + b$
2	3	$3 = a + 2b$	$6 = 2a + 4b$
3	7	$7 = a + 3b$	$21 = 3a + 16b$
4	7	$7 = a + 4b$	$28 = 4a + 16b$
5	11	$11 = a + 5b$	$55 = 5a + 25b$
$\sum_{i=1}^{n}$		$30 = 5a + 15b$	$112 = 15a + 55b$



Odavde sledi sledeći sistem jednačina:

$$5a + 15b = 30, \quad 15a + 55b = 112$$

Rešenja ovog sistema jednačina su: $a = -0.6$ i $b = 2.2$,

pa je jednačina regresione prave: $y = -0.6 + 2.2x$

Sličnim postupkom dobijaju se i koeficijenti c i d jednačine prave $x = c + dy$, čije su vrednosti: $c = 0.462$ i $d = 0.423$, pa je:

$$x = 0.462 + 0.423y$$

Obe jednačine: $y = -0.6 + 2.2x$ i $x = 0.462 + 0.423y$ prolaze kroz tačku ($\bar{x} = 6, \bar{y} = 6$).

Grafički su ove dve prave prikazane na sledećoj slici. Sa slike može se videti da se ove dve prave skoro poklapaju, tj da je ugao između ovih pravih veoma mali pa se merene vrednosti veličina mogu opisati pravom linijom.

$\boxed{\textbf{7.6}}$ Prilikom 12 merenja visine očeva x i sinova y dobijene su sledeće vrednosti:

x (cm)	165	160	170	163	173	158	178	168	173	170	175	180
y (cm)	173	168	173	165	175	168	173	165	180	170	173	178

Odrediti jednačinu linearne zavisnosti visine očeva i sinova. Da li regresiona prava dobro opisuje ovu zavisnost?

Rešenje:

Neka je jednačina prve regresione prave oblika: $y = a + bx$

Primenom metode najmanjih kvadrata dobija se sledeći sistem jednačina:

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Neka je sada jednačina druge regresione prave oblika: $x = c + dy$

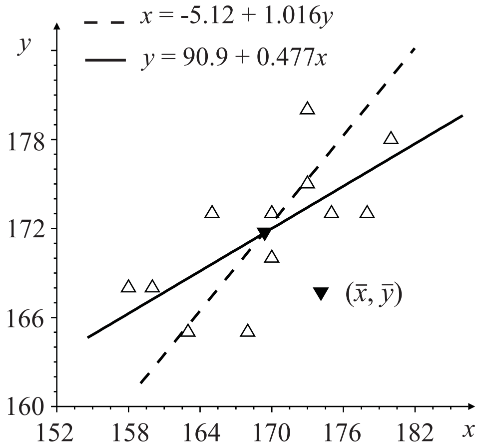
Primenom metode najmanjih kvadrata dobija se drugi sistem jednačina po c i d:

$$n \cdot c + d \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$c \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i + d \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

U cilju jednostavnijeg izračunavanja vednosti koeficijenata a, b, c i d formira se pomoćna tabela u obliku:

n	x	y	x^2	xy	y^2
1	165	173	27225	28543	29929
2	160	168	25600	26880	28224
3	170	173	28900	29410	29929
4	163	165	26569	26895	27225
5	173	175	29929	30275	30625
6	158	168	24964	26544	28224
7	178	173	31684	30794	29929
8	168	165	28224	27720	27225
9	173	180	29929	31140	32400
10	170	170	28900	28900	28900
11	175	173	30625	30275	29929
12	180	178	32400	32040	31684
$\sum_{i=1}^{n}$	2033	2061	344949	349418	354223



Na osnovu ovih vrednosti iz predhodne tabele dobija se prvi sistem jednačina:

$$12a + 2033b = 2061, \quad 2033a + 334949b = 349418$$

čije je rešenje $a = 90.9$ i $b = 0.477$, pa je jednačina prve regresione prave: $y = 90.9 + 0.477x$

Sličnim postupkom dobija se i drugi sistem jednačina:

$$12c + 2061d = 2033, \quad 2061c + 356223d = 349418$$

čije je rešenje $c = -5.12$ i $d = 1.016$, pa je jednačina prve regresione prave: $x = -5.12 + 1.016y$

Ove prave prikazane su gornjoj slici. Ugao izmednju ovih pravih je veći nego u predhodnim zadacima, što ukazuje na nešto slabiju linearnu zavisnost slučajnih veličina X i Y.

Da bi se odredio koeficijent korelacije slučajnih veličina X i Y formira se sledeća tabela u obliku:

n	x	y	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	165	173	-4.42	19.536	1.25	1.563	-5.25
2	160	168	-9.42	88.736	-3.75	14.063	35.325
3	170	173	0.58	0.336	1.25	1.563	0.725
4	163	165	-6.42	41.216	-6.75	45.563	43.335
5	173	175	3.58	12.816	3.25	10.563	11.635
6	158	168	-11.42	130.416	-3.75	14.063	42.825
7	178	173	8.58	73.616	1.25	1.563	10.725
8	168	165	-1.42	2.016	-6.75	45.563	9.585
9	173	180	3.58	12.816	8.25	68.063	29.535
10	170	170	0.58	0.336	-1.75	3.063	-1.015
11	175	173	5.58	31.136	1.25	1.563	6.975
12	180	178	10.58	11.936	6.25	39.063	66.125
$\sum_{i=1}^{n}$	2033	2061		524.912		246.256	250.250

Srednja vrednost visine očeva i sinova, respektivno iznosi: $\bar{x} = 169.24$ cm, $\bar{y} = 171.75$ cm, a standardna odstupanja iznose: $\sigma_x = 6.614$ cm i $\sigma_y = 4.530$ cm. Na osnovu ovih vrednosti i vrednosti iz tabele koeficijent korelacije iznosi:

$$\varrho(x,y) = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)(y_i-\bar{y}_n)}{\sigma_{Ex}\sigma_{Ey}} = \frac{\frac{1}{12}\cdot 250.250}{6.614\cdot 4.530} = 0.696$$

što ukazuje na umerenu linearnu zavisnost slučajnih veličina X i Y, odnosno umerene linearne zavisnosti visina očeva i sinova.

$\boxed{\textbf{7.7}}$ Merenjem je dobijena rastvorljivost kiseonika r u vodi na temperaturi u opsegu od 8° C do 30° C:

$t(^\circ\,\mathrm{C})$	8	13	16	21	24	28	30
r $(\times 10^{-3}\,masenih\,\%)$	5.62	5.01	4.70	4.25	4.00	3.71	3.58

Pod pretpostavkom da se ova zavisnost linearno menja, odrediti regresionu pravu koja najbolje opisuje ovu promenu u posmatranom opsegu temperature

Rešenje:

Neka je jednačina regresione prave oblika: $y = a + bx$

gde je x temperatura a y rastvorljivost kiseonika u vodi. Formira se pomoćna tabela u obliku:

n	x	y	$y = a + bx$	$xy = ax + bx^2$
1	8	5.62	$5.62 = a + 8b$	$44.96 = 8a + 64b$
2	13	5.01	$5.01 = a + 13b$	$65.13 = 13a + 169b$
3	16	4.70	$4.70 = a + 16b$	$75.20 = 16a + 256b$
4	21	4.25	$4.25 = a + 21b$	$89.25 = 21a + 441b$
5	24	4.00	$4.00 = a + 24b$	$96.00 = 24a + 576b$
6	28	3.71	$3.71 = a + 28b$	$103.88 = 28a + 784b$
7	30	3.58	$3.58 = a + 30b$	$107.40 = 30a + 900b$
$\sum_{i=1}^{n}$			$30.87 = 7a + 140b$	$581.82 = 140a + 3190b$

Na osnovu vrednosti iz tabele dobija se sledeći sistem jednačina:

$$7a + 140b = 30.87$$
$$140a + 3190b = 581.82$$

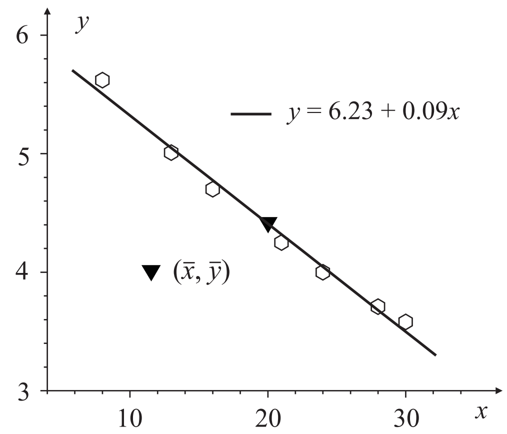
Rešenja ovog sistema jednačina su:

$a = 6.23$ i $b = -0.09$,

pa je jednačina regresione prave:

$$y = 6.23 - 0.09x$$

koja prolazi kroz tačku ($\bar{x} = 20$, $\bar{y} = 4.40$).



$\boxed{\mathbf{7.8}}$ Merenjem jačine struje I kroz neko kolo sa promenom temperature $t(°\mathrm{C})$ dobijene su sledeće vrednosti:

$I\,(\mathrm{mA})$	7.3	5.6	4.9	3.9	3.8	3.2	2.9
$t(°\,\mathrm{C})$	6	14	22	30	40	48	55

Pod pretpostavkom da je ova zavisnost linearna, odrediti jednačinu prave koja najbolje opisuje promenu struje sa temperaturom.

Rešenje:

Neka je jednačina regresione prave oblika: $I = a + bt$

gde je I jačina električne struje u kolu, a t temperatura. Formira se pomoćna tabela u obliku:

n	t	I	$I = a + bt$	$t \cdot I = at + bt^2$
1	6	7.3	$7.3 = a + 6b$	$43.8 = 6a + 36b$
2	14	5.6	$5.6 = a + 14b$	$78.4 = 14a + 196b$
3	22	4.9	$4.9 = a + 22b$	$107.8 = 22a + 484b$
4	30	3.5	$3.9 = a + 30b$	$117.0 = 30a + 900b$
5	40	3.8	$3.8 = a + 40b$	$152.0 = 40a + 1600b$
6	48	3.2	$3.2 = a + 48b$	$153.6 = 48a + 2304b$
7	55	2.9	$2.9 = a + 55b$	$159.5 = 55a + 3025b$
$\sum_{i=1}^{n}$			$31.6 = 7a + 215b$	$812.1 = 215a + 8545b$

Na osnovi proračunatih vrednosti iz tabele sledi sistem jednačina:

$$7a + 215b = 31.6$$
$$215a + 8545b = 812.1$$

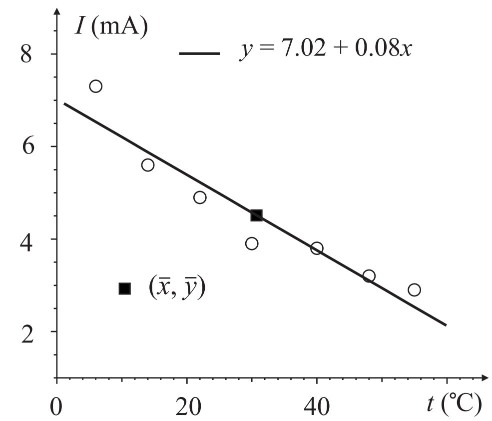
Rešenja ovog sistema jednačina su:

$$a = 7.021 \text{ i } b = -0.082,$$

pa je jednačina regresione prave:

$$I = 7.02 - 0.08t$$

koja prolazi kroz tačku ($\bar{t} = 30.71$; $\bar{I} = 4.51$).



7.9 Odrediti regresionu pravu koja najbolje opisuje zavisnost linearne dimenzije predmeta l (cm) od temperature t(°C) za sledeće vrednosti dobijene merenjem:

t(°C)	25	35	45	55	65
l (cm)	82.0	82.5	83.2	83.7	84.1

Rešenje:

Primenom metode najmanjih kvadrata formiira se pomoćna funkcija: $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[l-(a+bt)]^2$

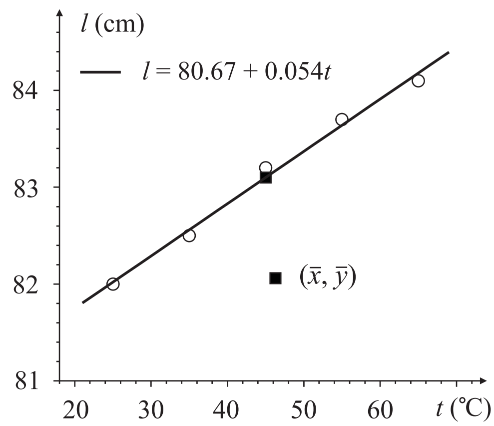
Zatim se nalazi minimum ove funkcije $S(a,b)$, nalaženjem parcijalnog izvoda po a i b, i izjednačavanjem sa nulom dobija sistem jednačina u obliku:

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot l_i$$

Vrednosti suma u ovom sistemu jednačina dobijaju se na osnovu sledeće pomoćne tabele:

n	t	l	t^2	$t \cdot l$
1	25	82.0	625	2050.0
2	35	82.5	1225	2887.5
3	45	83.2	2025	3744.0
4	55	83.7	3025	4603.5
5	65	84.1	4225	5466.5
$\sum_{i=1}^{n}$	225	415.5	11125	18751.5



Na osnovu vrednosti iz tabele dobija se sledeći sistem jednačina:

$$5a + 225b = 415.5$$

$$225a + 11125b = 18751.5$$

Rešenja ovog sistema jednačina su: $a = 80.67$ i $b = 0.054$, pa je jednačina regresione prave:

$$l = 80.67 + 0.054t$$

koja prolazi kroz tačku ($\bar{t} = 45$; $\bar{l} = 83.1$).

7.10 Merenjem otpornosti sa promenom temperature dobijaju se sledeće vrednosti:

t(°C)	10	15	18	23	27
$R\,(\Omega)$	57	60	62	67	75

Pod pretpostavkom da je zavisnost otpornosti sa temperaturom linearna, naći regresionu pravu koja najbolje opisuje ovu zavisnost i prikazati je grafički.

Rešenje:

Neka je jednačina regresione prave oblika: $R = a + bt$

gde je R električna otpornost, a t temperatura. Formira se pomoćna tabela u obliku:

n	t	R	t^2	$t \cdot R$
1	10	57	100	570
2	15	60	225	900
3	18	62	324	1116
4	23	67	529	1541
5	27	75	729	2025
$\sum_{i=1}^{n}$	93	321	1907	6152

Vrednosti koeficijenata prave a i b dati su u obliku:

$$a = \bar{R} - b\bar{t}\,; \quad b = \frac{\Delta_{tR}}{\Delta_t^2}$$

gde su: $\Delta_{tR} = \sum_{i=1}^{n} t_i R_i - n\bar{t}\bar{R}\,; \quad \Delta_t^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n\bar{t}^2$

Na osnovu ovih izraza i proračunatih vrednosti iz tabele dobija se:

$$\bar{t} = 18.6\,°\mathrm{C}\,; \quad \bar{R} = 64.2\,\Omega$$

$$\Delta_{tR} = 181.4\,; \quad \Delta_t^2 = 177.2$$

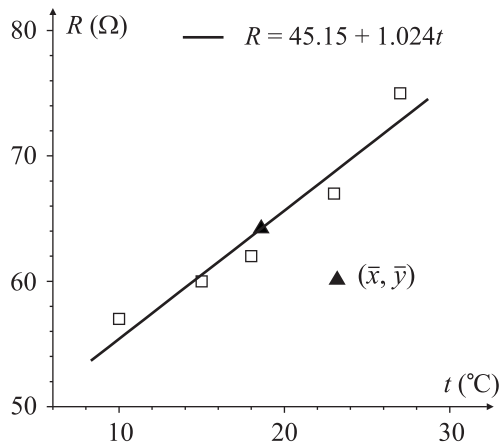
pa se za vrednosti koeficijenata regresione prave dobija:

$$b = 1.024\,; \quad a = 45.15$$

Pa je jednačina regresione prave oblika:

$$R = 45.15 + 1.024 \cdot t$$

koja prolazi kroz tačku ($\bar{t} = 18.6$; $\bar{R} = 64.2$).



$\boxed{\textbf{7.11}}$ Merenjem otpornosti sa promenom temperature u opsegu od 6∘C do 40°C, dobijene su sledeće vrednosti:

$t\,(°\mathrm{C})$	6	8	11	14	17	19	22	24	26	30	35	40
$R\,(\Omega)$	30	35	38	39	41	43	45	50	53	56	59	58

Ako se otpornost R menja linearno sa temperaturom t u posmatranom opsegu temperature po zakonu $R = R_0(1+\alpha t)$, gde je R_0 otpornost na 0°C i α temperaturni koeficijent promene otpornosti, koristeći metod linearne regresije odrediti α.

Rešenje:

Jednačina regresione prave je oblika:

$$R = a + bt$$

gde je R električna otpornost, a t temperatura.

Vrednosti koeficijenata regresione prave a i b dati su u obliku:

$$a = \bar{R} - b\bar{t}\,; \qquad b = \frac{\Delta_{tR}}{\Delta_t^2}$$

gde su: $\quad \Delta_{tR} = \sum_{i=1}^{n} t_i R_i - n\bar{t}\bar{R}\,; \quad \Delta_t^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n\bar{t}^2$

Formira se pomoćna tabela u obliku:

n	t	R	t^2	$\cdot R$
1	6	30	36	180
2	8	35	64	280
3	11	38	121	418
4	14	39	196	546
5	17	41	289	697
6	19	43	361	817
7	22	45	484	990
8	24	50	576	1200
9	26	53	676	1378
10	30	56	900	1680
11	35	59	1225	2065
12	40	58	1600	2320
$\sum_{i=1}^{n}$	252	547	6528	12571

Na osnovu prethodnih izraza i vrednosti iz tabele dobija se:

$$\bar{t} = 21°\mathrm{C}\,; \quad \bar{R} = 45.58\,\Omega$$

$$\Delta_{tR} = 1084.84\,; \quad \Delta_t^2 = 1236$$

Na osnovu ovih vrednosti jednačiana regresione prave je oblika: $R = 27.17 + 0.88t$

Vrednosti koeficijenata regresione prave su: $b = 0.88\,;\quad a = 27.17$

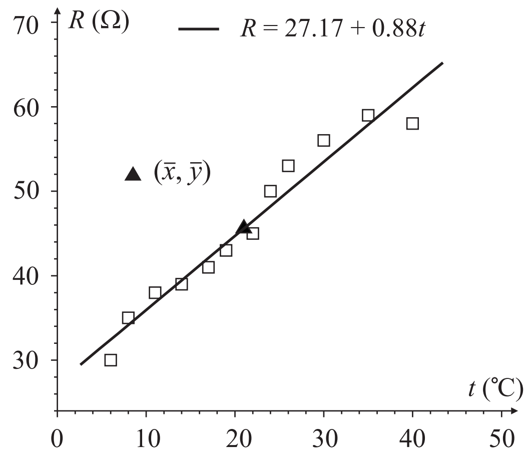
koja prolazi kroz tačku ($\bar{t} = 21;\ \bar{R} = 45.58$).

Promena otpornosti sa promenom temperature data regresionom pravom oblika:

$$R = R_0(1 + \alpha t) = 27.17(1 + 0.032t),$$

što je ilustrovano na slici. Iz ovako dobijene zavisnosti se može odrediti vrednost temperaturnog koeficijenta otpornosti α kao vrednost nagiba linearne zavisnosti,

$$\alpha = 0.032°\mathrm{C}^{-1}\ .$$



$\boxed{\textbf{7.12}}$ Neka su date eksperimentalne tačke:

(0,0), (1,10), (2,25), (3,20), (4,30), (5,15), (6,40), (7,30)

Metodom polinomne regresije odrediti krivu drugog reda koja najbolje opisuje ove eksperimentalne tačke.

Rešenje:

Neka je jednačina parabole: $y = ax^2 + bx + c$

Razlika izračunatih i izmerenih vrednosti je: $\varepsilon = y_i - y = y_i - ax^2 - bx + c$

Formira se suma kvadrata greške:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i^2 - bx_i - c]^2 = S(a,b,c)$$

Prema metodi najmanjih kvadrata treba da je $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \to min$, što se dobija iz uslova:

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c} = 0$$

Odnosno:

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-1) = 0$$

Ove tri jednačine mogu se napiosati u obliku:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 y_i - a\sum_{i=1}^{8} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{8} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{8} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{8} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i - a\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{8} x_i - c\sum_{i=1}^{8} \cdot 1 = 0$$

Formira se tabela u obliku:

n	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$y_i - prave$	ε_i
1	0	0	0	0	0	0	0	2.500	-2.500
2	1	10	1	1	1	10	10	10.476	-0.476
3	2	25	4	8	16	50	100	17.142	7.858
4	3	20	9	27	81	60	180	22.498	-2.498
5	4	30	16	64	256	120	480	26.514	3.456
6	5	15	25	125	625	75	375	29.280	-14.280
7	6	40	36	216	1296	240	1440	30.706	9294
8	7	30	49	343	2401	210	1470	30.882	-8.22
$\sum_{i=1}^{n}$	28	170	140	784	4676	765	4055		0.00

Sistem jednačina od tri nepoznate ima oblik:

$$4676 \cdot a + 784 \cdot b + 140 \cdot c = 4055$$

$$784 \cdot a + 140 \cdot b + 28 \cdot c = 465$$

$$140 \cdot a + 28 \cdot b + 8 \cdot c = 170$$

Rešenje ovog sistema jednačina je:

$$a = 0.655; \quad b = 8.631; \quad c = 2.5$$

Jednačina tražene parabole je:

$$y = 0.655 \cdot x^2 + 8.631 \cdot x + 2.500.$$

Tražena parabola je prikazana na slici punom linijom.

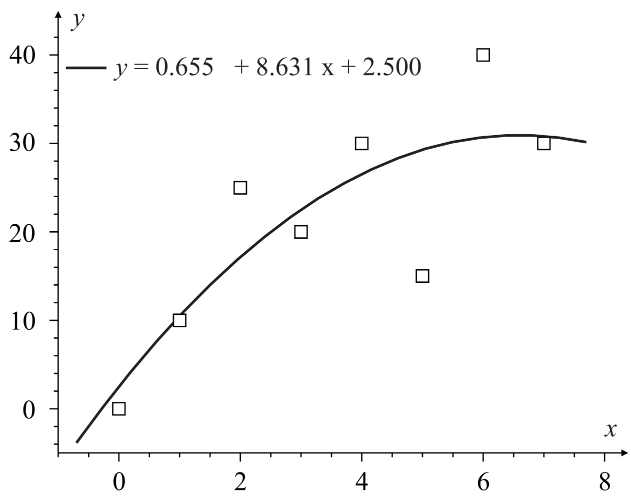


Tabela A. Vrednosti Binomne raspodele

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
2	0	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500
	1	0.1800	0.3200	0.4200	0.4800	0.5000
	2	0.0100	0.0400	0.0900	0.1600	0.2500
3	0	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250
	1	0.2430	0.3840	0.4410	0.4320	0.3750
	2	0.0270	0.0960	0.2222	0.2880	0.3750
	3	0.0010	0.0080	0.0270	0.0640	0.1250
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1926	0.0625
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625
5	0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313
	1	0.3280	0.4096	0.3602	0.2592	0.1562
	2	0.0729	0.2048	0.3087	0.3456	0.3125
	3	0.0081	0.0512	0.1323	0.2304	0.3125
	4	0.0004	0.0064	0.0284	0.0768	0.1562
	5	0.0000	0.0003	0.0024	0.0102	0.0313
6	0	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156
	1	0.3543	0.3932	0.3025	0.1866	0.0938
	2	0.0984	0.3458	0.3241	0.3110	0.2344
	3	0.0146	0.0819	0.1852	0.2765	0.3125
	4	0.0012	0.0154	0.0595	0.1382	0.2344
	5	0.0001	0.0015	0.0102	0.0369	0.0938
	6	0.0000	0.0001	0.0007	0.0041	0.0156
7	0	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078
	1	0.3720	0.3670	0.2471	0.1306	0.0547
	2	0.1240	0.2753	0.3177	0.2613	0.1641
	3	0.0230	0.1147	0.2269	0.2903	0.2734
	4	0.0026	0.0287	0.0972	0.1935	0.2734
	5	0.0002	0.0043	0.0250	0.0774	0.1641
	6	0.0000	0.0004	0.0036	0.0172	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0002	0.0016	0.0078
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0312
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0312
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039
9	0	0.3874	0.1342	0.0404	0.0101	0.0020
	1	0.3874	0.3020	0.1556	0.0605	0.0176
	2	0.1722	0.3020	0.2668	0.1612	0.0703
	3	0.0446	0.1762	0.2668	0.2508	0.1641
	4	0.0074	0.0661	0.1715	0.2508	0.2461
	5	0.0008	0.0165	0.0735	0.1672	0.2461
	6	0.0001	0.0028	0.0210	0.0743	0.1641
	7	0.0000	0.0003	0.0039	0.0212	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0004	0.0035	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020

Nastavak tabele A. Vrednosti Binomne raspodele

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
10	0	0.3487	0.1074	0.0282	0.0060	0.0010
	1	0.3874	0.2684	0.1211	0.0403	0.0098
	2	0.1937	0.3020	0.2335	0.1209	0.0439
	3	0.0574	0.2013	0.2668	0.2150	0.1172
	4	0.0112	0.0881	0.2001	0.2508	0.2054
	5	0.0015	0.0264	0.1029	0.2007	0.2461
	6	0.0001	0.0055	0.0368	0.1115	0.2051
	7	0.0000	0.0008	0.0090	0.0425	0.1172
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0106	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010
15	0	0.2050	0.0352	0.0047	0.0005	0.0000
	1	0.3431	0.1319	0.0306	0.0047	0.0005
	2	0.2669	0.2309	0.0915	0.0219	0.0032
	3	0.1285	0.2502	0.1701	0.0634	0.0139
	4	0.0429	0.1876	0.2186	0.1268	0.0416
	5	0.0105	0.1031	0.2061	0.1859	0.0917
	6	0.0019	0.0430	0.1473	0.2066	0.1527
	7	0.0003	0.0039	0.0811	0.1771	0.1964
	8	0.0000	0.0034	0.0348	0.1181	0.1964
	9	0.0000	0.0001	0.0115	0.0612	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0030	0.0245	0.0917
	11	0.0000	0.0000	0.0006	0.0074	0.0416
	12	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0008	0.0000	0.0000
	1	0.2701	0.0577	0.0068	0.0005	0.0000
	2	0.2852	0.1369	0.0279	0.0031	0.0002
	3	0.1901	0.2053	0.0716	0.0124	0.0011
	4	0.0898	0.2182	0.1307	0.0350	0.0046
	5	0.0319	0.1746	0.1789	0.0746	0.0148
	6	0.0089	0.1081	0.1916	0.1244	0.0370
	7	0.0020	0.0546	0.1643	0.1659	0.0739
	8	0.0003	0.0221	0.1144	0.1797	0.1201
	9	0.0001	0.0074	0.0653	0.1597	0.1602
	10	0.0000	0.0020	0.0309	0.1172	0.1762
	11	0.0000	0.0005	0.0120	0.0710	0.1602
	12	0.0000	0.0001	0.0038	0.0355	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0003	0.0049	0.0370
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	0.0148
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0046
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Nastavak tabele A. Vrednosti Binomne raspodele

n	x	p				
30	0	0.0424	0.0012	0.0012	0.0000	0.0000
	1	0.1413	0.0093	0.0003	0.0000	0.0000
	2	0.2277	0.0337	0.0018	0.0000	0.0000
	3	0.2360	0.0785	0.0072	0.0003	0.0000
	4	0.1771	0.1325	0.0208	0.0012	0.0000
	5	0.1023	0.1723	0.0464	0.0042	0.0002
	6	0.0474	0.1795	0.0829	0.0115	0.0005
	7	0.0180	0.1538	0.1219	0.0263	0.0019
	8	0.0058	0.1105	0.1501	0.0505	0.0055
	9	0.0015	0.0676	0.1573	0.0283	0.0133
	10	0.0004	0.0255	0.1516	0.1152	0.0280
	11	0.0001	0.0161	0.1103	0.1396	0.0508
	12	0.0000	0.0064	0.0748	0.1474	0.0806
	13	0.0000	0.0022	0.0444	0.1360	0.1115
	14	0.0000	0.0007	0.0232	0.1101	0.1355
	15	0.0000	0.0002	0.0105	0.0783	0.1444
	16	0.0000	0.0000	0.0043	0.0490	0.1355
	17	0.0000	0.0000	0.0015	0.0279	0.1115
	18	0.0000	0.0000	0.0004	0.0119	0.0806
	19	0.0000	0.0000	0.0002	0.0054	0.0508
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0020	0.0280
	21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0133
	22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0055
	23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0019
	24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005
	25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela B. Vrednosti Poasonove raspodele

x	m									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

x	m									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	m									
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1831	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.7740
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0941	0.1008
6	0.0146	0.0175	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0140	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	m									
	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0451	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1733	0.1781	0.1822	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0386	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0033	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Nastavak tabele B. Vrednosti Poasonove raspodele

x	m									
	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0680	0.0630	0.0584	0.0540	0.0500	0.0462	0.0428	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1775
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0256	0.0281	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	m									
	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0466
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1616
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0732	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0273	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0007	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

x	m									
	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	0.0022	0.0020	0.0028	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0849	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1453	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1547	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0245	0.0265	0.0286	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0264
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0099	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Nastavak tabele B. Vrednosti Poasonove raspodele

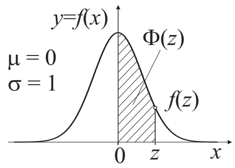
x	m									
	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1340	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1237	0.1351	0.1363	0.1373	0.1382	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1225	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

x	m									
	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.0160	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0467	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0772	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1035	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1383	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1291	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0926	0.0948	0.0970
12	0.0506	0.0530	0.0555	0.0580	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0482	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Nastavak tabele B. Vrednosti Poasonove raspodele

x	m									
	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1092	0.1064	0.1037	0.1010	0.0983	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1273	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1248	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0929	0.0048
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0158	0.0169	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

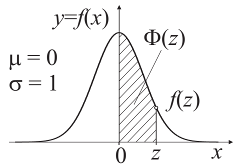
Tabela C. Vrednosti Gausove raspodele



z	$\Phi(z)$	$f(z)$	z	$\Phi(z)$	$f(z)$	z	$\Phi(z)$	$f(z)$	z	$\Phi(z)$	$f(z)$
0.00	0.00000	0.39894									
0.01	0.00399	0.39892	0.51	0.19498	0.35029	1.01	0.34375	0.23955	1.51	0.43448	0.12758
0.02	0.00798	0.39886	0.52	0.19847	0.34849	1.02	0.34614	0.23713	1.52	0.43575	0.12566
0.03	0.01197	0.39876	0.53	0.20194	0.34667	1.03	0.34850	0.23471	1.53	0.43699	0.12376
0.04	0.01595	0.39862	0.54	0.20540	0.34482	1.04	0.35083	0.23230	1.54	0.43822	0.12188
0.05	0.01994	0.39844	0.55	0.20884	0.34294	1.05	0.35314	0.22988	1.55	0.43943	0.12001
0.06	0.02392	0.39822	0.56	0.21226	0.34105	1.06	0.35543	0.22747	1.56	0.44062	0.11816
0.07	0.02790	0.39797	0.57	0.21566	0.33912	1.07	0.35769	0.22506	1.57	0.44179	0.11632
0.08	0.03188	0.39767	0.58	0.21904	0.33718	1.08	0.35993	0.22265	1.58	0.44295	0.1145
0.09	0.03586	0.39733	0.59	0.22241	0.33521	1.09	0.36215	0.22025	1.59	0.44408	0.1127
0.10	0.03983	0.39695	0.60	0.22575	0.33322	1.10	0.36434	0.21785	1.60	0.44520	0.11092
0.11	0.04380	0.39654	0.61	0.22907	0.33121	1.11	0.36650	0.21546	1.61	0.44630	0.10915
0.12	0.04776	0.39608	0.62	0.23237	0.32918	1.12	0.36864	0.21307	1.62	0.44739	0.10741
0.13	0.05172	0.39559	0.63	0.23565	0.32713	1.13	0.37076	0.21069	1.63	0.44845	0.10567
0.14	0.05567	0.39505	0.64	0.23891	0.32506	1.14	0.37286	0.20831	1.64	0.44950	0.10396
0.15	0.05962	0.39448	0.65	0.24215	0.32297	1.15	0.37493	0.20594	1.65	0.45053	0.10226
0.16	0.06356	0.39387	0.66	0.24537	0.32086	1.16	0.37698	0.20357	1.66	0.45154	0.10059
0.17	0.06750	0.39322	0.67	0.24857	0.31874	1.17	0.37900	0.20121	1.67	0.45254	0.09893
0.18	0.07142	0.39253	0.68	0.25175	0.31659	1.18	0.38100	0.19886	1.68	0.45352	0.09728
0.19	0.07535	0.39181	0.69	0.25490	0.31443	1.19	0.38298	0.19652	1.69	0.45449	0.09566
0.20	0.07926	0.39104	0.70	0.25804	0.31225	1.20	0.38493	0.19419	1.70	0.45544	0.09405
0.21	0.08317	0.39024	0.71	0.26115	0.31006	1.21	0.38686	0.19186	1.71	0.45637	0.09246
0.22	0.08706	0.3894	0.72	0.26424	0.30785	1.22	0.38877	0.18954	1.72	0.45729	0.09089
0.23	0.09095	0.38853	0.73	0.26731	0.30563	1.23	0.39065	0.18724	1.73	0.45819	0.08933
0.24	0.09484	0.38762	0.74	0.27035	0.30339	1.24	0.39251	0.18494	1.74	0.45907	0.0878
0.25	0.09871	0.38667	0.75	0.27337	0.30114	1.25	0.39435	0.18265	1.75	0.45994	0.08628
0.26	0.10257	0.38568	0.76	0.27637	0.29887	1.26	0.39617	0.18037	1.76	0.46080	0.08478
0.27	0.10642	0.38466	0.77	0.27935	0.29659	1.27	0.39796	0.17810	1.77	0.46164	0.08329
0.28	0.11026	0.38361	0.78	0.28231	0.29431	1.28	0.39973	0.17585	1.78	0.46246	0.08183
0.29	0.11409	0.38251	0.79	0.28524	0.29200	1.29	0.40148	0.17360	1.79	0.46328	0.08038
0.30	0.11791	0.38139	0.80	0.28815	0.28969	1.30	0.40320	0.17137	1.80	0.46407	0.07895
0.31	0.12172	0.38023	0.81	0.29103	0.28737	1.31	0.40490	0.16915	1.81	0.46485	0.07754
0.32	0.12552	0.37903	0.82	0.29389	0.28504	1.32	0.40658	0.16694	1.82	0.46562	0.07614
0.33	0.12930	0.3778	0.83	0.29673	0.28269	1.33	0.40824	0.16474	1.83	0.46638	0.07477
0.34	0.13307	0.37654	0.84	0.29955	0.28034	1.34	0.40988	0.16256	1.84	0.46712	0.07341
0.35	0.13683	0.37524	0.85	0.30234	0.27798	1.35	0.41149	0.16038	1.85	0.46785	0.07206
0.36	0.14058	0.37391	0.86	0.30511	0.27562	1.36	0.41309	0.15822	1.86	0.46856	0.07074
0.37	0.14431	0.37255	0.87	0.30785	0.27324	1.37	0.41466	0.15608	1.87	0.46926	0.06943
0.38	0.14803	0.37115	0.88	0.31057	0.27086	1.38	0.41621	0.15395	1.88	0.46995	0.06814
0.39	0.15173	0.36973	0.89	0.31327	0.26848	1.39	0.41774	0.15183	1.89	0.47062	0.06687
0.40	0.15542	0.36827	0.90	0.31594	0.26609	1.40	0.41925	0.14973	1.90	0.47129	0.06562
0.41	0.15910	0.36678	0.91	0.31859	0.26369	1.41	0.42073	0.14764	1.91	0.47194	0.06438
0.42	0.16276	0.36526	0.92	0.32122	0.26129	1.42	0.42220	0.14556	1.92	0.47257	0.06316
0.43	0.16640	0.36371	0.93	0.32382	0.25888	1.43	0.42364	0.14350	1.93	0.4732	0.06195
0.44	0.17003	0.36213	0.94	0.32639	0.25647	1.44	0.42507	0.14146	1.94	0.47381	0.06077
0.45	0.17365	0.36053	0.95	0.32895	0.25406	1.45	0.42647	0.13943	1.95	0.47441	0.05959
0.46	0.17724	0.35889	0.96	0.33147	0.25164	1.46	0.42786	0.13742	1.96	0.47500	0.05844
0.47	0.18082	0.35723	0.97	0.33398	0.24923	1.47	0.42922	0.13542	1.97	0.47558	0.05730
0.48	0.18439	0.35553	0.98	0.33646	0.24681	1.48	0.43057	0.13344	1.98	0.47615	0.05618
0.49	0.18793	0.35381	0.99	0.33891	0.24439	1.49	0.43189	0.13147	1.99	0.47671	0.05508
0.50	0.19146	0.35207	1.00	0.34135	0.24197	1.5	0.43319	0.12952	2.00	0.47725	0.05399

Nastavak tabele C.

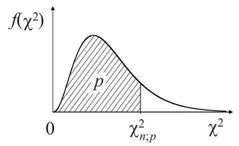
Vrednosti Gausove raspodele



z	$\Phi(z)$	$f(z)$	z	$\Phi(z)$	$f(z)$	z	$\Phi(z)$	$f(z)$	z	$\Phi(z)$	$f(z)$
2.01	0.47779	0.05292	2.51	0.49397	0.01709	3.01	0.49870	0.00430	3.51	0.49978	0.00084
2.02	0.47831	0.05186	2.52	0.49413	0.01667	3.02	0.49874	0.00417	3.52	0.49979	0.00081
2.03	0.47882	0.05082	2.53	0.49430	0.01625	3.03	0.49878	0.00405	3.53	0.49979	0.00079
2.04	0.47933	0.0498	2.54	0.49446	0.01585	3.04	0.49882	0.00393	3.54	0.49980	0.00076
2.05	0.47982	0.04879	2.55	0.49462	0.01545	3.05	0.49886	0.00381	3.55	0.49981	0.00073
2.06	0.4803	0.0478	2.56	0.49477	0.01506	3.06	0.49890	0.00370	3.56	0.49982	0.00071
2.07	0.48078	0.04682	2.57	0.49492	0.01468	3.07	0.49893	0.00358	3.57	0.49982	0.00068
2.08	0.48124	0.04586	2.58	0.49506	0.01431	3.08	0.49897	0.00348	3.58	0.49983	0.00066
2.09	0.48169	0.04491	2.59	0.49520	0.01394	3.09	0.49900	0.00337	3.59	0.49984	0.00063
2.10	0.48214	0.04398	2.60	0.49534	0.01358	3.10	0.49903	0.00327	3.60	0.49984	0.00061
2.11	0.48257	0.04307	2.61	0.49548	0.01323	3.11	0.49907	0.00317	3.61	0.49985	0.00059
2.12	0.483	0.04217	2.62	0.49561	0.01289	3.12	0.49910	0.00307	3.62	0.49986	0.00057
2.13	0.48342	0.04128	2.63	0.49573	0.01256	3.13	0.49913	0.00298	3.63	0.49986	0.00055
2.14	0.48382	0.04041	2.64	0.49586	0.01223	3.14	0.49916	0.00288	3.64	0.49987	0.00053
2.15	0.48422	0.03955	2.65	0.49598	0.01191	3.15	0.49919	0.00279	3.65	0.49987	0.00051
2.16	0.48462	0.03871	2.66	0.49610	0.01160	3.16	0.49921	0.00271	3.66	0.49988	0.00049
2.17	0.48500	0.03788	2.67	0.49621	0.01130	3.17	0.49924	0.00262	3.67	0.49988	0.00047
2.18	0.48537	0.03706	2.68	0.49632	0.01100	3.18	0.49927	0.00254	3.68	0.49989	0.00046
2.19	0.48574	0.03626	2.69	0.49643	0.01071	3.19	0.49929	0.00246	3.69	0.49989	0.00044
2.20	0.48610	0.03547	2.70	0.49654	0.01042	3.20	0.49932	0.00238	3.70	0.49989	0.00042
2.21	0.48645	0.03470	2.71	0.49664	0.01014	3.21	0.49934	0.00231	3.71	0.49990	0.00041
2.22	0.48679	0.03394	2.72	0.49674	0.00987	3.22	0.49936	0.00224	3.72	0.49990	0.00039
2.23	0.48713	0.03319	2.73	0.49684	0.00961	3.23	0.49938	0.00216	3.73	0.49991	0.00038
2.24	0.48746	0.03246	2.74	0.49693	0.00935	3.24	0.49940	0.00210	3.74	0.49991	0.00037
2.25	0.48778	0.03174	2.75	0.49702	0.00909	3.25	0.49943	0.00203	3.75	0.49991	0.00035
2.26	0.48809	0.03103	2.76	0.49711	0.00885	3.26	0.49945	0.00196	3.76	0.49992	0.00034
2.27	0.48840	0.03034	2.77	0.49720	0.00861	3.27	0.49946	0.00190	3.77	0.49992	0.00033
2.28	0.48870	0.02965	2.78	0.49728	0.00837	3.28	0.49948	0.00184	3.78	0.49992	0.00031
2.29	0.48899	0.02898	2.79	0.49737	0.00814	3.29	0.49950	0.00178	3.79	0.49993	0.00030
2.30	0.48928	0.02833	2.80	0.49745	0.00792	3.30	0.49952	0.00172	3.80	0.49993	0.00029
2.31	0.48956	0.02768	2.81	0.49753	0.00770	3.31	0.49954	0.00167	3.81	0.49993	0.00028
2.32	0.48983	0.02705	2.82	0.49760	0.00748	3.32	0.49955	0.00161	3.82	0.49994	0.00027
2.33	0.49010	0.02643	2.83	0.49767	0.00727	3.33	0.49957	0.00156	3.83	0.49994	0.00026
2.34	0.49036	0.02582	2.84	0.49775	0.00707	3.34	0.49958	0.00151	3.84	0.49994	0.00025
2.35	0.49062	0.02522	2.85	0.49782	0.00687	3.35	0.49960	0.00146	3.85	0.49994	0.00024
2.36	0.49086	0.02463	2.86	0.49788	0.00668	3.36	0.49961	0.00141	3.86	0.49995	0.00023
2.37	0.49111	0.02406	2.87	0.49795	0.00649	3.37	0.49963	0.00136	3.87	0.49995	0.00022
2.38	0.49135	0.02349	2.88	0.49801	0.00631	3.38	0.49964	0.00132	3.88	0.49995	0.00021
2.39	0.49158	0.02294	2.89	0.49808	0.00613	3.39	0.49965	0.00127	3.89	0.49995	0.00021
2.40	0.49180	0.02239	2.90	0.49814	0.00595	3.40	0.49967	0.00123	3.90	0.49995	0.00020
2.41	0.49203	0.02186	2.91	0.49820	0.00578	3.41	0.49968	0.00119	3.91	0.49996	0.00019
2.42	0.49224	0.02134	2.92	0.49825	0.00562	3.42	0.49969	0.00115	3.92	0.49996	0.00018
2.43	0.49245	0.02083	2.93	0.49831	0.00545	3.43	0.49970	0.00111	3.93	0.49996	0.00018
2.44	0.49266	0.02033	2.94	0.49836	0.00530	3.44	0.49971	0.00107	3.94	0.49996	0.00017
2.45	0.49286	0.01984	2.95	0.49841	0.00514	3.45	0.49972	0.00104	3.95	0.49996	0.00016
2.46	0.49306	0.01936	2.96	0.49846	0.00499	3.46	0.49973	0.00100	3.96	0.49996	0.00016
2.47	0.49325	0.01888	2.97	0.49851	0.00485	3.47	0.49974	0.00097	3.97	0.49997	0.00015
2.48	0.49343	0.01842	2.98	0.49856	0.00470	3.48	0.49975	0.00094	3.98	0.49997	0.00014
2.49	0.49362	0.01797	2.99	0.49861	0.00457	3.49	0.49976	0.00090	3.99	0.49997	0.00014
2.50	0.49379	0.01753	3.00	0.49865	0.00443	3.50	0.49977	0.00087	4.00	0.49997	0.00013

Tabela D. Vrednosti χ^2-raspodele

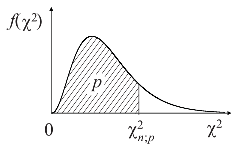
Vrednosti χ^2_p; za date stepene slobode n i verovatnoće p



n	p = 0.0005	0.0001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40
1	0.000000393	0.00000157	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	0.00886	0.0158	0.0358	0.0642	0.102	0.148	0.275
2	0.00100	0.00200	0.0100	0.0201	0.0506	0.102	0.156	0.211	0.325	0.446	0.575	0.713	1.022
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.472	0.584	0.798	1.005	1.213	1.424	1.869
4	0.0639	0.0908	0.207	0.297	0.484	0.711	0.897	1.064	1.366	1.649	1.923	2.195	2.753
5	0.158	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.394	1.610	1.994	2.343	2.675	3.000	3.655
6	0.299	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	1.941	2.204	2.661	3.070	3.455	3.828	4.570
7	0.485	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.528	3.833	3.358	3.822	4.255	4.671	5.493
8	0.710	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.144	3.490	4.078	4.594	5.071	5.527	6.423
9	0.972	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	3.875	4.168	4.817	5.380	5.899	6.393	7.357
10	1.265	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.446	4.865	5.570	6.179	6.737	7.267	8.295
11	1.587	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.124	5.578	6.336	6.989	7.585	8.148	9.237
12	1.934	2.214	3.074	3.570	4.404	5.226	5.818	6.304	7.114	7.807	8.438	9.034	10.181
13	2.305	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	6.524	7.042	7.901	8.634	9.299	9.926	11.129
14	2.697	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.242	7.790	8.696	9.467	10.165	10.821	12.078
15	3.108	3.487	4.600	5.229	6.262	7.261	7.969	8.547	9.499	10.307	11.036	11.721	13.030
16	3.536	3.942	5.142	5.811	6.908	7.962	8.707	9.312	10.309	11.152	11.912	12.624	13.983
17	3.980	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	9.452	10.085	11.124	12.002	12.792	13.530	14.937
18	4.439	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.205	10.864	11.946	12.857	13.675	14.440	15.893
19	4.912	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	10.965	11.650	12.772	13.716	14.561	15.351	16.850
20	5.398	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	11.731	12.442	13.603	14.577	15.451	16.266	17.809
21	5.896	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	12.503	13.239	14.439	15.444	16.344	17.182	18.768
22	6.404	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	13.281	14.040	15.278	16.313	17.239	18.100	19.729
23	6.924	7.529	9.260	10.196	11.688	13.090	14.063	14.847	16.121	17.186	18.137	19.021	20.690
24	7.453	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	14.851	15.657	16.978	18.061	19.037	19.943	21.652
25	7.991	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	15.644	16.472	17.817	18.939	19.939	20.867	22.615
26	8.538	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	16.440	17.290	18.670	19.819	20.843	21.792	23.579
27	9.093	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	17.240	18.112	19.526	20.702	21.749	22.719	24.544
28	9.656	10.389	12.461	13.565	15.308	16.928	18.044	18.938	20.385	21.587	22.656	23.647	25.509
29	10.225	10.985	13.121	14.256	16.047	17.708	18.851	19.766	21.246	22.474	23.566	24.576	26.475
30	10.802	11.586	13.787	14.953	16.791	18.493	19.662	20.598	22.109	23.363	24.477	25.507	27.441
40	16.903	17.912	20.707	22.164	24.433	26.509	27.923	29.048	30.854	32.343	33.659	34.871	37.134
50	23.455	24.668	27.991	29.707	32.357	34.764	36.393	37.685	39.751	41.447	42.940	44.312	46.863
60	30.332	31.729	35.535	37.485	40.482	43.188	45.011	46.454	48.754	50.637	52.290	53.807	56.619
70	37.456	39.025	43.275	45.442	48.758	51.739	53.740	55.322	57.838	59.893	61.694	63.343	66.395
80	44.776	46.52	51.172	53.540	57.153	60.381	62.558	64.269	66.986	69.201	71.140	72.912	76.187
90	52.257	54.137	59.196	61.754	65.647	69.126	71.447	73.280	76.186	78.551	80.619	82.507	85.991
100	59.872	61.895	67.328	70.065	74.222	77.929	80.397	82.345	85.430	87.936	90.126	92.123	95.806

Nastavak tabele D.

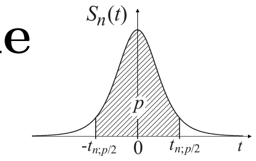
Vrednosti χ^2-raspodele

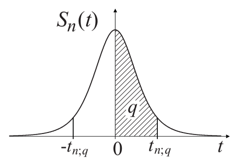


n	p = 0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.85	0.9	0.925	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.455	0.708	1.074	1.323	1.642	2.072	2.705	3.170	3.841	5.024	6.635	7.879	10.829	12.117
2	1.386	1.833	2.408	2.772	3.219	3.794	4.605	5.180	5.991	7.378	9.210	10.597	13.817	15.204
3	2.366	2.946	3.665	4.108	4.642	5.317	6.251	6.905	7.815	9.348	11.345	12.838	16.269	17.733
4	3.357	4.045	4.878	5.385	5.989	6.745	7.779	8.497	9.488	11.143	13.277	14.860	18.470	20.001
5	4.351	5.132	6.064	6.626	7.289	8.116	9.236	10.009	11.070	12.832	15.086	16.750	20.519	22.110
6	5.348	6.211	7.231	7.841	8.558	9.447	10.645	11.467	12.592	14.449	16.812	18.548	22.462	24.108
7	6.346	7.283	8.383	9.037	9.803	10.749	12.017	12.884	14.067	16.013	18.475	20.278	24.327	26.023
8	7.344	8.351	9.524	10.219	11.031	12.028	13.362	14.271	15.507	17.535	20.090	21.955	26.130	27.875
9	8.343	9.414	10.656	11.389	12.243	13.289	14.684	15.632	16.919	19.023	21.666	23.589	27.883	29.673
10	9.342	10.473	11.781	12.549	13.443	14.535	15.987	16.973	18.307	20.483	23.209	25.188	29.594	31.427
11	10.341	11.530	12.899	13.701	14.632	15.768	17.275	18.296	19.675	21.920	24.725	26.757	31.271	33.145
12	11.340	12.584	14.012	14.845	15.813	16.990	18.549	19.604	21.026	23.337	26.217	28.299	32.917	34.830
13	12.340	13.636	15.119	15.984	16.986	18.203	19.812	20.899	22.362	24.736	27.688	29.819	34.536	36.488
14	13.339	14.686	16.223	17.117	18.152	19.408	21.064	22.182	23.685	26.119	29.141	31.319	36.132	38.119
15	14.339	15.734	17.322	18.245	19.312	20.604	22.307	23.455	24.996	27.488	30.578	32.801	37.706	39.729
16	15.338	16.780	18.419	19.369	20.466	21.794	23.542	24.718	26.296	28.845	32.000	34.267	39.262	41.319
17	16.338	17.825	19.512	20.489	21.616	22.979	24.769	25.973	27.587	30.191	33.409	35.718	40.801	42.891
18	17.338	18.868	20.602	21.605	22.761	24.157	25.989	27.221	28.869	31.526	34.805	37.156	42.323	44.447
19	18.338	19.911	21.690	22.718	23.902	25.331	27.204	28.461	30.143	32.852	36.191	38.582	43.832	45.986
20	19.337	20.952	22.776	23.828	25.039	26.450	28.412	29.695	31.410	34.170	37.566	39.997	45.327	47.512
21	20.337	21.992	23.859	24.935	26.173	27.664	29.615	30.924	32.670	35.479	38.932	41.401	46.810	49.026
22	21.227	23.031	24.940	26.039	27.303	28.825	30.813	32.146	33.924	36.781	40.289	42.796	48.281	50.526
23	22.337	24.070	26.020	27.141	28.431	29.982	32.007	33.364	35.172	38.076	41.638	44.181	49.742	52.016
24	22.337	25.107	27.097	28.241	29.555	31.135	33.196	34.577	36.415	39.364	42.980	45.558	51.194	53.496
25	24.336	26.144	28.173	29.339	30.678	32.285	34.382	35.785	37.652	40.646	44.314	46.928	52.635	54.965
26	25.226	27.180	29.248	30.434	31.797	33.433	35.563	36.989	38.885	41.923	45.642	48.290	54.068	56.426
27	26.336	28.214	30.321	31.528	32.914	34.577	36.741	38.189	40.113	43.194	46.963	49.645	55.492	57.876
28	27.336	29.249	31.393	32.620	34.029	35.718	37.916	39.385	41.337	44.461	48.278	50.993	56.910	59.320
29	28.336	30.284	32.463	33.711	35.142	36.857	39.087	40.578	42.557	45.722	49.588	52.336	58.320	60.755
30	29.336	31.317	33.532	34.800	36.253	37.994	40.256	41.768	43.773	46.979	50.892	53.672	59.722	62.183
40	39.335	41.624	44.168	45.616	47.273	49.249	51.805	53.509	55.758	59.342	63.691	66.766	73.428	76.123
50	49.335	51.894	54.726	56.334	58.170	60.353	63.167	65.041	67.505	71.420	76.154	79.490	86.694	89.598
60	59.335	62.137	65.231	66.981	38.980	71.351	74.397	76.425	79.082	83.298	88.379	91.952	99.649	102.741
70	69.334	72.362	75.695	77.577	79.724	82.267	85.527	87.697	90.531	95.023	100.425	104.215	112.367	115.632
80	79.334	82.570	86.127	88.130	90.417	93.120	96.578	98.881	101.879	106.629	112.329	116.321	124.897	128.325
90	89.334	92.766	96.532	98.650	101.067	103.921	107.565	109.993	113.145	118.136	124.116	128.299	137.276	140.856
100	99.334	102.951	106.915	109.121	111.682	114.678	118.498	121.044	124.342	129.561	135.807	140.169	149.526	153.252

Tabela E. Vrednosti Studentove raspodele

Vrednosti $t_{n;p}$ za date stepene slobode n i verovatnoće p (slika levo)
i $t_{n;q}$ za date stepene slobode n i verovatnoće q (slika desno).

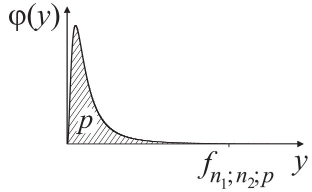




	p															
n	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	**0.6827**	0.70	0.80	0.90	0.95	**0.9545**	0.98	0.99	**0.9973**	0.999
1	0.158	0.325	0.509	0.726	1.000	1.376	1.837	1.963	3.078	6.314	12.706	13.968	31.821	63.657	235.784	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.321	1.386	1.886	2.920	4.303	4.527	6.965	9.925	19.206	31.599
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.197	1.250	1.638	2.353	3.182	3.307	4.541	5.841	9.219	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.142	1.189	1.533	2.132	2.776	2.869	3.747	4.604	6.620	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.919	1.111	1.156	1.476	2.015	2.571	2.649	3.365	4.032	5.507	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.091	1.134	1.440	1.943	2.447	2.516	3.143	3.707	4.904	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.077	1.119	1.415	1.895	2.365	2.429	2.998	3.499	4.530	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.067	1.108	1.397	1.859	2.306	2.366	2.896	3.355	4.277	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.059	1.100	1.383	1.833	2.262	2.320	2.821	3.250	4.094	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.541	0.700	0.879	1.052	1.093	1.372	1.812	2.228	2.284	2.764	3.169	3.957	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.048	1.088	1.363	1.796	2.201	2.259	2.718	3.106	3.850	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.043	1.083	1.356	1.782	2.179	2.231	2.681	3.054	3.764	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.537	0.694	0.870	1.040	1.079	1.350	1.771	2.160	2.212	2.650	3.012	3.694	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.037	1.076	1.345	1.761	2.145	2.195	2.624	2.977	3.636	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.034	1.074	1.341	1.753	2.131	2.181	2.602	2.947	3.586	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.032	1.071	1.337	1.746	2.120	2.169	2.583	2.921	3.544	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.030	1.069	1.333	1.740	2.110	2.158	2.567	2.898	3.507	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.028	1.067	1.330	1.734	2.101	2.149	2.552	2.878	3.475	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.027	1.065	1.328	1.729	2.093	2.140	2.539	2.861	3.447	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.026	1.064	1.325	1.725	2.086	2.133	2.528	2.845	3.422	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.024	1.063	1.323	1.721	2.080	2.126	2.518	2.831	3.400	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.023	1.061	1.321	1.717	2.074	2.120	2.508	2.819	3.379	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.022	1.060	1.319	1.714	2.069	2.115	2.500	2.807	3.361	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.021	1.059	1.318	1.711	2.064	2.110	2.492	2.797	3.345	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.020	1.058	1.316	1.708	2.060	2.105	2.485	2.787	3.330	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.866	1.020	1.057	1.315	1.706	2.056	2.101	2.479	2.779	3.316	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.019	1.057	1.314	1.703	2.052	2.097	2.473	2.771	3.303	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.018	1.056	1.312	1.701	2.048	2.093	2.467	2.763	3.291	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.017	1.055	1.311	1.699	2.045	2.090	2.462	2.756	3.280	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.017	1.055	1.310	1.697	2.042	2.087	2.457	2.750	3.270	3.646
35	0.127	0.255	0.388	0.529	0.681	0.852	1.015	1.052	1.306	1.690	2.030	2.074	2.438	2.724	3.229	3.591
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.013	1.050	1.303	1.684	2.021	2.064	2.423	2.704	3.199	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.008	1.045	1.296	1.671	2.000	2.043	2.390	2.660	3.130	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.845	1.004	1.040	1.289	1.658	1.980	2.021	2.358	2.617	3.064	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.675	0.842	1.000	1.036	1.282	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576	3.000	3.291
n	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	**0.34135**	0.35	0.40	0.45	0.475	**0.47725**	0.49	0.495	**0.49865**	0.4995
	q															

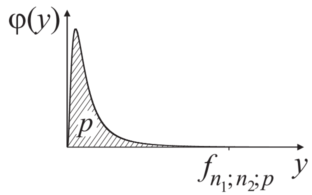
Tabela F. Vrednosti Fišerove raspodele

Vrednosti $f_{n_1;n_2;p}$; za verovatnoću $p = 0.995$



n_2	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	198.50	199.00	199.17	199.25	199.30	199.33	199.36	199.37	199.39	199.40	199.42	199.43	199.45	199.46	199.47	199.47	199.48	199.49	200
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686	43.387	43.085	42.778	42.622	42.466	42.308	42.149	41.989	41.829
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967	20.705	20.438	20.167	20.030	19.892	19.752	19.611	19.468	19.325
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618	13.384	13.146	12.903	12.780	12.656	12.530	12.402	12.274	12.144
6	18.635	14.544	12.917	12.928	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250	10.034	9.814	9.589	9.474	9.358	9.241	9.122	9.002	8.879
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380	8.176	7.968	7.754	7.645	7.535	7.423	7.309	7.193	7.076
8	14.688	11.042	9.597	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211	7.015	6.814	6.608	6.503	6.396	6.288	6.177	6.065	5.951
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417	6.227	6.033	5.832	5.729	5.625	5.519	5.410	5.300	5.188
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.303	6.116	5.908	5.847	5.661	5.471	5.274	5.173	5.071	4.966	4.859	4.750	4.639
11	12.226	8.912	7.600	6.881	6.422	6.102	5.865	5.682	5.537	5.418	5.236	5.049	4.855	4.756	4.654	4.551	4.445	4.337	4.226
12	11.754	8.510	7.226	6.521	6.071	5.757	5.525	5.345	5.202	5.086	4.906	4.721	4.530	4.432	4.331	4.228	4.123	4.015	3.904
13	11.374	8.187	6.926	6.234	5.791	5.482	5.253	5.076	4.935	4.820	4.643	4.460	4.270	4.173	4.073	3.970	3.866	3.758	3.647
14	11.060	7.922	6.680	5.998	5.562	5.257	5.031	4.857	4.717	4.603	4.428	4.247	4.059	3.961	3.862	3.760	3.655	3.547	3.436
15	10.798	7.701	6.476	5.803	5.372	5.071	4.847	4.674	4.536	4.424	4.250	4.070	3.883	3.786	3.687	3.585	3.480	3.372	3.260
16	10.575	7.514	6.303	5.638	5.212	4.913	4.692	4.521	4.384	4.272	4.099	3.921	3.734	3.638	3.539	3.437	3.332	3.224	3.112
17	10.384	7.354	6.156	5.497	5.075	4.779	4.559	4.389	4.254	4.142	3.971	3.793	3.607	3.511	3.412	3.311	3.206	3.097	2.984
18	10.218	7.215	6.028	5.375	4.956	4.663	4.445	4.276	4.141	4.031	3.860	3.683	3.498	3.402	3.303	3.201	3.096	2.987	2.873
19	10.073	7.094	5.916	5.268	4.853	4.561	4.345	4.177	4.043	3.933	3.763	3.587	3.402	3.306	3.208	3.106	3.000	2.891	2.776
20	9.944	6.987	5.818	5.174	4.762	4.472	4.257	4.090	3.956	3.847	3.678	3.502	3.318	3.222	3.123	3.022	2.916	2.806	2.690
21	9.830	6.891	5.730	5.091	4.681	4.393	4.179	4.013	3.880	3.771	3.602	3.427	3.243	3.147	3.049	2.947	2.841	2.730	2.614
22	9.727	6.806	5.652	5.017	4.609	4.323	4.109	3.944	3.812	3.703	3.535	3.360	3.176	3.081	2.982	2.880	2.774	2.663	2.546
23	9.635	6.730	5.582	4.950	4.544	4.259	4.047	3.882	3.750	3.642	3.475	3.300	3.117	3.021	2.922	2.820	2.713	2.602	2.484
24	9.551	6.661	5.519	4.890	4.486	4.202	3.991	3.826	3.695	3.587	3.420	3.246	3.062	2.967	2.868	2.756	2.659	2.546	2.428
25	9.475	6.598	5.462	4.835	4.433	4.150	3.939	3.776	3.645	3.537	3.370	3.196	3.013	2.918	2.819	2.716	2.609	2.496	2.377
26	9.406	6.541	5.409	4.785	4.384	4.103	3.893	3.730	3.599	3.492	3.325	3.152	2.969	2.873	2.774	2.671	2.563	2.450	2.330
27	9.342	6.489	5.361	4.740	4.340	4.059	3.850	3.688	3.557	3.450	3.284	3.110	2.928	2.832	2.733	2.630	2.522	2.408	2.287
28	9.284	6.440	5.317	4.698	4.300	4.020	3.811	3.649	3.519	3.412	3.246	3.073	2.890	2.794	2.695	2.592	2.483	2.369	2.247
29	9.230	6.396	5.276	4.659	4.262	3.983	3.775	3.613	3.483	3.377	3.211	3.038	2.855	2.759	2.660	2.557	2.448	2.333	2.210
30	9.180	6.355	5.239	4.623	4.228	3.949	3.742	3.580	3.451	3.344	3.179	3.006	2.823	2.727	2.628	2.524	2.415	2.300	2.176
40	8.828	6.066	4.976	4.374	3.986	3.713	3.509	3.350	3.222	3.117	2.953	2.781	2.598	2.502	2.402	2.296	2.184	2.064	1.932
60	8.495	5.795	4.729	4.140	3.760	3.492	3.291	3.134	3.008	2.904	2.742	2.571	2.387	2.290	2.187	2.079	1.962	1.834	1.688
120	8.179	5.539	4.497	3.921	3.548	3.285	3.087	2.933	2.808	2.705	2.544	2.373	2.188	2.089	1.984	1.871	1.747	1.606	1.431
∞	7.879	5.298	4.279	3.715	3.350	3.091	2.897	2.744	2.621	2.519	2.358	0.2187	2.000	1.898	1.789	1.669	1.533	1.364	1.000

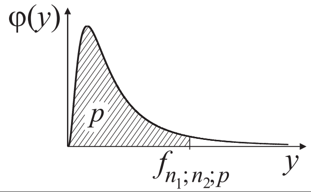
Tabela F. Vrednosti Fišerove raspodele



Vrednosti $f_{n_1;n_2;p}$; za verovatnoću $p = 0.99$

n_2	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052.2	4999.5	5403.3	5624.6	5763.7	5859.0	5928.3	5981.6	6022.5	6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6234.6	6260.7	6286.8	6313.0	6339.4	6366.0
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.332	99.356	99.374	99.388	99.399	99.416	99.432	99.449	99.458	99.466	99.474	99.493	99.491	99.501
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.552	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.467	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.046	4.859
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.997	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.745	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.603
12	9.330	6.927	5953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.781	3.701	3.619	3.536	3.449	3.361
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893.	4.556	4.318	4.142	4.005	3.895	3.805	3.666	3.552	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.960	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.921	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.779	2.695	2.608	2.517	2.421
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.668	2.583	2.495	2.403	2.306
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.536	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.404	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.676	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.132
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.421	4.538	4.045	3.725	3.500	3.330	3.198	3.092	3.005	2.869	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.563	5.390	4.510	4.018	3.699	3.474	3.305	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.719	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.029	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

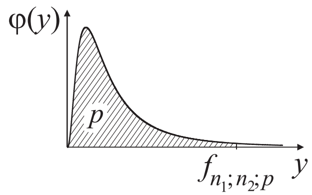
Tabela F. Vrednosti Fišerove raspodele



Vrednosti $f_{n_1;n_2;p}$; za verovatnoću $p = 0.975$

n_2	n_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87	993.10	997.25	1001.4	1005.6	1009.8	1014.0	1018.3
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419	14.337	14.253	14.167	14.124	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.365	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844	8.751	8.657	8.560	8.511	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.525	6.428	6.329	6.278	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.696	5.600	5.523	5.461	5.366	5.269	5.168	5.117	5.065	5.013	4.959	4.905	4.849
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.666	4.568	4.467	4.415	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8	7.571	6.060	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.200	4.101	4.000	3.947	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964	3.868	3.769	3.667	3.614	3.560	3.506	3.449	3.392	3.333
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.621	3.522	3.419	3.365	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3;526	3.430	3.330	3.226	3.173	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.277	3.177	3.073	3.019	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250	3.153	3.053	2.948	2.893	2.837	2.780	2.720	2.659	2.596
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147	3.050	2.949	2.844	2.789	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	2.963	2.862	2.756	2.701	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.889	2.788	2.681	2.625	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.825	2.723	2.616	2.560	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866	2.769	2.667	2.559	2.503	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817	2.720	2.617	2.509	2.452	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20	5.872	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.676	2.573	2.465	2.408	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735	2.637	2.534	2.425	2.368	2.308	2.247	2.182	2.114	2.042
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700	2.602	2.498	2.389	2.332	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23	5.750	4.349	3.751	3.408	3.184	3.023	2.902	2.808	2.731	2.668	2.570	2.467	2.357	2.299	2.239	2.176	2.111	2.042	1.968
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.640	2.541	2.437	2.327	2.269	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.614	2.515	2.411	2.301	2.242	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
26	5.659	4.266	3.670	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.590	2.491	2.387	2.276	2.217	2.157	2.093	2.026	1.955	1.878
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568	2.469	2.364	2.253	2.195	2.133	2.069	2.002	1.930	1.853
28	5.610	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547	2.448	2.344	2.232	2.174	2.112	2.048	1.980	1.907	1.829
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.669	2.592	2.529	2.430	2.325	2.213	2.154	2.092	2.028	1.959	1.886	1.807
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.027	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.412	2.307	2.195	2.136	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.288	2.182	2.068	2.007	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.169	2.061	1.945	1.882	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	2.055	1.945	1.825	1.760	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
∞	5.024	3.689	3.116	2.786	2.567	2.408	2.288	2.192	2.114	2.048	1.945	1.833	1.709	1.640	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

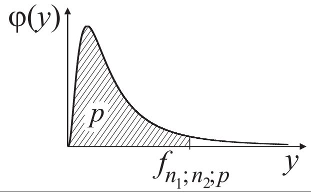
Tabela F. Vrednosti Fišerove raspodele



Vrednosti $f_{n_1;n_2;p}$; za verovatnoću $p = 0.95$

n_2	n_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.32
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.014	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.745	8.703	8.660	8.639	8.617	8.594	8.572	8.549	8.527
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.912	5.855	5.803	5.774	5.746	5.717	5.688	5.658	5.628
5	6.608	5.786	5.410	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.773	4.735	4.678	4.619	4.558	4.527	4.496	4.464	4.431	4.398	4.365
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.000	3.938	3.874	3.842	3.808	3.774	3.740	3.705	3.669
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.673	3.515	3.511	3.445	3.411	3.376	3.304	3.304	3.267	3.230
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.501	3.438-	3.388	3.347	3.284	3.218	3.150	3.115	3.079	3.043	3.005	2.967	2.928
9	5.117	4.257	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.073	3.006	2.937	2.901	2.864	2.826	2.787	2.748	2.707
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.136	3.072	3.020	2.978	2.913	2.845	2.774	2.737	2.700	2.661	2.621	2.580	2.538
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.788	2.719	2.646	2.609	2.571	2.531	2.490	2.448	2.405
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.153	2.687	2.617	2.544	2.506	2.466	2.426	2.384	2.341	2.296
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.604	2.533	2.459	2.420	2.380	2.339	2.297	2.252	2.206
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.534	2.463	2.388	2.349	2.308	2.266	2.223	2.178	2.131
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.791	2.707	2.641	2.558	2.544	2.475	2.404	2.328	2.288	2.247	2.204	2.160	2.114	2.066
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.425	2.352	2.276	2.235	2.194	2.151	2.106	2.059	2.010
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.381	2.308	2.230	2.190	2.148	2.104	2.058	2.011	1.960
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.342	2.269	2.191	2.150	1.107	2.063	2.017	1.968	1.917
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.308	2.234	2.156	2.114	2.071	2.026	1.980	1.930	1.878
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.278	2.203	2.124	2.083	2.039	1.994	1.946	1.896	1.843
21	4.325	3.467	3.073	2.840	2.685	2.573	2.488	2.421	2.366	2.321	2.250	2.176	2.096	2.054	2.010	1.965	1.917	1.866	1.812
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.226	2.151	2.071	2.028	1.984	1.938	1.890	1.838	1.783
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.64	2.528	2.442	2.315	2.320	2.275	2.204	2.128	2.048	2.005	1.961	1.914	1.865	1.813	1.751
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.183	2.108	2.027	1.984	1.939	1.892	1.842	1.790	1.733
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.237	2.165	2.089	2.008	1.964	1.919	1.872	1.822	1.768	1.711
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.266	2.220	2.148	2.072	1.990	1.946	1.901	1.853	1.803	1.749	1.691
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.132	2.056	1.974	1.930	1.884	1.836	1.785	1.731	1.672
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.118	2.041	1.959	1.915	1.869	1.820	1.769	1.714	1.654
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.105	2.028	1.945	1.901	1.854	1.806	1.754	1.698	1.638
30	4.171	3.316	2.922	2.69	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.092	2.015	1.932	1.887	1.841	1.792	1.740	1.684	1.622
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.450	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	2.004	1.925	1.839	1.793	1.744	1.693	1.637	1.577	1.509
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.917	1.836	1.748	1.700	1.649	1.594	1.534	1.467	1.389
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.911	1.834	1.751	1.659	1.608	1.554	1.495	1.429	1.352	1.254
∞	3.842	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938	1.880	1.831	1.752	1.666	1.571	1.517	1.459	1.394	1.318	1.221	1.000

Tabela F. Vrednosti Fišerove raspodele

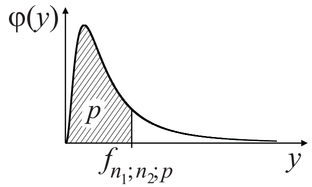


Vrednosti $f_{n_1;n_2;p}$; za verovatnoću $p = 0.90$

	n_1																		
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.241	58.20.	58.906	59.439	59.858	60.195	60.705	61.220	61.740	62.002	62.265	62.529	62.794	63.061	63.328
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.408	9.425	9.441	9.450	9.458	9.466	9.475	9.483	9.491
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230	5.216	5.200	5.185	5.176	5.168	5.160	5.151	5.143	5.134
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.896	3.869	3.844	3.831	3.817	3.804	3.790	3.775	3.761
5	4.060	3.780	3.620	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.268	3.238	3.207	3.191	3.174	3.157	3.140	3.123	3.105
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.015	2.983	2.958	2.937	2.905	2.871	2.836	2.818	2.800	2.781	2.762	2.742	2.722
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.668	2.632	2.595	2.575	2.556	2.535	2.514	2.493	2.471
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.727	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	2.502	2.464	2.425	2.404	2.383	2.361	2.339	2.316	2.293
9	3.360	3.007	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416	2.379	2.340	2.298	2.277	2.255	2.232	2.209	2.184	2.159
10	3.285	2.925	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.322	2.284	2.244	2.201	2.178	2.155	2.132	2.107	2.082	2.055
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	2.209	2.167	2.123	2.100	2.076	2.052	2.026	2.000	1.972
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	2.147	2.105	2.060	2.036	2.012	1.986	1.960	1.932	1.904
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	2.097	2.053	2.007	1.983	1.958	1.932	1.904	1.876	1.846
14	3.102	2.727	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	2.054	2.010	1.963	1.938	1.912	1.885	1.857	1.828	1.797
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059	2.017	1.972	1.924	1.899	1.873	1.845	1.817	1.787	1.755
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028	1.985	1.940	1.891	1.866	1.839	1.811	1.782	1.751	1.718
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001	1.958	1.912	1.862	1.836	1.809	1.781	1.751	1.719	1.686
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977	1.933	1.887	1.837	1.810	1.783	1.754	1.723	1.691	1.657
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956	1.912	1.865	1.814	1.787	1.759	1.730	1.699	1.666	1.631
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937	1.892	1.845	1.794	1.767	1.738	1.708	1.677	1.643	1.607
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920	1.875	1.827	1.766	1.748	1.719	1.689	1.657	1.623	1.586
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.061	2.008	1.967	1.933	1.904	1.859	1.811	1.779	1.731	1.702	1.671	1.639	1.604	1.567
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.890	1.845	1.796	1.744	1.716	1.686	1.655	1.622	1.587	1.549
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.878	1.832	1.783	1.730	1.702	1.672	1.641	1.607	1.572	1.533
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866	1.820	1.771	1.718	1.689	1.659	1.627	1.593	1.557	1.518
26	2.909	2.519	2.308	2.175	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855	1.809	1.760	1.706	1.677	1.647	1.615	1.581	1.544	1.504
27	2.901	2.511	2.299	2.166	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845	1.799	1.749	1.695	1.666	1.636	1.603	1.569	1.531	1.491
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.065	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836	1.790	1.740	1.685	1.656	1.625	1.593	1.558	1.520	1.478
29	2.887	2.496	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827	1.781	1.731	1.676	1.647	1.616	1.583	1;547	1.509	1.467
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.820	1.773	1.722	1.667	1.638	1.607	1.573	1.538	1.499	1.456
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763	1.715	1.662	1.605	1.574	1.541	1.506	1.467	1.425	1.377
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707	1.657	1.603	1.544	1.511	1.476	1.437	1.395	1.348	1.292
120	2.748	2.347	2.130	1.992	1.896	1.824	1.768	1.722	1.684	1.652	1.601	1.545	1.482	1.447	1.409	1.368	1.320	1.265	1.193
∞	2.706	2.303	2.084	1.945	1.847	1.774	1.717	1.670	1.632	1.599	1.546	1.487	1.421	1.383	1.342	1.295	1.240	1.169	1.000

Tabela F. Tabela Fišerove raspodele

Vrednosti $f_{n_1;n_2;p}$; za verovatnoću $p = 0.75$



n_2	n_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.829	7.500	8.200	8.581	8.820	8.983	9.102	9.192	9.263	9.320	9.406	9.493	9.581	9.262	9.670	9.714	9.759	9.804	9.849
2	2.571	3.000	3.153	3.232	3.280	3.312	3.335	3.353	3.366	3.377	3.393	3.410	3.426	3.435	3.443	3.451	3.459	3.468	3.476
3	2.024	2.280	2.356	2.390	2.410	2.422	2.430	2.436	2.441	2.445	2.450	2.455	2.460	2.463	2.564	2.467	2.470	2.472	2.474
4	1.807	2.000	2.047	2.064	2.072	2.077	2.079	2.080	2.081	2.082	2.083	2.083	2.083	2.083	2.083	2.082	2.082	2.081	2.081
5	1.693	1.853	1.884	1.893	1.895	1.895	1.894	1.892	1.891	1.890	1.888	1.885	1.882	1.880	1.878	1.876	1.874	1.872	1.869
6	1.621	1.762	1.784	1.787	1.785	1.782	1.779	1.776	1.773	1.771	1.767	1.762	1.757	1.754	1.751	1.748	1.744	1.741	1.737
7	1.573	1.701	1.717	1.716	1.711	1.706	1.701	1.697	1.693	1.690	1.684	1.678	1.671	1.668	1.664	1.659	1.655	1.650	1.645
8	1.538	1.657	1.668	1.664	1.658	1.651	1.645	1.640	1.635	1.631	1.624	1.617	1.609	1.604	1.600	1.595	1.589	1.584	1.578
9	1.512	1.624	1.631	1.625	1.617	1.609	1.602	1.596	1.591	I.586	1.579	1.571	1.561	1.556	1.551	1.545	1.539	1.533	1.526
10	1.492	1.598	1.603	1.595	1.585	1.577	1.569	1.562	1.556	1.551	1.543	1.534	1.524	1.518	1.512	1.506	1.499	1.492	1.484
11	1.475	1.577	1.580	1.570	1.560	1.550	1.542	1.535	1.528	1.523	1.514	1.504	1.493	1.487	1.481	1.474	1.466	1.459	1.450
12	1.461	1.560	1.561	1.550	1.539	1.529	1.520	1.512	1.505	1.500	1.490	1.480	1.468	1.461	1.454	1.447	1.439	1.431	1.422
13	1.450	1.545	1.545	1.534	1.521	1.511	1.501	1.493	1.486	1.480	1.470	1.459	1.447	1.440	1.432	1.425	1.416	1.408	1.398
14	1.440	1.533	1.532	1.519	1.507	1.495	1.485	1.477	1.470	1.463	1.453	1.441	1.428	1.421	1.414	1.406	1.397	1.387	1.377
15	1.432	1.523	1.520	I.507	1.494	1.482	1.472	1.463	1.456	1.449	1.438	1.426	1.413	1.405	1.397	1.389	1.380	1.370	1.359
16	1.425	1.514	1.510	1.497	1.483	1.471	1.460	1.451	1.443	1.437	1.426	1.413	1.399	1.391	1.383	1.374	1.365	1.354	1.343
17	1.419	1.506	1.502	1.487	1.473	1.461	1.450	1.441	1.433	1.426	1.414	1.401	1.387	1.379	1.370	1.361	1.351	1.341	1.329
18	1.413	1.499	1.494	1.479	1.464	1.452	1.441	1.431	1.423	1.416	1.404	1.391	1.376	1.368	1.359	1.350	1.340	1.328	1.316
19	1.408	1.493	1.487	1.472	1.457	1.444	1.433	1.423	1.415	1.407	1.395	1.382	1.367	1.358	1.349	1.339	1.329	1.317	1.305
20	1.404	1.487	1.481	1.465	1.450	1.437	1.425	1.415	1.407	1.400	1.387	1.374	1.358	1.349	1.340	1.330	1.319	1.307	1.294
21	1.400	1.482	1.475	1.459	1.444	1430	1.419	1.409	1.400	1.393	1.380	1.366	1.350	1.341	1.332	1.322	1.311	1.298	1.285
22	1.396	1.477	1.470	1.454	1.438	1.424	1.413	1.403	1.394	1.386	1.374	1.359	1.343	1.334	1.325	1.314	1.303	1.290	1.276
23	1.393	1.473	1.466	1.449	1.433	1.419	1.407	1.397	1.388	1.380	1.368	1.353	1.337	1.328	1.318	1.307	1.295	1.282	1.268
24	1.390	1.470	1.462	1.445	1.429	1.414	1.402	1.392	1.383	1.375	1.362	1.347	1.331	1.321	1.311	1.300	1.289	1.275	1.261
25	1.387	1.466	1.458	1.441	1.424	1.410	1.398	1.387	1.378	1.370	1.357	1.342	1.325	1.316	1.306	1.295	1.282	1.269	1.254
26	1.385	1.463	1.454	1.437	1.420	1.406	1.394	1.383	1.374	1.366	1.352	1.337	1.320	1.311	1.300	1.289	1.277	1.263	1.247
27	1.382	1.460	1.451	1.433	1.417	1.402	1.390	1.379	1.370	1.362	1.348	1.333	1.316	1.306	1.295	1.284	1.271	1.257	1.241
28	1.380	1.457	1.448	1.430	1.413	1.399	1.386	1.375	1.366	1.358	1.344	1.329	1.311	1.301	1.291	1.279	1.266	1.252	1.236
29	1.378	1.455	1.445	1.427	1.410	1.395	1.383	1.372	1.362	1.354	1.340	1.325	1.307	1.297	1.286	1.275	1.262	1.247	1.231
30	1.376	1.452	1.443	1.424	1.407	1.392	1.380	1.369	1.359	1.351	1.337	1.321	1.303	1.293	1.282	1.270	1.257	1.242	1.226
40	1.363	1.436	1.424	1.405	1.386	1.371	1.357	1.346	1.335	1.327	1.312	1.295	1.276	1.265	1.253	1.240	1.225	1.208	1.188
60	1.349	1.419	1.406	1.385	1.366	1.349	1.335	1.323	1.312	1.303	1.287	1.269	1.248	1.236	1.223	1.208	1.191	1.172	1.147
120	1.336	1.402	1.387	1.365	1.345	1.328	1.313	1.300	1.289	1.279	1.262	1.243	1.220	1.207	1.192	1.175	1.156	1.131	1.099
∞	1.323	1.386	1.369	1.346	1.325	1.307	1.291	1.277	1.265	1.255	1.237	1.216	1.191	1.177	1.160	1.140	1.116	1.084	1.000

Literatura

[1] V. Vučić, *Osnovna merenja u fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 2000.

[2] Aničin, *Obrada rezultata merenja*, Fizički fakultet, Beograd, 1988.

[3] J. Slivka, M. Terzić, *Obrada rezultata merenja*, Stylos, Novi Sad, 1995.

[4] D. Ćirić, M. Ćirić, N. Milinski i M. Satarić, *Osnovi merenja u fizici i obrada rezultata merenja*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1991.

[5] D. Stanković, *Fizičko tehnička merenja-senzori*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1997.

[6] F. K. Petrović, *Električna merenja, I i II deo*, Beograd: Naučna knjiga, 1986.

[7] B. Dimitrijević, *Električna merenja*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

[8] G. L. Dimić i M. D. Mitrinovic, *Metrologija u fizici*, Građevinska knjiga, Beograd, 1991.

[9] G. L. Dimić i M. D. Mitrinović, *Zbirka zadataka iz fizike D -Viši kurs*, Naša knjiga, Beograd, 1998.

[10] I. Bagaric, *Metrologija elektičnih veličina - Merenja i merni instrumenti*, Nauka, Beograd, 1996.

[11] P. R. Bevington, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[12] A. P. Bondareva, *Kvantovaja metrologija i fundamentalnie konstanti*, Mir, Moskva, 1981

[13] D. D. Wackerly, W. III Mendenhall and R. L. Scheaffer, *Mathematical Statistics with Applications*, Belmont: Duxbury Press, 1996.

[14] S. Vukadinović, *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Privredni pregled, Beograd, 1978.

[15] S. Vukadinovic, *Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće i matematičke statistike* , Privredni pregled, Beograd, 1972.

[16] B. Popović, B. Blagojevic, *Matematička statistika sa primerima u hidrotehnici*, Univerzitet u Nišu, Niš, 2003.

[17] Ž. Pantić, *Uvod u teoriju verovatnoće i statistiku*, Bakar-Bor, Niš, 1980.

[18] J. Mališić, *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primerima*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[19] M. J. Merkle, P. M. Vasić, *Verovatnoća i statistika sa primenama i primerima*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1995.

[20] M. Merkle, *Verovatnoća i statistika, za inženjere i studente tehnike*, Akademska Misao, Beograd, 2002.

[21] M. C. Kostić, *Metodi statističke analize - sa kompjuterskim pristupom*, Naučna Knjiga, Beograd, 1990.