Univerzitet u Nišu
Prirodno matematički fakultet
Odsek za matematiku

Mr Mića Stanković

Neka preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije

Doktorska disertacija

Niš, 2001.

Univerzitet u Nišu
Prirodno matematički fakultet
Odsek za matematiku

Mr Mića Stanković

Neka preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije

Doktorska disertacija

Niš, 2001.

SADRŽAJ

Glava III

KONFORMNA PRESLIKAVANJA GENERALISANIH RIMANOVIH PROSTORA

Glava IV

GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

Glava V

NEKA SPECIJALNA GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

Glava VI

SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

Glava VII

PRESLIKAVANJA GENERALISANIH KELEROVIH PROSTORA

PREDGOVOR

U ovoj disertaciji su razmatrana specijalna geodezijska peslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije, ekvitorziona konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora, skoro geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora.

Teorija geodezijskih preslikavanja Rimanovih i prostora afine koneksije, a takodje i njena uopštenja, je od velikog interesa, kako sa teorijske, tako i sa tačke gledišta primena. Naime radi se o tome, što se kretanje mnogoh tipova mehaničkih sistema, a takodje tela ili čestica u gravitacionim ili elektromagnetnim poljima, u neprekidnoj sredini, često vrši po putanjama, koje se mogu posmatrati kao geodezijske linije Rimanovog ili prostora afine koneksije, koji je definisan energetskim režimom, pri kome se proces odvija. Tako, na primer, dva Rimanova prostora, koja dopuštaju uzajamno geodezijsko preslikavanje, opisuju procese koji se odvijaju, pri ekvivalentnim spoljnim opterećenjima, po istim putanjama, ali pri različitim energetskim režimima. Prema tome, jedan od tih procesa može se modelirati pomoću drugog.

Još je Levi-Čivita [18] došao do problema geodezijskog prslikavanja Rimanovih prostora pri proučavanju jednačina dinamike. Kagan u [16] razmatra geodezijska preslikavanja površi. U novije vreme geodezijska preslikavanja Rimanovih prostora i njhova uopštenja naročito su proučavali ruski autori, posebno N. S. Sinjukov [75]-[79], E. N. Sinjukova [86], [87], V. S. Sobčuk [88], [89], J. Mikeš [20]-[28], M. Prvanović [55], [57]-[60], [62], S. M. Minčić i M. S. Stanković [46]-[48], [93], [95] i drugi.

Oslanjajući se na postojeće rezultate iz teorije geodezijskih i skoro geodezijskih preslikavanja prostora simetrične afine koneksije, kao i na proučavanja generalisanih Rimanovih prostora i prostora nesimetrične afine koneksije, a takodje na izučavanje Kelerovih prostora i holomorfno projektivnih preslikavanja u disertaciji su prošireni neki od postojećih rezultata, a takodje su izneti i originalni rezultati koji su delom publikovani [46], [47], [90]-[96].

Disertacija se sastoji od 20 paragrafa, od kojih §1-4 čine Glavu I, §5 Glavu II, §6-7 Glavu III, §8-10 Glavu IV, §11- 12 Glavu V, §13-17 Glavu VI i §18-20 Glavu VII. U okviru svakog od paragrafa izvršena je uža podela. Teoreme i formule numerisane su u okviru svakog paragrafa nezavisno jedne od drugih tako što se najpre navede redni broj paragrafa a zatim redni broj teoreme ili formule, npr. petu formulu sedmog paragrafa obeležavamo (7.5) itd. Na kraju je dat spisak literature po abecednom redosledu. Ukratko ćemo izložiti sadržaj rada po paragrafima.

Glava I je uvodnog karaktera i sadrži osnovne činjenice iz teorije prostora nesimetrične afine koneksije i generalisanih Rimanovih prostora, koje su potrebne za dalje izlaganje u disertaciji. Rezultati izneti u ovoj glavi naslanjaju se prevashodno na [2], [3], [6], [7]-[11], [12]-[15], [29]-[45], [49], [55], [56], [61], [69]-[74], [97], [98], [101].

U §1 date su osnovne definicije i relacije koje se odnose na prostore nesimetrične afine koneksije i generalisane Rimanove prostore.

U §2 su navedene četiri vrste kovarijantnog diferenciranja, a takodje su date i osnovne definicije i relacije za geodezijske linije prostora nesimetrične afine koneksije.

§3 je posvećen skoro geodezijskim linijama prostora nesimetrične afine koneksije, kao uopštenju pojma geodezijskih linija. Za razliku od geodezijskih linija, gde se za obe vrste kovarijantnog diferenciranja vektora dobija ista kriva, u ovom slučaju se mogu posmatrati dve vrste skoro geodezijskih linija, pri čemu je skoro geodezijska linija prve vrste odredjena formulom (3.5a) a druge formulom (3.5b).

U §4 su izneti osnovni rezultati o identitetima Ričijevog tipa, tenzorima i pseudotenzorima krivine prostora nesimetrične afine koneksije. Kod prostora simetrične afine koneksije, a samim tim i kod Rimanovih prostora postoji jedan Ričijev identitet koji se odnosi na alternirani kovarijantni izvod drugog reda i jedan tenzor krivine - Riman-Kristofelov tenzor (npr. [31], [109]). U slučaju nesimetrične koneksije postoji deset mogućnosti za formiranje razlike

$$(4.1)\qquad a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{\pi}{|}m\underset{\rho}{|}n} - a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{\sigma}{|}n\underset{\tau}{|}m}, \quad (\pi,\rho,\sigma,\tau = 1,2)$$

gde $\underset{1}{|}$ i $\underset{2}{|}$ označavaju dve vrste kovarijantnog diferenciranja u GA_N, pa se prema tome dobija deset identiteta Ričijevog tipa [29], [32]. Tu se pojavljuju *tri tenzora krivine* data formulama (4.2-4), kao i petnaest *pseudotenzora krivine* koji su dati formulama (4.5-19). Korišćenjem treće i četvrte vrste kovarijantnog diferenciranja javlja se još jedan novi tenzor krivine (4.22).

Tenzor deformacije koneksije i osnovne relacije izmedju tenzora deformacije koneksije i pet nezavisnih tenzora krivine izvedene su u §5. Ako su $L^h_{ij}(x)$ i $\overline{L}^h_{ij}(x)$ koeficijenti koneksije prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ tada je $\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x), \qquad (h,i,j =$

$1, 2, ..., N)$. Veličina $P^h_{ij}(x)$ predstavlja tenzor deformacije koneksije pri preslikavanju f. Relacije (5.3-7) daju veze izmedju tenzora deformacije koneksije i pet nezavisnih tenzora krivine.

U §6 su razmatrana konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora. U slučaju takvih preslikavanja osnovni metrički tenzori prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ zadovoljavaju uslov (6.1). Kristofelovi simboli druge vrste razmatranih prostora su povezani relacijom $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j - \psi^i g_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk}$, pri čemu je ξ^i_{jk} antisimetričan tenzor. Preslikavanje za koje je $\xi^i_{jk} = 0$ zovemo *ekvitorzionim.* U slučaju konformnog preslikavanja f Rimanovih prostora R_N i $\overline{R}_N$ [19], [50], [55], [83], javlja se invarijantan geometrijski objekat - tenzor knformne krivine

$$C^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \delta^i_m P_{jn} - \delta^i_n P_{jm} + P^i_m g_{jn} - P^i_n g_{mj}$$

gde je

$$P_{jm} \equiv \frac{1}{N-2}(R_{jm} - \frac{1}{2(N-1)} R g_{jm}).$$

U opštem slučaju nije moguće naći uopštenje za tenzor konformne krivine pri konformnom preslikavanju generalisanih Rimanovih prostora. U §7 je dobijeno pet tenzora konformne krivine (7.17, 20, 30, 31 i 42) za slučaj ekvitorzionog konformnog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora.

Osnovne definicije i relacije iz teorije geodezijskih prelikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i generalisanih Rimanovih prostora date su u §8. Teorema 8.1. daje potreban i dovoljan uslov da preslikavanje f prostora nesimetrične afine koneksije bude geodezijsko. U teoremi 8.4. su dati potrebni i dovoljni uslovi da preslikavanje generalisanih Rimanovih prostora bude geodezijsko. Posledice 1, 2, 3 daju relacije izmedju osnovnih metričkih tenzora dva generalisana Rimanova prostora pri geodezijskom preslikavanju. U ovom odeljku dat je i osvrt na geodezijska preslikavanja Rimanovih prostora i prostora simetrične afine koneksije.

U §9 izvršena je generalizacija projektivnih parametara Tomasa za slučaj geodezijskog preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. Dobijeni generalisani projektivni parametri Tomasa (9.4) predstavljaju invarijantu geodezijskog preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. Takodje je data i nova karakterizacija u Teoremi 9.2. prostora nesimetrične afine koneksije koji dopuštaju geodezijska preslikavanja.

U §10 su date relacije izmedju pet nezavisnih tenzora krivine prostora GA_N sa odgovarajućim tenzorima krivine prostora $G\overline{A}_N$ pri geodezijskom preslikavanju teoremama

10.1-5. U Teoremi 10.6. dat je osvrt na slučaj geodezijskih preslikavanja prostora simetrične afine koneksije i Rimanovih prostora.

U Glavi V su obradjena neka specijalna geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. Kako je u opštem slučaju nemoguće izvršiti generalizaciju Vejlovog tenzora krivine [83]

$$W^i_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \frac{1}{N-1}(\delta^i_m R_{jn} - \delta^i_n NR_{jm}), \tag{11.38}$$

nametnuti su neki dodatni uslovi za antisimetrični deo tenzora deformacije koneksije pri geodezijskom preslikavanju. U §11 su obradjena ekvitorziona geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije, tj. geodezijska preslikavanja kod kojih je antisimetrični deo tenzora deformacije koneksije jednak nuli. Ovde je dobijeno pet invarijantnih geometrijskih objekata (11.10, 19, 27, 31, 37) pri ekvitorzionom geodezijskom preslikavanju prostora nesimetrične afine koneksije od kojih $\underset{\theta}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ $(\theta = 1, \cdots, 4)$ nisu tenzori i predstavljaju parametre projektivne krivine vrste θ, dok je $\underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ tenzor. U slučaju generalisanih Rimanovih prostora veličine $\underset{\theta}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ $(\theta = 1, \cdots, 4)$ se uprošćavaju i date su formulama (11.11, 20, 28, 32) dok $\underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ ima isti oblik.

Nametanjem drugačijih uslova za antisimetrični deo tenzora deformacije koneksije u §12 je dobijeno još pet novih specijalnih geodezijskih preslikavanja, koja nazivamo $\underset{\theta}{R}$-preslikavanjima. Tenzori $W(\underset{\theta}{R})^i{}_{jmn}$ dati formulama (12.12, 21, 31, 36, 41) predstavljaju uopštenja Vejlovog tenzora za slučaj $\underset{\theta}{R}$-preslikavanja. U slučaju generalisanih Rimanovih prostora oni se svode redom na tenzore (12.12′, 21′, 31′, 36′, 41′).

Uopštavajući pojam geodezijskih preslikavanja kako Rimanovih, tako i prostora simetrične afine koneksije Sinjukov [83] uvodi pojam skoro geodezijskih preslikavanja navedenih prostora. Pored Sinjukova, skoro geodezijska preslikavanja Rimanovih prostora i prostora simetrične afine koneksije izučavali su i mnogi drugi autori, npr. [4], [24], [25], [80], [84], [88], [102]. U radovima [106] i [107] obradjen je deo problematike skoro geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. U Glavi VI su obradjena skoro geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. U §13 se uvode dve vrste skoro geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i daju se potrebni i dovoljni uslovi da preslikavanje prostora nesimetrične afine koneksije bude skoro geodezijsko prve (Teorema 13.1.), odnosno druge vrste (Teorema 13.2.). Takodje se uvodi pojam (N-2)-projektivnih prostora i daje karakterizacija takvih prostora u Teoremi 13.3.

U §14 je data klasifikacija skoro geodezijskih preslikavanja prve odnosno druge vrste. U zavisnosti od oblika funkcije $\underset{1}{b}$ odnosno $\underset{2}{b}$ u (13.3, 3′) dobijena su po tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja prve odnosno druge vrste. Teoreme 14.1. i 14.2. daju potrebne i dovoljne uslove da preslikavanje $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ bude skoro geodezijsko prvog tipa prve odnosno druge vrste. Teoreme 14.3. i 14.4. daju karakterizaciju skoro geodezijskih preslikavanja prve odnosno druge vrste prvog tipa u afinom koordinatnom sistemu. Potreban i dovoljan uslov da preslikavanje $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ prve vrste bude drugog tipa dat je u Teoremi 14.5. Relacije (14.5) i (14.6′) predstavljaju potrebne i dovoljne uslove da preslikavanje $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ bude druge vrste drugog tipa. Treći tip prve vrste skoro geodezijskih preslikavanja karakterišu jednačine (14.8) i (14.9) dok treći tip skoro geodezijskih preslikavanja druge vrste karakterišu jednačine (14.8) i (14.9′).

U §15 su dati potrebni i dovoljni uslovi da preslikavanje $\underset{1}{\pi}_1$ ima osobinu uzajamnosti Teoremom 15.1., dok su Teoremom 15.3 dati potrebni i dovolni uslovi da preslikavanje $\underset{2}{\pi}_2$ ima osobinu uzajamnosti. Teoreme 15.2. i 15.4. daju osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja prve odnosno druge vrste koja imaju osobinu uzajamnosti. Teoremama 15.5-15.8 dati su potrebni uslovi da prostor GA_N bude (N-2)-projektivan prvog tipa.

U §16 su razmatrana preslikavanja drugog tipa $\underset{1}{\pi}_2$ i $\underset{2}{\pi}_2$. Date su osnovne jednačine tih preslikavanja koja imaju osobinu uzajamnosti. Takodje su razmatrana kanonička skoro geodezijska preslikavanja $\underset{1}{\pi}_2(e)$ i $\underset{2}{\pi}_2(e)$. Teoremama 16.4., 16.5. i 16.6. opisani su neki invarijantni geometrijski objekti kanoničkog skoro geodezijskog preslikavanja $\underset{1}{\pi}_2$, dok su teoremama 16.7., 16.8. i 16.9 opisani neki invarijantni geometrijski objekti kanoničkog skoro geodezijskog preslikavanja $\underset{2}{\pi}_2$.

Skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa, kako prve tako i druge vrste obradjena su u §17. Date su osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja obe vrste koja raspolažu osobinom uzajamnosti. Konstruisana su i neka specijalna preslikavanja $\underset{1}{\pi}_2(e,\theta)$ i $\underset{2}{\pi}_2(e,\theta)$ i u oba slučaja odredjeni invarijantni geometriski objekti formulama (17.17) i (17.17′).

Poslednja Glava VII ove disertacije posvećena je generalisanim Kelerovim prostorima i njihovim preslikavanjima. Izučavanjem Kelerovih prostora i njihovim preslikavanjima bavili su se mnogi autori, kao na primer K. Yano [102]–[104], M. Prvanović [57], [58], [60], J. Mikeš [21], [25], [26], [28], V. V. Domašev [5], N. Pušić [65]–[68], T. Otsuki i Y. Tasiro

[51], S. S. Pujar [63], [64], Sinjukov [85]... *Generalisanim Kelerovim prostorom* GK_N zvaćemo generalisani N-dimenzioni Rimanov prostor s osnovnim metričkim tenzorom g_{ij}, pri čemu u opštem slučaju važi $g_{ij} \neq g_{ji}$, u kome postoji skoro kompleksna struktura $F^i_j(x)$, tako da je

$$F^h_p(x)F^p_i(x) = -\delta^h_i \,, \tag{18.2}$$

$$g_{\underline{pq}}F^p_i F^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}}F^i_p F^j_q, \tag{18.3}$$

$$F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0, \quad (\theta = 1,2), \tag{18.4}$$

pri čemu $\underset{\theta}{|}$ označava kovarijantno diferenciranje vrste θ izvedeno u odnosu na osnovni metrički tenzor g_{ij}. Teoreme 18.1, 2, 3, 4 daju osnovne relacije izmedju geometrijskih objekata generalisanog Kelerovog prostora.

U §19 obradjena su holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora. U Teoremi 19.1. dat je invariantan geometrijski objekat takvog preslikavanja.

Ekvitorziona holomorfno projektivna preslikavanja obradjena su u §20. Za takva preslikavanja pronadjeno je pet invarijantnih geometrijskih objekata $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1, \cdots, 5)$, pri čemu veličine $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1, \cdots, 4)$ nisu tenzori, dok je $HP\underset{5}{W}{}^i{}_{jmn}$, tenzor. Veličine $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1, \cdots, 5)$ opisane su teoremama 20.1 – 20.5.

Ova disertacija je uradjena pod rukovodstvom dr Svetislava Minčića. Čast mi je da mu se zahvalim na velikoj i svesrdnoj pomoći koju mi je pružio u toku izrade disertacije, prateći ceo tok izrade, procenjujući rezultate do kojih sam dolazio i korisnim primedbama i sugestijama dao veliki doprinos konačnoj verziji disertacije.

Takodje bih iskoristio priliku da se zahvalim dr Milevi Prvanović na podršci, korisnim sugestijama i primedbama u mom naučnom radu.

Zahvaljujem se i svim kolegenicama i kolegama sa odseka za Matematiku i Fiziku Prirodno–matematičkog fakulteta koji su svojim sugestijama i primedbama pomogli ostvarenju ovog rada.

Posebno bih se zahvalio svojoj porodici na razumevanju, odricanju i podršci koju mi je nesebično pružala prlikom izrade ove disertacije.

mr Mića Stanković

Glava I

PROSTORI NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

1. Uvodni pojmovi i relacije

1.1. Prostori nesimetrične afine koneksije

U ovoj glavi biće izloženi osnovni rezultatii iz teorije prostora nesimetrične afine koneksije i generalisanih Rimanovih prostora. Ovaj odeljak se oslanja prevashodno na [2], [3], [7]-[11], [12], [13], [29]-[45], [49], [55], [56], [61], [71]-[74], [97], [98], [101]. Neka je na N-dimenzionalnoj diferencijabilnoj mnogostrukosti [6], [14], [15], [69], [70] zadat sistem veličina $L^i_{jk}(x^1,...,x^N)$, čije se komponente pri promeni lokalnog koordinatnog sistema transformišu po zakonu:

$$L^{i'}_{j'k'}(x') = L^i_{jk}(x)x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}, \tag{1.1}$$

gde smo označili

$$x^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad x^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad x^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}, \tag{1.2}$$

pri čemu su (x^i) i $(x^{i'})$ dve vrste lokalnih koordinata. Takva mnogostrukost se zove **prostor afine koneksije**. Ako u opštem slučaju važi

$$L^i_{jk}(x) \neq L^i_{kj}(x) \tag{1.3}$$

imamo **prostor nesimetrične afine koneksije** [8], [32] koji ćemo označavati GA_N. Veličine $L^i_{jk}(x)$ su **koeficijenti koneksije** prostora GA_N.

Označimo

$$L^i_{\underline{jk}}(x) = \frac{1}{2}(L^i_{jk}(x) + L^i_{kj}(x)) \tag{1.4}$$

simetrični deo a

$$L^i_{\underset{\vee}{jk}}(x) = \frac{1}{2}(L^i_{jk}(x) - L^i_{kj}(x)). \tag{1.5}$$

antisimetrični deo koeficijenata koneksije. Tada je

$$L^i_{jk}(x) = L^i_{\underline{jk}}(x) + L^i_{\underset{\vee}{jk}}(x)\,.$$

Simetrični deo $L^i_{\underline{jk}}(x)$ se transformiše na isti način kao $L^i_{jk}(x)$, dok se antisimetrični deo $L^i_{\underset{\vee}{jk}}(x)$ transformiše kao tenzor. To je **tenzor torzije** prostora GA_N. Znači, veličine $L^i_{\underline{jk}}(x)$ možemo posmatrati kao koeficijente simetrične afine koneksije na istoj diferencijabilnoj mnogostrukosti kao u slučaju GA_N. Tada dobijamo prostor simetrične afine koneksije GA^0_N, za koji kažemo da je **pridružen** prostoru GA_N.

1.2. Generalisani Rimanovi prostori

Generalisani Rimanov prostor prema Eisenhartu [8]-[10] je N-dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost na kojoj je zadat u opštem slučaju nesimetričan **osnovni metrički tenzor** $g_{ij}(x^1, ..., x^N)$, pri čemu je $det\,(g_{ij}(x)) = g(x) \neq 0$.

Takav N-dimenzionalni prostor obeležavaćemo GR_N. Ukoliko je osnovni metrički tenzor $g_{ij}(x)$ simetričan dobijamo običan **Rimanov prostor** koji ćemo obeležavati R_N.

Osnovne definicije i relacije koje se odnose na GR_N date su npr. u [9], [10], [32], [49], [53].

Znači, za osnovni metrički tenzor u opštem slučaju važi

$$g_{ij}(x) \neq g_{ji}(x). \tag{1.6}$$

Simetrični deo tenzora $g_{ij}(x)$ označavamo sa $g_{\underline{ij}}(x)$ a antisimetrični $g_{\underset{\vee}{ij}}(x)$, tj.

$$g_{\underline{ij}}(x) = \frac{1}{2}(g_{ij}(x) + g_{ji}(x)), \qquad g_{\underset{\vee}{ij}}(x) = \frac{1}{2}(g_{ij}(x) - g_{ji}(x)). \tag{1.7}$$

Spuštanje i dizanje indeksa u GR_N definiše se pomoću tenzora $g_{\underline{ij}}(x)$ i $g^{\underline{ij}}(x)$, gde je $g^{\underline{ij}}(x)$ definisan pomoću

$$g_{\underline{ij}}(x) g^{\underline{jk}}(x) = \delta^k_i \tag{1.8}$$

a δ^k_i je Kronekerov simbol. Kako je prema (1.8) matrica $||g^{\underline{ij}}(x)||$ inverzna matrici $||g_{\underline{ij}}(x)||$ mora biti zadovoljen i uslov

$$\underline{g}(x) = det\,(g_{\underline{ij}}(x)) \neq 0. \tag{1.9}$$

Označimo obično parcijalno diferenciranje zapetom, npr.

$$g_{ij,k}(x) = \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}.$$

Generalisane Kristofelove simbole 1. odnosno 2. vrste definišemo redom relacijama

$$\Gamma_{i.jk}(x) = \frac{1}{2}(g_{ik,j}(x) + g_{ji,k}(x) - g_{jk,i}(x)), \tag{1.10}$$

$$\Gamma^i_{jk}(x) = g^{\underline{i\alpha}}(x)\Gamma_{\alpha.jk}(x) = \frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}(x)(g_{\alpha k,j}(x) + g_{j\alpha,k}(x) - g_{jk,\alpha}(x)) \tag{1.11}$$

U opštem slučaju važi

$$\Gamma^\alpha_{jk}(x)\, g_{\underline{i\alpha}}(x) = \Gamma_{i.jk}(x), \quad \Gamma_{i.jk}(x) \neq \Gamma_{i.kj}(x). \tag{1.12}$$

Polazeći od zakona transformacije tenzora $g_{ij}(x)$ pri prelasku sa sistema lokalnih koordinata x^i na sistem $x^{i'}$ uz oznake (1.2) dokazuje se [74] da važe sledeći zakoni transformacije generalisanih Kristofelovih simbola

$$\Gamma_{i'.j'k'}(x') = \Gamma_{i.jk}(x)x^i_{i'}x^j_{j'}x^k_{k'} + g_{ij}(x)x^i_{i'}x^j_{j'k'}, \tag{1.13}$$

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}(x') = \Gamma^i_{jk}(x)x^{i'}_i x^j_{j'}x^k_{k'} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}. \tag{1.14}$$

Za generalisane Rimanove prostore važi [32], [46]

Teorema 1.1. *Ako je* $\underline{g}(x) = det\,(g_{\underline{ij}}(x))$ *onda u* GR_N *važi*

$$\Gamma^\alpha_{\alpha k}(x) = \Gamma^\alpha_{k\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial x^k} ln\sqrt{|\underline{g}(x)|}. \tag{1.15}$$

Iz poslednje relacije sledi da za generalisane Rimanove prostore GR_N važi [32]

$$\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{\alpha k}}(x) = 0. \tag{1.16}$$

Očigledno je da prostor GR_N predstavlja specijalan slučaj prostora GA_N.

2. Kovarijantno diferenciranje i geodezijske linije

2.1. Kovarijantni izvodi, apsolutni izvodi i paralelno pomeranje

Zbog nesimetričnosti koeficijenata koneksije, moguće je kod prostora sa nesimetričnom afinom koneksijom definisati više vrsta kovarijantnog izvoda tenzora. Na primer za tenzor $a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v}$ definišemo [32], **kovarijantni izvod prve vrste :**

$$\begin{aligned} a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{1}{|}m} &= a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v,m} + \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{pm} a^{r_1\ldots r_{\alpha-1}pr_{\alpha+1}\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v} - \\ &- \sum_{\alpha=1}^{v} L^{p}_{t_\beta m} a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_{\beta-1}pt_{\beta+1}\ldots t_v}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kovarijantni izvod druge vrste:

$$
\begin{aligned}
a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{2}{|}m} &= a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v,m} + \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{mp} a^{r_1\dots r_{\alpha-1}pr_{\alpha+1}\dots r_u}_{t_1\dots t_v} - \\
&- \sum_{\alpha=1}^{v} L^{p}_{mt_\beta} a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_{\beta-1}pt_{\beta+1}\dots t_v}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Dalje se uvode **treća i četvrta vrsta kovarijantnog diferenciranja** [35] tako što kod treće vrste sa kontravarijantnim indeksima postupamo kao kod prve a sa kovarijantnim kao kod druge vrste kovarijantnog izvoda, dok kod četvrte vrste postupamo sa indeksima obrnuto od treće vrste. Znači **kovarijantni izvod treće vrste** za tenzor $a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v}$ definišemo formulom

$$
\begin{aligned}
a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{3}{|}m} &= a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v,m} + \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{pm} a^{r_1\dots r_{\alpha-1}pr_{\alpha+1}\dots r_u}_{t_1\dots t_v} - \\
&- \sum_{\alpha=1}^{v} L^{p}_{mt_\beta} a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_{\beta-1}pt_{\beta+1}\dots t_v} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

a **kovarijantni izvod četvrte vrste** formulom

$$
\begin{aligned}
a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{4}{|}m} &= a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v,m} + \sum_{\alpha=1}^{u} L^{r_\alpha}_{mp} a^{r_1\dots r_{\alpha-1}pr_{\alpha+1}\dots r_u}_{t_1\dots t_v} - \\
&- \sum_{\alpha=1}^{v} L^{p}_{t_\beta m} a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_{\beta-1}pt_{\beta+1}\dots t_v} \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Kovarijantni izvod tenzora je tenzor kovarijantnosti za jedan veće, a takodje važe poznata pravila za kovarijantno diferenciranje. Dve vrste kovarijantnog diferenciranja koristi A.Einstein [7] (u vezi sa jedinstvenom teorijom polja), M.Prvanović [55], [56] (za specijalne nesimetrične koneksije, pridružene na odredjeni način običnom Rimanovom prostoru) i drugi.

S.Minčić je u [32] dokazao sledeće teoreme:

Teorema 2.1. *Tenzor* $g_{\underline{ij}}(x)$ *je kovarijantno konstantan u odnosu na obe vrste diferenciranja* (2.1, 2), *tj. važi:*

$$g_{\underline{ij}\underset{1}{|}m}(x) = 0, \quad g_{\underline{ij}\underset{2}{|}m}(x) = 0. \qquad (2.5\ a,\text{b})$$

Teorema 2.2. *Za Kronekerov simbol važi*

$$\delta^i_{j\underset{1}{|}m}(x) = 0, \quad \delta^i_{j\underset{2}{|}m}(x) = 0. \qquad (2.6\ a,\text{b})$$

Teorema 2.3. *Tenzor* $g^{\underline{ij}}(x)$ *je kovarijantno konstantan u odnosu na obe vrste diferenciranja* (2.1), *tj. važi:*

$$g^{\underline{ij}}{}_{\underset{1}{|m}}(x) = 0, \quad g^{\underline{ij}}{}_{\underset{2}{|m}}(x) = 0. \tag{2.7 a,b}$$

Posmatrajmo krivu l definisanu u GA_N jednačinama

$$x^i = x^i(t), \quad (i = 1, 2, ..., N) \tag{2.8}$$

pri čemu je u tačkama te krive definisano vektorsko polje a^i. Mogu se definisati **dve vrste apsolutnog izvoda** [32] vektorskog polja a^i po parametru t duž krive l u GA_N:

$$\frac{\underset{\theta}{D}a^i}{Dt} = a^i{}_{\underset{\theta}{|\alpha}} \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \theta = 1, 2, \tag{2.9}$$

i **dve vrste apsolutnog diferencijala**

$$\underset{\theta}{D}a^i = a^i{}_{\underset{\theta}{|\alpha}} dx^\alpha, \quad \theta = 1, 2, \tag{2.9 $'$}$$

Prema tome postoje i **dve vrste paralelizma** vektorskog polja u GA_N [13], [32]. Vektorsko polje je **paralelno polje prve vrste** (**druge vrste**) duž l ako i samo ako je njegov apsolutni izvod prve vrste (druge vrste) jednak nuli duž l.

2.2. Geodezijske linije

Neka je kriva l zadata u parametarskom obliku jednačinama (2.8). Vektorsko polje $\varphi^h(t)$ je **rekurentno vrste** θ, $(\theta = 1, 2)$ duž krive l, ako je u svakoj njenoj tački ispunjen uslov

$$\varphi^h{}_{\underset{\theta}{|\alpha}}(t)\lambda^\alpha(t) = \rho(t)\varphi^h(t), \quad \lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt} \quad (\theta = 1, 2;\ h = 1, 2, ..., N). \tag{2.10}$$

Ovde je $\rho(t)$ neka invarijanta, a leva strana je kovarijantni izvod vrste θ, $(\theta = 1, 2)$ vektorskog polja $\varphi^h(t)$ u pravcu tangentnog vektora $\lambda^h(t)$ krive l. Uslovi (2.10) imaju tenzorski karakter pa su invarijantni u odnosu na izbor sistema lokalnih koordinata u GA_N (GR_N), parametra t krive l i zamenu vektorskog polja $\varphi^h(t)$ kolinearnim vektorskim poljem $\tilde{\varphi}^h(t) = \sigma(t)\varphi^h(t)$.

Za krivu l zadatu u obliku (2.8) kažemo da je **geodezijska linija** prostora GA_N (GR_N), ako je tangentno vektorsko polje $\lambda^h(t)$ te krive rekurentno duž nje, tj.

$$\lambda^h{}_{\underset{\theta}{|\alpha}}(t)\lambda^\alpha(t) = \rho(t)\lambda^h(t), \quad (\theta = 1, 2;\ h = 1, 2, ..., N). \tag{2.11}$$

Tada se u odnosu na obe vrste kovarijantnog diferenciranja dobija ista jednačina

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + L^h_{\alpha\beta}(x)\,\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t) \tag{2.12}$$

pri čemu je $\rho(t)$ invarijanta. Kako je

$$\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt},$$

dobijamo

$$\frac{d^2x^h}{dt} + L^h_{\alpha\beta}(x)\,\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\frac{dx^h}{dt}, \quad (h,\alpha,\beta = 1,2,...,N). \tag{2.13}$$

Dakle, važi

Teorema 2.4. *Kriva l prostora $GA_N\,(GR_N)$ je geodezijska linija ako i samo ako funkcije* (2.8) *zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina* (2.13).

Parametar τ za koji tangentni vektor $\tilde{\lambda}^h(\tau)$ umesto jednačina oblika (2.11) zadovoljava jednačine oblika

$$\tilde{\lambda}^h{}_{\underset{\theta}{|}\alpha}(\tau)\tilde{\lambda}^\alpha(\tau) = 0, \quad (\theta = 1,2;\ h = 1,2,...,N). \tag{2.11 $'$}$$

zovemo **prirodnim** (**kanoničkim**) parametrom geodezijske linije. Dakle, kao i malopre važi

Teorema 2.5. *Kriva l je geodezijska linija prostora $GA_N\,(GR_N)$ ako i samo ako funkcije*

$$\tilde{x}^h = \tilde{x}^h(\tau), \quad (h = 1,2,...,N), \tag{2.14}$$

gde je τ kanonički parametar, zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{d^2\tilde{x}^h}{dt} + L^h_{\alpha\beta}(x)\,\frac{d\tilde{x}^\alpha}{dt}\frac{d\tilde{x}^\beta}{dt} = 0. \tag{2.15}$$

To je sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Na osnovu poznatog stava iz teorije diferencijalnih jednačina [52], [97] za date početne uslove

$$\tilde{x}^h(\tau_0) = \tilde{x}^h_0, \quad \frac{d\tilde{x}^h}{d\tau}(\tau_0) = \tilde{\lambda}^h_0$$

u prostoru $GA_N\,(GR_N)$ klase C^r $(r > 2)$ taj sistem ima jedinstveno rešenje. Prema tome važi sledeća

Teorema 2.6 ([8]) . *Kroz datu tačku $M_0(\tilde{x}^h_0)$ prostora $GA_N(GR_N)$, u datom pravcu $\tilde{\lambda}^h_0$ postoji tačno jedna geodezijska linija.*

3. Skoro geodezijske linije prostora nesimetrične afine koneksije

Uopštavajući pojam geodezijskih linija prostora simetrične afine koneksije i Rimanovih prostora, Sinjukov dolazi do pojma skoro geodezijskih linija [80], [83]. U ovom odeljku ćemo izneti rezultate koji se odnose na skoro geodezijske linije prostora nesimetrične afine koneksije, a koji su već objavljeni u okviru radova [90] - [92].

Neka je dat prostor nesimetriňe afine koneksije $G\overline{A}_N$. Tada u odnosu na sistem lokalnih koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$ možemo posmatrati krivu l zadatu u parametarskom obliku jednačinama:

$$x^h = x^h(t), \qquad \lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt} \neq 0. \tag{3.1}$$

M-dimenzionalni vektorski prostor E_M, zadat u proizvoljnoj tački P prostora $G\overline{A}_N$, koji, prirodno, pripada tangentnom prostoru T_P prostora $G\overline{A}_N$, nazivamo **M-dimenzionalnom raspodelom.**

Raspodelu dvodimenzionalnih ravni E_2 zadatu na krivoj l nazivamo **1-komplanarnom** (**2-komplanarnom**) duž te krive, ako proizvoljan vektor p^h_0, koji pripada E_2 u nekoj tački P_0 krive l kao rezultat paralelnog prenosa prve (druge) vrste u $G\overline{A}_N$ duž l u tački P daje vektor p^h koji takodje pripada E_2 u tački P. Označimo sa $p^h_{(1)}$ i $p^h_{(2)}$ bazne vektore[1] raspodele E_2.

Tada važi

Teorema 3.1. *Potreban i dovoljan uslov* 1*-komplanarnosti raspodele* E_2 *duž krive* l *izražen je relacijom oblika*

$$p^h_{(i)\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha = \underset{1}{a}{}^{(\beta)}_{(i)}p^h_{(\beta)}, \qquad (i,\beta = 1,2), \tag{3.2 a}$$

a 2*-komplanarnosti*

$$p^h_{(i)\underset{2}{||}\alpha}\lambda^\alpha = \underset{2}{a}{}^{(\beta)}_{(i)}p^h_{(\beta)}, \qquad (i,\beta = 1,2), \tag{3.2 b}$$

pri čemu su $\underset{\theta}{a}{}^{(i)}_{(j)}$, $(\theta = 1,2)$ *funkcije parametra* t.

Dokaz. Neka je raspodela E_2 1-komplanarna. Tada se pri paralelnom prenosu prve vrste baznog vektora raspodele E_2 $p^h_{(i)}$ $(i = 1,2)$ dobija vektor koji je s njim paralelan, tj. vektor koji takodje pripada raspodeli E_2, pa se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $p^h_{(i)}$, tj. važi (3.2 a).

Obratno, neka za bazne vektore $p^h_{(i)}$ važi relacija (3.2 a) i neka je $p^h = \underset{1}{c}{}^{(\beta)}p^h_{(\beta)}$ proizvoljan vektor raspodele E_2. Tada imamo

$$p^h_{\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha = \underset{1}{c}{}^{(\beta)}p^h_{(\beta)\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha = \underset{1}{c}{}^{(\mu)}\underset{1}{a}{}^{(\beta)}_{(\mu)}p^h_{(\beta)},$$

[1] Indeks u zagradama znači da on nema tenzorski karakter.

tj.

$$p^h_{\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha \in E_2$$

što znači da je raspodela E_2 1-komplanarna. Analogno se dokazuje tvrdjenje za 2-komplanarnost. ∎

U formulama (3.2 a,b) na desnoj strani se podrazumeva sumiranje po ponovljenim indeksima, $\underset{1}{||}$ označava kovarijantno diferenciranje prve vrste, $\underset{2}{||}$ kovarijantno diferenciranje druge vrste u $G\overline{A}_N$. Svojstvo θ-komplanarnosti $(\theta = 1, 2)$ raspodele E^2 ne zavisi kako od parametra t tako i od izbora sistema lokalnih koordinata.

Krivu l ćemo zvati **skoro geodezijskom linijom prve** (**druge**) **vrste**, ako duž l postoji komplanarna raspodela E_2 kojoj u svakoj tački pripada tangentni vektor $\lambda^h(t)$ te krive. Ova definicija predstavlja uopštenje odgovarajuće definicije za prostore simetrične afine koneksije [79].

Teorema 3.2. *Kriva l prostora $G\overline{A}_N$ zadata jednačinama* (3.1) *predstavlja skoro geodezijsku liniju vrste θ tada i samo tada, kada je*

$$\lambda^h(t) = \underset{\theta}{b}^{(\sigma)}(t) p^h_{(\sigma)}(t), \qquad (\theta, \sigma = 1, 2) \tag{3.3}$$

gde su $\underset{\theta}{b}^{(\sigma)}(t)$ neke funkcije parametra t, a za vektore $p^h_{(i)}(t)$ $(i = 1, 2)$ su ispunjeni uslovi $(3.2\,a, b)$.

Dokaz. Neka važi (3.3). Tada

$$\lambda^h_{\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha = \underset{1}{b}^{(\sigma)} p^h_{(\sigma)\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha = \underset{1}{b}^{(\sigma)} \underset{1}{a}^{(\mu)}_{(\sigma)} p^h_{(\mu)}$$

tj.

$$\lambda^h(t) \in E_2$$

pa je kriva l zaista skoro geodezijska linija prve vrste. Da je uslov (3.3) dovoljan da kriva l bude skoro geodezijska linija druge vrste zaključuje se analogno. ∎

Osobina da je kriva l skoro geodezijska linija prve (druge) vrste prostora $G\overline{A}_N$ je invarijantna u odnosu na izbor koordinatnog sistema i parametra na krivoj, pa je to čisto geometrijska osobina.

Iz (3.2 a,b) nije teško naći diferencijalne jednačine skoro geodezijskih linija prve odnosno druge vrste prostora $G\overline{A}_N$.

Označimo

$$\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)} = \lambda^h_{\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha, \quad \underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)\underset{1}{||}\alpha}\lambda^\alpha, \tag{3.4 a}$$

$$\underset{2}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)} = \lambda^h_{\underset{2}{||}\alpha}\lambda^\alpha, \quad \underset{2}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{2}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)\underset{2}{||}\alpha}\lambda^\alpha. \tag{3.4 b}$$

Lako se pokazuje sledeća

Teorema 3.3. *Vektori $\underset{\theta}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}$ i $\underset{\theta}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}$, $(\theta = 1, 2)$ pripadaju raspodeli E_2 u svakoj tački skoro geodezijske linije l.*

Dokaz. Iz (3.4 a) se vidi da je vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}$ dobijen paralelnim pomeranjem vektora λ^h duž skoro geodezijske linije l pa prema definiciji skoro geodezijske linije pripada raspodeli E_2, dok je vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}$ dobijen paralelnim pomeranjem vektora $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}$ duž l pa i on pripada raspodeli E_2. Ostatak teoreme se analogno pokazuje. ■

Teorema 3.4. *Potreban i dovoljan uslov da kriva l prostora $G\overline{A}_N$ definisana jednačinama* (3.1) *bude skoro geodezijska prve vrste izražen je relacijom*

$$\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{1}{\overline{a}}(t)\lambda^h + \underset{1}{\overline{b}}(t)\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)} \tag{3.5 a}$$

pri čemu su $\underset{1}{\overline{a}}(t)$ i $\underset{1}{\overline{b}}(t)$ neke funkcije parametra t.

Dokaz. Ako je kriva l geodezijska dokaz je trivijalan. U slučaju kada kriva l nije geodezijska linija prostora $G\overline{A}_N$ $\lambda^h(t)$ i $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}(t)$ su linearno nezavisni pa se mogu uzeti za bazne vektore raspodele E_2. Kako prema Teoremi 3.3 vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}(t)$ pripada raspodeli E_2 to se on može predstaviti kao lnearna kombinacija baznih vektora raspodele E_2, tj. u obliku (3.5 a).

Obratno, neka postoje funkcije $\underset{1}{\overline{a}}(t)$ i $\underset{1}{\overline{b}}(t)$ takve da se vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}(t)$ može predstaviti u obliku (3.5 a). Vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}(t)$ po definiciji dobijen paralelnim pomeranjem prve vrste vektora $\lambda^h(t)$ duž krive l a vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}(t)$ paralelnim pomeranjem prve vrste vektora $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}(t)$, što znači da je vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}(t)$ dobijen paralelnim pomeranjem prve vrste vektora $\lambda^h(t)$ duž krive l. Prema (3.5 a) zaključujemo da vektor $\underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)}(t)$ pripada raspodeli $E_2\{\lambda^h(t)\,,\ \underset{1}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)}(t)\}$, tj kriva l je skoro geodezijska linija prostora $G\overline{A}_N$. ■

Analogno se pokazuje

Teorema 3.5. *Potreban i dovoljan uslov da kriva l prostora $G\overline{A}_N$ definisana jednačinama* (3.1) *bude skoro geodezijska druge vrste izražen je relacijom*

$$\underset{2}{\overline{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{2}{\overline{a}}(t)\lambda^h + \underset{2}{\overline{b}}(t)\underset{2}{\overline{\lambda}}{}^h_{(1)} \tag{3.5 b}$$

pri čemu su $\underset{2}{\overline{a}}(t)$ i $\underset{2}{\overline{b}}(t)$ neke funkcije parametra t.

Prema tome (3.5 a) i (3.5 b) predstavljaju diferencijalne jednačine skoro geodezijskih linija prve odnosno druge vrste prostora $G\overline{A}_N$.

Teorema 3.6. *Jednačine* (3.5 a) *i* (3.5b) *su invarijantne u odnosu na izbor sistema koordinata u $G\overline{A}_N$ i parametra t krive l.*

Dokaz. Kako jednačine (3.5 a) i (3.5 b) imaju tenzorski karakter to su one invarijantne u odnosu na izbor koordinatnog sistema. Posle prelaska na skoro geodezijskoj linije prve vrste prostora $G\overline{A}_N$, od prvobitnog parametra t na novi τ po zakonu

$$\tau = f(t), \qquad \frac{df(\tau)}{dt} \neq 0, \tag{3.6}$$

jednačine (3.1) dobijaju oblik

$$\tilde{x}^h = \tilde{x}^h(\tau), \tag{3.7}$$

a uslovi (3.5 a)

$$\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{1}{\tilde{a}}(\tau) + \underset{1}{\tilde{b}}(\tau)\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}, \tag{3.8 a}$$

gde je

$$\tilde{\lambda}^h \frac{d\tilde{x}^h}{d\tau}, \quad \underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)} = \tilde{\lambda}^h_{\underset{1}{||}\alpha}\tilde{\lambda}^\alpha, \quad \underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(2)} = \tilde{\lambda}^h_{(2)\underset{1}{||}\alpha}\tilde{\lambda}^\alpha, \tag{3.9}$$

pri čemu je lako videti da je

$$\underset{1}{\tilde{b}}(\tau) = \frac{\underset{1}{\overline{b}}(t)}{f'(t)} - 3\frac{f''(t)}{f'^2(t)}, \quad \underset{1}{\tilde{a}}(\tau) = \frac{-f'''(t) + \underset{1}{\overline{a}}(t)f''(t) + \underset{1}{\overline{b}}(t)f'(t)}{f'^3(t)} \tag{3.10}$$

Time je teorema dokazana. ■

Iz (3.10) zaključujemo da za proizvoljnu skoro geodezijsku liniju prve vrste prostora $G\overline{A}_N$ parametar τ može biti izabran na taj način da je

$$\underset{1}{\tilde{b}}(\tau) \equiv 0. \tag{3.11}$$

Takav parametar zovemo **prvim kanoničkim parametrom** skoro geodezijske linije prve vrste.

Na taj način ako funkcije (3.7) daju parametarsko predstavljanje skoro geodezijske linije prve vrste prostora $G\overline{A}_N$ u odnosu na prvi kanonički parametar, to znači prema (3.5 a,11) da je za njih ispunjen uslov

$$\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{1}{\tilde{a}}(t)\tilde{\lambda}^h. \tag{3.12}$$

Prema definiciji kovarijantnog izvoda prve vrste vektora duž krive sledi

Teorema 3.7. *Jednačine* (3.7) *definišu skoro geodezijsku liniju prve vrste tada i samo tada kada funkcije* $\tilde{x}^h(\tau)$ *zadovoljavaju jednačine*

$$\begin{gathered} \frac{d\tilde{x}^h(\tau)}{d\tau} = \tilde{\lambda}^h, \qquad \frac{d\tilde{\lambda}^h(\tau)}{d\tau} = -\overline{L}^h_{\alpha\beta}(x)\,\tilde{\lambda}^\alpha\tilde{\lambda}^\beta + \underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}, \\ \frac{d\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}}{d\tau} = \overline{L}^h_{\alpha\beta}(x)\,\tilde{\lambda}^\alpha\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^\beta_{(1)} + \underset{1}{\tilde{a}}(\tau)\tilde{\lambda}^h. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Jednačine (3.13) predstavljaju **diferencijalne jednačine skoro geodezijskih linija** prve vrste prostora $G\overline{A}_N$, u odnosu na prvi kanonički parametar.

Za proizvoljno zadate početne uslove

$$\tilde{x}^h(\tau_0) = \tilde{x}^h_0, \quad \tilde{\lambda}^h(\tau_0) = \tilde{\lambda}^h_0, \quad \underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}(\tau_0) = \underset{01}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}$$

jednačine (3.13) imaju jedinstveno rešenje [52], [97]. Dakle važi

Teorema 3.8. *Kroz svaku tačku M_0 s koordinatama x^h_0 prostora $G\overline{A}_N$, u svakom tangentnom pravcu $\tilde{\lambda}^h_0$ pri zadatom pravcu vektora prve normale $\underset{01}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}$ prolazi tačno jedna skoro geodezijska linija prve vrste.*

Analognim razmatranjem dobijamo

Teorema 3.9. *Jednačine* (3.7) *definišu skoro geodezijsku liniju druge vrste tada i samo tada kada funkcije $\tilde{x}^h(\tau)$ zadovoljavaju jednačine*

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{x}^h(\tau)}{d\tau} = \tilde{\lambda}^h, \qquad \frac{d\tilde{\lambda}^h(\tau)}{d\tau} = -\overline{L}^h_{\alpha\beta}(x)\,\tilde{\lambda}^\alpha\tilde{\lambda}^\beta + \underset{2}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}, \\ &\frac{d\underset{2}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}}{d\tau} = -\overline{L}^h_{\beta\alpha}(x)\,\tilde{\lambda}^\alpha\underset{2}{\tilde{\lambda}}{}^\beta_{(1)} + \underset{2}{\tilde{a}}(\tau)\tilde{\lambda}^h. \end{aligned} \tag{3.13'}$$

Takodje važi

Teorema 3.10. *Kroz svaku tačku M_0 s koordinatama x^h_0 prostora $G\overline{A}_N$, u svakom tangentnom pravcu $\tilde{\lambda}^h_0$ pri zadatom pravcu vektora prve normale $\underset{02}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}$ prolazi tačno jedna skoro geodezijska linija druge vrste.*

Ukoliko parametar τ izaberemo tako da je $\underset{1}{\tilde{a}}(t) \equiv 0$, takav parametar nazivamo **drugim kanoničkim parametrom**. Tada iz (3.5 a,b) sledi

Teorema 3.11. *Jednačine skoro geodezijskih linija prve vrste u odnosu na drugi kanonički parametar imaju oblik*

$$\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{1}{\tilde{b}}(t)\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)} \tag{3.14 a}$$

a druge vrste

$$\underset{2}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(2)} = \underset{2}{\tilde{b}}(t)\underset{1}{\tilde{\lambda}}{}^h_{(1)}. \tag{3.14 b}$$

4. Identiteti Ričijevog tipa, tenzori i pseudotenzori krivine

4.1. Tenzori i pseudotenzori krivine

Kod prostora simetrične afine koneksije, a samim tim i kod Rimanovih prostora postoji jedan Ričijev identitet koji se odnosi na alternirani kovarijantni izvod drugog reda i jedan tenzor krivine - Riman-Kristofelov tenzor (npr. [31], [109]). U slučaju nesimetrične koneksije postoji deset mogućnosti za formiranje razlike

$$a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{\pi}{|}m\underset{\rho}{|}n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{\sigma}{|}n\underset{\tau}{|}m}, \quad (\pi,\rho,\sigma,\tau=1,2) \tag{4.1}$$

gde $\underset{1}{|}$ i $\underset{2}{|}$ označavaju dve vrste kovarijantnog diferenciranja u GA_N definisanih sa (2.1), pa se prema tome dobija deset identiteta Ričijevog tipa [29], [32]. Tu se pojavljuju **tri tenzora krivine:**

$$\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{4.2}$$

$$\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{m\alpha}, \tag{4.3}$$

$$\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m} + L^\alpha_{nm}(L^i_{\alpha j} - L^i_{j\alpha}), \tag{4.4}$$

kao i petnaest veličina, koje nisu tenzori, ali po svom obliku, načinu na koji su dobivene i ulozi u identitetima "liče" na tenzore krivine pa su u [29] nazvane **pseudotenzorima krivine:**

$$\underset{1}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{4.5}$$

$$\underset{2}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{4.6}$$

$$\underset{3}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{4.7}$$

$$\underset{4}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{4.8}$$

$$\underset{5}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{nj}L^i_{m\alpha}, \tag{4.9}$$

$$\underset{6}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{4.10}$$

$$\underset{7}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{4.11}$$

$$\underset{8}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{4.12}$$

$$\underset{9}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{4.13}$$

$$\underset{10}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{4.14}$$

$$\underset{11}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{4.15}$$

$$\underset{12}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{nj}L^i_{m\alpha}, \tag{4.16}$$

$$\underset{13}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{4.17}$$

$$\underset{14}{A}{}^{i}{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{m\alpha}, \tag{4.18}$$

$$\underset{15}{A}{}^{i}{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{4.19}$$

Mogu se takodje posmatrati razlike

$$a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{\pi}{|}m\underset{\rho}{|}n} - a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{\sigma}{|}n\underset{\tau}{|}m}, \quad (\pi,\rho,\sigma,\tau = 3,4) \tag{4.20}$$

gde su $\underset{3}{|}$ i $\underset{4}{|}$ treća i četvrta vrsta kovarijantnog diferenciranja u GA_N. U deset, na taj način dobijenih identiteta Ričijevog tipa pojavjluju se isti tenzori i pseudotenzori krivine kao kod prve i druge vrste kovarijantnog diferenciranja, samo u drugačijim kombinacijama, kao i jedan novi tenzor krivine [35]:

$$\underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m} + L^\alpha_{mn}(L^i_{\alpha j} - L^i_{j\alpha}). \tag{4.21}$$

U [31] date su veze izmedju tenzora i pseudotenzora krivine prostora GA_N i tenzora krivine

$$R^i{}_{jmn} = L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + L^\alpha_{\underline{jm}}L^i_{\underline{\alpha n}} - L^\alpha_{\underline{jn}}L^i_{\underline{\alpha m}}, \tag{4.22}$$

pridruženog prostora simetrične afine koneksije.

4.2. Izvedeni tenzori krivine

Izvesnim kombinacijama Identiteta Ričijevog tipa u [34] su dobijeni složeni identiteti Ričijevog tipa u kojima se pojavljuju novi tenzori krivine $\underset{1}{\tilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\tilde{R}}$, pri čemu je:

$$\underset{1}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})^i{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{2}{A} + \underset{4}{A})^i{}_{jmn}, \tag{4.23}$$

$$\underset{2}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{7}{A} + \underset{13}{A})^i{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{9}{A} + \underset{11}{A})^i{}_{jmn}, \tag{4.24}$$

$$\underset{3}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{8}{A} + \underset{14}{A})^i{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{10}{A} + \underset{12}{A})^i{}_{jmn}, \tag{4.25}$$

$$\underset{4}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \frac{1}{3}(\underset{3}{R} + \underset{11}{A} + \underset{13}{A})^i{}_{jm\underset{\vee}{n}} = \frac{1}{3}(\underset{3}{R} + \underset{12}{A} + \underset{14}{A})^i{}_{jm\underset{\vee}{n}}, \tag{4.26}$$

$$\underset{5}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{1}{A} - \underset{7}{A})^i{}_{jmn} - \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jnm} = -\underset{7}{A}{}^{i}{}_{jmn} - (\underset{11}{A} + \underset{15}{A})^i{}_{jnm}, \tag{4.27}$$

$$\underset{6}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^i{}_{jmn} - \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jnm} = -\underset{8}{A}{}^{i}{}_{jmn} - (\underset{12}{A} + \underset{15}{A})^i{}_{jnm}, \tag{4.28}$$

$$\underset{7}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{3}{A} + \underset{7}{A})^i{}_{jmn} + \underset{13}{A}{}^{i}{}_{jnm} = \underset{9}{A}{}^{i}{}_{jmn} + (\underset{13}{A} - \underset{15}{A})^i{}_{jnm}, \tag{4.29}$$

$$\underset{8}{\tilde{R}}{}^{i}{}_{jmn} = (\underset{4}{A} + \underset{8}{A})^i{}_{jmn} + \underset{14}{A}{}^{i}{}_{jnm} = \underset{10}{A}{}^{i}{}_{jmn} + (\underset{14}{A} - \underset{15}{A})^i{}_{jnm}, \tag{4.30}$$

a tenzori $\underset{1}{\tilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\tilde{R}}$ nazivaju se **izvedenim tenzorima krivine.**

Medju dvanaest tenzora krivine $\underset{1}{R}, \ldots, \underset{4}{R}; \underset{1}{\tilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\tilde{R}}$, pet je nezavisno, a svi ostali se mogu izraziti preko njih i tenzora krivine pridruženog prostora simetrične afine koneksije [37]. Dakle svih dvanaest tenzora krivine možemo izraziti kao linearne kombinacije npr. tenzora $\underset{1}{R}, \ldots, \underset{4}{R}, \underset{5}{R} = \underset{2}{\tilde{R}}$ i tenzora krivine R pridruženog prostora simetrične afine koneksije.

G l a v a II

PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

5. Tenzor deformacije koneksije i osnovne relacije izmedju tenzora krivine

5.1. Tenzor deformacije koneksije

Neka su dati prostori nesimetrične afine koneksije GA_N i $G\overline{A}_N$ i preslikavanje $f : GA_N \to G\overline{A}_N$. Ako tačka M ima u GA_N lokalne koordinate (x^i), a njoj odgovarajuća tačka $\overline{M}$ po preslikavanju f ima lokalne koordinate $(\overline{x}^i)$, pretpostavljamo da je

$$\overline{x}^h = f^h(x^1, ..., x^N), \qquad (h = 1, 2, ..., N) \tag{5.1}$$

pri čemu funkcije $f^h(x^1, ..., x^N)$ pripadaju klasi C^r ($r > 2$) i

$$det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^i}\right) \neq 0.$$

Prostore GA_N i $G\overline{A}_Y$ razmatramo u zajedničkom po preslikavanju f, sistemu lokalnih koordinata: $x^1, x^2, ..., x^N$. Komponente koneksije prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ u odgovarajućim tačkama $M(x)$ i $\overline{M}(x)$, po preslikavanju f označimo sa $L^h_{ij}(x)$ i $\overline{L}^h_{ij}(x)$ i stavimo

$$\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x), \qquad (h, i, j = 1, 2, ..., N) \tag{5.2}$$

Kako je

$$P^{h'}_{i'j'}(x') = \overline{L}^{h'}_{i'j'}(x') - L^{h'}_{i'j'}(x')$$

to iz zakona transformacije komponenata koneksije $L^h_{ij}(x)$ i $\overline{L}^h_{ij}(x)$ imamo:

$$P^{h'}_{i'j'}(x') = P^h_{ij}(x) x^{h'}_h x^i_{i'} x^j_{j'},$$

pa je $P^h_{ij}(x)$ tenzor tipa $\binom{1}{2}$ koji nazivamo **tenzorom deformacije koneksije** L prostora GA_N pri preslikavanju f.

5.2. Tenzor deformacije koneksije i tenzori krivine prve vrste

U prostoru GA_N postoji pet nezavisnih tenzora krivine $\underset{\alpha}{R}{}^i{}_{jmn}$, $\alpha = 1, ..., 6$ (v. §4). Neka je P^h_{ij} tenzor deformacije koneksije prostora GA_N pri geodezijskom preslikavanju f na prostor $G\overline{C}_N$, tj. neka izmedju komponenata koneksije $L^h_{ij}(x)$ i $\overline{L}^h_{ij}(x)$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ važi relacija (5.4). Uspostavićemo veze izmedju odgovarajućih tenzora krivine prostora GA_N i $G\overline{A}_N$.

Prema (4.2) i (5.2) za tenzor krivine prve vrste prostora $G\overline{A}_N$ imamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \overline{L}^i_{jm,n} - \overline{L}^i_{jn,m} + \overline{L}^\alpha_{jm}\overline{L}^i_{\alpha n} - \overline{L}^\alpha_{jn}\overline{L}^i_{\alpha m}\\ &= (L^i_{jm} + P^i_{jm})_{,n} - (L^i_{jn} + P^i_{jn})_{,m} + (L^\alpha_{jm} + P^\alpha_{jm})(L^i_{\alpha n} + P^i_{\alpha n})\\ &- (L^\alpha_{jn} + P^\alpha_{jn})(L^i_{\alpha m} + P^i_{\alpha m}),\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm,n} + L^i_{\alpha n}P^\alpha_{jm} - L^\alpha_{jn}P^i_{\alpha m} - L^\alpha_{mn}P^i_{j\alpha} + L^\alpha_{mn}P^i_{j\alpha}\\ &- (P^i_{jn,m} + L^i_{\alpha m}P^\alpha_{jn} - L^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - L^\alpha_{nm}P^i_{j\alpha}) - L^\alpha_{nm}P^i_{j\alpha}\\ &+ P^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - P^\alpha_{jn}P^i_{\alpha m}.\end{aligned}$$

Prema (2.1) prethodna relacija postaje

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} - P^i_{jn\underset{1}{|}m} + P^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - P^\alpha_{jn}P^i_{\alpha m} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{j\alpha}. \tag{5.3}$$

Dakle važi

Teorema 5.1. *Veza izmedju tenzora krivine prve vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ data je relacijom (5.3) pri čemu je P^h_{ij} tenzor deformacije koneksije preslikavanja f, $L^h_{\underset{\vee}{ij}}$ tenzor torzije koneksije, dok $\underset{1}{|}$ označava kovarijantni izvod prve vrsty u odnosu na L^i_{jk}.*

5.3. Tenzor deformacije koneksije i tenzori krivine druge vrste

Prema (4.3), (5.2) i (2.6) za tenzor krivine druge vrste prostora $G\overline{A}_N$ imamo

$$\begin{aligned}\overline{\underset{2}{R}}{}^i_{jmn} &= \overline{L}^i_{mj,n} - \overline{L}^i_{nj,m} + \overline{L}^\alpha_{mj}\overline{L}^i_{n\alpha} - \overline{L}^\alpha_{nj}\overline{L}^i_{m\alpha}\\ &= (L^i_{mj} + P^i_{mj})_{,n} - (L^i_{nj} + P^i_{nj})_{,m} + (L^\alpha_{mj} + P^\alpha_{mj})(L^i_{n\alpha} + P^i_{n\alpha})\\ &- (L^\alpha_{nj} + P^\alpha_{nj})(L^i_{t\alpha} + P^i_{m\alpha}),\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\overline{\underset{2}{R}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^\alpha_{mj}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{m\alpha} + 2\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{nm}P^i_{\alpha j}. \tag{5.4}$$

Dakle dokazana je

Teorema 6.2. *Veza izmedju tenzora krivine druge vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ data je relacijom (5.4) pri čemu je P^h_{ij} tenzor deformacije koneksije preslikavanja f, a $\underset{\vee}{L}{}^h_{ij}$ tenzor torzije koneksije.*

5.4. Tenzor deformacije koneksije i tenzori krivine treće vrste

Uspostavimo sada vezu izmedju tenzora krivine treće vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$. Prema (4.7) i (5.2) za tenzor treće vrste prostora $G\overline{A}_O$ imamo

$$\begin{aligned}\overline{\underset{3}{R}}{}^i_{jmn} &= \overline{L}^i_{jm,n} - \overline{L}^i_{nj,m} + \overline{L}^\alpha_{jm}\overline{L}^i_{n\alpha} - \overline{L}^\alpha_{nj}\overline{L}^i_{\alpha m} + 2\overline{L}^\alpha_{nm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}\\ &= (L^i_{jm} + P^i_{jm})_{,n} - (L^i_{nj} + P^i_{nj})_{,m} + (L^\alpha_{jm} + P^\alpha_{jm})(L^i_{n\alpha} + P^i_{n\alpha})\\ &- (L^\alpha_{nj} + P^\alpha_{nj})(L^i_{\alpha m} + P^i_{\alpha m}) + 2(L^\alpha_{nm} + P^\alpha_{nm})(\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + \underset{\vee}{P}{}^i_{\alpha j}),\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^\alpha_{jm}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m}\\ &+ 2P^\alpha_{nm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + 2P^\alpha_{nm}\underset{\vee}{P}{}^i_{\alpha j}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Dakle važi

Teorema 5.3. *Veza izmedju tenzora krivine treće vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ data je relacijom (5.5) pri čemu je P^h_{ij} tenzor deformacije koneksije preslikavanja f, a $\underset{\vee}{L}{}^h_{ij}$ tenzor torzije koneksije.*

5.5. Tenzor deformacije koneksije i tenzori krivine četvrte vrste

Prema (4.2), (5.2) i (2.3,4) za tenzore krivine četvrte vrste analogno kao u odeljku 5.4. dokazujemo da važi sledeća

Teorema 5.4. *Veza izmedju tenzora krivine četvrte vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ data je relacijom*

$$\begin{aligned}\overline{\underset{4}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^\alpha_{jm}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m}\\ &+ 2P^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + 2P^\alpha_{mn}\underset{\vee}{P}{}^i_{\alpha j}\end{aligned} \tag{5.6}$$

pri čemu je P^h_{ij} tenzor deformacije koneksije preslikavanja f, a $\underset{\vee}{L}{}^h_{ij}$ tenzor torzije koneksije.

5.6. Tenzor deformacije koneksije i tenzori krivine pete vrste

Prema (4.11), (4.17) i (4.24) za tenzor krivine pete vrste prostora $G\overline{A}_N$ imamo

$$\begin{aligned}\overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} &= \overset{\approx}{\underset{2}{R}} = \frac{1}{2}(\underset{7}{\overline{A}} + \underset{13}{\overline{A}})^i{}_{jmn} = \frac{1}{2}(\overline{L}^i_{jm,n} - \overline{L}^i_{jn,m} + \overline{L}^\alpha_{jm}\overline{L}^i_{\alpha n}\\ &- \overline{L}^\alpha_{jn}\overline{L}^i_{m\alpha} + \overline{L}^i_{mj,n} - \overline{L}^i_{nj,m} + \overline{L}^\alpha_{mj}\overline{L}^i_{n\alpha} - \overline{L}^\alpha_{nj}\overline{L}^i_{\alpha m})\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} &= \frac{1}{2}[(L^i_{jm} + P^i_{jm})_{,n} - (L^i_{jn} + P^i_{jn})_{,m}\\ &+ (L^\alpha_{jm} + P^\alpha_{jm})(L^i_{\alpha n} + P^i_{\alpha n}) - (L^\alpha_{jn} + P^\alpha_{jn})(L^i_{m\alpha} + P^i_{m\alpha})\\ &- (L^i_{mj} + P^i_{mj})_{,n} - (L^i_{nj} + P^i_{nj})_{,m}\\ &+ (L^\alpha_{mj} + P^\alpha_{mj})(L^i_{n\alpha} + P^i_{n\alpha}) - (L^\alpha_{nj} + P^\alpha_{nj})(L^i_{\alpha m} + P^i_{\alpha m})],\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}\overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} = \frac{1}{2}(&L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n} - L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha} + L^i_{mj,n}\\ &- L^i_{nj,m} + L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m} + P^i_{jm,n} - P^i_{jn,m} + L^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n}\\ &+ P^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n} + P^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - L^\alpha_{jn}P^i_{m\alpha} - P^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha} - P^\alpha_{jn}P^i_{m\alpha} + P^i_{mj,n}\\ &- P^i_{nj,m} + L^\alpha_{mj}P^i_{n\alpha} + P^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha} + P^\alpha_{mj}P^i_{n\alpha} - L^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m} - P^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m}).\end{aligned}$$

Korišćenjem (2.3,4) poslednju jednakost možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned}\overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}(P^i_{jm\underset{3}{|}n} - P^i_{jn\underset{4}{|}m} + P^i_{mj\underset{4}{|}n} - P^i_{nj\underset{3}{|}m}\\ &+ P^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - P^\alpha_{jn}P^i_{m\alpha} + P^\alpha_{mj}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m})\end{aligned} \tag{5.7}$$

Prema tome važi sledeća

Teorema 5.5. *Veza izmedju tenzora krivine pete vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ data je relacijom* (5.7)

5.7. Slučaj prostora simetrične afine koneksije

U slučaju prostora simetrične afine koneksije i Rimanovih prostora [83], tenzori krivine $\underset{\alpha}{R}{}^{i}{}_{jmn}$, $\alpha = 1, 2, ..., 5$ se svode na Riman-Kristofelov tenzor krivine $R^{i}{}_{jmn}$. Tada se formule (5.3-7) svode na

$$\overline{R}{}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + P^{i}{}_{jmn} - P^{i}{}_{jn;m} + P^{\alpha}_{jm} P^{i}_{\alpha n} - P^{\alpha}_{jn} P^{i}_{\alpha m}. \tag{5.8}$$

G l a v a III

KONFORMNA PRESLIKAVANJA GENERALISANIH RIMANOVIH PROSTORA

6. Konformno preslikavanje

6.1. Uvodni pojmovi

Neka su dati generalisani Rimanovi prostori GR_N i $G\overline{R}_N$. Za preslikavanje $f: GR_N \to G\overline{R}_N$ kažemo da je **konformno** ako osnovni metrički tenzori g_{ij} i $\overline{g}_{ij}$ ovih prostora zadovoljavaju uslov

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}, \tag{6.1}$$

gde je ψ funkcija od $x = (x^1, \cdots, x^N)$, a prostore posmatramo u zajedničkom po preslikavanju sistemu lokalnih koordinata x^i. U tom slučaju je za Kristofelove simbole prve vrste prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ zadovoljena relacija

$$\overline{\Gamma}_{i.jk} = e^{2\psi}(\Gamma_{i.jk} + g_{ji}\psi_{,k} - g_{jk}\psi_{,i} + g_{ik}\psi_{,j}) \tag{6.2}$$

a za Kristofelove simbole druge vrste

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + g^{\underline{ip}}(g_{jp}\psi_{,k} - g_{jk}\psi_{,p} + g_{pk}\psi_{,j}). \tag{6.3}$$

Označimo $\psi_k = \psi_{,k} = \partial\psi/\partial x^k$ i $\psi^i = g^{\underline{ip}}\psi_p$. Sada iz (6.3) imamo

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + g^{\underline{ip}}(g_{\underline{jp}}\psi_k - g_{\underline{jk}}\psi_p + g_{\underline{pk}}\psi_j) + g^{\underline{ip}}(g_{\underset{\vee}{jp}}\psi_k - g_{\underset{\vee}{jk}}\psi_p + g_{\underset{\vee}{pk}}\psi_j),$$

tj.

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j - \psi^i g_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk}, \tag{6.4}$$

gde je

$$\xi^i_{jk} = g^{\underline{ip}}(g_{\underset{\vee}{jp}}\,\psi_k - g_{\underset{\vee}{jk}}\,\psi_p + g_{\underset{\vee}{pk}}\,\psi_j) = -\xi^i_{kj} \tag{6.5}$$

a $\underset{\vee}{ij}$ označava antisimetrizaciju sa deljenjem. U odgovarajućim tačkama $M(x)$ i $\overline{M}(x)$ pri konformnom preslikavanju možemo staviti

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + P^i_{jk},\ \ (i,j,k = 1,...,N), \tag{6.6}$$

gde je P^i_{jk} **tenzor deformacije preslikavanja** $f : GR_N \to G\overline{R}_N$.

U slučaju konformnog preslikavanja $f : R_N \to \overline{R}_N$ Rimanovih prostora R_N i $\overline{R}_N$ [19], [50], [55], [83], imamo invarijantan geometrijski objekat

$$C^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \delta^i_m\,P_{jn} - \delta^i_n\,P_{jm} + P^i_m g_{jn} - P^i_n g_{mj} \tag{6.7}$$

gde je

$$P_{jm} \equiv \frac{1}{N-2}(R_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}R g_{jm}),$$

$R^i{}_{jmn}$ Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora R_N, R_{jm} Ričijev tenzor i R skalarna krivina.

Geometrijski objekat $C^i{}_{jmn}$ zove se **tenzor konformne krivine** [83], [109]. U slučaju conformnog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora u opštem slučaju se ne može naći generalizacija za tenzor konformne krivine. Iz tog razloga definišemo specijalna konformna preslikavanja.

6.2. Ekvitorziono konformno preslikavanje

Preslikavanje $f : GR_N \to G\overline{R}_N$ je **ekvitorziono konformno preslikavanje** ako su tenzori torzije prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ jednaki u zajedničkom po preslikavanju f koordinatnom sistemu. Tada iz (6.4) i (6.6) imamo

$$\xi^i_{jk} = 0. \tag{6.8}$$

7. Ekvitorzioni tenzori konformne krivine

7.1. Ekvitorzioni tenzor konformne krivine prve vrste

Za tenzore krivine prve vrste prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ važi relacija (5.3)

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{\underset{1}{jm|n}} - P^i_{\underset{1}{jn|m}} + P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{pm} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{jp}.$$

Zamenom P imajući u vidu $(6.4, 6, 8)$, i koristeći (1.16), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\psi_{\underset{1}{m|n}} - \psi_{\underset{1}{n|m}}) + \delta^i_m\,(\psi_{\underset{1}{j|n}} - \psi_j\psi_n) \\
&\quad - \delta^i_n\,(\psi_{\underset{1}{j|m}} - \psi_j\psi_m) - (\psi^i{}_{\underset{1}{|n}} - \psi_n\psi^i)g_{\underline{jm}} + (\psi^i{}_{\underset{1}{|m}} - \psi_m\psi^i)g_{\underline{jn}} \\
&\quad - \delta^i_n\,\psi^p\psi_p g_{\underline{jm}} + \delta^i_m\,\psi^p\psi_p g_{\underline{jn}} + 2\delta^i_j\,\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j - 2\Gamma_{j.\underset{\vee}{mn}}\psi^i.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Označimo

$$\underset{1}{\psi}_{ij} = \psi_{\underset{1}{i|j}} - \psi_i\psi_j, \quad \underset{1}{\psi}{}^i_j = g^{\underline{ip}}\,\underset{1}{\psi}_{pj} \tag{7.2a}$$

$$\Delta_1\psi = g^{\underline{pq}}\,\psi_p\psi_q = \psi_p\psi^p. \tag{7.2b}$$

Koristeći relaciju

$$\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm} = -2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p \tag{7.3}$$

iz (7.1) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m\,\underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm} + \underset{1}{\psi}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{1}{\psi}{}^i_n g_{\underline{jm}} \\
&\quad + (\delta^i_m\,g_{\underline{jn}} - \delta^i_n\,g_{\underline{jm}})\Delta_1\psi + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j - 2\Gamma_{j.\underset{\vee}{mn}}\psi^i.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Neka je sada

$$\underset{1}{\Delta}_2\psi = g^{\underline{pq}}\,\psi_{\underset{1}{p|q}}. \tag{7.5}$$

U tom slučaju se dobija

$$\underset{1}{\psi}{}^p_p = \underset{1}{\psi}_{pq}g^{\underline{pq}} = (\psi_{\underset{1}{p|q}} - \psi_p\psi_q)g^{\underline{pq}} = \underset{1}{\Delta}_2\psi - \Delta_1\psi.$$

Kontrakcijom po indeksima i i n u (7.4) dobijamo

$$\underset{1}{\overline{R}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} - (N-2)\underset{1}{\psi}_{jm} - [\underset{1}{\Delta}_2\psi + (N-2)\Delta_1\psi]g_{\underline{jm}} - 2\Gamma_{j.\underset{\vee}{mp}}\psi^p. \tag{7.6}$$

Iz (6.1) je

$$\overline{g}^{\underline{ij}} = e^{-2\psi}\,g^{\underline{ij}}. \tag{7.7}$$

U (7.6) množenjem sa $g^{\underline{jm}}$ i kontrakcijom po indeksima j i m imamo

$$e^{2\psi}\underset{1}{\overline{R}} = \underset{1}{R} - 2(N-1)\underset{1}{\Delta}_2\psi - (N-1)(N-2)\Delta_1\psi, \tag{7.8}$$

gde su

$$\underset{1}{\overline{R}} = \overline{g}^{\underline{pq}} \underset{1}{\overline{R}}_{pq}, \quad \text{i} \quad \underset{1}{R} = g^{\underline{pq}} \underset{1}{R}_{pq}$$

skalarne krivine prve vrste prostora $G\overline{R}_N$ i GR_N respektivno. Iz (7.8) je

$$\underset{1}{\Delta}_2 \psi = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{R} - e^{2\psi}\underset{1}{\overline{R}}) - \frac{N-2}{2}\Delta_1\psi. \tag{7.9}$$

Zamenom (7.9) u (7.6) dobijamo

$$\begin{aligned}(N-2)\underset{1}{\psi}_{jm} &= \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{R} - e^{2\psi}\underset{1}{\overline{R}})g_{\underline{jm}} \\ &- \frac{N-2}{2}\Delta_1\psi g_{\underline{jm}} - 2\Gamma_{j.\underset{\vee}{mp}}\psi^p.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Označimo u prostoru GR_N

$$\underset{1}{P}_{jm} \equiv \frac{1}{N-2}(\underset{1}{R}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}\underset{1}{R} g_{\underline{jm}}) \tag{7.10$'$}$$

i analogno $\underset{1}{\overline{P}}_{jm}$ u prostoru $G\overline{R}_N$. U tom slučaju za $\underset{1}{\psi}_{jm}$ dobijamo

$$\underset{1}{\psi}_{jm} = \underset{1}{P}_{jm} - \underset{1}{\overline{P}}_{jm} - \frac{1}{2}\Delta_1\psi g_{\underline{jm}} - \frac{2}{N-2}\Gamma_{j.\underset{\vee}{mp}}\psi^p. \tag{7.11}$$

Zamenom (7.11) u (7.4), imamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m(\underset{1}{P}_{jn} - \underset{1}{\overline{P}}_{jn}) - \delta^i_n(\underset{1}{P}_{jm} - \underset{1}{\overline{P}}_{jm}) \\ &+ \underset{1}{P}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{1}{\overline{P}}{}^i_m \overline{g}_{\underline{jn}} - \underset{1}{P}{}^i_n g_{\underline{jm}} + \underset{1}{\overline{P}}{}^i_n \overline{g}_{\underline{jm}} \\ &+ \frac{2}{N-2}(\delta^i_n \Gamma_{j.\underset{\vee}{mp}} - \delta^i_m \Gamma_{j.\underset{\vee}{np}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{np}} g_{\underline{jm}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{mp}} g_{\underline{jn}})\psi^p \\ &+ 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j - 2\Gamma_{j.\underset{\vee}{mn}}\psi^i.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Lako možemo uočiti da iz (6.1) sledi

$$\psi_i = \frac{1}{2N}(\frac{\partial}{\partial x^i} ln\,\overline{g} - \frac{\partial}{\partial x^i} ln\,g) \tag{7.13}$$

gde je $g = det\,(g_{ij})$, $\overline{g} = det\,(\overline{g}_{ij})$. Iz (6.8) i (7.13) dobijamo

$$\Gamma_{j.\underset{\vee}{nm}}\psi^i = \frac{1}{2N}\overline{\Gamma}_{j.\underset{\vee}{nm}}\overline{g}^{\underline{ip}}\frac{\partial}{\partial x^p} ln\,\overline{g} - \frac{1}{2N}\Gamma_{j.\underset{\vee}{nm}} g^{\underline{ip}}\frac{\partial}{\partial x^p} ln\,g \tag{7.14}$$

i

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}} g_{\underline{mj}}\psi^q = \frac{1}{2N}\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{qn}}\overline{g}_{\underline{mj}}\overline{g}^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^p} ln\,\overline{g} - \frac{1}{2N}\Gamma^i_{\underset{\vee}{qn}} g_{\underline{mj}} g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^p} ln\,g. \tag{7.15}$$

Uzimajući u obzir (7.13,14,15), relaciju (7.12) možemo predstaviti u obliku

$$\underset{1}{\overline{C}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{C}{}^{i}{}_{jmn}, \tag{7.16}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{1}{C}{}^{i}{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{1}{P}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{P}{}_{jm} + \underset{1}{P}{}^{i}{}_{m} g_{\underline{jn}} - \underset{1}{P}{}^{i}{}_{n} g_{\underline{jm}}\\ &+ \frac{1}{N(N-2)}(\delta^i_m \Gamma_{j.\underset{\vee}{np}} - \delta^i_n \Gamma_{j.\underset{\vee}{mp}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{mp}} g_{\underline{jn}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{np}} g_{\underline{jm}})g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^q} ln\, g\\ &+ \frac{1}{N}(\Gamma_{j.\underset{\vee}{mn}} g^{\underline{ip}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}}\delta^p_j)\frac{\partial}{\partial x^p} ln\, g.\end{aligned} \tag{7.17}$$

Na analogan način je predstavljen tenzor $\underset{1}{\overline{C}}{}^{i}{}_{jmn}$. Iz (7.16) vidimo da je tenzor $\underset{1}{C}{}^{i}{}_{jmn}$ invarijantan u odnosu na ekvitorziona konformna preslikavanja. Zvaćemo ga **tenzorom konformne krivine prve vrste**. Prema tome dokazana je sledeća:

Teorema 7.1. *Ekvitorzioni tenzor konformne krivine prve vrste* $\underset{1}{C}{}^{i}{}_{jmn}$ (7.17) *je invarijanta ekvitorzionog konformnog preslikavanja* $f : GR_N \to G\overline{R}_N$.

7.2. Ekvitorzioni tenzor konformne krivine druge vrste

Za tenzore krivine druge vrste prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ imamo relaciju

$$\underset{2}{\overline{R}}{}^{i}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{mp} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}P^i_{pj},$$

tj., korišćenjem (6.4,6,8) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{R}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\psi}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\psi}{}_{jm} + \underset{2}{\psi}{}^{i}_{m} g_{\underline{nj}} - \underset{2}{\psi}{}^{i}_{n} g_{\underline{mj}}\\ &+ (\delta^i_m\, g_{\underline{mj}} - \delta^i_n\, g_{\underline{mj}})\Delta_1\psi + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\psi_j - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi^i g_{\underline{pj}}\,,\end{aligned} \tag{7.18}$$

gde je

$$\underset{2}{\psi}{}_{ij} = \psi_{i\underset{2}{|}j} - \psi_i\psi_j, \quad \underset{2}{\psi}{}^{i}_{j} = g^{\underline{ip}}\underset{2}{\psi}{}_{ij}, \quad \Delta_1\psi = g^{\underline{pq}}\psi_p\psi_q. \tag{7.19}$$

Sada, analogno prethodnom slučaju dobijamo invarijantni geometrijski objekat ekvitorzionog konformnog preslikavanja $f : GR_N \to G\overline{R}_N$

$$\begin{aligned}\underset{2}{C}{}^{i}{}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{P}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{P}{}_{jm} + \underset{2}{P}{}^{i}{}_{m} g_{\underline{nj}} - \underset{2}{P}{}^{i}{}_{n} g_{\underline{mj}}\\ &+ \frac{1}{N(N-2)}(\delta^i_m \Gamma_{j.\underset{\vee}{pn}} - \delta^i_n \Gamma_{j.\underset{\vee}{pm}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} g_{\underline{nj}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} g_{\underline{mj}})g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^q} ln\, g\\ &+ \frac{1}{N}(\Gamma_{j.\underset{\vee}{nm}} g^{\underline{ip}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\delta^p_j)\frac{\partial}{\partial x^p} ln\, g\end{aligned} \tag{7.20}$$

gde je

$$P_{\underset{2}{}jm} \equiv \frac{1}{N-2}(R_{\underset{2}{}jm} - \frac{1}{2(N-1)} \underset{2}{R} g_{\underline{mj}}), \tag{7.21}$$

$R_{\underset{2}{}jm}$ Ričijev tenzor krivine druge vrste a $\underset{2}{R}$ skalarna krivina druge vrste. Veličina $\underset{2}{C}{}^i{}_{jmn}$ je tenzor koji ćemo zvati **ekvitorzionim tenzorom konformne krivine druge vrste**. Dakle, na taj način važi

Teorema 7.2. *Ekvitorzioni tenzor konformne krivine* (7.20) *je invarijanta ekvitorzionog konformnog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora.*

7.3. Ekvitorzioni tenzor konformne krivine treće vrste

U slučaju tenzora krivine treće vrste prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &+ P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm}\\ &+ 2P^p_{nm}\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj} + 2P^p_{nm}\underset{\vee}{P}{}^i_{pj}\end{aligned}$$

tj., imajući u vidu (6.4,6,8), (7.2*a*,b) i (7.19)

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\psi}_{jm} - \underset{2}{\psi}{}^i_n g_{\underline{jm}} + \underset{1}{\psi}{}^i_m g_{\underline{nj}}\\ &+ (\delta^i_m g_{\underline{nj}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\Delta_1\psi + 2\psi_m \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{nj} + 2\psi_n \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mj} - 2\psi^p g_{\underline{nm}}\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Takodje važi

$$\underset{2}{\psi}_{mn} = \underset{1}{\psi}_{mn} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_p, \quad \underset{2}{\psi}{}^i_n = \underset{1}{\psi}{}^i_n + 2g^{\underline{ip}}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn}\psi_q. \tag{7.23}$$

Iz (7.22), (7.23) i (6.8) imamo

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \delta^i_m \underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm} + \underset{1}{\psi}{}^i_m g_{\underline{nj}} - \underset{1}{\psi}{}^i_n g_{\underline{jm}}\\ &+ (\delta^i_m g_{\underline{nj}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\Delta_1\psi + 2\psi_m \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{nj} + 2\psi_n \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mj} - 2\psi^p g_{\underline{nm}}\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\\ &+ 2\delta^i_m \underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jn}\psi_p - 2g^{\underline{ip}}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn}\psi_q g_{\underline{jm}}.\end{aligned} \tag{7.24}$$

Kontrakcijom (7.24) u odnosu na i i n, i korišćenjem (7.5), imamo

$$\underset{3}{\overline{R}}_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} - (N-2)\underset{1}{\psi}_{jm} - [\underset{1}{\Delta}_2\psi + (N-2)\Delta_1\psi]g_{\underline{jm}} - \psi^p \underset{\vee}{\Gamma}_{m.pj}. \tag{7.25}$$

Množenjem (7.25) sa $\overline{g}^{\underline{jm}} = e^{-2\psi}g^{\underline{jm}}$ i kontrakcijom dobijamo

$$\underset{1}{\Delta}_2\psi = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{R} - e^{2\psi}\underset{3}{\overline{R}}) - \frac{N-2}{2}\Delta_1\psi. \tag{7.26}$$

Zamenom (7.26) u (7.25) i označavajući

$$\underset{3}{P}_{jm}=\frac{1}{N-2}\Big(\underset{3}{R}_{jm}-\frac{1}{2(N-1)}\underset{3}{R}g_{\underline{jm}}\Big) \tag{7.27}$$

u GR_N i analogno u $G\overline{R}_N$, u tom slučaju za $\underset{1}{\psi}_{jm}$ dobijamo

$$\underset{1}{\psi}_{jm}=\underset{3}{P}_{jm}-\underset{3}{\overline{P}}_{jm}-\frac{1}{2}\Delta_1\psi g_{\underline{jm}}-\frac{2}{N-2}\Gamma_{\underset{\vee}{m.pj}}\psi^p. \tag{7.28}$$

Zamenom (7.28) u (7.24) i korišćenjem (7.14,15) imamo

$$\underset{3}{\overline{C}}{}^i{}_{jmn}=\underset{3}{C}{}^i{}_{jmn} \tag{7.29}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{3}{C}{}^i{}_{jmn}&=\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn}+\delta^i_m\underset{3}{P}_{jn}-\delta^i_n\underset{3}{P}_{jm}+\underset{3}{P}{}^i_m g_{\underline{nj}}-\underset{3}{P}{}^i_n g_{\underline{jm}}\\&+\frac{1}{N(N-2)}(\delta^i_m\Gamma_{\underset{\vee}{n.pj}}-\delta^i_n\Gamma_{\underset{\vee}{m.pj}})g^{\underline{pq}}\frac{\partial}{\partial x^q}ln\, g\\&+\frac{1}{N}(g^{\underline{ip}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pn}}g_{\underline{jm}}-\delta^q_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{nj}}-\delta^q_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{mj}}\\&+\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}g_{\underline{nm}}g^{\underline{pq}}-\delta^i_m\Gamma^q_{\underset{\vee}{jn}})\frac{\partial}{\partial x^q}ln\, g\end{aligned} \tag{7.30}$$

i analogno za $\underset{3}{\overline{C}}{}^i{}_{jmn}$ prostora $G\overline{R}_N$. Iz (7.29) možemo videti da je tenzor $\underset{3}{C}{}^i{}_{jmn}$ invarijanta ekvitorzionog konformnog preslikavanja i zvaćemo ga **ekvitorzionim tenzorom konformne krivine treće vrste.** Sada imamo

Teorema 7.3. *Tenzor* $\underset{3}{C}{}^i{}_{jmn}$ (7.30) *je invarijanta ekvitorzionog konformnog preslikavanja* $f:GR_N\to G\overline{R}_N$, *gde je* $\underset{3}{P}$ *dato pomoću* (7.27).

7.4. Ekvitorzioni tenzor konformne krivine četvrte vrste

Za tenzore krivine četvrte vrste imamo

$$\begin{aligned}\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn}&=\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn}+P^i_{jm\underset{2}{|}n}-P^i_{nj\underset{1}{|}m}+P^p_{jm}P^i_{np}-P^p_{nj}P^i_{pm}\\&+2P^p_{mn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}+2P^p_{mn}P^i_{\underset{\vee}{pj}}\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn}&=\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn}+\delta^i_m\underset{1}{\psi}_{jn}-\delta^i_n\underset{1}{\psi}_{jm}+\underset{1}{\psi}{}^i_m g_{\underline{nj}}-\underset{1}{\psi}{}^i_n g_{\underline{jm}}\\&+(\delta^i_m g_{\underline{nj}}-\delta^i_n g_{\underline{jm}})\Delta_1\psi+2\psi_n\Gamma^i_{\underset{\vee}{mj}}+2\psi_m\Gamma^i_{\underset{\vee}{nj}}-2\psi^p g_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}\\&+2\delta^i_m\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\psi_p-2g^{\underline{ip}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pn}}\psi_q g_{\underline{jm}}.\end{aligned}$$

Sada, analogno prethodnom slučaju, dobijamo invarijantu ekvitorzionog konformnog preslikavanja u obliku

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{C}{}^i{}_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{4}{P}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{4}{P}{}_{jm} + \underset{4}{P}{}^i_m g_{\underline{nj}} - \underset{4}{P}{}^i_n g_{\underline{jm}} \\
&+ \frac{1}{N(N-2)}(\delta^i_m \underset{\vee}{\Gamma}_{n.pj} - \delta^i_n \underset{\vee}{\Gamma}_{m.pj}) g^{\underline{pq}} \frac{\partial}{\partial x^q} ln\, g \\
&+ \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}} \underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn} g_{\underline{jm}} - \delta^q_m \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{nj} - \delta^q_n \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mj} \\
&+ \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj} g_{\underline{nm}} g^{\underline{pq}} - \delta^i_m \underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{jn}) \frac{\partial}{\partial x^q} ln\, g,
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

$$
\underset{4}{P}{}_{jm} = \frac{1}{N-2}(\underset{4}{R}{}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)} \underset{4}{R} g_{\underline{jm}}),
\tag{7.32}
$$

gde je $\underset{4}{R}{}_{jm}$ Ričijev tenzor četvrte vrste $\underset{4}{R}$ skalarna krivina četvrte vrste. Veličina $\underset{4}{C}{}^i{}_{jmn}$ je tenzor i zvaćemo je **ekvitorzionim tenzorom konformne krivine četvrte vrste**. Prema tome, važi sledeća teorema:

Teorema 7.4. *Tenzor* $\underset{4}{C}{}^i{}_{jmn}$ (7.31) *predstavlja invarijantu ekvitorzionog konformnog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora, gde je* $\underset{4}{P}$ *dato pomoću* (7.32).

7.5. Ekvitorzioni tenzor konformne krivine pete vrste

Za tenzore krivine pete vrste prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ važi veza:

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}(P^i_{jm\underset{3}{|}n} - P^i_{jn\underset{4}{|}m} + P^i_{mj\underset{4}{|}n} - P^i_{nj\underset{3}{|}m} + \\
&+ P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{mp} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm})
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}[\delta^i_m(\psi_{j\underset{3}{|}n} + \psi_{j\underset{4}{|}n} - 2\psi_j\psi_n) - \delta^i_n(\psi_{j\underset{3}{|}m} + \psi_{j\underset{4}{|}m} - 2\psi_j\psi_m) \\
&+ (\psi^i{}_{\underset{3}{|}m} + \psi^i{}_{\underset{4}{|}m} - 2\psi_m\psi^i) g_{\underline{jn}} - (\psi^i{}_{\underset{3}{|}n} + \psi^i{}_{\underset{4}{|}n} - 2\psi_n\psi^i) g_{\underline{mj}} \\
&+ 2(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\psi_p\psi^p].
\end{aligned}
\tag{7.33}
$$

Označimo

$$
\underset{34}{\psi}{}_{jn} = \frac{1}{2}(\psi_{j\underset{3}{|}n} + \psi_{j\underset{4}{|}n} - 2\psi_j\psi_n), \quad \underset{34}{\psi}{}^i_j = g^{\underline{ip}} \underset{34}{\psi}{}_{pj}, \quad \Delta_1\psi = g^{\underline{pq}}\psi_p\psi_q.
\tag{7.34}
$$

Tada

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{34}{\psi}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{34}{\psi}{}_{jm} + \underset{34}{\psi}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{34}{\psi}{}^i_n g_{\underline{mj}} \\
&+ (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\Delta_1\psi.
\end{aligned}
\tag{7.35}
$$

Kontrakcijom po indeksima i, n i označavajući

$$\overline{\underset{5}{R}}{}^p_{jmp} = \overline{\underset{5}{R}}_{jm}, \quad \underset{5}{R}{}^p_{\ jmp} = \underset{5}{R}_{jm}, \quad \underset{34}{\Delta} = \frac{1}{2} g^{\underline{pq}} (\psi_{p\underset{3}{|}q} + \psi_{p\underset{4}{|}q}), \tag{7.36}$$

dobijamo

$$\overline{\underset{5}{R}}_{jm} - (N-2)\underset{34}{\psi}{}^j_m - [\underset{34}{\Delta}\psi + (N-2)\Delta_1\psi] g_{\underline{jm}}\,, \tag{7.37}$$

odakle množenjem sa $\overline{g}^{\underline{jm}} = e^{-2\psi} g^{\underline{jm}}$ i kontrakcijom po j a zatim po m dobijamo

$$\underset{34}{\Delta}\psi = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{5}{R} - e^{2\psi}\overline{\underset{5}{R}}) - \frac{N-2}{2}\Delta_1\psi. \tag{7.38}$$

Iz (7.37) i (7.38) imamo

$$\underset{34}{\psi}_{jm} = \underset{5}{P}_{jm} - \overline{\underset{5}{P}}_{jm} - \frac{1}{2}\Delta_1\psi g_{\underline{jm}} \tag{7.39}$$

gde smo označili

$$\underset{5}{P}_{jm} = \frac{1}{N-2}(\underset{5}{R}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}\underset{5}{R} g_{\underline{jm}}) \tag{7.40}$$

u GR_N i analogno $\overline{\underset{5}{P}}_{jm}$ u $G\overline{R}_N$.

Analogno prethodnim slučajevima eliminacijom $\underset{34}{\psi}_{jm}$ iz (7.35) dobijamo

$$\overline{\underset{5}{C}}{}^i_{\ jmn} = \underset{5}{C}{}^i_{\ jmn}, \tag{7.41}$$

gde je

$$\underset{5}{C}{}^i_{\ jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{\ jmn} + \delta^i_m \underset{5}{P}_{jn} - \delta^i_n \underset{5}{P}_{jm} + \underset{5}{P}{}^i_m g_{\underline{nj}} - \underset{5}{P}{}^i_n g_{\underline{jm}}\,. \tag{7.42}$$

Veličina $\underset{5}{C}{}^i_{\ jmn}$ je invarijanta ekvitorzionog konformnog preslikavanja. Zvaćemo je **ekvitorzionim tenzorom konformne krivine**. Dakle, imamo:

Teorema 7.5. *Tenzor* $\underset{5}{C}{}^i_{\ jmn}$ (7.42) *je invarijanta ekvitorzionog konformnog preslikavanja* $f : GR_N \to G\overline{R}_N$, *gde je* $\underset{5}{P}$ *dato pomoću* (7.40).

Ako se $GR_N(G\overline{R}_N)$ redukuje u $R_N(\overline{R}_N)$, tada se veličine $\underset{\theta}{C}{}^i_{\ jmn}$ $(\theta = 1, ..., 5)$ svode na tenzor konformne krivine (6.7), tj. predstavljaju generalizaciju tenzora konformne krivine.

G l a v a IV

GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

8. Osnovne definicije i uvodne relacije

8.1. Prostori nesimetrične afine koneksije

Još je Levi Čivita [18] došao do problema geodezijskog preslikavanja Rimanovih prostora pri proučavanju jednačina dinamike. Kagan u [16] razmatra geodezijska preslikavanja površi. U novije vreme geodezijska preslikavanja Rimanovih prostora i nihova uopštenja naročito su pručavali ruski autori, posebno N. S. Sinjukov [75]-[79], E. N. Sinjukova [86], [87], V. S. Sobčuk [88], [89], J. Mikeš [20]-[28], M. Prvanović [55], [57]-[60], [62], S. M. Minčić i M. S. Stanković [46]-[48], [93], [95] i drugi. U ovoj glavi biće obradjena geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije, sa osvrtom na geodezijska preslikavanja Rimanovih i generalisanih Rimanovih prostora.

Neka su dati prostori nesimetrične afine koneksije GA_N i $G\overline{A}_N$. Pod **geodezijskim preslikavanjem** f prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ podrazumevamo obostrano jednoznačnu korenspondenciju medju njihovim tačkama, pri kojoj svaka geodezijska linija prostora GA_N prelazi u geodezijsku liniju prostora $G\overline{A}_N$.

Ako tačka M ima u GA_N lokalne koordinate (x^i), a njoj odgovarajuća tačka $\overline{M}$ po preslikavanju f ima lokalne koordinate $(\overline{x}^i)$, pretpostavljamo da je

$$\overline{x}^h = f^h(x^1, ..., x^N), \qquad (h = 1, 2, ..., N) \tag{8.1}$$

pri čemu funkcije $f^h(x^1, ..., x^N)$ pripadaju klasi C^r $(r > 2)$ i

$$det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^i}\right) \neq 0.$$

Prostore GA_N i $G\overline{A}_N$ posmatraćemo u zajedničkom po preslikavanju f, sistemu lokalnih koordinata: $x^1, x^2, ..., x^N$. Komponente koneksije prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ u odgovarajućim tačkama $M(x)$ i $\overline{M}(x)$, po preslikavanju f označimo sa $L^h_{ij}(x)$ i $\overline{L}^h_{ij}(x)$ i stavimo

$$\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x), \qquad (h, i, j = 1, 2, ..., N) \tag{8.2}$$

Kako smo videli u §5 veličina $P^h_{ij}(x)$ je tenzor tipa $\binom{1}{2}$ koji nazivamo **tenzorom deformacije koneksije** L prostora GA_N pri geodezijskom preslikavanju f.

Neka je kriva l prostora GA_N zadata u parametarskom obliku jednačinama

$$l: \, x^h = x^h(t), \qquad (h = 1, 2, \cdots, N). \tag{8.3}$$

Kriva l predstavlja geodezijsku liniju tada i samo tada kada funkcije $\lambda^h(t) = dx^h/dt$ zadovoljavaju jednačinu (v. §2):

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + L^h_{\alpha\beta}(x)\,\lambda^\alpha(t)\,\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t)\,, \tag{8.4}$$

gde je $\rho(t)$ invarijanta.

Neka je

$$\bar{l}: \, \overline{x}^h = \overline{x}^h(t), \qquad (h = 1, 2, ..., N) \tag{8.3'}$$

kriva prostora $G\overline{A}_N$ koja pri geodezijskom preslikavanju f odgovara krivoj l. Tada u $G\overline{A}_N$ funkcije $\lambda^h(t)$ zadovoljavaju jednačinu oblika (8.4) tj. važi

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \overline{L}^h_{\alpha\beta}(x)\,\lambda^\alpha(t)\,\lambda^\beta(t) = \overline{\rho}(t)\lambda^h(t)\,, \tag{8.4'}$$

Iz (8.4) i (8.4′) dobijamo

$$(\overline{L}^h_{\alpha\beta}(x) - L^h_{\alpha\beta}(x))\lambda^\alpha(t)\,\lambda^\beta(t) = (\overline{\rho}(t) - \rho(t))\lambda^h(t)\,,$$

tj.

$$P^h_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha(t)\,\lambda^\beta(t) = 2\psi(t)\lambda^h(t)\,. \tag{8.5}$$

Stavimo

$$P^h_{ij}(x) = \eta^h_{ij}(x) + \xi^h_{ij}(x) \tag{8.6}$$

gde je

$$\eta^h_{ij}(x) = P^h_{\underline{ij}}(x), \qquad \xi^h_{ij}(x) = P^h_{\underset{\vee}{ij}}(x). \tag{8.6 ′}$$

Zamenom (8.6) u (8.5) dobijamo

$$\eta^h_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha(t)\,\lambda^\beta(t) = 2\psi(t)\lambda^h(t)\,, \qquad (h = 1, 2, ..., N). \tag{8.7}$$

Uslovi (8.7) moraju biti zadovoljeni za proizvoljnu geodezijsku liniju prostora GA_N. Kako u GA_N kroz svaku tačku u datom pravcu prolazi geodezijska linija uslovi (8.7) moraju biti zadovoljeni identički u odnosu na $x^1, x^2, ..., x^N$; $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$. Kako leva strana u (8.7) predstavlja kvadratnu formu od λ^h, a desna proizvod linearne homogene funkcije od λ^h i nepoznate funkcije $\psi(t)$, to $\psi(t)$ takodje mora biti linearna i homogena, tj. oblika

$$\psi(t) = \psi_\alpha(x)\lambda^\alpha(t).$$

Dakle

$$\eta^h_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha(t)\,\lambda^\beta(t) = (\,\psi_\alpha(x)\delta^h_\beta + \psi_\beta(x)\delta^h_\alpha\,)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t),$$

odakle je

$$\eta^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i\,. \tag{8.8}$$

Prema tome, za tenzor deformacije koneksije dobijamo

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i + \xi^h_{ij}(x) \tag{8.9}$$

gde je $\xi^h_{ij}(x)$ antisimetrični deo tenzora $P^h_{ij}(x)$.

Uslovi (8.9) imaju identički karakter u odnosu na $x^1, x^2, ..., x^N$.Oni su ne samo potrebni već i dovoljni da preslikavanje f bude geodezijsko. Zaista, ako važi (8.9) biće zadovoljena relacija (8.5).

Prema tome važi sledeća [46], [90]

Teorema 8.1. *Potreban i dovoljan uslov da preslikavanje f prostora nesimetrične afine koneksije GA_N na prostor $G\overline{A}_N$ bude geodezijsko jeste da tenzor deformacije koneksije preslikavanja f bude predstavljen u obliku* (8.9), *gde je $\xi^h_{ij}(x)$ antisimetričan tenzor.*

Uslovi (8.9) imaju tenzorski karakter pa su invarijantni u odnosu na izbor sistema lokalnih koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$, zajedničkog po preslikavanju f.

Zamenom (8.9) u (8.2) dobijamo

$$\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i + \xi^h_{ij}(x). \tag{8.10}$$

Kontrakcijom po h, j iz (8.10) imamo

$$\overline{L}^\alpha_{i\alpha}(x) = L^\alpha_{i\alpha}(x) + (N+1)\psi_i(x) + \xi^\alpha_{i\alpha}(x),$$

odakle je

$$\psi_i(x) = \frac{1}{N+1}\eta^\alpha_{i\alpha}(x). \tag{8.11}$$

Iz (8.10) se vidi da je preslikavanje f^{-1} inverzno geodezijskom preslikavanju takodje geodezijsko, pri čemu je tenzor deformacije suprotnog znaka.

Neka je sada $\overline{f}$ geodezijsko preslikavanje prostora nesimetrične afine koneksije $G\overline{A}_N$ na prostor $G\tilde{A}_N$. Prema (8.10) je

(8.12) $$\tilde{L}^h_{ij}(x) = \overline{L}^h_{ij}(x) + \overline{\psi}_i(x)\delta^h_j + \overline{\psi}_j(x)\delta^h_i + \overline{\xi}^h_{ij}(x)$$

gde su $\tilde{L}^h_{ij}(x)$ komponente koneksije prostora $G\tilde{A}_N$ u zajedničkom po preslikavanju $\tilde{f} = \overline{f} \circ f$ lokalnom koordinatnom sistemu $x^1, x^2, ..., x^N$; a $\overline{\xi}^h_{ij}(x)$ antisimetrični deo tenzora deformacije $\overline{P}^h_{ij}$. Iz (8.10) i (8.12) imamo

$$\tilde{L}^h_{ij} = L^h_{ij}(x) + (\psi_i(x) + \overline{\psi}_i(x))\delta^h_j + (\psi_j(x) + \overline{\psi}_j(x))\delta^h_i + \xi^h_{ij}(x) + \overline{\xi}^h_{ij}(x).$$

Prema tome, kompozicija $\tilde{f} = \overline{f} \circ f$ geodezijskih preslikavanja $f : GA_N \to G\overline{A}_N$, $\overline{f} : G\overline{A}_N \to G\tilde{A}_N$ je takodje geodezijsko preslikavanje, pri čemu je $\tilde{\psi}_i = \psi_i + \overline{\psi}_i$, $\tilde{\xi}^h_{ij} = \xi^h_{ij}(x) + \overline{\xi}^h_{ij}$. Dakle važi:

Teorema 8.2. *Skup svih geodezijskih preslikavanja prostora GA_N ima strukturu grupe.*

Ako dva prostora nesimetrične afine koneksije $G\underset{1}{A}_N$ i $G\underset{2}{A}_N$ dopuštaju geodezijsko preslikavanje na prostor GA_N, tada oni dopuštaju i medjusobno geodezijsko preslikavanje. Znači ako su $f_1 : G\underset{1}{A}_N \to GA_N$, $f_2 : G\underset{2}{A}_N \to GA_N$ geodezijska preslikavanja takva će biti i preslikavanja $f = f_2^{-1} \circ f_1$ i $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2$.

Za prostor nesimetrične afine koneksije kažemo da je **projektivno ravan** ako dopušta geodezijsko preslikavanje na ravan prostor.

U slučaju ravnog prostora $G\overline{A}_N$ s afinim koordianatama $y^1, y^2, ..., y^N$ je $\overline{L}^h_{ij}(y) = 0$. U tom slučaju na osnovu (8.10) važi

Teorema 8.3. *Potreban i dovoljan uslov da prostor nesimetrične afine koneksije GA_N bude projektivno ravan izražen je relacijom*

(8.13) $$L^h_{ij}(y) = -\psi_i(y)\delta^h_j - \psi_j(y)\delta^h_i + L^i_{\underset{\vee}{ij}}.$$

8.2. Generalisani Rimanovi prostori

Sve dosad rečeno za prostore nesimetrične afine koneksije prenosi se i na generalisane Rimanove prostore. U (8.2) i (8.10) geometrijski objekti koneksije su Kristofelovi simboli druge vrste izvedeni iz osnovnih metričkih tenzora $g_{ij}(x)$ i $\overline{g}_{ij}(x)$ generalisanih Rimanovih prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ a obeležavaćemo ih respektivno $\Gamma^h_{ij}(x)$ i $\overline{\Gamma}^h_{ij}(x)$. Kao posledica toga javlja se drugačija situacija u odnosu na prostore nesimetrične afine koneksije.

Označimo sa $\underset{\alpha}{|}$, $\underset{\alpha}{||}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ kovarijantno diferenciranje vrste α respektivno u prostorima GR_N i $G\overline{R}_N$.

Tada imamo

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{1}{\|}k}(x) &= \overline{g}_{ij\underset{1}{|}k}(x) - 2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) - \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x) - \psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x)\\
&\quad - \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) - \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Kako je (v. §2): $\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{\|}k}(x)=0$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{\|}k}(x) &= 2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x)\\
&\quad + \psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x) + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\,.
\end{aligned} \tag{8.14 a}
$$

Polazeći od $\overline{g}_{ij\underset{2}{\|}k}(x)$, prema (8.10) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{2}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{\vee 2}{\|}k}(x) &= 2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x)\\
&\quad + \psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x) + \xi^{\alpha}_{ki}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \xi^{\alpha}_{kj}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\,.
\end{aligned} \tag{8.14 b}
$$

Nije teško videti da za nesingularan nesimetričan tenzor $\overline{g}_{ij}(x)$ iz (8.14 a,b) sledi (8.10). Zaista leva strana jednakosti (8.14 a) se može transformisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{\|}k}(x) &= \overline{g}_{ij\underset{1}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{1}{\|}k}(x)\\
&= \overline{g}_{ij,k}(x) - \Gamma^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) - \Gamma^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\\
&\quad - \overline{g}_{ij,k}(x) + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\\
&= (\,\overline{\Gamma}^{\alpha}_{ik}(x) - \Gamma^{\alpha}_{ik}(x)\,)\overline{g}_{\alpha j}(x) + (\,\overline{\Gamma}^{\alpha}_{jk}(x) - \Gamma^{\alpha}_{jk}(x)\,)\overline{g}_{i\alpha}(x)\,,
\end{aligned}
$$

tj.

$$
g_{ij\underset{1}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{\vee 1}{\|}k}(x) = (\,\overline{\Gamma}^{\alpha}_{ik}(x) - \Gamma^{\alpha}_{ik}(x)\,)\overline{g}_{\alpha j}(x) + (\,\overline{\Gamma}^{\alpha}_{jk}(x) - \Gamma^{\alpha}_{jk}(x)\,)\overline{g}_{i\alpha}(x)\,. \tag{8.15 a}
$$

Desna strana u (8.14 a) može se transformisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x) + \psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x) + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\\
&\quad = \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x) + \psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x)\\
&\quad + \psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x) + \psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\\
&\quad = \psi_i(x)\,\delta^{\alpha}_{k}\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \psi_k(x)\,\delta^{\alpha}_{i}\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x)\\
&\quad + \psi_j(x)\,\delta^{\alpha}_{k}\,\overline{g}_{i\alpha}(x) + \psi_k(x)\,\delta^{\alpha}_{j}\,\overline{g}_{i\alpha}(x) + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\\
&\quad = (\psi_i(x)\,\delta^{\alpha}_{k} + \psi_k(x)\,\delta^{\alpha}_{i} + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,)\overline{g}_{\alpha j}(x)\\
&\quad + \psi_j(x)\,\delta^{\alpha}_{k} + \psi_k(x)\,\delta^{\alpha}_{j} + \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,)\overline{g}_{i\alpha}(x)\,,
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
&2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x) + \psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x)\\
&\quad + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,\overline{g}_{\alpha j}(x) + \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,\overline{g}_{i\alpha}(x)\\
&\quad = (\psi_i(x)\,\delta^{\alpha}_{k} + \psi_k(x)\,\delta^{\alpha}_{i} + \xi^{\alpha}_{ik}(x)\,)\overline{g}_{\alpha j}(x)\\
&\quad + (\psi_j(x)\,\delta^{\alpha}_{k} + \psi_k(x)\,\delta^{\alpha}_{j} + \xi^{\alpha}_{jk}(x)\,)\overline{g}_{i\alpha}(x)\,.
\end{aligned} \tag{8.15 a$'$}
$$

Iz (8.14 a), (8.15 a,a′) dobijamo uporedjivanjem:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \xi^h_{ij}(x)\,,$$

tj. dobija se (8.10). Analogno se iz (8.14 b) dobija (8.10). Na taj način dokazana je sledeća teorema [46]:

Teorema 8.4. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
a) Preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$ je geodezijsko,
b) U zajedničkom po preslikavanju f lokalnom sistemu koordinata Kristofelovi simboli druge vrste prostora GR_N i $G\overline{R}_N$ zadovoljavaju relaciju (8.10),
c) U zajedničkom po preslikavanju f lokalnom sistemu koordinata osnovni metrički tenzor prostora $G\overline{R}_N$ zadovoljava relacije (8.14 a, b).

Posledica 1. *Ako je preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$ geodezijsko, onda osnovni metrički tenzor $\overline{g}_{ij}(x)$ prostora $G\overline{R}_N$ zadovoljava relaciju*

$$\begin{aligned}\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{\overset{\vee}{1}}{||}k}(x) + \overline{g}_{ij\underset{2}{|}k}(x) - \overline{g}_{ij\underset{\overset{\vee}{2}}{||}k}(x)& \\ = 4\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + 2\psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x) + 2\psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x)\,.&\end{aligned} \tag{8.16}$$

Dokaz. Sabiranjem jednakosti (8.14 a, b) dobijamo (8.16). ■

Posledica 2. *Ako je preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$ geodezijsko, onda simetrični deo osnovnog metričkog tenzora $\overline{g}_{\underline{ij}}$ prostora $G\overline{R}_N$ zadovoljava relaciju*

$$2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + 2\psi_i(x)\,\overline{g}_{jk}(x) + 2\psi_j(x)\,\overline{g}_{ik}(x) = \overline{g}_{\underline{ij};k}, \tag{8.16′}$$

gde ; označava kovarijantno diferenciranje u odnosu na $\Gamma^h_{\underline{ij}}(x)$.

Dokaz. Formula (8.16′) se dobija simetrizacijom po indeksima i i j iz (8.16). ■

Posledica 3. *Ako je preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$ geodezijsko, onda antisimetrični deo osnovnog metričkog tenzora $\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}}$ prostora $G\overline{R}_N$ zadovoljava relaciju*

$$\xi^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}} = 2\psi_k\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}} + \psi_i\overline{g}_{\underset{\vee}{kj}} + \psi_j\overline{g}_{\underset{\vee}{ik}}, \tag{8.16″}$$

gde je ξ^h_{ij} antisimetrični deo tenzora deformacije koneksije.

Dokaz. Antisimetrizacijom u (8.16) dobijamo

$$\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{|}k}-\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{||}k}+\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{2}{|}k}-\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{2}{||}k}$$
$$=4\psi_k\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}}+\psi_i\overline{g}_{kj}-\psi_j\overline{g}_{ki}+\psi_j\overline{g}_{ik}-\psi_i\overline{g}_{jk}.$$

Označimo sa $\mathcal{L}$ levu a sa $\mathcal{D}$ desnu stranu prethodne formule. Kako je

$$\mathcal{L}=2\xi^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}}+2\xi^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}}$$
$$\mathcal{D}=4\psi_k\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}}+2\psi_i\overline{g}_{\underset{\vee}{kj}}+2\psi_j\overline{g}_{\underset{\vee}{ik}}$$

sledi relacija (8.16″). ■

Teorema 8.5. *Ako je preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$ geodezijsko, onda je*

$$\psi_i(x)=\frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial x^i}ln\sqrt{\left|\frac{\overline{\underline{g}}(x)}{\underline{g}(x)}\right|}. \tag{8.17}$$

pri čemu je

$$\underline{g}(x)=det\,(g_{\underline{ij}}(x)),\qquad \overline{\underline{g}}(x)=det\,(\overline{g}_{\underline{ij}}(x)).$$

Dokaz. S obzirom na to da je

$$\Gamma^\alpha_{i\alpha}(x)=\Gamma^\alpha_{\alpha i}(x)=\frac{\partial}{\partial x^i}ln\sqrt{|\underline{g}(x)|},\qquad \overline{\Gamma}^\alpha_{i\alpha}(x)=\overline{\Gamma}^\alpha_{\alpha i}(x)=\frac{\partial}{\partial x^i}ln\sqrt{|\overline{\underline{g}}(x)|}$$

dokaz sledi iz (8.11). ■

S obzirom na to da je u (8.17) veličina $|\overline{\underline{g}}(x)/\underline{g}(x)|$ invarijanta to je vektor $\psi_i(x)$ gradijentni u slučaju geodezijskih preslikavanja $f:GR_N\to G\overline{R}_N$.

8.3. Prostori simetrične afine koneksije

Nekaje f geodezijsko preslikavanje prostora simetrične afine koneksije A_N na prostor simetrične afine koneksije $\overline{A}_N$. Komponente koneksije prostora A_N i $\overline{A}_N$ u zajedničkom po preslikavanju f sistemu koordinata označimo $\overset{o}{L}{}^h_{ij}(x)$ i $\overset{o}{\overline{L}}{}^h_{ij}(x)$. Tada je

$$\overset{o}{\overline{L}}{}^h_{ij}(x)=\overset{o}{L}{}^h_{ij}(x)+\overset{o}{P}{}^h_{ij}(x) \tag{8.18}$$

pri čemu je $\overset{o}{P}{}^h_{ij}(x)$ simetričan tenzor tipa $\binom{1}{2}$, koji nazivamo **tenzorom deformacije koneksije** $\overset{o}{L}{}^h_{ij}(x)$. Na isti način kao u odeljku 8.2 dokazuje se

Teorema 8.6. *Potreban i dovoljan uslov da preslikavanje $f : A_N \to \overline{A}_N$ bude geodezijsko jeste da se tenzor deformacije koneksije presllikavanja f može predstaviti u obliku*

$$\overset{o}{P}{}^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i\,. \tag{8.19}$$

Zamenom (8.19) u (8.18) dobija se

$$\overset{o}{\overline{L}}{}^h_{ij}(x) = \overset{o}{L}{}^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i\,. \tag{8.20}$$

Iz (8.20) sledi da skup svih geodezijskih preslikavanja prostora A_N ima strukturu grupe.

Kontrakcijom po $h,\ j$ dobija se

$$\overset{o}{\overline{L}}{}^\alpha_{i\alpha}(x) = \overset{o}{L}{}^\alpha_{i\alpha}(x) + (N+1)\psi_i(x)\,,$$

odakle je

$$\psi_i(x) = \frac{1}{N+1}\overset{o}{P}{}^\alpha_{i\alpha}(x)\,. \tag{8.21}$$

Prostor A_N je **projektivno ravan** [83] ako dopušta geodezijsko preslikavanje na ravan prostor $\overline{A}_N$.

Kod ravnog prostora $\overline{A}_N$ u specijalnom koordinatnom sistemu y je $\overset{o}{\overline{L}}{}^h_{ij}(y) = 0$ odakle prema (8.20) sledi

Teorema 8.7. *Potreban i dovoljan uslov da prostor A_N bude projektivno ravan izražen je relacijom*

$$\overset{o}{L}{}^h_{ij}(y) = -\psi_i(y)\delta^h_j - \psi_j(y)\delta^h_i\,. \tag{8.22}$$

8.4. Rimanovi prostori

Sve što važi za prostore simetrične afine koneksije važi i za Rimanove prostore. Neka je f geodezijsko preslikavanje Rimanovog prostora R_N na Rimanov prostor $\overline{R}_N$. Označimo $\overset{o}{\Gamma}{}^h_{ij}(x)$ i $\overset{o}{\overline{\Gamma}}{}^h_{ij}(x)$ Kristofelove simbole druge vrste a sa $g_{ij}(x)$ i $\overline{g}_{ij}(x)$ osnovne metričke tenzore Rimanovih prostora R_N i $\overline{R}_N$ redom, u zajedničkom po preslikavanju f sistemu koordinata.

Metrički tenzor $\overline{g}_{ij}(x)$ je kovarijantno konstantan u $\overline{R}_N$ pa važi

$$\overline{g}_{ij,k}(x) - \overset{o}{\overline{\Gamma}}{}^p_{ik}(x)\,\overline{g}_{pj}(x) - \overset{o}{\overline{\Gamma}}{}^p_{jk}(x)\,\overline{g}_{ip}(x) \equiv 0,$$

odakle, koristeći (8.20) dobijamo

$$\overline{g}_{ij;k}(x) = 2\psi_k(x)\,\overline{g}_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\overline{g}_{kj}(x) + \psi_j(x)\,\overline{g}_{ki}(x)\,, \tag{8.23}$$

gde ; označava kovarijantno diferenciranje u R_N. Lako se uočava da u slučaju nesingularnog simetričnog osnovnog tenzora $\overline{g}_{ij}(x)$ iz (8.23) sledi (8.20). Na taj način, za Rimanove prostore važi

Teorema 8.8. *Preslikavanje Rimanovog prostora R_N na Rimanov prostor $\overline{R}_N$ je geodezijsko tada i samo tada, kada u zajedničkom po preslikavanju f sistemu koordinata, za njihove Kristofelove simbole drugog reda važi relacija* (8.20)*; ili što je ekvivalentno, kada za osnovni metrički tenzor $\overline{g}_{ij}(x)$ prostora $\overline{R}_N$ u prostoru R_N važi relacija* (8.23).

Teorema 8.9. *Ako je preslikavanje f Rimanovog prostora R_N na Rimanov prostor $\overline{R}_N$ geodezijsko, onda je*

$$\psi_i(x) = \frac{1}{N+1}\frac{\partial}{\partial x^i} ln \sqrt{|\frac{\overline{g}(x)}{\underline{g}(x)}|}. \tag{8.24}$$

pri čemu je

$$\underline{g}(x) = det\,(g_{\underline{ij}}(x)), \qquad \overline{g}(x) = det\,(\overline{g}_{\underline{ij}}(x)).$$

Dokaz. Kontrakcijom po indeksima h i j u (8.20) dobijamo

$$\overset{o}{\overline{\Gamma}}{}^{\alpha}_{i\alpha}(x) = \overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i\alpha}(x) + (N+1)\psi_i(x)\,. \tag{8.25}$$

Kako je

$$\overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} ln\sqrt{|g(x)|}, \quad \text{gde je} \quad g(x) = det\,(g_{ij}(x)\,)$$

iz (8.25) sledi (8.24). ∎

Veličina $\overline{g}(x)/g(x)$ je invarijanta, odakle prema (8.24) sledi da je $\psi_i(x)$ gradijentni vektor u R_N.

Geodezijska preslikavanja prostora simetrične afine koneksije i Rimanovih prostora obradjivana su npr. u [11], [20], [22]–[24], [27], [50], [75]–[79], [83], [85]-[86], [100], [108], [109] itd.

9. Neki invarijantni geometrijski objekti geodezijskog preslikavanja

Neka prostor GA_N dopušta geodezijsko preslikavanje na prostor $G\overline{A}_N$. Tada u zajedničkom po preslikavanju f sistemu lokalnih koordinata izmedju komponenata koneksije ova dva prostora važi zavisnost (8.10). Zamenom (8.11) u (8.10) dobijamo

$$\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + \frac{1}{N+1}(\eta^{\alpha}_{\underline{i\alpha}}(x)\,\delta^h_j + \eta^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}(x)\,\delta^h_i\,) + \xi^h_{ij}(x)\,. \tag{9.1}$$

Razdvajanjem geometrijskih objekata prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ sa raznih strana jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
&\overline{L}^h_{ij}(x) - \overline{L}^h_{\overset{ij}{\vee}}(x) - \frac{1}{N+1}(\overline{L}^\alpha_{\underline{i\alpha}}(x)\,\delta^h_j + \overline{L}^\alpha_{\underline{j\alpha}}(x)\,\delta^h_i) \\
&= L^h_{ij}(x) - L^h_{\overset{ij}{\vee}}(x) - \frac{1}{N+1}(L^\alpha_{\underline{i\alpha}}(x)\,\delta^h_j + L^\alpha_{\underline{j\alpha}}(x)\,\delta^h_i),
\end{aligned} \tag{9.2}$$

tj.

$$\overline{T}^h_{ij}(x) = T^h_{ij}(x) \tag{9.3}$$

gde smo označili

$$T^h_{ij}(x) = L^h_{\underline{ij}}(x) - \frac{1}{N+1}(L^\alpha_{\underline{i\alpha}}(x)\,\delta^h_j + L^\alpha_{\underline{j\alpha}}(x)\,\delta^h_i) \tag{9.4}$$

geometrijski objekat prostora GA_N. Isti oblik ima $\overline{T}^h_{ij}(x)$ u $G\overline{A}_N$. Iz (9.4) je očigledno da je $T^h_{ij}(x)$ simetričan, tj. važi $T^h_{ij}(x) = T^h_{ji}(x)$. Takodje nije teško videti da $T^h_{ij}(x)$ nije tenzor. Prema tome, veličine $T^h_{ij}(x)$ zvaćemo **parametrima projektivne koneksije** prostora nesimetrične afine koneksije GA_N koji odgovaraju koneksiji L ili **generalisanim projektivnim parametrima Tomasa** [90]. Iz (9.3) se vidi da su geometrijski objekti $T^h_{ij}(x)$ invarijantni u odnosu na geodezijska preslikavanja. Šta više, lako se može pokazati i obratno tvrdjenje. Dakle važi

Teorema 9.1. *Preslikavanje $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ je geodezijsko ako i samo ako su generalisani projektivni parametri Tomasa* (9.4) *invarijante preslikavanja f.*

Ova teorema ptedstavlja uopštenje odgovarajuće teoreme za slučaj prostora simetrične afine koneksije [83].

Kako su projektivni parametri $T^h_{ij}(x)$ definisani preko objekata koneksije L formulom (9.4) to će i njihov zakon transformacije zavisiti od zakona transformacije koeficijenata koneksije L pri transformaciji lokalnih koordinata:

$$L^{i'}_{j'k'}(x') = L^i_{jk}(x)\,x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} + x^{i'}_i x^i_{j'k'},$$

pri čemu se simetrični deo od $L^i_{jk}(x)$ transformiše na isti način. Kako je još

$$L^{\alpha'}_{j'\alpha'}(x') = L^i_{jk}(x)\,x^{\alpha'}_i x^j_{j'} x^k_{\alpha'} + x^{\alpha'}_i x^i_{j'\alpha'},$$

tj.

$$L^{\alpha'}_{j'\alpha'}(x') = L^\alpha_{j\alpha}(x)\,x^j_{j'} + \frac{\partial}{\partial x^{j'}} ln\,\Delta,$$

gde je $\Delta = det\,(x^i_{i'})$, za generalisane projektivne parametre Tomasa dobijamo da važi

$$T^{h'}_{i'j'}(x') = T^h_{ij}(x) x^{h'}_h x^i_{i'} x^j_{j'} - \frac{1}{N+1}\left(x^h_{i'}\frac{\partial}{\partial x^{j'}} ln\,\Delta + x^h_{j'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}} ln\,\Delta\right) x^{h'}_h + x^{h'}_h x^h_{i'j'}.$$

Kompozicijom sa $x^q_{h'}$, iz poslednje jednakosti imamo

$$T^{h'}_{i'j'}(x')x^h_{h'} = T^h_{\alpha\beta}(x)x^\alpha_{i'}x^\beta_{j'} - \frac{1}{N+1}\left(x^h_{i'}\frac{\partial}{\partial x^{j'}}ln\,\Delta + x^h_{j'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}ln\,\Delta\right) + x^h_{i'j'}$$

Znači, uslovi invarijantnosti generalisanih projektivnih parametara Tomasa pri preslikavanju $f : GA_N \to G\overline{A}_N$, kada se oni odnose na nezavisno izabrane sisteme lokalnih koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$ i $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{N'}$ su oblika

$$(9.5)\quad T^\alpha_{ij}(x)x^{h'}_\alpha = \overline{T}^{h'}_{\alpha'\beta'}(x')x^{\alpha'}_i x^{\beta'}_j - \frac{1}{N+1}\left(x^{h'}_i\frac{\partial}{\partial x^{j'}}ln\,\Delta + x^{h'}_j\frac{\partial}{\partial x^{i'}}ln\,\Delta\right) + x^{h'}_{ij}.$$

Na taj način je dokazana sledeća teorema

Teorema 9.2. *Prostor nesimetrične afine koneksije GA_N s objektom koneksije $L^h_{ij}(x)$ u lokalnom sistemu koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$ dopušta geodezijsko preslikavanje na prostor $G\overline{A}_N$ s objektom koneksije $\overline{L}^{h'}_{i'j'}(x')$ u lokalnom sistemu koordinata $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{N'}$, tada i samo tada kada postoje funkcije oblika* (8.1) *koje zadovoljavaju uslove* (9.5).

Data teorema daje mogućnost da se utvrdi da li prostori GA_N i $G\overline{A}_N$ dopuštaju geodezijsko preslikavanje. Medjutim kako (9.5) predstavlja sistem nelinearnih parcijalnih jednačina drugog reda, to je praktično rešenje datog problema, u opštem slučaju, veoma teško.

Poslednja teorema važi u istom obliku i za generalisane Rimanove prostore i predstavlja uopštenje odgovarajuće teoreme za prostore simetrične afine koneksije i Rimanove [83].

10. Relacije izmedju tenzora krivine pri geodezijskom preslikavanju prostora GA_N i $G\overline{A}_N$

U prostoru GR_N postoji pet nezavisnih tenzora krivine $\underset{\alpha}{R}{}^i{}_{jmn}$, $\alpha = 1, ..., 5$ (v. §4). Neka je P^h_{ij} tenzor deformacije koneksije prostora GA_N pri geodezijskom preslikavanju f na prostor $G\overline{A}_N$, tj. neka izmedju komponenata koneksije $L^h_{ij}(x)$ i $\overline{L}^h_{ij}(x)$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ važi zavisnost (8.2). Uspostavićemo relacije izmedju odgovarajućih tenzora krivine prostora GA_N i $G\overline{A}_N$.

10.1. Relacije izmedju tenzora krivine prve vrste

Za tenzore krivine prve vrste u §5 smo dobili

$$(10.1\ a)\qquad \underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{\underset{1}{jm|n}} - P^i_{\underset{1}{jn|m}} + P^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - P^\alpha_{jn}P^i_{\alpha m} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{j\alpha}.$$

Zamenimo (8.9) u (10.1) imamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \psi_{\underset{1}{j|n}}\delta^i_m + \psi_{\underset{1}{m|n}}\delta^i_j + \xi^i_{\underset{1}{jm|n}} - \psi_{\underset{1}{j|m}}\delta^i_n - \psi_{\underset{1}{n|m}}\delta^i_j - \xi^i_{\underset{1}{jn|m}}\\ & + (\psi_j\delta^\alpha_m + \psi_m\delta^\alpha_j + \xi^\alpha_{jm})(\psi_\alpha\delta^i_n + \psi_n\delta^i_\alpha + \xi^i_{\alpha n})\\ & - (\psi_j\delta^\alpha_n + \psi_n\delta^\alpha_j + \xi^\alpha_{jn})(\psi_\alpha\delta^i_m + \psi_m\delta^i_\alpha + \xi^i_{\alpha m}) + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{j\alpha}.\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \psi_{j\underset{1}{|}n}\delta^i_m + \psi_{m\underset{1}{|}n}\delta^i_j + \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \psi_{j\underset{1}{|}m}\delta^i_n - \psi_{n\underset{1}{|}m}\delta^i_j - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m}\\
&+ \psi_j\psi_\alpha\delta^\alpha_m\delta^i_n + \psi_j\psi_n\delta^\alpha_m\delta^i_\alpha + \psi_j\delta^\alpha_m\xi^i_{\alpha n} + \psi_m\psi_\alpha\delta^\alpha_j\delta^i_n + \psi_m\psi_n\delta^\alpha_j\delta^i_\alpha\\
&+ \psi_m\delta^\alpha_j\xi^i_{\alpha n} + \xi^\alpha_{jm}\psi_\alpha\delta^i_n + \xi^\alpha_{jm}\psi_n\delta^i_\alpha + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{\alpha n} - \psi_j\psi_\alpha\delta^\alpha_n\delta^i_m\\
&- \psi_j\psi_m\delta^\alpha_n\delta^i_\alpha - \psi_j\delta^\alpha_n\xi^i_{\alpha m} - \psi_n\psi_\alpha\delta^\alpha_j\delta^i_m - \psi_n\psi_m\delta^\alpha_j\delta^i_\alpha - \psi_n\delta^\alpha_j\xi^i_{\alpha m}\\
&+ \xi^\alpha_{jn}\psi_\alpha\delta^i_m - \xi^\alpha_{jn}\psi_m\delta^i_\alpha + \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{\alpha m} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}(\psi_j\delta^i_\alpha + \psi_\alpha\delta^i_j + \xi^i_{j\alpha}),
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \psi_{j\underset{1}{|}n}\delta^i_m + \psi_{m\underset{1}{|}n}\delta^i_j + \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \psi_{j\underset{1}{|}m}\delta^i_n - \psi_{n\underset{1}{|}m}\delta^i_j - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m}\\
&+ \psi_j\psi_m\delta^i_n + \psi_j\psi_n\delta^i_m + \psi_j\xi^i_{mn} + \psi_m\psi_j\delta^i_n + \psi_m\psi_n\delta^i_j + \psi_m\xi^i_{jn}\\
&+ \xi^\alpha_{jm}\psi_\alpha\delta^i_n + \xi^i_{jm}\psi_n + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{\alpha n} - \psi_j\psi_n\delta^i_m - \psi_j\psi_m\delta^i_n - \psi_j\xi^i_{nm}\\
&+ \psi_n\psi_j\delta^i_m - \psi_n\psi_m\delta^i_j - \psi_n\xi^i_{jm} - \xi^\alpha_{jn}\psi_\alpha\delta^i_m - \xi^i_{jn}\psi_m + \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{\alpha m}\\
&+ 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\xi^i_{j\alpha}.
\end{aligned}$$

Grupisanjem odgovarajućih članova u poslednjoj relaciji imamo

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \delta^i_j\,(\psi_{m\underset{1}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m} + \psi_m\psi_n - \psi_n\psi_m)\\
&+ \delta^i_m\,(\psi_{j\underset{1}{|}n} + \psi_j\psi_n - \psi_j\psi_n - \psi_n\psi_j - \xi^\alpha_{jn}\psi_\alpha)\\
&- \delta^i_n\,(\psi_{j\underset{1}{|}m} + \psi_j\psi_m - \psi_j\psi_m - \psi_m\psi_j - \xi^\alpha_{jm}\psi_\alpha)\\
&+ \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m} + 2\psi_j\xi^i_{mn} + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{\alpha n} - \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{\alpha m}\\
&+ 2L^i_{\underset{\vee}{mn}} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\psi_\alpha\delta^i_j + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\xi^i_{j\alpha},
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \delta^i_j\,(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm} - \delta^i_m\,\xi^\alpha_{jn}\psi_\alpha\\
&+ \delta^i_n\,\xi^\alpha_{jm}\psi_\alpha + \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m} + 2\psi_j\xi^i_{mn} + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{\alpha n} - \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{\alpha m}\\
&+ 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\psi_\alpha\delta^i_j + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\xi^i_{j\alpha},
\end{aligned} \tag{10.1 b}$$

gde smo označili

$$\underset{1}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{1}{|}n} - \psi_m\psi_n. \tag{10.1'}$$

Na taj način je dokazana

Teorema 10.1. *Geodezijska veza izmedju tenzora krivine prve vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ odredjena je relacijama* (10.1 *b*) *i* (10.1′) .

10.2. Relacije izmedju tenzora krivine druge vrste

U §5 smo dobili relaciju za tenzore krivine druge vrste

$$\underset{2}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^\alpha_{mj}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{m\alpha} + 2\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{nm}P^i_{\alpha j}. \tag{10.2 a}$$

Zamenom (8.9) u (10.2 *a*) analogno kao u 10.1 dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{2}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{2}{\psi}_{jm}\\ & - \delta^i_m\,\xi^\alpha_{nj}\psi_\alpha + \delta^i_n\,\xi^\alpha_{mj}\psi_\alpha + \xi^i_{mj\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{2}{|}m} + 2\psi_j\xi^i_{nm} + \xi^\alpha_{mj}\xi^i_{n\alpha}\\ & - \xi^\alpha_{nj}\xi^i_{m\alpha} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{nm}\psi_\alpha\delta^i_j + 2\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{nm}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{nm}\xi^i_{\alpha j},\end{aligned} \tag{10.2 b}$$

gde smo označili

$$\underset{2}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_m\psi_n. \tag{10.2′}$$

Na taj način je dokazana

Teorema 10.2. *Geodezijska veza izmedju tenzora krivine druge vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ odredjena je relacijama* (10.2 *b*) *i* (10.2′).

10.3. Relacije izmedju tenzora krivine treće vrste

Uspostavimo sada vezu izmedju tenzora krivine treće vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$. Za tenzore krivine treće vrste imamo (v. §5)

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^\alpha_{jm}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m}\\ & + 2P^\alpha_{nm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + 2P^\alpha_{nm}\underset{\vee}{P}{}^i_{\alpha j}.\end{aligned} \tag{10.3 a}$$

Zamenimo (8.9) u (10.3 *a*). Dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \psi_{j\underset{2}{|}n}\delta^i_m + \psi_{m\underset{2}{|}n}\delta^i_j + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m}\delta^i_j - \psi_{j\underset{1}{|}m}\delta^i_n - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m}\\ & + (\psi_j\delta^\alpha_m + \psi_m\delta^\alpha_j + \xi^\alpha_{jm})(\psi_n\delta^i_\alpha + \psi_\alpha\delta^i_n + \xi^i_{n\alpha})\\ & - (\psi_n\delta^\alpha_j + \psi_j\delta^\alpha_n + \xi^\alpha_{nj})(\psi_\alpha\delta^i_m + \psi_m\delta^i_\alpha + \xi^i_{\alpha m})\\ & + 2(\psi_n\delta^\alpha_m + \psi_m\delta^\alpha_n + \xi^\alpha_{nm})\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + 2(\psi_n\delta^\alpha_m + \psi_m\delta^\alpha_n + \xi^\alpha_{nm})\xi^i_{\alpha j},\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \psi_{j\underset{2}{|}n}\delta^i_m + \psi_{m\underset{2}{|}n}\delta^i_j + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \psi_{n\underset{1}{|}m}\delta^i_j - \psi_{j\underset{1}{|}m}\delta^i_n - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m}\\
&+ \psi_j\psi_n\delta^i_m + \psi_j\psi_m\delta^i_n + \psi_j\xi^i_{nm} + \psi_n\psi_m\delta^i_j + \psi_m\psi_j\delta^i_n + \psi_m\xi^i_{nj}\\
&+ \xi^i_{jm}\psi_n + \xi^\alpha_{jm}\psi_\alpha\delta^i_n + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{n\alpha} - \psi_n\psi_j\delta^i_m - \psi_n\psi_m\delta^i_j - \psi_n\xi^i_{jm}\\
&- \psi_j\psi_n\delta^i_m - \psi_j\psi_m\delta^i_n - \psi_j\xi^i_{nm} - \xi^\alpha_{nj}\psi_\alpha\delta^i_m - \xi^i_{nj}\psi_m + \xi^\alpha_{nj}\xi^i_{\alpha m}\\
&+ 2\underset{\vee}{L}{}^i_{mj}\psi_n + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{nj}\psi_m + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}\xi^\alpha_{nm} + 2\xi^i_{mj}\psi_n + 2\xi^i_{nj}\psi_m + 2\xi^i_{\alpha j}\xi^\alpha_{nm}.
\end{aligned}$$

Grupisanjem odgovarajućih članova u poslednjoj relaciji imamo

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm}\\
&+ \psi_\alpha(\delta^i_n\,\xi^\alpha_{jm} - \delta^i_m\,\xi^\alpha_{nj}) + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{n\alpha} - \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{\alpha m}\\
&+ 2\psi_n(\underset{\vee}{L}{}^i_{mj} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L}{}^i_{nj} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^\alpha_{nm}(\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + \xi^i_{\alpha j}).
\end{aligned} \tag{10.3 b}$$

Na taj način je dokazana

Teorema 10.3. *Geodezijska veza izmedju tenzora krivine treće vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ odredjena je relacijom* (10.3 *b*) *pri čemu je*

$$\underset{\alpha}{\psi}_{mn} = \psi_{m\,\underset{\alpha}{|}\,m} - \psi_m\psi_n, \quad \alpha = 1, 2. \tag{10.3$'$}$$

10.4. Relacije izmedju tenzora krivine četvrte vrste

Za tenzore krivine četvrte vrste imamo (v. §5)

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^\alpha_{jm}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m}\\
&+ 2P^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + 2P^\alpha_{mn}\underset{\vee}{P}{}^i_{\alpha j}.
\end{aligned} \tag{10.4 a}$$

Na isti način kao u prethodnom slučaju dobija se

Teorema 10.4. *Geodezijska veza izmedju tenzora krivine četvrte vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ odredjena je relacijom*

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm}\\
&+ \psi_\alpha(\delta^i_n\,\xi^\alpha_{jm} - \delta^i_m\,\xi^\alpha_{nj}) + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{n\alpha} - \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{\alpha m}\\
&+ 2\psi_n(\underset{\vee}{L}{}^i_{mj} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L}{}^i_{nj} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^\alpha_{mn}(\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + \xi^i_{\alpha j}).
\end{aligned} \tag{10.4 b}$$

10.5. Relacije izmedju tenzora krivine pete vrste

Za tenzore krivine pete vrste prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ imamo

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}(P^i_{\underset{3}{jm|n}} - P^i_{\underset{4}{jn|m}} + P^i_{\underset{4}{mj|n}} - P^i_{\underset{3}{nj|m}} \\ &+ P^\alpha_{jm}P^i_{\alpha n} - P^\alpha_{jn}P^i_{m\alpha} + P^\alpha_{mj}P^i_{n\alpha} - P^\alpha_{nj}P^i_{\alpha m}).\end{aligned} \tag{10.5 a}$$

Zamenom (8.9) u (10.5 a) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}[&\psi_{\underset{3}{j|n}}\delta^i_m + \psi_{\underset{3}{m|n}}\delta^i_j + \xi^i_{\underset{3}{jm|n}} - \psi_{\underset{4}{j|m}}\delta^i_n - \psi_{\underset{4}{n|m}}\delta^i_j \\ &- \xi^i_{\underset{4}{jn|m}} + \psi_{\underset{4}{j|n}}\delta^i_m + \xi^i_{\underset{4}{mj|n}} - \psi_{\underset{3}{n|m}}\delta^i_j - \psi_{\underset{3}{j|m}}\delta^i_n - \xi^i_{\underset{3}{nj|m}} \\ &+ (\psi_j\delta^\alpha_m + \psi_m\delta^\alpha_j + \xi^\alpha_{jm})(\psi_\alpha\delta^i_n + \psi_n\delta^i_\alpha + \xi^i_{\alpha n}) - \\ &- (\psi_j\delta^\alpha_n + \psi_n\delta^\alpha_j + \xi^\alpha_{jn})(\psi_m\delta^i_\alpha + \psi_\alpha\delta^i_m + \xi^i_{m\alpha}) + \\ &+ (\psi_m\delta^\alpha_j + \psi_j\delta^\alpha_m + \xi^\alpha_{mj})(\psi_n\delta^i_\alpha + \psi_\alpha\delta^i_n + \xi^i_{n\alpha}) - \\ &- (\psi_n\delta^\alpha_j + \psi_j\delta^\alpha_n + \xi^\alpha_{nj})(\psi_\alpha\delta^i_m + \psi_m\delta^i_\alpha + \xi^i_{\alpha m})],\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} \\ &+ \frac{1}{2}\delta^i_j\,(\psi_{\underset{3}{m|n}} - \psi_{\underset{4}{n|m}} + \psi_{\underset{4}{m|n}} - \psi_{\underset{3}{n|m}} + \psi_m\psi_n - \psi_n\psi_m + \psi_m\psi_n - \psi_n\psi_m) \\ &+ \frac{1}{2}\delta^i_m\,(\psi_{\underset{3}{j|n}} + \psi_{\underset{4}{j|n}} + \psi_j\psi_n - \psi_j\psi_n - \psi_n\psi_j + \psi_j\psi_n - \psi_n\psi_j - \psi_j\psi_n) \\ &- \frac{1}{2}\delta^i_n\,(\psi_{\underset{4}{j|m}} + \psi_{\underset{3}{j|m}} + \psi_j\psi_m - \psi_m\psi_j - \psi_j\psi_m + \psi_j\psi_m - \psi_m\psi_j - \psi_j\psi_m) \\ &+ \frac{1}{2}(\xi^i_{\underset{3}{jm|n}} - \xi^i_{\underset{4}{jn|m}} + \xi^i_{\underset{4}{mj|n}} - \xi^i_{\underset{3}{nj|m}} + \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{\alpha n} - \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{m\alpha} + \xi^\alpha_{mj}\xi^i_{n\alpha} - \xi^\alpha_{nj}\xi^i_{\alpha m}).\end{aligned}$$

Označimo

$$\underset{\alpha}{\psi}_{mn} = \psi_{\underset{\alpha}{m|n}} - \psi_m\psi_n \qquad (\alpha = 3, 4).$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}\delta^i_j\,(\underset{3}{\psi}_{mn} - \underset{4}{\psi}_{nm} + \underset{4}{\psi}_{mn} - \underset{3}{\psi}_{nm}) + \frac{1}{2}\delta^i_m\,(\underset{3}{\psi}_{jn} + \underset{4}{\psi}_{jn}) \\ &- \frac{1}{2}\delta^i_n\,(\underset{4}{\psi}_{jm} + \underset{3}{\psi}_{jm}) + \frac{1}{2}(\xi^i_{\underset{3}{jm|n}} - \xi^i_{\underset{4}{jn|m}} + \xi^i_{\underset{4}{mj|n}} - \xi^i_{\underset{3}{nj|m}} \\ &+ \xi^\alpha_{jm}\xi^i_{\alpha n} - \xi^\alpha_{jn}\xi^i_{m\alpha} + \xi^\alpha_{mj}\xi^i_{n\alpha} - \xi^\alpha_{nj}\xi^i_{\alpha m}).\end{aligned} \tag{10.5 b}$$

Na taj način je dokazana

Teorema 10.5. *Relacija* (10.5 b) *daje geodezijsku vezu izmedju tenzora krivine pete vrste prostora* GA_N *i* $G\overline{A}_N$.

10.6. Relacije izmedju Riman-Kristofelovih tenzora krivine

U slučaju prostora simetrične afine koneksije i Rimanovih prostora, tenzori krivine $\underset{\alpha}{R}{}^i{}_{jmn}$, $\alpha = 1, 2, ..., 5$ se svode na Riman-Kristofelov tenzor krivine $R^i{}_{jmn}$. Tada se formule (10.1 *a*-5 *a*) svode na

$$\overline{R}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + P^i{}_{jm;n} - P^i{}_{jn;m} + P^\alpha_{jm} P^i_{\alpha n} - P^\alpha_{jn} P^i_{\alpha m}, \tag{10.6 a}$$

dok se formule (10.1 b-5 b) svode na (v. npr. [83], [90], [102], [103])

$$\overline{R}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\psi_{mn} - \psi_{nm}) + \delta^i_m\,\psi_{jn} - \delta^i_n\,\psi_{jm}, \tag{10.6 b}$$

gde je označeno

$$\psi_{mn} = \psi_{m;n} - \psi_m \psi_n. \tag{10.6$'$}$$

Glava V

NEKA SPECIJALNA GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

11. Ekvitorziona geodezijska preslikavanja

11.1. Uvod

Neka prostor nesimetrične afine koneksije GA_N dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na prostor $G\overline{A}_N$. Zbog nemogućnosti uopštenja Vejlovog tenzora krivine [83] u opštem slučaju, da bi smo to učinili, primorani smo da posmatramo neke specijalne slučajeve geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. Jedan od tih slučajeva je kada pretpostavimo da su tenzori torzije prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ jednaki u zajedničkom po preslikavanju koordinatnom sistemu. Takvo preslikavanje zvaćemo **ekvitorzionim geodezijskim preslikavanjem** prostora GA_N na $G\overline{A}_N$. U tom slučaju antisimetrični deo tenzora deformacije je jednak nuli tj. važi

$$\xi^h_{ij}(x) = 0. \tag{11.1}$$

Ekvitorziona geodezijska preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora obradjena su u [47]. U ovom odeljku ćemo konstruisati neke invarijantne geometrijske objekte ekvitorzionog preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije.

11.2. Ekvitorzioni projektivni parametri prve vrste

Veza izmeju tenzora krivine $\underset{1}{R}$ i $\underset{1}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (v. §10) uzimajući u obzir relaciju (11.1) postaje

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm} \\ & + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j + 2L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p\delta^i_j\,,\end{aligned} \tag{11.2}$$

gde smo označili

$$\underset{1}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{1}{|}n} - \psi_m\psi_n.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n iz (11.2) sledi

$$\underset{1}{\overline{R}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{\psi}_{mj} - \underset{1}{\psi}_{jm} + \underset{1}{\psi}_{jm} - N\underset{1}{\psi}_{jm} + 2\underset{\vee}{L}^q_{mq}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}^p_{mj}\psi_p,$$

odakle je

$$\underset{1}{\overline{R}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\psi}_{[jm]} + (1-N)\underset{1}{\psi}_{jm} + 2\underset{\vee}{L}^q_{mq}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}^p_{mj}\psi_p. \tag{11.3}$$

Sa $\underset{1}{\overline{R}}_{jm}$ i $\underset{1}{R}_{jm}$ su označeni Ričijevi tenzori krivine prve vrste prostora $G\overline{A}_N$ odnosno GA_N a $[jm]$ označava alternaciju bez deljenja po indeksima j i m.

Iz (11.3) dobijamo

$$\underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} = \underset{1}{R}_{[jm]} - 2\underset{1}{\psi}_{[jm]} + (1-N)\underset{1}{\psi}_{[jm]} + 2\underset{\vee}{L}^q_{mq}\psi_j - 2\underset{\vee}{L}^q_{jq}\psi_m + 4\underset{\vee}{L}^p_{mj}\psi_p. \tag{11.4}$$

S obzirom na to da je (v. §8)

$$\psi_i(x) = \frac{1}{N+1}\eta^p_{ip}(x),$$

tj.

$$\psi_i(x) = \frac{1}{N+1}(\overline{L}^p_{\underline{ip}}(x) - L^p_{\underline{ip}}(x)), \tag{11.5}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} &= \underset{1}{R}_{[jm]} - (N+1)\underset{1}{\psi}_{[jm]} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{mq}(\overline{L}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})\\ &- \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{jq}(\overline{L}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}^p_{mj}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),\end{aligned} \tag{11.6}$$

odakle je

$$\begin{aligned}(N+1)\underset{1}{\psi}_{[jm]} &= \underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{mq}(\overline{L}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})\\ &- \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{jq}(\overline{L}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}^p_{mj}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}).\end{aligned} \tag{11.7}$$

Iz (11.3,5,7) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} &- \frac{1}{N+1}\big[\underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{mq}(\overline{L}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})\\ &- \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{jq}(\overline{L}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}^p_{mj}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\big]\\ &- (N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^q_{mq}(\overline{L}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}^p_{mj}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),\end{aligned}$$

tj.

$$
\begin{aligned}
(N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm} - \frac{1}{N+1}\Big[\underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})\\
- \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\Big]\\
+ \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),
\end{aligned}
$$

odakle sledi

$$
\begin{aligned}
(N-1)(N+1)\underset{1}{\psi}_{jm} = (N+1)(\underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm}) - \Big[\underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]}\\
+ \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\Big]\\
+ 2\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})2 + \underset{\vee}{L}{}^p_{mj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
(N^2-1)\underset{1}{\psi}_{jm} = (N\underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{R}_{mj}) - (N\underset{1}{\overline{R}}_{jm} + \underset{1}{\overline{R}}_{mj})\\
+ \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}})\\
+ 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{N-1}{N+1}.
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

Zamenom (11.8) u (11.2) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_j\Big[(N\underset{1}{R}_{mn} + \underset{1}{R}_{nm}) - (N\underset{1}{\overline{R}}_{mn} + \underset{1}{\overline{R}}_{nm})\\
+ \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{np}} - L^p_{\underline{np}})\\
+ 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{N-1}{N+1} - (N\underset{1}{R}_{nm} + \underset{1}{R}_{mn}) + (N\underset{1}{\overline{R}}_{nm} + \underset{1}{\overline{R}}_{mn})\\
- \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{np}} - L^p_{\underline{np}}) - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{1-N}{N+1}\Big]\\
+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\Big[(N\underset{1}{R}_{jn} + \underset{1}{R}_{nj}) - (N\underset{1}{\overline{R}}_{jn} + \underset{1}{\overline{R}}_{nj}) + \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})\\
+ \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}(\overline{L}{}^p_{\underline{np}} - L^p_{\underline{np}}) + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{N-1}{N+1}\Big] - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\Big[(N\underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{R}_{mj})\\
- (N\underset{1}{\overline{R}}_{jm} + \underset{1}{\overline{R}}_{mj}) + \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}})\\
+ 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{1-N}{N+1}\Big] + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}(\overline{L}{}^q_{\underline{jq}} - L^q_{\underline{jq}}) + \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_j \Big[(N\underset{1}{\overline{R}}_{[mn]} + \underset{1}{\overline{R}}_{[nm]}) - \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}\overline{L}^p_{\underline{mp}} - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}\overline{L}^p_{\underline{np}} \\
&- 4\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}\overline{L}^q_{\underline{pq}}\frac{N-1}{N+1} + \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}\overline{L}^p_{\underline{np}} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}\overline{L}^p_{\underline{mp}}\Big] \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m \Big[(N\underset{1}{\overline{R}}_{jn} + \underset{1}{\overline{R}}_{nj}) - \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}\overline{L}^p_{\underline{jp}} - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}\overline{L}^p_{\underline{np}} - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nj}\overline{L}^q_{\underline{pq}}\frac{N-1}{N+1}\Big] \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n \Big[(N\underset{1}{\overline{R}}_{jm} + \underset{1}{\overline{R}}_{mj}) - \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}\overline{L}^p_{\underline{jp}} - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}\overline{L}^p_{\underline{mp}} \\
&- 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\overline{L}^q_{\underline{pq}}\frac{N-1}{N+1}\Big] - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}\overline{L}^q_{\underline{pq}} - \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\overline{L}^q_{\underline{pq}} = \\
&= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_j \Big[(N\underset{1}{R}_{[mn]} + \underset{1}{R}_{[nm]}) - \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}L^p_{\underline{mp}} - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}L^p_{\underline{np}} \\
&- 4\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}L^q_{\underline{pq}}\frac{N-1}{N+1} + \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}L^p_{\underline{np}} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}\overline{L}^p_{\underline{mp}}\Big] \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m \Big[(N\underset{1}{R}_{jn} + \underset{1}{R}_{nj}) - \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}L^p_{\underline{jp}} - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}\overline{L}^p_{\underline{np}} - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nj}L^q_{\underline{pq}}\frac{N-1}{N+1}\Big] \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n \Big[(N\underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{R}_{mj}) - \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{mq}L^p_{\underline{jp}} - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}L^p_{\underline{mp}} \\
&- 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}L^q_{\underline{pq}}\frac{N-1}{N+1}\Big] - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}L^q_{\underline{pq}} - \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}L^q_{\underline{pq}}.
\end{aligned}
$$

Kako je $\underset{\vee}{\overline{L}}{}^i_{jk} = \underset{\vee}{L}{}^i_{jk}$, poslednju relaciju možemo predstaviti u obliku

$$
\underset{1}{\overline{\varepsilon}}{}^i{}_{jmn} = \underset{1}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}, \tag{11.9}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\, N\underset{1}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(N\underset{1}{R}_{jn} + \underset{1}{R}_{nj}) \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(N\underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{R}_{mj}) + \frac{2}{(N+1)^2}L^p_{\underline{mp}}\big[\frac{1}{N-1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^q_{jq} - \delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^q_{nq}\big] \\
&+ \frac{2}{(N+1)^2}L^p_{\underline{np}}\big[\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^q_{mq} - \frac{1}{N-1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^q_{jq}\big] \\
&+ \frac{2}{N+1}L^p_{\underline{jp}}\big[-\frac{N}{N^2-1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^q_{nq} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^q_{mq} - 2\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}\big] \\
&- \frac{2}{(N+1)^2}L^q_{\underline{pq}}\big[\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nm} + \delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nj}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mj} + (N+1)\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\big].
\end{aligned} \tag{11.10}
$$

Očigledno je da veličina $\underset{1}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ nije tenzor. Zvaćemo je **ekvitorzionim projektivnim parametrom prve vrste**. Na osnovu izloženog zaključujemo da važi slaedeća

Teorema 11.1. *Ekvitorzioni projektivni parametri prve vrste predstavljaju invarijante ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja prostora GA_N na $G\overline{A}_N$.*

Ekvitorzioni projektivni parametri (11.10) predstavljaju uopštenje ET-projektivnih parametara prve vrste ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$. U tom slučaju veličine (11.10) se svode na [47], [90]

$$
\begin{aligned}
(11.11)\qquad \underset{1}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{1}{R}{}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\left[\delta^i_m (N\underset{1}{R}{}_{jn} + \underset{1}{R}{}_{nj}) - \right.\\
&\left. - \delta^i_n (N\underset{1}{R}{}_{jm} + \underset{1}{R}{}_{mj})\right] - \frac{2}{(N+1)^2}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(2\delta^i_j \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{nm}} + \delta^i_m \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{nj}} - \delta^i_n \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mj}}) - \\
&- \frac{2}{N+1}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}}\delta^\alpha_j + \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\delta^i_j).
\end{aligned}
$$

11.3. Ekvitorzioni projektivni parametri druge vrste

Veza izmeju tenzora krivine $\underset{2}{R}$ i $\underset{2}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (v. §10) uzimajući u obzir relaciju (11.1) postaje

$$
\begin{aligned}
(11.12)\qquad \underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{2}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm}\\
&+ 2L^i_{\underset{\vee}{nm}}\psi_j + 2L^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi_p\delta^i_j,
\end{aligned}
$$

gde smo označili

$$\underset{2}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_m\psi_n.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n iz poslednje rlacije dobijamo

$$(11.13)\qquad \underset{2}{\overline{R}}_{jm} = \underset{2}{R}_{jm} - \underset{2}{\psi}_{[jm]} + (1-N)\underset{2}{\psi}_{jm} + 2L^q_{\underset{\vee}{qm}}\psi_j + 2L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p.$$

Ovde su $\underset{2}{\overline{R}}_{jm}$ i $\underset{2}{R}_{jm}$ Ričijevi tenzori druge vrste prostora $G\overline{A}_N$ odnosno GA_N.

Alternacijom bez deljenja u (11.13) po indeksima j, m dobija se

$$(11.14)\qquad \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]} = \underset{2}{R}_{[jm]} - 2\underset{2}{\psi}_{[jm]} + (1-N)\underset{2}{\psi}_{[jm]} + 2L^q_{\underset{\vee}{qm}}\psi_j - 2L^q_{\underset{\vee}{qj}}\psi_m + 4L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p.$$

Iz (11.5,14) dobijamo

$$
\begin{aligned}
(11.15)\qquad \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]} &= \underset{2}{R}_{[jm]} - (N+1)\underset{2}{\psi}_{[jm]} + \frac{2}{N+1}L^q_{\underset{\vee}{qm}}(\overline{L}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}})\\
&- \frac{2}{N+1}L^q_{\underset{\vee}{qj}}(\overline{L}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}L^p_{\underset{\vee}{jm}}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),
\end{aligned}
$$

odakle je

$$
\begin{aligned}
(N+1)\underset{2}{\psi}_{[jm]} &= \underset{2}{R}_{[jm]} - \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qm}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) \\
&\quad - \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qj}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) + \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}).
\end{aligned}
\tag{11.16}
$$

Iz (11.13,16) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}_{jm} = \underset{2}{R}_{jm} - \frac{1}{N+1}\big[\underset{2}{R}_{[jm]} - \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]} &+ \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qm}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) \\
- \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qj}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) &+ \frac{4}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\big] \\
- (N-1)\underset{2}{\psi}_{jm} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qm}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) &+ \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}),
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
(N^2-1)\underset{2}{\psi}_{jm} &= (N\underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{R}_{mj}) - (N\underset{2}{\overline{R}}_{jm} + \underset{2}{\overline{R}}_{mj}) \\
&\quad + \frac{2N}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qm}(\overline{L}{}^p_{\underline{jp}} - L^p_{\underline{jp}}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^q_{qj}(\overline{L}{}^p_{\underline{mp}} - L^p_{\underline{mp}}) \\
&\quad + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}(\overline{L}{}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{N-1}{N+1}.
\end{aligned}
\tag{11.17}
$$

Zamenom (11.17) u (11.12) dobijamo

$$
\underset{2}{\overline{\varepsilon}}{}^i{}_{jmn} = \underset{2}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}, \tag{11.18}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\, N\underset{1}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(N\underset{2}{R}_{jn} + \underset{2}{R}_{nj}) \\
&\quad - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(N\underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{R}_{mj}) + \frac{2}{(N+1)^2}L^p_{\underline{mp}}\big[\frac{1}{N-1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^q_{qj} - \delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^q_{qn}\big] \\
&\quad + \frac{2}{(N+1)^2}L^p_{\underline{np}}\big[\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^q_{qm} - \frac{1}{N-1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^q_{qj}\big] \\
&\quad + \frac{2}{N+1}L^p_{\underline{jp}}\big[-\frac{N}{N^2-1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^q_{qn} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^q_{qm} - 2\underset{\vee}{L}{}^i_{nm}\big] \\
&\quad - \frac{2}{(N+1)^2}L^q_{\underline{pq}}\big[\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mn} + \delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{jn}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{jm} + (N+1)\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}\big].
\end{aligned}
\tag{11.19}
$$

Veličina $\underset{2}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ nije tenzor. Zvaćemo je **Ekvitorzionim projektivnim parametrom druge vrste**. Na osnovu izloženog važi slaedeća

Teorema 11.2. *Ekvitorzioni projektivni parametri druge vrste predstavljaju invarijante ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja prostora GA_N na $G\overline{A}_N$.*

Ekvitorzioni projektivni parametri (11.19) predstavljaju uopštenje ET-projektivnih parametara prve vrste ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na generalisani Rimanov prostor $G\overline{R}_N$. U tom slučaju veličine (11.19) se svode na [47], [90]

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{2}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\big[\delta^i_m (N\underset{2}{R}_{jn} + \underset{2}{R}_{nj}) - \\
&- \delta^i_n (N\underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{R}_{mj})\big] - \frac{2}{(N+1)^2}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(2\delta^i_j \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} + \delta^i_m \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_n \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mj}}) - \\
&- \frac{2}{N+1}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\delta^\alpha_j + \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{nm}}\delta^i_j).
\end{aligned}
\tag{11.20}
$$

11.4. Ekvitorzioni projektivni parametri treće vrste

Za tenzore $\underset{3}{R}$ i $\underset{3}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ pri ekvitorzionom geodezijskom preslikavanju važi relacija

$$
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j (\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm} + 2\psi_n L^i_{\underset{\vee}{mj}} + 2\psi_m L^i_{\underset{\vee}{nj}}.
\tag{11.21}
$$

Kako je

$$
\underset{2}{\psi}_{mn} = \underset{1}{\psi}_{mn} + 2L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p,
$$

iz (11.21) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j (\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m \underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm} + \\
&+ 2\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p + 2\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}}\psi_p + 2\psi_n L^i_{\underset{\vee}{mj}} + 2\psi_m L^i_{\underset{\vee}{nj}}.
\end{aligned}
\tag{11.22}
$$

U (11.22) izvršimo kontrakciju po indeksima i, n. Dobija se

$$
\underset{3}{\overline{R}}_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} - \underset{1}{\psi}_{[jm]} - (N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} + 2\psi_q L^q_{\underset{\vee}{mj}} + 2\psi_m L^p_{\underset{\vee}{pj}}.
\tag{11.23}
$$

Alternacijom u poslednjoj jednačini po indeksima j, m dobijamo

$$
\underset{3}{\overline{R}}_{[jm]} = \underset{3}{R}_{[jm]} - 2\underset{1}{\psi}_{[jm]} - (N-1)\underset{1}{\psi}_{[jm]} + 4\psi_q L^q_{\underset{\vee}{mj}} + 2\psi_m L^p_{\underset{\vee}{pj}} - 2\psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}.
$$

Korišćenjem relacije (11.5) imamo

$$
\begin{aligned}
(N+1)\underset{1}{\psi}_{jm} &= \underset{3}{R}_{[jm]} - \underset{3}{\overline{R}}_{[jm]} + \frac{4}{N+1}L^p_{\underset{\vee}{mj}}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}) \\
&+ \frac{2}{N+1}L^p_{\underset{\vee}{pj}}(\overline{L}^q_{\underline{mq}} - L^q_{\underline{mq}}) - \frac{2}{N+1}L^p_{\underset{\vee}{pm}}(\overline{L}^q_{\underline{jq}} - L^q_{\underline{jq}}),
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

Prema (11.5,24,23) dobijamo

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} &- \frac{1}{N+1}\big[\underset{3}{R}_{[jm]} - \underset{3}{\overline{R}}_{[jm]} + \frac{4}{N+1} L^p_{\underset{\vee}{mj}}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}) \\
&+ \frac{2}{N+1} L^p_{\underset{\vee}{pj}}(\overline{L}^q_{\underline{mq}} - L^q_{\underline{mq}}) - \frac{2}{N+1} L^p_{\underset{\vee}{pm}}(\overline{L}^q_{\underline{jq}} - L^q_{\underline{jq}})\big] - (N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} \\
&+ \frac{2}{N+1} L^p_{\underset{\vee}{mj}}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}}) + \frac{2}{N+1} L^p_{\underset{\vee}{pj}}(\overline{L}^q_{\underline{mq}} - L^q_{\underline{mq}}),
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
(N^2-1)\underset{1}{\psi}_{jm} = (N\underset{3}{R}_{jm} + \underset{3}{R}_{mj}) &- (N\underset{3}{\overline{R}}_{jm} + \underset{3}{\overline{R}}_{mj}) + 2L^p_{\underset{\vee}{mj}}(\overline{L}^q_{\underline{pq}} - L^q_{\underline{pq}})\frac{N-1}{N+1} \\
&+ 2L^p_{\underset{\vee}{pj}}(\overline{L}^q_{\underline{mq}} - L^q_{\underline{mq}})\frac{N}{N+1} + \frac{2}{N+1} L^p_{\underset{\vee}{pm}}(\overline{L}^q_{\underline{jq}} - L^q_{\underline{jq}}).
\end{aligned} \tag{11.25}$$

Zamenom (11.25) u (11.22) uz korišćenje uslova (11.5) dobijamo

$$\underset{3}{\overline{\varepsilon}}{}^i{}_{jmn} = \underset{3}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}, \tag{11.26}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{3}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(N\underset{3}{R}_{jn} + \underset{3}{R}_{nj}) \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(N\underset{3}{R}_{jm} + \underset{3}{R}_{mj}) + \frac{2}{(N-1)(N+1)^2} L^q_{\underline{jq}}(\delta^i_n\, L^p_{\underset{\vee}{pm}} - \delta^i_m\, L^p_{\underset{\vee}{pn}}) \\
&+ \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{mq}}(\delta^i_j\, L^p_{\underset{\vee}{pn}} + \frac{N}{N-1}\delta^i_n\, L^p_{\underset{\vee}{pj}} - (N+1)L^i_{\underset{\vee}{nj}}) \\
&- \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{nq}}(\delta^i_j\, L^p_{\underset{\vee}{pm}} + \frac{N}{N-1}\delta^i_m\, L^p_{\underset{\vee}{pj}} + (N+1)L^i_{\underset{\vee}{mj}}) \\
&- \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}[2(N-1)\delta^i_j\, L^p_{\underset{\vee}{nm}} + \delta^i_m\, L^p_{\underset{\vee}{nj}} - \delta^i_n\, L^p_{\underset{\vee}{mj}} + (N+1)\delta^i_m\, L^p_{\underset{\vee}{jn}}].
\end{aligned} \tag{11.27}$$

Veličina $\underset{3}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ nije tenzor. Zvaćemo je **ekvitorzionim projektivnim parametrom treće vrste**. Prema (11.26) važi

Teorema 11.3. *Ekvitorzioni projektivni parametri treće vrste* (11.27) *su invarijante ekvitorzionog preslikavanja prostora GA_N na $G\overline{A}_N$.*

U slučaju ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora ekvitorzioni parametri projektivne krivine svode se na [47]

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{3}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(N\underset{3}{R}_{jn} + \underset{3}{R}_{nj}) \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(N\underset{3}{R}_{jm} + \underset{3}{R}_{mj}) - \frac{2}{N+1}(L^q_{\underline{mq}}L^i_{\underset{\vee}{nj}} + L^q_{\underline{nq}}L^i_{\underset{\vee}{mj}}) \\
&- \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}[2(N-1)\delta^i_j\, L^p_{\underset{\vee}{nm}} + \delta^i_m\, L^p_{\underset{\vee}{nj}} - \delta^i_n\, L^p_{\underset{\vee}{mj}} + (N+1)\delta^i_m\, L^p_{\underset{\vee}{jn}}].
\end{aligned} \tag{11.28}$$

11.5. Ekvitorzioni projektivni parametri četvrte vrste

Tenzori krivine četvrte vrste $\underset{4}{R}$ i $\underset{4}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ pri ekvitorzionom geodezijskom preslikavanju su povezani relacijom (v. §10)

$$\overline{\underset{4}{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm} + 2\psi_m \underset{\vee}{L}{}^i_{nj} + 2\psi_n \underset{\vee}{L}{}^i_{mj}, \tag{11.29}$$

odakle na isti način kao u prethodnom slučaju dobijamo

$$\overline{\underset{4}{\varepsilon}}{}^i{}_{jmn} = \underset{4}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}, \tag{11.30}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{4}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(N\underset{4}{R}_{jn} + \underset{4}{R}_{nj}) \\
& - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(N\underset{4}{R}_{jm} + \underset{4}{R}_{mj}) + \frac{2}{(N-1)(N+1)^2} L^q_{\underline{jq}}(\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{pm} - \delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{pn}) \\
& + \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{mq}}(\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{pn} + \frac{N}{N-1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{pj} - (N+1)\underset{\vee}{L}{}^i_{nj}) \\
& - \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{nq}}(\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{pm} + \frac{N}{N-1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{pj} + (N+1)\underset{\vee}{L}{}^i_{mj}) \\
& - \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}[2(N-1)\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nm} + \delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nj} - \delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mj} + (N+1)\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{jn}].
\end{aligned} \tag{11.31}$$

Veličina $\underset{4}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ takodje nije tenzor. Zvaćemo je **ekvitorzionim projektivnim parametrom četvrte vrste**. Prema tome važi

Teorema 11.4. *Ekvitorzioni projektivni parametri četvrte vrste* (11.31) *su invarijante ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja prostora GA_N na $G\overline{A}_N$.*

Kod ekvitorzionog geodezijskog preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora parametar (11.30) se svodi na [47]

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{4}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(N\underset{4}{R}_{jn} + \underset{4}{R}_{nj}) \\
& - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(N\underset{4}{R}_{jm} + \underset{4}{R}_{mj}) - \frac{2}{N+1}(L^q_{\underline{mq}}\underset{\vee}{L}{}^i_{nj}) + L^q_{\underline{nq}}\underset{\vee}{L}{}^i_{mj}) \\
& - \frac{2}{(N+1)^2} L^q_{\underline{pq}}[2(N-1)\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nm} + \delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nj} - \delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mj} + (N+1)\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{jn}].
\end{aligned} \tag{11.32}$$

11.6. Ekvitorzioni projektivni tenzor krivine

Tenzori krivine pete vrste $\underset{5}{R}$ i $\underset{5}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ pri ekvitorzionom geodezijskom preslikavanju su vezani relacijom

$$\begin{aligned}
\overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{2}(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{2}{\psi}_{nm} + \underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) \\
& + \frac{1}{2}\delta^i_m\,(\underset{1}{\psi}_{jn} + \underset{2}{\psi}_{jn}) - \frac{1}{2}\delta^i_n\,(\underset{1}{\psi}_{jm} + \underset{2}{\psi}_{jm}).
\end{aligned} \tag{11.33}$$

Stavimo

$$\underset{12}{\psi}_{jn} = \frac{1}{2}(\underset{1}{\psi}_{jn} + \underset{2}{\psi}_{jn}). \tag{11.34}$$

Tada (11.33) možemo predstaviti u obliku

$$\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{12}{\psi}_{mn} - \underset{12}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{12}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{12}{\psi}_{jm}. \tag{11.35}$$

Eliminacijom tenzora $\underset{12}{\psi}_{mn}$ iz (11.35) analognim postupkom kao u prethodnim slučajevima dobijamo

$$\underset{5}{\overline{\varepsilon}}{}^i{}_{jmn} = \underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}, \tag{11.36}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}\underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn} =& \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{5}{R}_{[mn]}\\ &+ \frac{1}{N^2-1}\big[\delta^i_m\,(N\underset{5}{R}_{jn} + \underset{5}{R}_{nj}) - \delta^i_n\,(N\underset{5}{R}_{jm} + \underset{5}{R}_{mj})\big].\end{aligned} \tag{11.37}$$

Za razliku od prethodnih slučajeva kada veličine $\underset{\theta}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1, ..., 4)$ nisu bile tenzori, veličina $\underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ je tenzor. Zvaćemo je **ekvitorzionim projektivnim tenzorom krivine**. Prema (11.36) važi

Teorema 11.5. *Ekvitorzioni projektivni tenzor krivine* (11.37) *je invarijanta ekvitorzionog preslikavanja prostora GA_N na $G\overline{A}_N$.*

Kod preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora ekvitorzioni tenzor projektivne krivine ima isti oblik kao (11.37).

U slučaju kada se $GA_N\,(GR_N)$ redukuje u Rimanov prostor veličine (11.10,11,19, 20,27,28,31,32,37) se svode na Vejlov tenzor projektivne krivine [83]

$$W^i_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \frac{1}{N-1}(\delta^i_m\,R_{jn} - \delta^i_n\,NR_{jm}), \tag{11.38}$$

tj. predstavljaju njegovo uopštenje u ovom slučaju.

12. $\underset{\theta}{R}$–projektivna preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije

Zbog nemogućnosti uopštavanja Vejlovog tenzora u opštem slučaju u prethodnom odeljku su razmatrana ekvitorziona geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. U cilju nalaženja još nekih generalizacija Vejlovog tenzora u ovom odeljku ćemo uvesti neka nova specijalna geodezijska preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije.

12.1. $\underset{1}{R}$–projektivno preslikavanje

Neka prostor nesimetrične afine koneksije GA_N dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na prostor $G\overline{A}_N$. Veza izmeđju tenzora krivine $\underset{1}{R}$ i $\underset{1}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (v. §10) data je relacijom

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm} \\
&\quad - \delta^i_m\,\xi^p_{jn}\psi_p + \delta^i_n\,\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m} + 2\psi_j\xi^i_{mn} + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} \\
&\quad + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\xi^i_{jp},
\end{aligned}
\tag{12.1}
$$

gde je

$$
\underset{1}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{1}{|}n} - \psi_m\psi_n.
$$

Kontrakcijom po indeksima i, n iz (12.1) sledi

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}_{jm} &= \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\psi}_{[jm]} - (N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} + (N-1)\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^p_{jm\underset{1}{|}p} - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m} \\
&\quad + \psi_j\overline{L}^p_{mp} + \xi^p_{jm}\xi^q_{pq} - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm} + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mq}\xi^q_{jp}.
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

Alternacijom bez deljenja u (12.2) po indeksima j, n imamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} &= \underset{1}{R}_{[jm]} - 2\underset{1}{\psi}_{[jm]} - (N-1)\underset{1}{\psi}_{[jm]} + 2(N-1)\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^p_{jm\underset{1}{|}p} \\
&\quad - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m} + \xi^p_{mp\underset{1}{|}j} + 2\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp} - 2\psi_m\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jp} + 2\xi^p_{jm}\xi^q_{pq} \\
&\quad - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm} + \xi^p_{mq}\xi^q_{pj} + 4\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mq}\xi^q_{jp} - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{jq}\xi^q_{mp},
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

a odavde

$$
\begin{aligned}
(N+1)\underset{1}{\psi}_{[jm]} &= \underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} + 2(N-1)\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^p_{jm\underset{1}{|}p} - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m} + \xi^p_{mp\underset{1}{|}j} \\
&\quad + 2\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp} - 2\psi_m\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jp} + 2\xi^p_{jm}\xi^q_{pq} + 4\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mq}\xi^q_{jp} - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{jq}\xi^q_{mp}.
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Zamenom (12.4) u (12.2) dobijamo

$$
\begin{aligned}
(N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} &= \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm} - \frac{1}{N+1}\big[\underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} + 2(N-1)\xi^p_{jm}\psi_p \\
&\quad + 2\xi^p_{jm\underset{1}{|}p} - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m} + \xi^p_{mp\underset{1}{|}j} + 2\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp} - 2\psi_m\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jp} + 2\xi^p_{jm}\xi^q_{pq} \\
&\quad + 4\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mq}\xi^q_{jp} - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{jq}\xi^q_{mp}\big] + (N-1)\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^p_{jm\underset{1}{|}p} \\
&\quad - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m} + 2\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp} + \xi^p_{jm}\xi^q_{pq} - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm} + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mq}\xi^q_{jp}.
\end{aligned} \tag{12.5}
$$

Označimo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathcal{D}}_{jm} &= \frac{N-1}{N+1}\xi^p_{jm}\psi_p + \frac{2}{N^2-1}\big(N\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp} - \psi_m\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jp} + N\underset{\vee}{L}{}^p_{mq}\xi^q_{jp} + \underset{\vee}{L}{}^p_{jq}\xi^q_{mp}\big) \\
&\quad + \frac{1}{N+1}\xi^p_{jm}\xi^q_{pq} - \frac{1}{N-1}\xi^p_{jq}\xi^q_{pm} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p.
\end{aligned} \tag{12.6}
$$

Sada (12.5) možemo predstaviti u obliku

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\psi}_{jm} &= \frac{1}{N-1}\big\{\underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm} \\
&\quad - \frac{1}{N+1}\big[\underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]} + 2\xi^p_{jm\underset{1}{|}p} - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m} + \xi^p_{mp\underset{1}{|}j}\big] \\
&\quad + \xi^p_{jm\underset{1}{|}p} - \xi^p_{jp\underset{1}{|}m}\big\} + \underset{1}{\mathcal{D}}_{jm},
\end{aligned} \tag{12.7}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\psi}_{jm} &= \frac{1}{N-1}(\underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm}) - \frac{1}{N^2-1}(\underset{1}{R}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[jm]}) \\
&\quad + \frac{1}{N+1}(\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jm\underset{1}{|}p} - \underset{\vee}{L}{}^p_{lm\underset{1}{|}p}) - \frac{N}{N+1}(\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jp\underset{1}{|}m} - \underset{\vee}{L}{}^p_{jp\underset{1}{|}m}) \\
&\quad - \frac{1}{N^2-1}(\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp\underset{1}{|}j} - \underset{\vee}{L}{}^p_{mp\underset{1}{|}j}) + \underset{1}{\mathcal{D}}_{jm}.
\end{aligned} \tag{12.8}
$$

Zamenom (12.8) u (12.1) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{1}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N-1}\delta^i_j\,(\underset{1}{R}{}_{[mn]} - \overline{\underset{1}{R}}{}_{[mn]}) - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_j\,(2\underset{1}{R}{}_{[mn]} - 2\overline{\underset{1}{R}}{}_{[mn]}) \\
&+ \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{mn}|\underset{1}{p}} - L^p_{\underset{\vee}{mn}|\underset{1}{p}}) - \frac{N}{N+1}\delta^i_j\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{n}} - \overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{m}} - L^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{n}} + L^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{m}}) \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_j\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{m}} - \overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{n}} - L^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{m}} + L^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{n}}) + \delta^i_j\,\underset{1}{\mathcal{D}}{}_{mn} \\
&+ \frac{1}{N-1}\delta^i_m\,(\underset{1}{R}{}_{jn} - \overline{\underset{1}{R}}{}_{jn}) - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(\underset{1}{R}{}_{[jn]} - \overline{\underset{1}{R}}{}_{[jn]}) \\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{jn}|\underset{1}{p}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}|\underset{1}{p}}) - \frac{N}{N+1}\delta^i_m\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{jp}|\underset{1}{n}} - L^p_{\underset{\vee}{jp}|\underset{1}{n}}) \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{j}} - L^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{j}}) + \delta^i_m\,\underset{1}{\mathcal{D}}{}_{jn} \\
&- \frac{1}{N-1}\delta^i_n\,(\underset{1}{R}{}_{jm} - \overline{\underset{1}{R}}{}_{jm}) + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(\underset{1}{R}{}_{[jm]} - \overline{\underset{1}{R}}{}_{[jm]}) \\
&- \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{jm}|\underset{1}{p}} - L^p_{\underset{\vee}{jm}|\underset{1}{p}}) - \frac{N}{N+1}\delta^i_m\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{jp}|\underset{1}{m}} - L^p_{\underset{\vee}{jp}|\underset{1}{m}}) \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(\overline{L}{}^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{j}} - L^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{j}}) - \delta^i_n\,\underset{1}{\mathcal{D}}{}_{jm} \\
&- \delta^i_m\,\xi^p_{jn}\psi_p + \delta^i_n\,\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^i_{jm\underset{1}{|}n} - \xi^i_{jn\underset{1}{|}m} + 2\psi_j\xi^i_{mn} \\
&+ \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\xi^i_{jp}.
\end{aligned}
\tag{12.9}
$$

Stavimo

$$
\begin{aligned}
&\delta^i_j\,\underset{1}{\mathcal{D}}{}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{1}{\mathcal{D}}{}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\mathcal{D}}{}_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{jn}\psi_p + \delta^i_n\,\xi^p_{jm}\psi_p + 2\psi_j\xi^i_{mn} \\
&\quad + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\xi^i_{jp} = 0.
\end{aligned}
\tag{12.10}
$$

Tada (12.9) možemo predstaviti u obliku

$$
\overline{W}(\underset{1}{R})^i{}_{jmn} = W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn}
\tag{12.11}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{1}{R}{}_{[mn]} \\
&+ \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{1}{R}{}_{jn} + \underset{1}{R}{}_{nj})\delta^i_m - (N\underset{1}{R}{}_{jm} + \underset{1}{R}{}_{mj})\delta^i_n\,] \\
&- \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,L^p_{\underset{\vee}{mn}|\underset{1}{p}} + \frac{N^2-N-1}{N^2-1}\delta^i_j\,(L^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{n}} - L^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{m}}) \\
&- \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,L^p_{\underset{\vee}{jn}|\underset{1}{p}} + \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,(NL^p_{\underset{\vee}{jp}|\underset{1}{n}} + \frac{1}{N-1}L^p_{\underset{\vee}{np}|\underset{1}{j}}) \\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,L^p_{\underset{\vee}{jm}|\underset{1}{p}} - \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,(NL^p_{\underset{\vee}{jp}|\underset{1}{m}} + \frac{1}{N-1}L^p_{\underset{\vee}{mp}|\underset{1}{j}}) \\
&- L^i_{\underset{\vee}{jm}|\underset{1}{n}} + L^i_{\underset{\vee}{jn}|\underset{1}{m}}.
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

Geodezijsko preslikavanjo prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ koje zadovoljavaju uslove (12.6) i (12.10) zvaćemo **$\underset{1}{R}$-projektivnim preslikavanjem**. Za prostor GA_N kažemo da je **$\underset{1}{R}$-projektivno ravan** ako postoji $\underset{1}{R}$-projektivno preslikavanje prostora GA_N na ravan prostor.

Dakle, prema (12.11) za $\underset{1}{R}$-projektivna preslikavanja važi

Teorema 12.1. *Tenzor* $W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn}$ *definisan pomoću* (12.12) *je invarijanta* $\underset{1}{R}$*-projektivnog preslikavanja.*

Teorema 12.2. *Ako je prostor* GA_N $\underset{1}{R}$*-projektivno ravan onda je*

$$W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn} \equiv 0. \tag{12.13}$$

Dokaz. S obzirom na činjenicu da je $G\overline{A}_N$ ravan prostor to je prema (12.12) $\overline{W}(\underset{1}{R})^i{}_{jmn} \equiv 0$, a zbog invarijantnosti tenzora $W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn}$, pri $\underset{1}{R}$-projektivnom preslikavanju, sledi da u GA_N važi (12.13). ■

U slučaju preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na $G\overline{R}_N$ [90], [95] uslovi (12.6) i (12.10) se svode na

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{D}}_{jm} &= \frac{N-1}{N+1}\xi^p_{jm}\psi_p + \frac{2}{N^2-1}(N\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mq}\xi^q_{jp} + \underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jq}\xi^q_{mp})\\ &\quad - \frac{1}{N-1}\xi^p_{jq}\xi^q_{pm} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\psi_p.\end{aligned} \tag{12.6′}$$

i

$$\begin{aligned}&\delta^i_j\,\underset{1}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{1}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\mathcal{D}}_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{jn}\psi_p + \delta^i_n\,\xi^p_{jm}\psi_p + 2\psi_j\xi^i_{mn}\\ &\quad + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mn}\psi_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\xi^i_{jp} = 0.\end{aligned} \tag{12.10′}$$

a tenzor (12.12) ima oblik

$$\begin{aligned}W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{1}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{1}{R}_{jn} + \underset{1}{R}_{nj})\delta^i_m\\ &\quad - (N\underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{R}_{mj})\delta^i_n\,] - \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn\underset{1}{|}p} - \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jn\underset{1}{|}p}\\ &\quad + \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jm\underset{1}{|}p} - \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{jm\underset{1}{|}n} + \underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{jn\underset{1}{|}m}.\end{aligned} \tag{12.12 ′}$$

Ako je $\underset{1}{R}$-preslikavanje ekvitorziono onda se uslovi (12.6) i (12.10) redukuju i postaju

$$\underset{1}{\mathcal{D}}_{jm} = \frac{2}{N^2-1}(N\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mp} - \psi_m\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{jp}) + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{mj}\psi_p, \tag{12.6″}$$

(12.10 ″) $$\delta^i_j \underset{1}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m \underset{1}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\mathcal{D}}_{jm} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{mn}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j = 0,$$

a tenzor (12.12) se svodi na

(12.12″) $$\begin{aligned} W(\underset{1}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{1}{R}{}_{[mn]} \\ &+ \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{1}{R}{}_{jn} + \underset{1}{R}{}_{nj})\delta^i_m - (N\underset{1}{R}{}_{jm} + \underset{1}{R}{}_{mj})\delta^i_n] \end{aligned}$$

12.2. $\underset{2}{R}$–projektivno preslikavanje

Neka afini prostor GA_N dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na afini prostor $G\overline{A}_N$. Za takvo preslikavanje kažemo da je **$\underset{2}{R}$-projektivno** ako važi

(12.14) $$\begin{aligned} \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm} &= \frac{N-1}{N+1}\xi^p_{mj}\psi_p + \frac{2}{N^2-1}(N\psi_j\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{pm} - \psi_m\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{pj} + N\underset{\vee}{L}{}^p_{qm}\xi^q_{pj} + \underset{\vee}{L}{}^p_{qj}\xi^q_{pm}) \\ &+ \frac{1}{N+1}\xi^p_{mj}\xi^q_{qp} - \frac{1}{N-1}\xi^p_{qj}\xi^q_{mp} + \frac{2}{N+1}\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}\psi_p, \end{aligned}$$

(12.15) $$\begin{aligned} &\delta^i_j \underset{2}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m \underset{2}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm} - \delta^i_m \xi^p_{nj}\psi_p + \delta^i_n \xi^p_{mj}\psi_p + 2\psi_j\xi^i_{nm} \\ &\quad + \xi^p_{mj}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{mp} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{nm}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}\psi_p\delta^i_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}\xi^i_{pj} = 0. \end{aligned}$$

Veza izmeju tenzora krivine $\underset{2}{R}$ i $\underset{2}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (v. §10) data je sa

(12.16) $$\begin{aligned} \underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{2}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\psi}_{jm} \\ &- \delta^i_m \xi^p_{nj}\psi_p + \delta^i_n \xi^p_{mj}\psi_p + \xi^i_{mj\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{2}{|}m} + 2\psi_j\xi^i_{nm} + \xi^p_{mj}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{mp} \\ &+ 2\underset{\vee}{L}{}^i_{nm}\psi_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}\psi_p\delta^i_j + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{nm}\xi^i_{pj}, \end{aligned}$$

gde je

$$\underset{2}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{2}{|}n} - \psi_m\psi_n.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n iz (12.16) sledi

(12.17) $$\begin{aligned} \underset{2}{\overline{R}}_{jm} &= \underset{2}{R}_{jm} - \underset{2}{\psi}_{[jm]} - (N-1)\underset{2}{\psi}_{jm} + (N-1)\xi^p_{mj}\psi_p + \xi^p_{mj\underset{2}{|}p} - \xi^p_{pj\underset{2}{|}m} \\ &+ \psi_j\overline{L}{}^p_{pm} + \xi^p_{mj}\xi^q_{qp} - \xi^p_{qj}\xi^q_{mp} + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{qm}\xi^q_{pj} \end{aligned}$$

Alternacijom bez deljenja u (1217) po indeksima j, n imamo

$$
\begin{aligned}
(N+1)\underset{2}{\psi}_{[jm]} &= \underset{2}{R}_{[jm]} - \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]} + 2(N-1)\xi^p_{mj}\psi_p + 2\xi^p_{mj\underset{2}{|}}{-}\xi^p_{pj\underset{2}{|}m} \\
&\quad + \xi^p_{pm\underset{2}{|}j} + 2\psi_j \underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{pm} - 2\psi_m \underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{pj} + 2\xi^p_{mj}\xi^q_{qp} \\
&\quad + 4\underset{\vee}{L}{}^p_{jm}\psi_p + 2\underset{\vee}{L}{}^p_{qm}\xi^q_{pj} - 2\underset{\vee}{L}{}^p_{qj}\xi^q_{pm}.
\end{aligned}
\tag{12.18}
$$

Zamenom (12.18) i (12.14) u (12.17) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\psi}_{jm} &= \frac{1}{N-1}(\underset{2}{R}_{jm} - \underset{2}{\overline{R}}_{jm}) - \frac{1}{N^2-1}(\underset{2}{R}_{[jm]} - \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]}) \\
&\quad + \frac{1}{N+1}(\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{mj\underset{2}{|}p} - \underset{\vee}{L}{}^p_{mj\underset{2}{|}p}) - \frac{N}{N+1}(\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{pj\underset{2}{|}m} - \underset{\vee}{L}{}^p_{pj\underset{2}{|}m}) \\
&\quad - \frac{1}{N^2-1}(\underset{\vee}{\overline{L}}{}^p_{pm\underset{2}{|}j} - \underset{\vee}{L}{}^p_{pm\underset{2}{|}j}) + \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm}.
\end{aligned}
\tag{12.19}
$$

Zamenom (12.19) u (12.16) imajući u vidu (12.14) i (12.15) dobijamo

$$
\overline{W}(\underset{2}{R})^i{}_{jmn} = W(\underset{2}{R})^i{}_{jmn}
\tag{12.20}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
W(\underset{2}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{2}{R}_{[mn]} \\
&\quad + \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{2}{R}_{jn} + \underset{2}{R}_{nj})\delta^i_m - (N\underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{R}_{mj})\delta^i_n\,] \\
&\quad - \frac{2}{N+1}\delta^i_j\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nm\underset{2}{|}p} + \frac{N^2-N-1}{N^2-1}\delta^i_j\,(\underset{\vee}{L}{}^p_{pm\underset{2}{|}n} - \underset{\vee}{L}{}^p_{pn\underset{2}{|}m}) \\
&\quad - \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,\underset{\vee}{L}{}^p_{nj\underset{2}{|}p} + \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,(N\underset{\vee}{L}{}^p_{pj\underset{2}{|}n} + \frac{1}{N-1}\underset{\vee}{L}{}^p_{pn\underset{2}{|}j}) \\
&\quad + \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,\underset{\vee}{L}{}^p_{mj\underset{2}{|}p} - \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,(N\underset{\vee}{L}{}^p_{pj\underset{2}{|}m} + \frac{1}{N-1}\underset{\vee}{L}{}^p_{pm\underset{2}{|}j}) \\
&\quad - \underset{\vee}{L}{}^i_{mj\underset{2}{|}n} + \underset{\vee}{L}{}^i_{nj\underset{2}{|}m}.
\end{aligned}
\tag{12.21}
$$

Za prostor GA_N kažemo da je $\underset{2}{R}$**-projektivno ravan** ako postoji $\underset{2}{R}$-projektivno preslikavanje prostora GA_N na ravan prostor. Dakle, prema (12.21) za $\underset{1}{R}$-projektivna preslikavanja važe

Teorema 12.3. *Tenzor $W(\underset{2}{R})^i{}_{jmn}$ definisan pomoću* (12.21) *je invarijanta $\underset{2}{R}$-projektivnog preslikavanja.*

Teorema 12.4. *Ako je prostor GA_N $\underset{2}{R}$-projektivno ravan onda je*

$$
W(\underset{2}{R})^i{}_{jmn} \equiv 0.
\tag{12.22}
$$

U slučaju preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na $G\overline{R}_N$ [90], [95] uslovi (12.14) i (12.15) se svode na

$$
(12.14') \qquad \begin{aligned} \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm} &= \frac{N-1}{N+1}\xi^p_{mj}\psi_p + \frac{2}{N-1}(N\Gamma^p_{\underset{\vee}{qm}}\xi^q_{pj} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{qj}}\xi^q_{pm}) \\ &- \frac{1}{N-1}\xi^p_{qj}\xi^q_{mp} + \frac{2}{N+1}\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p \end{aligned}
$$

i

$$
(12.15') \qquad \begin{aligned} &\delta^i_j \underset{2}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m \underset{2}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm} - \delta^i_m \xi^p_{nj}\psi_p + \delta^i_n \xi^p_{mj}\psi_p + 2\psi_j\xi^i_{nm} \\ &+ \xi^p_{mj}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{mp} + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\psi_j + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi_p\delta^i_j + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\xi^i_{pj} = 0. \end{aligned}
$$

a tenzor (12.21) dobija oblik

$$
(12.21') \qquad \begin{aligned} W(\underset{2}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{2}{R}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{2}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{2}{R}_{jn} + \underset{2}{R}_{nj})\delta^i_m \\ &- (N\underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{R}_{mj})\delta^i_n] - \frac{2}{N+1}\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{nm}\underset{2}{|}p} - \frac{1}{N+1}\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{nj}\underset{2}{|}p} \\ &+ \frac{1}{N+1}\delta^i_n L^p_{\underset{\vee}{mj}\underset{2}{|}p} - L^i_{\underset{\vee}{mj}\underset{2}{|}n} + L^i_{\underset{\vee}{nj}\underset{2}{|}m}. \end{aligned}
$$

Ako je $\underset{2}{R}$-preslikavanje još i ekvitorziono onda se uslovi (12.14) i (12.15) uprošćavaju i svode se na

$$
(12.14'') \qquad \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm} = \frac{2}{N^2-1}(N\psi_j\overline{L}^p_{\underset{\vee}{pm}} - \psi_m\overline{L}^p_{\underset{\vee}{pj}}) + \frac{2}{N+1}L^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p,
$$

$$
(12.15'') \qquad \delta^i_j \underset{2}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m \underset{2}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\mathcal{D}}_{jm} + 2L^i_{\underset{\vee}{nm}}\psi_j + 2L^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi_p\delta^i_j = 0.
$$

U tom slučaju tenzor (12.21) se svodi na tenzor

$$
(12.21'') \qquad \begin{aligned} W(\underset{2}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{2}{R}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{2}{R}_{[mn]} \\ &+ \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{2}{R}_{jn} + \underset{2}{R}_{nj})\delta^i_m - (N\underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{R}_{mj})\delta^i_n]. \end{aligned}
$$

12.3. $\underset{3}{R}$-projektivno preslikavanje

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{3}{R}$ i $\underset{3}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (v. §10) data je sa

$$
(12.23) \qquad \begin{aligned} \underset{3}{\overline{R}}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}^i{}_{jmn} + \delta^i_j(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm} \\ &+ \psi_p(\delta^i_n \xi^p_{jm} - \delta^i_m \xi^p_{nj}) + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} \\ &- \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\psi_n(L^i_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(L^i_{\underset{\vee}{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{nm}(L^i_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^i_{pj}), \end{aligned}
$$

pri čemu je

$$\underset{p}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{p}{|}n} - \psi_m\psi_n, \quad p = 1, 2.$$

Kako je

$$\underset{2}{\psi}_{mn} = \underset{1}{\psi}_{mn} + 2L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p$$

to (12.23) postaje

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{1}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm}\\
&+ 2\delta^i_j\,L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p + 2\delta^i_m\,L^p_{\underset{\vee}{jn}}\psi_p + (\delta^i_n\,\xi^p_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{nj})\psi_p\\
&+ \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} - \xi^p_{jn}\xi^i_{pm}\\
&+ 2\psi_n(L^i_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(L^i_{\underset{\vee}{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{nm}(L^i_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^i_{pj}).
\end{aligned}\tag{12.24}$$

Kontrakcijom po indeksima i, n iz (12.24) sledi

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}_{jm} &= \underset{3}{R}_{jm} - \underset{1}{\psi}_{[jm]} - (N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} + (N+1)\xi^p_{jm}\psi_p + \xi^p_{jm\underset{2}{|}p}\\
&- \xi^p_{pj\underset{2}{|}m} + \xi^p_{jm}\xi^q_{qp} - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm} + 2\psi_p(L^p_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^p_{mj})\\
&+ 2\psi_m(L^p_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^p_{pj}) + 2\xi^p_{qm}(L^q_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^q_{pj}).
\end{aligned}\tag{12.25}$$

Alternacijom bez deljenja u (12.25) po indeksima j, n dobijamo

$$\begin{aligned}
(N+1)\underset{1}{\psi}_{[jm]} &= \underset{3}{R}_{[jm]} - \underset{3}{\overline{R}}_{[jm]} + 2(N+1)\xi^p_{jm}\psi_p\\
&+ 2\xi^p_{jm\underset{2}{|}p} - \xi^p_{pj\underset{1}{|}m} + \xi^p_{pm\underset{1}{|}j} + 2\xi^p_{jm}\xi^q_{qp} - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm}\\
&+ \xi^p_{mq}\xi^q_{pj} + 4\psi_p(L^p_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^p_{mj}) + 2\psi_m(L^p_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^p_{pj})\\
&- 2\psi_j(L^p_{\underset{\vee}{pm}} + \xi^p_{pm}) + 2\xi^p_{qm}(L^q_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^q_{pj}) - 2\xi^p_{qj}(L^q_{\underset{\vee}{pm}} + \xi^q_{pm}).
\end{aligned}\tag{12.26}$$

Zamenom (12.26) u (12.25) dobijamo

$$\begin{aligned}
(N-1)\underset{1}{\psi}_{jm} &= \underset{3}{R}_{jm} - \underset{3}{\overline{R}}_{jm} - \frac{1}{N+1}\big[\underset{3}{R}_{[jm]} - \underset{3}{\overline{R}}_{[jm]} + 2\xi^p_{jm\underset{2}{|}p}\\
&- \xi^p_{pj\underset{1}{|}m} + \xi^p_{pm\underset{1}{|}j}\big] + \xi^p_{jm\underset{2}{|}p} - \xi^p_{pj\underset{1}{|}m} + (N-1)\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm},
\end{aligned}\tag{12.27}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} &= \xi^p_{jm}\psi_p + \frac{1}{N+1}\xi^p_{jm}\xi^q_{qp} - \frac{2}{N^2-1}\big[2\psi_p(L^p_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^p_{mj})\\
&+ \psi_m(L^p_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^p_{pj}) - \psi_j(L^p_{\underset{\vee}{pm}} + \xi^p_{pm}) + \xi^p_{qm}L^q_{\underset{\vee}{pj}} - \xi^p_{qj}L^q_{\underset{\vee}{pm}}\big]\\
&+ \frac{1}{N-1}\big[2\psi_p(L^p_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^p_{mj}) + 2\psi_m(L^p_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^p_{pj})\\
&+ 2\xi^p_{qm}(L^q_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^q_{pj}) - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm}\big].
\end{aligned}\tag{12.28}$$

Neka je

$$
\begin{aligned}
&\delta^i_j \underset{3}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m \underset{3}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n \underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} + 2\delta^i_j L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p \\
&+ 2\delta^i_m L^p_{\underset{\vee}{jn}}\psi_p + (\delta^i_n \xi^p_{jm} - \delta^i_m \xi^p_{nj})\psi_p + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} \\
&- \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\psi_n(L^i_{\underset{\vee}{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(L^i_{\underset{\vee}{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{nm}(L^i_{\underset{\vee}{pj}} + \xi^i_{pj}) = 0.
\end{aligned}
\tag{12.29}
$$

Korišćenjem (12.27) i (12.29) relaciju (12.24) možemo predstaviti u obliku

$$
\overline{W}(\underset{3}{R})^i{}_{jmn} = W(\underset{3}{R})^i{}_{jmn}
\tag{12.30}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
W(\underset{3}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{3}{R}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{3}{R}_{[mn]} \\
&+ \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{3}{R}_{jn} + \underset{3}{R}_{nj})\delta^i_m - (N\underset{3}{R}_{jm} + \underset{3}{R}_{mj})\delta^i_n] \\
&+ \frac{2}{N^2-1}\delta^i_j (2L^p_{\underset{\vee}{mn}\underset{2}{|}p} - L^p_{\underset{\vee}{pm}\underset{1}{|}n} + L^p_{\underset{\vee}{pn}\underset{1}{|}m} - L^p_{\underset{\vee}{mn}\underset{2}{|}p}) \\
&+ \frac{1}{N-1}\delta^i_j (L^p_{\underset{\vee}{pm}\underset{1}{|}n} - L^p_{\underset{\vee}{pn}\underset{1}{|}m}) \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m (2L^p_{\underset{\vee}{jn}\underset{2}{|}p} - L^p_{\underset{\vee}{pj}\underset{1}{|}n} + L^p_{\underset{\vee}{pn}\underset{1}{|}j}) - \frac{1}{N-1}\delta^i_m (L^p_{\underset{\vee}{jn}\underset{2}{|}p} - L^p_{\underset{\vee}{pj}\underset{1}{|}n}) \\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n (2L^p_{\underset{\vee}{jm}\underset{2}{|}p} - L^p_{\underset{\vee}{pj}\underset{1}{|}m} + L^p_{\underset{\vee}{pm}\underset{1}{|}j}) + \frac{1}{N-1}\delta^i_n (L^p_{\underset{\vee}{jm}\underset{2}{|}p} - L^p_{\underset{\vee}{pj}\underset{1}{|}m}) \\
&- L^i_{\underset{\vee}{jm}\underset{2}{|}n} + L^i_{\underset{\vee}{nj}\underset{1}{|}m}.
\end{aligned}
\tag{12.31}
$$

Geodezijsko preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ je $\underset{3}{R}$-projektivno ako tenzori torzije ova dva prostora zadovoljavaju uslove (12.28) i (12.29). Za prostor GA_N kažemo da je **$\underset{3}{R}$-projektivno ravan** ako postoji $\underset{3}{R}$-projektivno preslikavanje prostora GA_N na ravan prostor. Dakle, prema (12.30) za $\underset{1}{R}$-projektivna preslikavanja važe

Teorema 12.5. *Tenzor $W(\underset{3}{R})^i{}_{jmn}$ definisan pomoću* (12.31) *je invarijanta $\underset{3}{R}$-projektivnog preslikavanja.*

Teorema 12.6. *Ako je prostor GA_N $\underset{3}{R}$-projektivno ravan onda je*

$$
W(\underset{3}{R})^i{}_{jmn} \equiv 0.
$$

U slučaju preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na $G\overline{R}_N$ [90], [95] uslovi (12.28) i (12.29) se svode na

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} &= \xi^p_{jm}\psi_p - \frac{2}{N^2-1}\big[2\psi_p(\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \xi^p_{mj}) + \xi^p_{qm}\underset{\vee}{L^q_{pj}} - \xi^p_{qj}\underset{\vee}{L^q_{pm}}\big] \\
&+ \frac{1}{N-1}\big[2\psi_p(\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \xi^p_{mj}) + 2\xi^p_{qm}(\underset{\vee}{L^q_{pj}} + \xi^q_{pj}) - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm}\big],
\end{aligned}
\tag{12.28 $'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta^i_j\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} + 2\delta^i_j\,\underset{\vee}{L^p_{mn}}\psi_p \\
&+ 2\delta^i_m\,\underset{\vee}{L^p_{jn}}\psi_p + (\delta^i_n\,\xi^p_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{nj})\psi_p + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} \\
&- \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\psi_n(\underset{\vee}{L^i_{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L^i_{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{nm}(\underset{\vee}{L^i_{pj}} + \xi^i_{pj}) = 0.
\end{aligned}
\tag{12.29$'$}
$$

a tenzor (12.31) na

$$
\begin{aligned}
W(\underset{3}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{3}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{3}{R}_{jn} + \underset{3}{R}_{nj})\delta^i_m \\
&- (N\underset{3}{R}_{jm} + \underset{3}{R}_{mj})\delta^i_n\,] + \frac{2}{N^2-1}\delta^i_j\,(2\underset{\vee\,2}{L^p_{mn|p}} - \underset{\vee\,2}{L^p_{mn|p}}) \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,2\underset{\vee\,2}{L^p_{jn|p}} - \frac{1}{N-1}\delta^i_m\,\underset{\vee\,2}{L^p_{jn|p}} - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,2\underset{\vee\,2}{L^p_{jm|p}} \\
&+ \frac{1}{N-1}\delta^i_n\,\underset{\vee\,2}{L^p_{jm|p}} - \underset{\vee\,2}{L^i_{jm|n}} + \underset{\vee\,1}{L^i_{nj|m}}.
\end{aligned}
\tag{12.31$'$}
$$

Ako je $\underset{3}{R}$ - preslikavanje još i ekvitorziono onda se uslovi (12.28) i (12.29) svode na

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} &= -\frac{2}{N^2-1}\big(2\psi_p\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \psi_m\underset{\vee}{L^p_{pj}} - \psi_j\underset{\vee}{L^p_{pm}}\big) \\
&+ \frac{1}{N-1}\big(2\psi_p\underset{\vee}{L^p_{mj}} + 2\psi_m\underset{\vee}{L^p_{pj}}\big),
\end{aligned}
\tag{12.28$''$}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta^i_j\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} + 2\delta^i_j\,\underset{\vee}{L^p_{mn}}\psi_p \\
&+ 2\delta^i_m\,\underset{\vee}{L^p_{jn}}\psi_p + 2\psi_n\underset{\vee}{L^i_{mj}} + 2\psi_m\underset{\vee}{L^i_{nj}} = 0.
\end{aligned}
\tag{12.29$''$}
$$

Tada se tenzor (12.31) svodi na

$$
\begin{aligned}
W(\underset{3}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{3}{R}_{[mn]} \\
&+ \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{3}{R}_{jn} + \underset{3}{R}_{nj})\delta^i_m\, - (N\underset{3}{R}_{jm} + \underset{3}{R}_{mj})\delta^i_n\,].
\end{aligned}
\tag{12.31 $''$}
$$

12.4. $\underset{4}{R}$-projektivno preslikavanje

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{4}{R}$ i $\underset{4}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (v. §10) data je sa

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_j\,(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \delta^i_m\,\underset{2}{\psi}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{1}{\psi}_{jm} \\
&+ \psi_p(\delta^i_n\,\xi^p_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{nj}) + \xi^i_{jm\underset{2}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{1}{|}m} + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} \\
&- \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\psi_n(\underset{\vee}{L^i_{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L^i_{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{mn}(\underset{\vee}{L^i_{pj}} + \xi^i_{pj}),
\end{aligned} \tag{12.32}
$$

gde je označeno

$$
\underset{p}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{p}{|}n} - \psi_m\psi_n, \quad p = 1, 2.
$$

Analognim razmatranjem kao u predhodnim slučajevima uvodimo **$\underset{4}{R}$-projektivno preslikavanje** kao geodezijsko preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ čiji tenzori torzije zadovoljavaju uslove

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\mathcal{D}}_{jm} &= \xi^p_{jm}\psi_p + \frac{1}{N+1}\xi^p_{jm}\xi^q_{qp} - \frac{2}{N^2-1}\big[2\psi_p(\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \xi^p_{mj}) \\
&+ \psi_m(\underset{\vee}{L^p_{pj}} + \xi^p_{pj}) - \psi_j(\underset{\vee}{L^p_{pm}} + \xi^p_{pm}) + \xi^p_{mq}\underset{\vee}{L^q_{pj}} - \xi^p_{jq}\underset{\vee}{L^q_{pm}}\big] \\
&+ \frac{1}{N-1}\big[2\psi_p(\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \xi^p_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L^p_{pj}} + \xi^p_{pj}) \\
&+ 2\xi^p_{mq}(\underset{\vee}{L^q_{pj}} + \xi^q_{pj}) - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm}\big],
\end{aligned} \tag{12.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta^i_j\,\underset{4}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{4}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{4}{\mathcal{D}}_{jm} + 2\delta^i_j\,\underset{\vee}{L^p_{mn}}\psi_p \\
&+ 2\delta^i_m\,\underset{\vee}{L^p_{jn}}\psi_p + (\delta^i_n\,\xi^p_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{nj})\psi_p + \xi^p_{jm}\xi^i_{np} \\
&- \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\psi_n(\underset{\vee}{L^i_{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L^i_{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{mn}(\underset{\vee}{L^i_{pj}} + \xi^i_{pj}) = 0.
\end{aligned} \tag{12.34}
$$

Kao u prethodnom slučaju dobija se

$$
\overline{W}(\underset{4}{R})^i{}_{jmn} = W(\underset{4}{R})^i{}_{jmn} \tag{12.35}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
&W(\underset{4}{R})^i{}_{jmn} = \underset{4}{R}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{4}{R}_{[mn]}\\
&+ \frac{1}{N^2-1}\big[(N\underset{4}{R}_{jn} + \underset{4}{R}_{nj})\delta^i_m - (N\underset{4}{R}_{jm} + \underset{4}{R}_{mj})\delta^i_n\,\big]\\
&+ \frac{2}{N^2-1}\delta^i_j\,(2\underset{\vee 2}{L^p_{mn|p}} - \underset{\vee 1}{L^p_{pm|n}} + \underset{\vee 1}{L^p_{pn|m}} - \underset{\vee 2}{L^p_{mn|p}})\\
&+ \frac{1}{N-1}\delta^i_j\,(\underset{\vee 1}{L^p_{pm|n}} - \underset{\vee 1}{L^p_{pn|m}}) \qquad\qquad (12.36)\\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,(2\underset{\vee 2}{L^p_{jn|p}} - \underset{\vee 1}{L^p_{pj|n}} + \underset{\vee 1}{L^p_{pn|j}}) - \frac{1}{N-1}\delta^i_m\,(\underset{\vee 2}{L^p_{jn|p}} - \underset{\vee 1}{L^p_{pj|n}})\\
&- \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,(2\underset{\vee 2}{L^p_{jm|p}} - \underset{\vee 1}{L^p_{pj|m}} + \underset{\vee 1}{L^p_{pm|j}}) + \frac{1}{N-1}\delta^i_n\,(\underset{\vee 2}{L^p_{jm|p}} - \underset{\vee 1}{L^p_{pj|m}})\\
&- \underset{\vee 2}{L^i_{jm|n}} + \underset{\vee 1}{L^i_{nj|m}}.
\end{aligned}
$$

Za prostor GA_N kažemo da je $\underset{4}{R}$**-projektivno ravan** ako postoji $\underset{4}{R}$-projektivno preslikavanje prostora GA_N na ravan prostor. Dakle prema (12.35) za $\underset{4}{R}$-projektivna preslikavanja važe

Teorema 12.7. *Tenzor* $W(\underset{4}{R})^i{}_{jmn}$ *definisan pomoću* (12.36) *je invarijanta* $\underset{4}{R}$*-projektivnog preslikavanja.*

Teorema 12.8. *Ako je prostor* GA_N $\underset{4}{R}$*-projektivno ravan onda je*

$$W(\underset{4}{R})^i{}_{jmn} \equiv 0.$$

U slučaju preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na $G\overline{R}_N$ [90], [95] uslovi (12.33) i (12.34) se svode na

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\mathcal{D}}_{jm} &= \xi^p_{jm}\psi_p - \frac{2}{N^2-1}\big[2\psi_p(\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \xi^p_{mj}) + \xi^p_{mq}\underset{\vee}{L^q_{pj}} - \xi^p_{jq}\underset{\vee}{L^q_{pm}}\big]\\
&+ \frac{1}{N-1}\big[2\psi_p(\underset{\vee}{L^p_{mj}} + \xi^p_{mj}) + 2\xi^p_{mq}(\underset{\vee}{L^q_{pj}} + \xi^q_{pj}) - \xi^p_{jq}\xi^q_{pm}\big],
\end{aligned}
\tag{12.33 $'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta^i_j\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{3}{\mathcal{D}}_{jm} + 2\delta^i_j\,\underset{\vee}{L^p_{mn}}\psi_p\\
&+ 2\delta^i_m\,\underset{\vee}{L^p_{jn}}\psi_p + (\delta^i_n\,\xi^p_{jm} - \delta^i_m\,\xi^p_{nj})\psi_p + \xi^p_{jm}\xi^i_{np}\\
&- \xi^p_{jn}\xi^i_{pm} + 2\psi_n(\underset{\vee}{L^i_{mj}} + \xi^i_{mj}) + 2\psi_m(\underset{\vee}{L^i_{nj}} + \xi^i_{nj}) + 2\xi^p_{mn}(\underset{\vee}{L^i_{pj}} + \xi^i_{pj}) = 0.
\end{aligned}
\tag{12.34$'$}
$$

a tenzor (12.36) na

$$
\begin{aligned}
(12.36')\qquad W(\underset{4}{R})^{i}{}_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{4}{R}{}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{4}{R}{}_{jn} + \underset{4}{R}{}_{nj})\delta^i_m \\
&- (N\underset{4}{R}{}_{jm} + \underset{4}{R}{}_{mj})\delta^i_n\,] + \frac{2}{N^2-1}\delta^i_j\,(2L^p_{\underset{\vee\ 2}{mn|p}} - L^p_{\underset{\vee\ 2}{mn|p}}) \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\,2L^p_{\underset{\vee\ 2}{jn|p}} - \frac{1}{N-1}\delta^i_m\,L^p_{\underset{\vee\ 2}{jn|p}} - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\,2L^p_{\underset{\vee\ 2}{jm|p}} \\
&+ \frac{1}{N-1}\delta^i_n\,L^p_{\underset{\vee\ 2}{jm|p}} - L^i_{\underset{\vee\ 2}{jm|n}} + L^i_{\underset{\vee\ 1}{nj|m}}.
\end{aligned}
$$

Ako je $\underset{4}{R}$ - preslikavanje još i ekvitorziono onda se uslovi (12.33) i (12.34) svode na

$$
\begin{aligned}
(12.33'')\qquad \underset{4}{\mathcal{D}}{}_{jm} &= -\frac{2}{N^2-1}\big(2\psi_p L^p_{\underset{\vee}{mj}} + \psi_m L^p_{\underset{\vee}{pj}} - \psi_j L^p_{\underset{\vee}{pm}}\big) \\
&+ \frac{1}{N-1}\big(2\psi_p L^p_{\underset{\vee}{mj}} + 2\psi_m L^p_{\underset{\vee}{pj}}\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12.34'')\qquad &\delta^i_j\,\underset{4}{\mathcal{D}}{}_{[mn]} + \delta^i_m\,\underset{4}{\mathcal{D}}{}_{jn} - \delta^i_n\,\underset{4}{\mathcal{D}}{}_{jm} + 2\delta^i_j\,L^p_{\underset{\vee}{mn}}\psi_p \\
&+ 2\delta^i_m\,L^p_{\underset{\vee}{jn}}\psi_p + 2\psi_n L^i_{\underset{\vee}{mj}} + 2\psi_m L^i_{\underset{\vee}{nj}} = 0.
\end{aligned}
$$

Tada se tenzor (12.36) svodi na

$$
\begin{aligned}
(12.36\,'')\qquad W(\underset{4}{R})^{i}{}_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{4}{R}{}_{[mn]} \\
&+ \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{4}{R}{}_{jn} + \underset{4}{R}{}_{nj})\delta^i_m\ - (N\underset{4}{R}{}_{jm} + \underset{4}{R}{}_{mj})\delta^i_n\,].
\end{aligned}
$$

12.5. $\underset{5}{R}$-projektivno preslikavanje

Geodezijsko preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ je $\underset{5}{R}$**-projektivno** ako tenzori torzije ova dva prostora zadovoljavaju uslov

$$
\begin{aligned}
(12.37)\qquad &\frac{2}{N+1}\delta^i_j\,\xi^p_{mn}\xi^q_{pq} + \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,\xi^p_{jn}\xi^q_{pq} - \frac{1}{N+1}\delta^i_n\,\xi^p_{jm}\xi^q_{pq} - \frac{1}{N+1}\delta^i_m\,\xi^p_{jq}\xi^q_{np} \\
&+ \frac{1}{N-1}\delta^i_n\,\xi^p_{jq}\xi^q_{mp} + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{mp} = 0.
\end{aligned}
$$

Tenzori krivine $\underset{5}{R}$ i $\underset{5}{\overline{R}}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ (magistarski) su vezani relacijom

$$
\begin{aligned}
(12.38)\qquad \underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{2}(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{2}{\psi}_{nm} + \underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) + \frac{1}{2}\delta^i_m\,(\underset{1}{\psi}_{jn} + \underset{2}{\psi}_{jn}) \\
&- \frac{1}{2}\delta^i_n\,(\underset{2}{\psi}_{jm} + \underset{1}{\psi}_{jm}) + \frac{1}{2}(\xi^i_{\underset{3}{jm|n}} - \xi^i_{\underset{4}{jn|m}} + \xi^i_{\underset{4}{mj|n}} - \xi^i_{\underset{3}{nj|m}} \\
&+ \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{mp} + \xi^p_{mj}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{pm}),
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$\underset{p}{\psi}_{mn} = \psi_{m\underset{p}{|}n} - \psi_m\psi_n, \quad p = 1, 2.$$

Označimo

$$\underset{12}{\psi}_{mn} = \frac{1}{2}(\underset{1}{\psi}_{mn} + \underset{2}{\psi}_{mn}).$$

Tada (12.38) postaje

$$(12.39) \qquad \begin{aligned} \overline{\underset{5}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + (\underset{12}{\psi}_{mn} - \underset{12}{\psi}) + \delta^i_m \underset{12}{\psi}_{jn} - \delta^i_n \underset{12}{\psi}_{jm} + \frac{1}{2}(\xi^i_{jm\underset{3}{|}n} - \xi^i_{jn\underset{4}{|}m} \\ &+ \xi^i_{mj\underset{4}{|}n} - \xi^i_{nj\underset{3}{|}m} + \xi^p_{jm}\xi^i_{pn} - \xi^p_{jn}\xi^i_{mp} + \xi^p_{mj}\xi^i_{np} - \xi^p_{nj}\xi^i_{pm}), \end{aligned}$$

Eliminacijom $\underset{12}{\psi}_{mn}$ iz (12.39) i korišćenjem (12.37) dobijamo

$$(12.40) \qquad \overline{W}(\underset{5}{R})^i{}_{jmn} = W(\underset{5}{R})^i{}_{jmn}$$

gde smo označili

$$(12.41) \qquad \begin{aligned} W(\underset{5}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{5}{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}[(N\underset{5}{R}_{jn} + \underset{5}{R}_{nj})\delta^i_m \\ &- (N\underset{5}{R}_{jm} + \underset{5}{R}_{mj})\delta^i_n] - \frac{1}{N+1}\delta^i_j (\underset{\vee}{L}{}^p_{mn\underset{3}{|}p} + \underset{\vee}{L}{}^p_{nm\underset{4}{|}p}) \\ &- \frac{1}{2(N+1)}\delta^i_j (\underset{\vee}{L}{}^p_{np\underset{4}{|}m} - \underset{\vee}{L}{}^p_{mp\underset{4}{|}n} + \underset{\vee}{L}{}^p_{pn\underset{3}{|}m} - \underset{\vee}{L}{}^p_{pm\underset{3}{|}n}) \\ &- \frac{1}{2(N+1)}\delta^i_m (\underset{\vee}{L}{}^p_{jn\underset{3}{|}p} + \underset{\vee}{L}{}^p_{nj\underset{4}{|}p}) + \frac{1}{2(N^2-1)}\delta^i_m (\underset{\vee}{L}{}^p_{np\underset{4}{|}j} + \underset{\vee}{L}{}^p_{pn\underset{3}{|}j}) \\ &+ \frac{N}{2(N^2-1)}\delta^i_m (\underset{\vee}{L}{}^p_{jp\underset{4}{|}n} + \underset{\vee}{L}{}^p_{pj\underset{3}{|}n}) + \frac{1}{2(N+1)}\delta^i_n (\underset{\vee}{L}{}^p_{jm\underset{3}{|}p} + \underset{\vee}{L}{}^p_{mj\underset{4}{|}p}) \\ &- \frac{1}{2(N^2-1)}\delta^i_n (\underset{\vee}{L}{}^p_{mp\underset{4}{|}j} + \underset{\vee}{L}{}^p_{pm\underset{3}{|}j}) - \frac{N}{2(N^2-1)}\delta^i_n (\underset{\vee}{L}{}^p_{jp\underset{4}{|}m} + \underset{\vee}{L}{}^p_{pj\underset{3}{|}m}) \\ &- \frac{1}{2}(\underset{\vee}{L}{}^i_{jm\underset{3}{|}n} - \underset{\vee}{L}{}^i_{jn\underset{4}{|}m} + \underset{\vee}{L}{}^i_{mj\underset{4}{|}n} - \underset{\vee}{L}{}^i_{nj\underset{3}{|}m}). \end{aligned}$$

Za prostor GA_N kažemo da je $\underset{5}{R}$**-projektivno ravan** ako postoji $\underset{5}{R}$-projektivno preslikavanje prostora GA_N na ravan prostor. Dakle prema (12.40) za $\underset{5}{R}$-projektivna preslikavanja važe

Teorema 12.9. *Tenzor $W(\underset{5}{R})^i{}_{jmn}$ definisan pomoću* (12.41) *je invarijanta $\underset{5}{R}$-projektivnog preslikavanja.*

Teorema 12.10. *Ako je prostor GA_N $\underset{5}{R}$-projektivno ravan onda je*

$$W(\underset{5}{R})^i{}_{jmn} \equiv 0.$$

U slučaju preslikavanja generalisanog Rimanovog prostora GR_N na $G\overline{R}_N$ [90], [93] uslov (12.37) se svodi na

$$
-\frac{1}{N+1}\delta^i_m\,\xi^p_{jq}\xi^q_{np}+\frac{1}{N-1}\delta^i_n\,\xi^p_{jq}\xi^q_{mp}+\xi^p_{jm}\xi^i_{pn}-\xi^p_{jn}\xi^i_{mp}=0 \tag{12.37$'$}
$$

a tenzor (12.41) na

$$
\begin{aligned}
W(\underset{5}{R})^i{}_{jmn} &= \underset{5}{R}^i{}_{jmn}+\frac{1}{N+1}\delta^i_j\,\underset{5}{R}_{[mn]}+\frac{1}{N^2-1}[(N\underset{5}{R}_{jn}+\underset{5}{R}_{nj})\delta^i_m\\
&-(N\underset{5}{R}_{jm}+\underset{5}{R}_{mj})\delta^i_n\,]-\frac{1}{N+1}\delta^i_j\,(L^p_{mn\underset{\vee 3}{|}p}+L^p_{nm\underset{\vee 4}{|}p})\\
&-\frac{1}{2(N+1)}\delta^i_m\,(L^p_{jn\underset{\vee 3}{|}p}+L^p_{nj\underset{\vee 4}{|}p})+\frac{1}{2(N+1)}\delta^i_n\,(L^p_{jm\underset{\vee 3}{|}p}+L^p_{mj\underset{\vee 4}{|}p})\\
&-\frac{1}{2}(L^i_{jm\underset{\vee 3}{|}n}-L^i_{jn\underset{\vee 4}{|}m}+L^i_{mj\underset{\vee 4}{|}n}-L^i_{nj\underset{\vee 3}{|}m}).
\end{aligned} \tag{12.41$'$}
$$

Očigledno, svako ekvitorziono preslikavanje zadovoljava uslov (12.37), odakle zaključujemo da ako je preslikavanje ekvitorziono, ono je tada i $\underset{5}{R}$-preslikavanje.

U ovom odeljku smo posmatrali još pet specijalnih geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i samim tim dobili još pet generalizacija Vejlovog tenzora

$$
\begin{aligned}
W^i_{jmn} &= R^i{}_{jmn}+\frac{1}{N+1}\delta^i_j\,R_{[mn]}\\
&+\frac{1}{N^2-1}[(NR_{jn}+R_{nj})\delta^i_m\,-(NR_{jm}+R_{mj})\delta^i_n\,]
\end{aligned} \tag{12.42}
$$

U slučaju geodezijskih preslikavanja prostora simetrične afine koneksije uslovi (12.6,10), (12.14,15), (12.28,29), (12.33,34), (12.27), su uvek zadovoljeni, dok se tenzori (12.12), (12.21), (12.31), (12.36), (12.41), redukuju u Vejlov tenzor (12.42). Problematika iz ovog paragrafa obradjena je u radovima S. M. Minčića i M. S. Stankovića [46], [47], [48], [90], [93]-[95].

Glava VI

SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

13. Skoro geodezijska preslikavanja

Neka su dati prostori nesimerične afine koneksije GA_N i $G\overline{A}_N$. Nije teško videti da se preslikavanje prostora GA_N $(N > 2)$ na $G\overline{A}_N$, pri kome svaka skoro geodezijska linija jednog prelazi u skoro geodezijsku liniju drugog degeneriše u geodezijsko, jer je skup geodezijskih linija pdskup skupa skoro geodezijskih linija prostora, pa ćemo stoga razmatrat preslikavanja drugačijeg karaktera.

Obostrano jednoznačno preslikavanje prostora GA_N $(N > 2)$ na $G\overline{A}_N$ nazivamo **skoro geodezijskim preslikavanjem prve (druge) vrste** ako se pri njemu svaka geodezijska linija prostora GA_N preslikava u skoro geodezijsku liniju prve (druge) vrste prostora $G\overline{A}_N$. Pri tom je potrebno pretpostaviti da je $N > 2$.

Neka prostor GA_N dopušta skoro geodezijsko preslikavanje prve (druge) vrste na prostor $G\overline{A}_N$. Prostore GA_N i $G\overline{A}_N$ ćemo posmatrati u zajedničkom po tom preslikavanju sistemu koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$. Stavimo

$$\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x) \tag{13.1}$$

gde su $L^h_{ij}(x)$, $\overline{L}^h_{ij}(x)$ - komponente koneksije prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ $(N > 2)$ u uočenom sistemu koordinata, a $P^h_{ij}(x)$ tenzor deformacije koneksije prostora GA_N tog preslikavanja.

Postavlja se pitanje **koje uslove treba da zadovoljava tenzor deformacije koneksije** pri skoro geodezijskim preslikavanjima prve (druge) vrste.

Neka je u GA_N zadata proizvoljna geodezijska linija l jednačinama (2.8). U tom slučaju (v. §2.2) po definiciji za nju važi

$$\lambda^h_{\underset{1}{}(1)} = \lambda^h_{\underset{1}{|}\alpha}\lambda^\alpha = \rho\lambda^h. \tag{13.2}$$

Jednačine

$$\lambda^h_{\underset{2}{}(1)} = \lambda^h_{\underset{2}{|}\alpha}\lambda^\alpha = \rho\lambda^h \tag{13.2$'$}$$

definišu istu geodezijsku liniju kao i (13.2).

Skoro geodezijska preslikavanja prve vrste obeležavaćemo $\underset{1}{\pi}$ a druge vrste $\underset{2}{\pi}$. Za preslikavanja $\underset{1}{\pi}$ važi

Teorema 13.1. *Obostrano jednoznačno preslikavanje prostora GA_N na prostor $G\overline{A}_N$ je skoro geodezijsko prve vrste ako i samo ako tenzor $P^h_{ij}(x)$ deformacije koneksije zadovoljava uslov*

$$(P^h_{\alpha\beta\underset{1}{|}\gamma} + P^h_{\delta\alpha}P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \underset{1}{b}P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + \underset{1}{a}\lambda^h, \tag{13.3}$$

identički u odnosu na $x^1, x^2, ..., x^N$ i $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$ pri čemu su $\underset{1}{a}$ i $\underset{1}{b}$ neke invarijante.

Takodje za skoro geodezijska preslikavanja druge vrste imamo

Teorema 13.2. *Obostrano jednoznačno preslikavanje prostora GA_N na prostor $G\overline{A}_N$ je skoro geodezijsko druge vrste ako i samo ako tenzor $P^h_{ij}(x)$ deformacije koneksije zadovoljava uslov*

$$(P^h_{\alpha\beta\underset{2}{|}\gamma} + P^h_{\alpha\delta}P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \underset{2}{b}P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + \underset{2}{a}\lambda^h, \tag{13.3 $'$}$$

identički u odnosu na $x^1, x^2, ..., x^N$ i $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$ pri čemu su $\underset{2}{a}$ i $\underset{2}{b}$ neke invarijante.

Specijalno kada je

$$P^h_{ij} = \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \xi^h_{ij},$$

gde je ξ^h_{ij} proizvoljan antisimetričan tenzor, uslovi (13.3,3$'$) su zadovojleni pa **skoro geodezijsko preslikavanje prve (druge) vrste prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ predstavlja uopštenje geodezijskog preslikavanja.** Taj slučaj ćemo ubuduće smatrati **trivijalnim**, tj. razmatraćemo skoro geodezijska preslikavanja prve (druge) vrste koja nisu geodezijska.

Prostor GA_N ćemo zvati **(N-2)-projektivnim**, ako dopušta preslikavanje na ravan prostor $\overline{A}_N$, pri kome svaka geodezijska linija prostora GA_N prelazi u neku krivu prostora $\overline{A}_N$ koja pripada nekoj dvodimenzionalnoj ravni [17], [88], [91]. Sledeća teorema daje karakterizaciju $(N-2)$-projektivnih prostora.

Teorema 13.3. *Prostor GA_N je $(N-2)$-projektivan ako i samo ako dopušta skoro geodezijsko preslikavanje prve (druge) vrste na ravan prostor.*

Napomena. Kako je A_N prostor simetrične afine koneksije, to se skoro geodezijske linije prve i druge vrste poklapaju, pa se samim tim i skoro geodezijska preslikavanja prve i druge vrste svode na isto skoro geodezijsko preslikavanje.

14. Klasifikacija skoro geodezijskih preslikavanja prve i druge vrste

Tenzor deformacije koneksije $P^h_{ij}(x)$ i njegov kovarijantni izvod prve odnosno druge vrste u formulama (13.3,3′) zavise samo od koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$ tačke M prostora GA_N, dok funkcije $\underset{\theta}{a}$ i $\underset{\theta}{b}$ $(\theta = 1, 2)$ zavise još i od komponenata tangentnog pravca $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$. Da bi preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ bilo skoro geodezijsko prve odnosno druge vrste, uslovi (13.3) tj. (13.3′) moraju biti identički zadovoljeni u odnosu na te $2N$ promenljive. Označimo sa $\underset{1}{\pi}$ skoro geodezijsko preslikavanje prve vrste a sa $\underset{2}{\pi}$ skoro geodezijsko preslikavanje druge vrste prostora GA_N na $G\overline{A}_N$.

U daljem izlaganju razmatraće se nekoliko tipova skoro geodezijskih preslikavanja prve odnosno druge vrste u odnosu na karakter zavisnosti funkcija $\underset{\theta}{a}$ i $\underset{\theta}{b}$ $(\theta = 1, 2)$ od $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$.

Kako uslovi (13.3) predstavljaju sistem od N linearnih jednačina u odnosu na $\underset{1}{a}$ i $\underset{1}{b}$ $(h = 1, 2, ..., N)$, to ako izmedju njih ne postoje dve linearno nezavisne, znači da su vektori $P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$ i λ^h kolinearni, i kako je svaki od njih različit od nule sledi da je

$$P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = \psi\lambda^h \tag{14.1}$$

u svakoj tački i za svaki pravac, a ovo očigledno znači (v. §6) da je razmatrano preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ **geodezijsko** koje je kao trivijalno isključeno iz razmatranja. Prema tome ako preslikavanje $\underset{1}{\pi} : GA_N \to G\overline{A}_N$ nije geodezijsko, medju jednačinama (13.3) uvek će se naći dve linearno nezavisne u odnosu na $\underset{1}{a}$ i $\underset{1}{b}$. Iz tih jednačina je očigledno da će $\underset{1}{a}$ i $\underset{1}{b}$ biti racionalne funkcije od tangentnog pravca λ^h, pri čemu je $\underset{1}{a}$ homogena racionalna funkcija drugog stepena a $\underset{1}{b}$ prvog stepena.

14.1. $\underset{1}{\pi}_1$ i $\underset{2}{\pi}_1$ preslikavanja

Prvi tip skoro geodezijskih preslikavanja prve vrste odredjen je uslovom da je u (13.3) funkcija $\underset{1}{b}$ **linearna i homogena** u odnosu na $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$ s koeficijentima koji zavise samo od koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$ tačke M:

$$\underset{1}{b} = \underset{1}{b}_\gamma\lambda^\gamma. \tag{14.2}$$

Skoro geodezijska preslikavanja prvog tipa prve vrste označimo $\underset{1}{\pi}_1$. Za njih važi [91], [92]

Teorema 14.1. *Skoro geodezijsko preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ prve vrste je prvog tipa ako i samo ako tenzor deformacije koneksije zadovoljava*

$$\underset{ijk}{Cikl}\, P^h_{ij\underset{1}{|}k} + \underset{ijk}{Cikl}\, P^h_{\alpha i}P^\alpha_{jk} = \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{1}{b}_i P^h_{jk} + \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{1}{a}_{ij}\delta^h_k \tag{14.3}$$

identički u odnosu na koordinate $x^1, x^2, ..., x^N$, pri čemu je $\underset{1}{b}_i$ kovarijantni vektor a $\underset{1}{a}_{ij}$ dvaput kovarijantni tenzor.

Uslovi (14.3) predstavljaju **osnovne jednačine** skoro geodezijskih preslikavanja prve vrste prvog tipa, koje ćemo označavati $\underset{1}{\pi}_1$.

Analogno ako za funkciju $\underset{2}{b}$ iz (13.3′) predpostavimo da je linearna i homogena u odnosu na $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$ s koeficijentima koji zavise samo od koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$ tačke M, tj.

$$\underset{2}{b} = \underset{2}{b}_\gamma \lambda^\gamma. \tag{14.2 ′}$$

dobijamo

Teorema 14.2. *Skoro geodezijsko preslikavanje prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ druge vrste je prvog tipa ako i samo ako tenzor deformacije koneksije zadovoljava*

$$\underset{ijk}{Cikl}\, P^h_{ij\underset{2}{|}k} + \underset{ijk}{Cikl}\, P^h_{i\alpha}P^\alpha_{jk} = \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{2}{b}_i P^h_{jk} + \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{2}{a}_{ij}\delta^h_k \tag{14.3 ′}$$

identički u odnosu na koordinate $x^1, x^2, ..., x^N$, pri čemu je $\underset{2}{b}_i$ kovarijantni vektor a $\underset{2}{a}_{ij}$ dvaput kovarijantni tenzor.

Uslovi (14.3 ′) predstavljaju **osnovne jednačine** skoro geodezijskih preslikavanja druge vrste prvog tipa koje ćemo označavati $\underset{2}{\pi}_1$.

U slučaju kada je $G\overline{A}_N$ ravan prostor, GA_N će biti (N-2)-projektivan, a jednačine (14.3) i (14.3 ′) predstavljaju **osnovne jednačine teorije skoro geodezijskih preslikavanja** prvog odnosno drugog tipa, koje su predstavljene u invarijantnoj formi u odnosu na izbor koordinatnog sistema. U afinom koordinatnom sistemu $y^1, y^2, ..., y^N$ kada je $G\overline{A}_N$ ravan prostor imamo $L^h_{ij}(y) = 0$ pa važe

Teorema 14.3. *U afinom koordinatnom sistemu osnovne jednačine $(N-2)$-projektivnih prostora prve vrste prvog tipa imaju oblik*

$$\underset{ijk}{Cikl}\, L^h_{ij\underset{1}{|}k}(y) = \underset{ijk}{Cikl}\, L^h_{\alpha i}(y)L^\alpha_{jk}(y) + \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{1}{b}_i(y)L^h_{jk}(y) - \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{1}{a}_{ij}(y)\delta^h_k \tag{14.3 a}$$

pri čemu je $\underset{1}{b}_i(y)$ kovarijantni vektor a $\underset{1}{a}_{ij}(y)$ dvaput kovarijantni tenzor.

Teorema 14.4. *U afinom koordinatnom sistemu osnovne jednačine $(N-2)$-projektivnih prostora druge vrste prvog tipa imaju oblik*

$$\underset{ijk}{Cikl}\, L^h_{ij\underset{2}{|}k}(y) = \underset{ijk}{Cikl}\, L^h_{i\alpha}(y)L^\alpha_{jk}(y) + \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{2}{b}_i(y)L^h_{jk}(y) - \underset{ijk}{Cikl}\, \underset{2}{a}_{ij}(y)\delta^h_k \tag{14.3 a′}$$

pri čemu je $\underset{2}{b}_i(y)$ kovarijantni vektor a $\underset{2}{a}_{ij}(y)$ dvaput kovarijantni tenzor.

Jednačine (14.3a) i (14.3a') za simetričan slučaj date su npr. u [73], [80], [102].

14.2. $\underset{1}{\pi}_2$ i $\underset{2}{\pi}_2$ preslikavanja

Drugi tip skoro geodezijskih preslikavanja prve vrste $\underset{1}{\pi}_2$ odredjen je uslovom za funkciju $\underset{1}{b}$ iz (13.3):

$$\underset{1}{b} = \frac{\underset{1}{b}_{\gamma\delta}\lambda^\gamma\lambda^\delta}{\sigma_\alpha\lambda^\alpha} \tag{14.4}$$

gde je $\sigma_\alpha\lambda^\alpha \neq 0$, a $\underset{1}{b}_{ij}$, σ_i zavise samo od koordinata tačke $M : x^1, x^2, ..., x^N$.

U tom slučaju važe sledeće

Teorema 14.5. *Skoro geodezijsko preslikavanje prve vrste prostora GA_N na prostor $G\overline{A}_N$ je drugog tipa ako i samo ako su zadovoljeni uslovi*

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \sigma_i(x)F^h_j(x) + \sigma_j(x)F^h_i(x) + \xi^h_{ij}(x)\,, \tag{14.5}$$

$$\begin{aligned} F^h_{\underset{1}{i|j}} + F^h_{\underset{1}{j|i}} + F^h_\delta F^\delta_i\sigma_j + F^h_\delta F^\delta_j\sigma_i + \xi^h_{\delta i}F^\delta_j + \xi^h_{\delta j}F^\delta_i \\ = \underset{1}{\mu}_i F^h_j + \underset{1}{\mu}_j F^h_i + \underset{1}{\nu}_i\delta^h_j + \underset{1}{\nu}_j\delta^h_i\,, \end{aligned} \tag{14.6}$$

pri čemu su ψ_i, $\underset{1}{\mu}_i$, $\underset{1}{\nu}_i$ kovarijantni vektori, F^h_i jednom kontra i jednom kovarijantan tenzor i svi oni zavise samo od koordinata tačke.

Teorema 14.6. *Pri skoro geodzijskom preslikavanju prve vrste drugog tipa prostora GA_N na $G\overline{A}_N$, raspodela E_2 skoro geodezijske linije prve vrste prostora $G\overline{A}_N$ u koju prelazi geodezijska linija prostora GA_N, definisana je vektorima λ^h i $F^h_\alpha\lambda^\alpha$.*

Teorema 14.7. *Ako je $F^h_i = F\delta^h_i$, pri čemu je F neka invarijanta skoro geodezijska preslikavanja prve vrste drugog tipa se svode na trivijalna - geodezijska preslikavanja.*

Kako u opštem slučaju tenzor deformacije P^h_{ij} preslikavanja $\underset{1}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$, koji je definisan jednačinom (14.5) uz uslov (14.6), ne mora da zadovoljava uslov (14.3) zaključujemo da je preslikavanje $\underset{1}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$ u opštem slučaju različito od preslikavanja $\underset{1}{\pi}_1 : GA_N \to G\overline{A}_N$. Jednačine (14.5) i (14.6) predstavljaju **osnovne jednačine** skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa prve vrste $\underset{1}{\pi}_2$.

Drugi tip skoro geodezijskih preslikavanja druge vrste $\underset{2}{\pi}_2$ odredjen je uslovom za funkciju $\underset{2}{b}$ iz (13.3′):

$$\underset{2}{b} = \frac{\underset{2}{b}_{\gamma\delta}\lambda^\gamma\lambda^\delta}{\sigma_\alpha\lambda^\alpha} \tag{14.4 ′}$$

gde je $\sigma_\alpha\lambda^\alpha \neq 0$, a $\underset{2}{b}_{ij}$, σ_i zavise samo od koordinata tačke $M: x^1, x^2, ..., x^N$. I u ovom slučaju tenzor deformacije koneksije ima oblik (14.5). Medjutim umesto uslova (14.6) za preslikavanja $\underset{2}{\pi}_2$ dobijamo

$$\begin{aligned} F^h_{\underset{2}{i|j}} + F^h_{\underset{2}{j|i}} + F^h_\delta F^\delta_i \sigma_j + F^h_\delta F^\delta_j \sigma_i + \xi^h_{i\delta}F^\delta_j + \xi^h_{j\delta}F^\delta_i \\ = \underset{2}{\mu}_i F^h_j + \underset{2}{\mu}_j F^h_i + \underset{2}{\nu}_i \delta^h_j + \underset{2}{\nu}_j \delta^h_i \,, \end{aligned} \tag{14.6 ′}$$

pri čemu su $\underset{2}{\mu}_i$, $\underset{2}{\nu}_i$ kovarijantni vektori koji zavise samo od koordinata tačke.

Uslovi (14.5) i (14.6 ′) predstavljaju **osnovne jednačine** skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa druge vrste.

14.3. $\underset{1}{\pi}_3$ i $\underset{2}{\pi}_3$ preslikavanja

Skoro gedezijsko preslikavanje prve vrste prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ je **trećeg tipa** ako je funkcija $\underset{1}{b}(x;\lambda)$ iz (13.3) oblika

$$\underset{1}{b} = \frac{\underset{1}{b}_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma}{\sigma_{\varepsilon\delta}\lambda^\varepsilon\lambda^\delta}, \tag{14.7}$$

pri čemu je $\sigma_{\varepsilon\delta}\lambda^\varepsilon\lambda^\delta \neq 0$.

U tom slučaju za tenzor deformacije koneksije imamo sledeće [90]

Teorema 14.8. *Skoro geodezijsko preslikavanje prve vrste prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ je trećeg tipa ako je*

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \sigma_{ij}(x)\varphi^h(x) + \xi^h_{ij}(x)\,, \tag{14.8}$$

$$\varphi^h_{\underset{1}{|m}} + \xi^h_{\varepsilon m}\varphi^\varepsilon = \underset{1}{\nu}_m\varphi^h + \underset{1}{\mu}\delta^h_m\,. \tag{14.9}$$

Ovde je ψ_i kovarijantni vektor, σ_{ij} simetričan kovarijantni tenzor, ξ^h_{ij} antisimetrični tenzor tipa $\binom{1}{2}$, $\underset{1}{\nu}_m$ kovarijantni vektor a $\underset{1}{\mu}$ -invarijanta.

Teorema 14.9. *Ako važi*

$$\xi^h_{\varepsilon\alpha}\varphi^\varepsilon\lambda^\alpha \equiv 0$$

onda preslikavanjem $\underset{1}{\pi}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$ *svaka geodezijska linija* l *prostora* GA_N *prelazi u neku skoro geodezijsku liniju prve vrste prostora* $G\overline{A}_N$*, čije je polje 1-komplanarnih ravni definisano tangentnim vektorom* λ^h *i vektorom* φ^h *i ne zavisi od* $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^N$.

Preslikavanje $\underset{1}{\pi}_3$ u opštem slučaju je različito kako od $\underset{1}{\pi}_1$ tako i od $\underset{1}{\pi}_2$. Skoro gedezijsko preslikavanje druge vrste prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ je **trećeg tipa** ako je funkcija $\underset{2}{b}(x;\,\lambda)$ iz (13.3 ′) oblika

$$\underset{2}{b} = \frac{\underset{2}{b}_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma}{\sigma_{\varepsilon\delta}\lambda^\varepsilon\lambda^\delta}, \tag{14.7 ′}$$

pri čemu je $\sigma_{\varepsilon\delta}\lambda^\varepsilon\lambda^\delta \neq 0$. Preslikavanja trećeg tipa druge vrste označavamo $\underset{2}{\pi}_3$. Tenzor deformacije koneksije i u ovom slučaju ima oblik (14.8). Iz (13.3) i (14.8) kao za slučaj preslikavanja $\underset{1}{\pi}_3$ dobija se

$$\varphi^h{}_{\underset{2}{|}m} + \xi^h_{m\varepsilon}\varphi^\varepsilon = \underset{2}{\nu}_m\varphi^h + \underset{2}{\mu}\delta^h_m\,. \tag{14.9 ′}$$

Ovde je $\underset{2}{\nu}_m$ -kovarijantni vektor, $\underset{2}{\mu}$ -invarijanta a ξ^h_{ij} antisimetričan tenzor i svi oni zavise samo od koordinata tačke.

Prema tome dokazane su

Teorema 14.10. *Postoje tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja prve vrste prostora nesimetrične afine koneksije* $\underset{1}{\pi}_1$, $\underset{1}{\pi}_2$, $\underset{1}{\pi}_3$*; koja se karakterišu osnovnim jednačinama* (14.3)*;* (14.5) *i* (14.6)*;* (14.8) *i* (14.9) *respektivno.*

Teorema 14.11. *Postoje tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja druge vrste prostora nesimetrične afine koneksije* $\underset{2}{\pi}_1$, $\underset{2}{\pi}_2$, $\underset{2}{\pi}_3$*; koja se karakterišu osnovnim jednačinama* (14.3′)*;* (14.5) *i* (14.6′)*;* (14.8) *i* (14.9′) *respektivno.*

Teoreme (14.9) i (14.10) predstavljaju uopštenje odgovarajuće teoreme za prostore simetrične afine koneksije i Rimanove prostore [81], [83]:

Teorema 14.11. *Postoje tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja prostora simetrične afine koneksije, pri čemu se prvi tip* π_1 *karakteriše osnovnom jednačinom*

$$\underset{ijk}{Cikl}\, P^h_{ij;k} + \underset{ijk}{Cikl}\, P^h_{\alpha i}P^\alpha_{jk} = \underset{ijk}{Cikl}\, b_iP^h_{jk} + \underset{ijk}{Cikl}\, a_{ij}\delta^h_k \tag{14.3 ″}$$

drigi tip π_2 *jednačinama*

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \sigma_i(x)F^h_j(x) + \sigma_j(x)F^h_i(x) \tag{14.5 ″}$$

i

$$F^h_{i;j} + F^h_{j;i} + F^h_\delta F^\delta_i\sigma_j + F^h_\delta F^\delta_j\sigma_i = \mu_iF^h_j + \mu_jF^h_i + \nu_i\delta^h_j + \nu_j\delta^h_i\,, \tag{14.6 ″}$$

a treći tip π_3 *jednačinama*

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \sigma_{ij}(x)\varphi^h(x) \tag{14.8 $''$}$$

i

$$\varphi^h{}_{;m} = \nu_m \varphi^h + \mu \delta^h_m \,. \tag{14.9 $''$}$$

U slučaju prostora simetrične afine koneksije [4] za $N > 5$ ne postoji još neki tip skoro geodezijskih preslikavanja. Ako je koneksija nesimetrična dokaz takvog tvrdjenja je potpuno isti. Znači za $N > 5$, postoje samo tri tipa prve vrste i tri tipa druge vrste skoro geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije.

15. Uslovi uzajamnosti skoro geodezijskih preslikavanja prvog tipa. (N-2)-projektivni prostori

15.1. Uslovi uzajamnosti $\underset{1}{\pi}_1$ i $\underset{2}{\pi}_1$ preslikavanja

Za preslikavanje $\underset{1}{\pi}_1 : GA_N \to G\overline{A}_N$ kažemo da ima **osobinu uzajamnosti** ako je i njegovo inverzno preslikavanje tipa $\underset{1}{\pi}_1$. U ovom odeljku ćemo dati uslove pod kojima preslikavanje $\underset{1}{\pi}_1$ ima osobinu uzajamnosti [91], [92].

Teorema 15.1. *Potreban i dovoljan uslov da skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{1}{\pi}_1$ *prostora* GA_N *na* $G\overline{A}_N$ *ima osobinu uzajamnosti izražavaju relacije*

$$\underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{\alpha j} P^\alpha_{nm} + \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{j\alpha} P^\alpha_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{\alpha j} P^\alpha_{mn} = \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{d}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{c}_{jm} \delta^i_n \,, \tag{15.1}$$

gde je

$$\underset{1}{d}_j = \underset{1}{b}_j - \underset{1}{\overline{b}}_j, \qquad \underset{1}{c}_{jm} = \underset{1}{a}_{jm} - \underset{1}{\overline{a}}_{jm}.$$

Teorema 15.2. *Ako skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{1}{\pi}_1$ *prostora* GA_N *na* $G\overline{A}_N$ *raspolaže osobinom uzajamnosti, tada osnovne jednačine tog preslikavanja imaju oblik*

$$\underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{jm\underset{1}{|}n} = \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{\alpha j} P^\alpha_{nm} + \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{j\alpha} P^\alpha_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{\overline{\overline{b}}}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{\overline{\overline{a}}}_{jm} \delta^i_n \,, \tag{15.2}$$

gde je

$$\underset{1}{\overline{\overline{b}}}_j = \underset{1}{b}_j - \underset{1}{d}_j, \qquad \underset{1}{\overline{\overline{a}}}_{jm} = \underset{1}{a}_{jm} - \underset{1}{c}_{jm}.$$

Skoro geodezijsko preslikavanje $\underset{2}{\pi}_1 : GA_N \to G\overline{A}_N$ ima **osobinu uzajamnosti** ako je i njegovo inverzno preslikavanje tipa $\underset{2}{\pi}_1$. Kao i u prethodnom slučaju, za preslikavanja $\underset{2}{\pi}_1$ važe sledeće

Teorema 15.3. *Potreban i dovoljan uslov da skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{2}{\pi}_1$ *prostora* GA_N *na* $G\overline{A}_N$ *ima osobinu uzajamnosti izražavaju relacije*

$$\underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{\alpha m}P^\alpha_{nj} + \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{j\alpha}P^\alpha_{nm} + \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{j\alpha}P^\alpha_{mn} = \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{2}{d}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{2}{c}_{jm}\delta^i_n\,, \tag{15.1'}$$

gde je označeno

$$\underset{2}{d}_j = \underset{2}{b}_j - \underset{2}{\overline{b}}_j, \qquad \underset{2}{c}_{jm} = \underset{2}{a}_{jm} - \underset{2}{\overline{a}}_{jm}.$$

Teorema 15.4. *Ako skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{2}{\pi}_1$ *prostora* GA_N *na* $G\overline{A}_N$ *raspolaže osobinom uzajamnosti, tada osnovne jednačine tog preslikavanja imaju oblik*

$$\underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{jm\underset{2}{|}n} = \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{j\alpha}P^\alpha_{nm} + \underset{jmn}{Cikl}\, P^i_{\alpha m}P^\alpha_{nj} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{2}{\overline{\overline{b}}}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{2}{\overline{\overline{a}}}_{jm}\delta^i_n\,, \tag{15.2'}$$

gde je

$$\underset{2}{\overline{\overline{b}}}_j = \underset{2}{b}_j - \underset{2}{d}_j, \qquad \underset{2}{\overline{\overline{a}}}_{jm} = \underset{2}{a}_{jm} - \underset{2}{c}_{jm}.$$

15.2. (N-2)-projektivni prostori prvog tipa

Tenzori krivine $\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn}$ i $\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ povezani su relacijom (v. §10.)

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} - P^i_{jn\underset{1}{|}m} + P^i_{\alpha n}P^\alpha_{jm} - P^i_{\alpha m}P^\alpha_{jn} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{j\alpha}. \tag{15.3}$$

Prema (14.3) i jednačinama dobijenim simetrizacijom po indeksima j, m iz prethodne relacije, dobijamo

$$\begin{aligned} &\underset{1}{R}{}^i{}_{(jm)n} + P^i_{(jm)\underset{1}{|}n} + P^i_{\alpha n}P^\alpha_{(jm)} + P^i_{\alpha n}P^\alpha_{jm} \\ &\quad + P^i_{[nj]\underset{1}{|}m} + P^i_{\alpha m}P^\alpha_{[nj]} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{j\alpha} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}P^i_{m\alpha} \\ &\quad = \underset{1}{\overline{R}}{}^i_{(jm)n} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{b}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\, \underset{1}{a}_{jm}\delta^i_n\,. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Ako je prostor GA_N $(N-2)$-projektivan prvog tipa, tj. $G\overline{A}_N$ je ravan imamo

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} \equiv 0 \tag{15.5}$$

pa jednačina (15.4) postaje

$$
\begin{aligned}
&P^i_{(jm)\underset{1}{|}n} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} + P^i_{\alpha n}P^\alpha_{(jm)} + P^i_{\alpha j}P^\alpha_{mn}\\
&+ P^i_{[nj]\underset{1}{|}m} + P^i_{\alpha m}P^\alpha_{[nj]} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{j\alpha} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}P^i_{m\alpha}\\
&= -\underset{1}{R}{}^i{}_{(jm)n} + \underset{jmn}{Cikl}\,\underset{1}{b}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\,\underset{1}{a}_{jm}\delta^i_n\,.
\end{aligned}
\tag{15.6}
$$

Jednačine (15.6) imaju tenzorski pa prema tome i invarijantni karakter u odnosu na izbor koordinatnog sistema u GA_N i predstavljaju karakterizaciju $(N-2)$-projektivnih prostora prvog tipa. Dakle važi sledeća

Teorema 15.5. *Prostor GA_N je $(N-2)$-projektivan prvog tipa, u odnosu na tenzor $\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ ako postoji tenzor P^i_{jk} tipa $\binom{1}{2}$ koji zadovoljava uslove* (15.6) *za neki tenzor $\underset{1}{a}_{ij}$ tipa $\binom{0}{2}$ i kovarijantni vektor $\underset{1}{b}_i$.*

Za tenzore krivine $\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn}$ i $\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ važi (v. §10)

$$
\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{mj} - P^i_{m\alpha}P^\alpha_{nj} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nm}}P^i_{\alpha j}.
\tag{15.7}
$$

Simetrizacijom u (15.7) po indeksima j i m i korišćenjem (14.3), dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\underset{2}{R}{}^i{}_{(jm)n} + P^i_{(mj)\underset{2}{|}n} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{(mj)} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{jm}\\
&+ P^i_{[mn]\underset{1}{|}j} + P^i_{j\alpha}P^\alpha_{[mn]} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nm}}P^i_{\alpha j} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nj}}P^i_{\alpha m}\\
&= \underset{2}{\overline{R}}{}^i_{(jm)n} + \underset{jmn}{Cikl}\,\underset{2}{b}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\,\underset{2}{a}_{jm}\delta^i_n\,.
\end{aligned}
\tag{15.8}
$$

Kako je

$$
\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} \equiv 0
$$

iz (15.8) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&P^i_{(mj)\underset{2}{|}n} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{(mj)} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{jm}\\
&+ P^i_{[mn]\underset{1}{|}j} + P^i_{j\alpha}P^\alpha_{[mn]} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nm}}P^i_{\alpha j} + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nj}}P^i_{\alpha m}\\
&= -\underset{2}{R}{}^i{}_{(jm)n} + \underset{jmn}{Cikl}\,\underset{2}{b}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{Cikl}\,\underset{2}{a}_{jm}\delta^i_n\,.
\end{aligned}
\tag{15.9}
$$

Prema tome dokazana je sledeća

Teorema 15.6. *Prostor GA_N je $(N-2)$-projektivan prvog tipa u odnosu na $\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ ako postoji tenzor P^h_{ij} koji zadovoljava jednačinu* (15.9)*, gde je $\underset{1}{a}_{ij}$ tenzor a $\underset{1}{b}_i$ vektor.*

Za tenzore krivine treće vrste $\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn}$ i $\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ zadovoljena je relacija

$$\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{jm} - P^i_{\alpha m}P^\alpha_{nj} + 2P^\alpha_{nm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + P^\alpha_{nm}P^i_{[\alpha j]}. \tag{15.10}$$

kako je kod ravnog prostora

$$\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} \equiv 0$$

analogno prethodnim slučajevima dobijamo

Teorema 15.7. *Prostor GA_N je $(N-2)$-projektivan prvog tipa u odnosu na tenzor $\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ ako postoji tenzor P^h_{ij} koji zadovoljava jednačinu*

$$\begin{aligned}
&P^i_{(jm)\underset{2}{|}n} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} + P^i_{[mn]\underset{1}{|}j} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{(jm)} + P^i_{\alpha n}P^\alpha_{jm}\\
&+ P^i_{\alpha j}P^\alpha_{[mn]} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}P^\alpha_{nm} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m}P^\alpha_{nj} + P^\alpha_{nm}P^i_{[\alpha j]} + P^\alpha_{nj}P^i_{[\alpha m]}\\
&= -\underset{3}{R}{}^i{}_{(jm)n} + \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{1}{b}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{1}{a}_{jm}\delta^i_n
\end{aligned} \tag{15.11}$$

pri čemu je $\underset{1}{a}_{ij}$ tenzor a $\underset{1}{b}_i$ vektor.

Za tenzore krivine $\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn}$ i $\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn}$ prostora GA_N i $G\overline{A}_N$ važi

$$\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{jm} - P^i_{\alpha m}P^\alpha_{nj} + 2P^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j} + 2P^\alpha_{mn}P^i_{[\alpha j]}. \tag{15.12}$$

Korišćenjem

$$\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} \equiv 0$$

kao u prethodnim slčajevima dobijamo

Teorema 15.8. *Prostor GA_N je $(N-2)$-projektivan prvog tipa ako postoji tenzor P^h_{ij} koji zadovoljava jednačinu*

$$\begin{aligned}
&P^i_{(jm)\underset{2}{|}n} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} + P^i_{[mn]\underset{1}{|}j} + P^i_{n\alpha}P^\alpha_{(jm)} + P^i_{\alpha n}P^\alpha_{jm}\\
&+ P^i_{\alpha j}P^\alpha_{[mn]} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}P^\alpha_{mn} + 2\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m}P^\alpha_{jn} + P^\alpha_{mn}P^i_{[\alpha j]} + P^\alpha_{jn}P^i_{[\alpha m]}\\
&= -\underset{4}{R}{}^i{}_{(jm)n} + \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{1}{b}_j P^i_{mn} + \underset{jmn}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{1}{a}_{jm}\delta^i_n
\end{aligned} \tag{15.13}$$

pri čemu je $\underset{1}{a}_{ij}$ tenzor a $\underset{1}{b}_i$ vektor.

U slučaju kada se radi o prostoru A_N simetrične afine koneksije Relacije (15.6,9,11 i 13) se redukuju u [83]

$$3(P^h_{ij;k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}) = -R^i{}_{(jm)n} + \underset{ijk}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{1}{b}_i P^h_{jk} + \underset{ijk}{\mathrm{Cikl}}\,\underset{1}{a}_{ij}\delta^h_k$$

gde je $R^i{}_{jmn}$ tenzor krivine prostora A_N.

16. Preslikavanja $\underset{1}{\pi}2$ i $\underset{2}{\pi}2$.

16.1. Uslovi uzajamnosti preslikavanja $\underset{1}{\pi}2$ i $\underset{2}{\pi}2$.

Skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa prve vrste $\underset{1}{\pi}2$ prostora nesimetrične afine koneksije, geometrijski se karakterišu time da svaka geodezijska linija s poljem tangentnih vektora λ^h prelazi u skoro geodezijsku liniju, za koju je dvodimenzionalna ravan E_2 u svakoj tački razapeta vektorima λ^h i $F^h_\alpha \lambda^\alpha$. Osnovne jednačine koje karakterišu preslikavanja $\underset{1}{\pi}2$ dobijene su u obliku (14.5) i (14.6).

Za preslikavanje $\underset{1}{\pi}2$ kažemo da ima **osobinu uzajamnosti**, ako je i njegovo inverzno preslikavanje tipa $\underset{1}{\pi}2$ i odgovara istom afinoru F^h_i.

U radovima [91], [92] je dokazana sledeća teorema

Teorema 16.1. *Skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{1}{\pi}2$ *prostora* GA_N *na* $G\overline{A}_N$ *ima osobinu uzajamnosti ako i samo ako strukturni afinor zadovoljava relaciju*

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = p\delta^h_i + qF^h_i, \tag{16.1}$$

gde su p *i* q *neke invarijante.*

Kako su jednačine (14.5) i (14.6) invarijantne u odnosu na preslikavanja afinora oblika

$$\widetilde{F}^h_i = rF^h_i + s\delta^h_i \qquad (r \neq 0) \tag{16.2}$$

to uslove (16.1) možemo zapisati u obliku. Zbog (16.2) važiće

$$\widetilde{F}^h_\alpha \widetilde{F}^\alpha_i = \widetilde{p}\delta^h_i + \widetilde{q}\widetilde{F}^h_i, \tag{16.3}$$

pri čemu je

$$\widetilde{p} = r^2 p - s^2 - srq, \qquad \widetilde{q} = 2s + rq.$$

Invarijante r i s možemo izabrati tako da je

$$\widetilde{q} \equiv 0, \qquad \widetilde{p} = \widetilde{e}\ (= \pm 1, 0).$$

U tom slučaju umesto (16.1) imaćemo

$$\widetilde{F}^h_\alpha \widetilde{F}^\alpha_i = \widetilde{e}\delta^h_i\,. \tag{16.4}$$

Dakle ne narušavajući opštost za uslov uzajamnosti preslikavanja $\underset{1}{\pi}2$ prostora GA_N na $G\overline{A}_N$ možemo uzeti

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i\,, \qquad (e = \pm 1, 0) \tag{16.5}$$

Korišćenjem (16.5) uprošćavaju se i uslovi (14.6):

$$F^h_{\underset{1}{(i|j)}} + \xi^h_{\alpha(i} F^\alpha_{j)} = \underset{1}{\mu}_{(i} F^h_{j)} + \underset{1}{\overline{\nu}}_{(i} \delta^h_{j)}. \tag{16.6}$$

Prema tome važi

Teorema 16.2. *Skoro geodezijska preslikavanja* $\underset{1}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$ *koja zadovoljavaju uslov uzajamnosti karakterišu se osnovnim jednačinama* (14.5), (16.5) *i* (16.6).

Takva preslikavanja označavaćemo

$$\underset{1}{\pi}_2(e) : GA_N \to G\overline{A}_N.$$

Slučaj preslikavanja $\underset{2}{\pi}_2$ razmatra se potpuno analogno. U tom slučaju za strukturni afinor F^h_i važi relacija oblika (16.5), čijim se korišćenjem uslovi (14.6′) uprošćavaju i postaju

$$F^h_{\underset{2}{(i|j)}} - \xi^h_{\alpha(i} F^\alpha_{j)} = \underset{2}{\mu}_{(i} F^h_{j)} + \underset{2}{\overline{\nu}}_{(i} \delta^h_{j)}. \tag{16.6 $'$}$$

U tom slučaju, zaključujemo da važi sledeća

Teorema 16.3. *Skoro geodezijska preslikavanja* $\underset{2}{\pi}_2 : GA_N \to G\overline{A}_N$ *koja zadovoljavaju uslov uzajamnosti karakterišu se osnovnim jednačinama* (14.5), (16.5) *i* (16.6′).

Takva preslikavanja označavaćemo

$$\underset{2}{\pi}_2(e) : GA_N \to G\overline{A}_N.$$

16.2. Invarijantni geometrijski objekti kanoničkog skoro geodezijskog preslikavanja

Preslikavanje $\underset{1}{\pi}_2(e) : GA_N \to G\widetilde{A}_N$ zovemo **kanoničkim** [92] ako u zajedničkom po preslikavanju koordinatnom sistemu medju objektima koneksije L^h_{ij} i $\widetilde{L}^h_{ij}$ tih prostora važi zavisnost

$$\widetilde{L}^h_{ij} = L^h_{ij} + \sigma_i F^h_j + \sigma_j F^h_i + \xi^h_{ij}, \tag{16.7}$$

qde je ξ^h_{ij} antisimetričan tenzor.

U [91], [92] su dokazane sledeće teoreme

Teorema 16.4. *Svako preslikavanje* $\underset{1}{\pi}_2$ *je ili kanoničko ili je predstavljeno u obliku proizvoda (kompozicije) geodezijskog i kanoničkog preslikavanja.*

Teorema 16.5. *Geometrijski objekti prostora* GA_N *definisani formulom*

$$\underset{1}{T}{}^h_{ij} = L^h_{\underline{ij}} + \frac{1}{e-F^2}\big[(FL^\alpha_{\underline{\alpha j}} - F^\alpha_j L^\beta_{\underline{\beta\alpha}})F^h_i + (FL^\alpha_{\underline{\alpha i}} - F^\alpha_i L^\beta_{\underline{\beta\alpha}})F^h_j\big], \tag{16.8}$$

uz uslov $e - F^2 \neq 0$ *su invarijantni u odnosu na kanonička preslikavanja* $\underset{1}{\pi}_2(e)$, $(e \neq 0)$, *koja odgovaraju afinornoj strukturi* F^h_i.

Teorema 16.6. *Geometrijski objekti prostora* GA_N *definisani formulama*

$$\begin{aligned}\underset{2}{\widehat{T}}{}^h_{ij} &= T^h_{ij} + eF^h_\alpha\big(F^\alpha_{\underset{1}{i|j}} - \underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}\big)\\ &- \frac{e}{N+1}F^\beta_\alpha\big[\big(F^\alpha_{\underset{1}{\beta|j}} - \underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\gamma(\beta}F^\gamma_{i)}\big)\delta^h_j + \big(F^\alpha_{\underset{1}{\beta|i}} - \underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\gamma(\beta}F^\gamma_{j)}\big)\delta^h_i\big],\end{aligned} \tag{16.9}$$

su invarijantni u odnosu na kanonička preslikavanja $\underset{1}{\pi}_2(e)$, $(e \neq 0)$, *koja odgovaraju afinornoj strukturi* F^h_i.

Dokaz. Prema (16.7) i (16.5) dobijamo

$$F^h_{\underset{1}{i\wr j}} = F^h_{\underset{1}{i|j}} + \tilde{\sigma}_i F^h_j - e\sigma_i\delta^h_j + \xi^h_{\alpha j}F^\alpha_i - \xi^\alpha_{ij}F^h_\alpha, \tag{16.10}$$

gde $\underset{1}{\wr}$ označava kovarijantno diferenciranje prve vrste u $G\widetilde{A}_N$. Odavde je

$$F^h_\alpha\big(F^\alpha_{\underset{1}{i\wr j}} - F^\alpha_{\underset{1}{i|j}}\big) = e(\tilde{\sigma}_i\delta^h_j - \sigma_i F^h_j) + \xi^\alpha_{\beta j}F^\beta_i F^h_\alpha - e\xi^h_{ij}, \tag{16.11}$$

pa imamo

$$\sigma_i F^h_j + \sigma_j F^h_i = eF^h_\alpha\big(F^\alpha_{\underset{1}{(i|j)}} - F^\alpha_{\underset{1}{(i\wr j)}}\big) + \tilde{\sigma}_{(i}\delta^h_{j)} + e\xi^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha, \tag{16.12}$$

gde (ij) označava simetrizaciju bez deljenja. Zamenom (16.12) u (16.7) dobijamo

$$\begin{aligned}&\tilde{L}^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{\underset{1}{(i\wr j)}} - e\underset{\vee}{\tilde{L}}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha\\ &\quad = L^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{\underset{1}{(i|j)}} - e\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha + \tilde{\sigma}_{(i}\delta^h_{j)}\,.\end{aligned} \tag{16.13}$$

stavimo u (16.13):

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{L}}{}^h_{ij} &= \tilde{L}^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{\underset{1}{(i\wr j)}} - e\underset{\vee}{\tilde{L}}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha,\\ \hat{L}^h_{ij} &= L^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{\underset{1}{(i|j)}} - e\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha.\end{aligned} \tag{16.14}$$

Tada je

$$\tilde{\hat{L}}^h_{ij} = \hat{L}^h_{ij} + \tilde{\sigma}_{(i}\delta^h_{j)}\,. \tag{16.15}$$

Zaključujemo da veličine $\tilde{\hat{L}}^h_{ij}$ i $\hat{L}^h_{ij}$ predstavljaju objekte koneksije prostora $\widetilde{A}_N$ i $\widehat{A}_N$ bez torzije, jer se razlikuju od $\tilde{L}^h_{\underline{ij}}$ i $L^h_{\underline{ij}}$ za tenzorski sabirak, pa se transformišu po istom zakonu. Iz uslova (16.15) zaključujemo da se prostor $\widehat{A}_N$ geodezijski preslikava na prostor $\widetilde{A}_N$, pa se projektivni parametri tih prostora poklapaju, tj.

$$\underset{2}{\widetilde{T}}{}^h_{ij}(x) = \underset{2}{\widehat{T}}{}^h_{ij}(x).$$

Oni odredjuju geometrijske objekte prostora GA_N i $G\overline{A}_N$, koji su invarijantni u odnosu na kanonička skoro geodezijska preslikavanja. Prema (9.4) sledi da veličine $\underset{2}{\widehat{T}}{}^h_{ij}$ imaju oblik (16.9), pri čemu su su T^h_{ij} objekti projektivne koneksije. ■

Iz (16.15) sledi da se prostor simetrične afine koneksije $\widehat{A}_N$ geodezijski preslikava na prostor $\widetilde{A}_N$, pa je Vejlov tenzor invarijanta takvog preslikavanja, tj. važi

$$\underset{2}{\widetilde{\widehat{W}}}{}^i{}_{jmn}(x) = \underset{2}{\widehat{W}}{}^i{}_{jmn}(x)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\underset{2}{\widehat{W}}{}^i{}_{jmn} = \widehat{R}^i{}_{jmn} + \frac{1}{1+N}\delta^i_j\,\widehat{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\big[&(N\widehat{R}_{jn} + \widehat{R}_{nj})\\ &-(N\widehat{R}_{jm} + \widehat{R}_{mj})\big],\end{aligned} \tag{16.16}$$

a $\widehat{R}^i{}_{jmn}$ je Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora simetrične afine koneksije $\widehat{A}_N$ dok je $\widehat{R}_{jm}$ odgovarajući Ričijev tenzor i oni se uz pomoć relacije (16.16) mogu izraziti preko unutrašnjih geometrijskih objekata prostora GA_N, strukturnog afinora F^h_i i njegovih kovarijantnih izvoda. Na taj način je dokazana

Teorema 16.7. *Geometrijski objekti* (16.16) *su invarijante u odnosu na kanonička skoro geodezijska preslikavanja* $\underset{1}{\pi}_2(e)$, $(e \neq 0)$ *koja odgovaraju afinornoj strukturi* F^h_i.

Analogno, preslikavanje $\underset{2}{\pi}_2(e) : GA_N \to G\widetilde{A}_N$ zovemo **kanoničkim** ako u zajedničkom po preslikavanju koordinatnom sistemu medju objektima koneksije L^h_{ij} i $\widetilde{L}^h_{ij}$ tih prostora važi zavisnost (16.7).

Za kanonička $\underset{2}{\pi}_2(e)$ preslikavanja važe sledeće teoreme

Teorema 16.7. *Svako preslikavanje* $\underset{2}{\pi}_2$ *je ili kanoničko ili je predstavljeno u obliku proizvoda (kompozicije) geodezijskog i kanoničkog preslikavanja.*

Teorema 16.8. *Geometrijski objekti prostora* GA_N *definisani formulom* (16.8) *uz uslov* $e - F^2 \neq 0$ *su invarijantni u odnosu na kanonička preslikavanja* $\underset{2}{\pi}2(e)$ $(e \neq 0)$, *koja odgovaraju afinornoj strukturi* F^h_i.

Teorema 16.9. *Geometrijski objekti prostora* GA_N *definisani formulama*

$$\begin{aligned}\widehat{\underset{2}{T}}{}^h_{ij} &= T^h_{ij} + eF^h_\alpha(F^\alpha_{i\underset{2}{|}j} + \underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}) \\ &- \frac{e}{N+1}F^\beta_\alpha\big[F^\alpha_{\beta\underset{2}{|}j} + \underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\gamma(\beta}F^\gamma_{i)})\delta^h_j + (F^\alpha_{\beta\underset{2}{|}i} + \underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\gamma(\beta}F^\gamma_{j)})\delta^h_i\big],\end{aligned} \tag{16.17}$$

su invarijantni u odnosu na kanonička preslikavanja $\underset{2}{\pi}2$, $e \neq 0$, *koja odgovaraju afinornoj strukturi* F^h_i.

Za kannoničko $\underset{2}{\pi}2(e)$ dobijamo da važi relacija

$$\begin{aligned}&\tilde{L}^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{(i\underset{2}{\wr}j)} + e\underset{\vee}{\tilde{L}}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha \\ &\quad = L^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{(i\underset{2}{|}j)} + e\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha + \tilde{\sigma}_{(i}\delta^h_{j)}\,.\end{aligned} \tag{16.18}$$

pri čemu $\underset{2}{\wr}$ i $\underset{2}{|}$ označavaju kovarijantno diferenciranje druge vrste redom prostora $G\widetilde{A}_N$ i GA_N.

Stavimo u (16.18):

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{L}}{}^h_{ij} &= \tilde{L}^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{(i\underset{2}{\wr}j)} + e\underset{\vee}{\tilde{L}}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha, \\ \widehat{L}^h_{ij} &= L^h_{\underline{ij}} + eF^h_\alpha F^\alpha_{(i\underset{2}{|}j)} + e\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\beta(j}F^\beta_{i)}F^h_\alpha.\end{aligned} \tag{16.19}$$

Tada je

$$\widehat{\widehat{L}}{}^h_{ij} = \widehat{\widehat{L}}{}^h_{ij} + \tilde{\sigma}_{(i}\delta^h_{j)}\,. \tag{16.20}$$

Zaključujemo da veličine $\widehat{\widehat{L}}{}^h_{ij}$ i $\widehat{L}^h_{ij}$ predstavlaju objekte koneksije prostora $\widehat{\widehat{A}}_N$ i $\widehat{A}_N$ bez torzije. Iz uslova (16.20) zaključujemo da se prostor $\widehat{A}_N$ simetrične afine koneksije geodezijski preslikava na prostor $\widehat{\widehat{A}}_N$ simetrične afine koneksije.

Vejlov tenzor je invarijanta takvog preslikavanja, tj. važi

$$\widehat{\widehat{\widehat{\underset{2}{W}}}}{}^i{}_{jmn}(x) = \widehat{\widehat{\underset{2}{W}}}{}^i{}_{jmn}(x)$$

pri čemu je

$$\underset{2}{\widehat{\widehat{W}}}{}^{i}{}_{jmn} = \widehat{R}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{1+N}\delta^i_j \widehat{R}_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}\big[(N\widehat{R}_{jn} + \widehat{R}_{nj}) - (N\widehat{R}_{jm} + \widehat{R}_{mj})\big], \tag{16.21}$$

a $\widehat{R}^i{}_{jmn}$ je Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora simetrične afine koneksije $\widehat{\widehat{A}}_N$ dok je $\widehat{R}_{jm}$ odgovarajući Ričijev tenzor i oni se uz pomoć relacije (16.19) mogu izraziti preko unutrašnjih geometrijskih objekata prostora GA_N, strukturnog afinora F^h_i i njegovih kovarijantnih izvoda. Na taj način je dokazana

Teorema 16.10. *Geometrijski objekti* (16.21) *su invarijante u odnosu na kanonička skoro geodezijska preslikavanja* $\underset{2}{\pi}_2(e)$, $(e \neq 0)$ *koja odgovaraju afinornoj strukturi* F^h_i.

Skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa za slučaj prostora simetrične afine koneksije obradjena su npr. u [82], [89].

17. $\underset{1}{\pi}_3$ i $\underset{2}{\pi}_3$ preslikavanja

17.1. Uslovi uzajamnosti $\underset{1}{\pi}_3$ i $\underset{2}{\pi}_3$ preslikavanja

Osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja $\underset{1}{\pi}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$ date su relacijama (14.8) i (14.9) za tenzor deformacije (13.1) [96]. Neka preslikavanje $\underset{1}{\pi}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$ ima **osobinu uzajamnosti**, tj. neka je i njemu inverzno preslikavanje tipa $\underset{1}{\pi}_3$, pa je na osnovu (14.9)

$$\varphi^h{}_{\underset{1}{||}m} - \xi^h_{\alpha m}\varphi^\alpha = \underset{1}{\widetilde{\nu}}_m \varphi^h + \underset{1}{\widetilde{\mu}}\delta^h_m\,, \tag{17.1}$$

pri čemu je $\underset{1}{\widetilde{\nu}}_m$ vektor a $\underset{1}{\widetilde{\mu}}$ invarijanta.

Iz (14.9) i (17.1) imamo

$$\varphi^h{}_{\underset{1}{|}m} - \varphi^h{}_{\underset{1}{||}m} + 2\xi^h_{\alpha m}\varphi^\alpha = (\underset{1}{\nu}_m - \underset{1}{\widetilde{\nu}}_m)\varphi^h + (\underset{1}{\mu} - \underset{1}{\widetilde{\mu}})\delta^h_m$$

odakle prema (14.9) sledi

$$\xi^h_{\alpha m}\varphi^\alpha = (\underset{1}{\nu}_m - \underset{1}{\widetilde{\nu}}_m + \sigma_{\alpha m}\varphi^\alpha + \psi_m)\varphi^h + (\underset{1}{\mu} - \underset{1}{\widetilde{\mu}} + \psi_\alpha\varphi^\alpha)\delta^h_m\,.$$

Označimo

$$\underset{1}{\theta}_m = \underset{1}{\nu}_m - \underset{1}{\widetilde{\nu}}_m + \sigma_{\alpha m}\varphi^\alpha + \psi_m, \qquad \underset{1}{\overline{\rho}} = \underset{1}{\mu} - \underset{1}{\widetilde{\mu}} + \psi_\alpha\varphi^\alpha.$$

Tada je

$$\xi^h_{\alpha m}\varphi^\alpha = \underset{1}{\theta}_m\varphi^h + \underset{1}{\overline{\rho}}\delta^h_m\,, \tag{17.2}$$

pri čemu je $\underset{1}{\overline{\rho}}$ invarijanta, a $\underset{1}{\theta}_m$ vektor.

Prema tome za preslikavanja $\underset{1}{\pi}_3$ je dokazana

Teorema 17.1. *Skoro geodezijsko preslikavanje trećeg tipa* $\underset{1}{\pi}_3$ *prostora nesimetrične afine koneksije raspolaže osobinom uzajamnosti ako antisimetrični deo tenzora deformacije koneksije zadovoljava relaciju* (17.2).

Uz zahtev da su uslovi (17.2) identički zadovoljeni u odnosu na φ^h dobijamo specijalnu klasu skoro geodezijskih preslikavanja $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. Osnovne jednačine koje karakterišu ovo preslikavanje imaju oblik

$$
\begin{aligned}
\overline{L}^h_{ij}(x) &= L^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \sigma_{ij}(x)\varphi^h(x)\\
&\quad + \underset{1}{\theta}_j(x)\delta^h_i - \underset{1}{\theta}_i(x)\delta^h_j\,,
\end{aligned}
\tag{17.3}
$$

$$
\varphi^h_{\underset{1}{|}m} = \underset{1}{\eta}_m\varphi^h + \underset{1}{\rho}\delta^i_m\,,
\tag{17.4}
$$

gde su $\underset{1}{\theta}_i$, $\underset{1}{\eta}_i$ vektori a $\underset{1}{\rho}$ invarijanta.

Osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja $\underset{2}{\pi}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$ date su relacijama (14.8) i (14.9′) za tenzor deformacije (13.1). Neka preslikavanje $\underset{2}{\pi}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$ ima **osobinu uzajamnosti**, tj. neka je i njemu inverzno preslikavanje tipa $\underset{2}{\pi}_3$. Tada, na osnovu (14.9′) dobijamo

$$
\xi^h_{\alpha m}\varphi^\alpha = \underset{2}{\theta}_m\varphi^h + \underset{2}{\overline{\rho}}\delta^h_m\,,
\tag{17.2′}
$$

pri čemu je $\underset{2}{\theta}_m = \underset{2}{\nu}_m - \underset{2}{\widetilde{\nu}}_m + \sigma_{\alpha m}\varphi^\alpha + \psi_m$ vektor a $\underset{2}{\overline{\rho}} = \underset{2}{\mu} - \underset{2}{\widetilde{\mu}} + \psi_\alpha\varphi^\alpha$ invarijanta. Na taj način zaključujemo da važi sledeća

Teorema 17.2. *Skoro geodezijsko preslikavanje trećeg tipa* $\underset{2}{\pi}_3$ *prostora nesimetrične afine koneksije raspolaže osobinom uzajamnosti ako antisimetrični deo tenzora deformacije koneksije zadovoljava relaciju* (17.2′).

Uz zahtev da su uslovi (17.2′) identički zadovoljeni u odnosu na φ^h dobijamo specijalnu klasu skoro geodezijskih preslikavanja $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$. Osnovne jednačine koje karakterišu ovo preslikavanje imaju oblik

$$
\begin{aligned}
\overline{L}^h_{ij}(x) &= L^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i + \sigma_{ij}(x)\varphi^h(x)\\
&\quad + \underset{2}{\theta}_j(x)\delta^h_i - \underset{2}{\theta}_i(x)\delta^h_j\,,
\end{aligned}
\tag{17.3}
$$

$$
\varphi^h_{\underset{2}{|}m} = \underset{2}{\eta}_m\varphi^h + \underset{2}{\rho}\delta^i_m\,,
\tag{17.4′}
$$

gde su $\underset{2}{\theta}_i$, $\underset{2}{\eta}_i$ vektori a $\underset{2}{\rho}$ invarijanta.

U slučaju prostora simetrične afine koneksije preslikavanje $\underset{1}{\pi}_3$ i $\underset{2}{\pi}_3$ se poklapaju i predstavljaju preslikavanje π_3 koje uvek ima osobinu uzajamnosti [83].

Razmotrimo u GA_N krive zadate u parametarskom obliku (3.1) za koje je

$$\lambda^h_{(1)} \equiv \frac{d\lambda^h}{dt} + L^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = \underset{1}{a}\lambda^h + \underset{1}{b}\varphi^h, \tag{17.5}$$

pri čemu su $\underset{1}{a} = \underset{1}{a}(t)$, $\underset{1}{b} = \underset{1}{b}(t)$ proizvoljne funkcije. Takve krive nazivamo **φ-krivama prve vrste** prostora GA_N. U tom slučaju važe sledeće teoreme

Teorema 17.3. *U prostoru GA_N φ-krive prve vrste su skoro geodezijske linije prve vrste duž kojih je polje 1-komplanarnih ravni $E_2\{\lambda^h, \varphi^h\}$*

Teorema 17.4. *φ-krive prostora GA_N su invarijante preslikavanja $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$.*

Analogno možemo definisati φ-krive druge vrste. One se karakterišu istim jednačinama (17.5) kao i φ-krive prve vrste, pa ubudu ce nećemo praviti razliku izmedju φ-krivih prve i druge vrste.

17.2. Preslikavanje $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3(e,\theta)$ i $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3(e,\theta)$

U prethodnom odeljku smo pokazali da GA_N dopušta preslikavanje $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$ na neki prostor $G\overline{A}_N$ tada i samo tada, kada u njemu postoji vektorsko polje $\varphi^h \neq 0$, koje zadovoljava jednačine (17.4). Na taj način smo dobili uslove tenzorskog karaktera koji su kako potrebni, tako i dovoljni da postoji preslikavanje $\underset{1}{\pi}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$. Ti uslovi nemaju unutrašnji karakter jer se u opštem slučaju ne mogu izraziti preko geometrijskih objekata prostora GA_N.

Lako je videti da uslovi (17.4) imaju invarijantni karakter u odnosu na zamenu vektora φ^h vektorom $\widetilde{\varphi}^h = \rho\varphi^h$ $(\rho \neq 0)$ koji je komplanaran s njim.

Takodje važe [90]

Teorema 17.5. *Trajektorije vektorskog polja $\varphi^h(x)$ predstavljaju geodezijske linije prostora GA_N.*

Teorema 17.6. *Prostor GA_N dopušta preslikavanje $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$ ako i samo ako postoji lokalni sistem koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$, tako da su u odnosu na njega komponente koneksije date formulom*

$$L^h_{1m} = \rho\delta^i_m + \eta_m\delta^h_1, \quad (h, m = 1, 2, ..., N) \tag{17.6}$$

za neke funkcije $\rho(x)$ i $\eta_m(x)$.

Analogne teoreme teoremama 17.5 i 17.6 mogu se formulisati i za preslikavanja $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$.

Posmatrajmo preslikavanje $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$. Označimo sa q_i vektor koji zadovoljava

$$q_\alpha \varphi^\alpha = e, \quad (e = \pm 1, 0). \tag{17.7}$$

Iz (17.3) kompozicijom sa q_i dobijamo

$$q_{\underset{1}{i||j}} = q_{\underset{1}{i|j}} - \psi_i q_j - \psi_j q_i - e\sigma_{ij} - \underset{1}{\theta}_j q_i + \underset{1}{\theta}_i q_j. \tag{17.8}$$

Kompozicijom sa φ^i i korišćenjem (17.7) iz prethodne relacije dobijamo

$$\varphi^\alpha (q_{\underset{1}{\alpha||j}} - q_{\underset{1}{\alpha|j}}) = (-\psi_\alpha \varphi^\alpha + \underset{1}{\theta}_\alpha \varphi^\alpha) q_j - e(\psi_j + \underset{1}{\theta} j) - e\sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha. \tag{17.9}$$

S druge strane, kontrakcijom po h, i u (17.3) imamo

$$\overline{L}^\alpha_{\alpha j} = L^\alpha_{\alpha j} + (N+1)\psi_j + \sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha + (N-1)\underset{1}{\theta}_j. \tag{17.10}$$

Eliminacijom $\sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha$ iz (17.9) i (17.10) uz uslov (17.7) imamo

$$(N-1)\psi_\alpha \varphi^\alpha = \varphi^\beta (\overline{L}^\alpha_{\alpha\beta} - L^\alpha_{\alpha\beta}) - (N-1)\underset{1}{\theta}_\alpha \varphi^\alpha + e\varphi^\alpha \varphi^\beta (q_{\underset{1}{\alpha||\beta}} - q_{\underset{1}{\alpha|\beta}}). \tag{17.11}$$

Iz (17.10) i (17.11) dobijamo

$$\begin{aligned} N\psi_j = \overline{L}^\alpha_{\alpha j} - L^\alpha_{\alpha j} &+ \frac{e}{N-1} q_j \big[\varphi^\beta (\overline{L}^\alpha_{\alpha q} - L^\alpha_{\alpha q}) + e(q_{\underset{1}{\alpha||\beta}} - q_{\underset{1}{\alpha|\beta}}) \\ &+ e\varphi^\alpha \varphi^\beta (q_{\underset{1}{\alpha||\beta}} - q_{\underset{1}{\alpha|\beta}})\big] + e\varphi^\alpha (q_{\underset{1}{\alpha||\beta}} - q_{\underset{1}{\alpha|\beta}}) + N\underset{1}{\varepsilon}_j, \end{aligned} \tag{17.12}$$

pri čemu je zamenjeno

$$\underset{1}{\varepsilon}_{(i}\delta^h_{j)} - e\underset{1}{\varepsilon}_{(i}q_{j)}\varphi^h + e\underset{1}{\theta}_{[i}q_{j]}\varphi^h - \underset{1}{\theta}_{[i}\delta^h_{j]} \equiv 0. \tag{17.13}$$

Iz (17.8) se dobija da je

$$\sigma_{ij} = e(q_{\underset{1}{i|j}} - q_{\underset{1}{i||j}}) - e\psi_i q_j - e\psi_j q_i - e\underset{1}{\theta}_j q_i + e\underset{1}{\theta}_i q_j,$$

odakle prema (17.12) sledi

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = e(q_{\underset{1}{i|j}} - q_{\underset{1}{i||j}}) &- \frac{1}{N} q_j \big\{\overline{L}^\alpha_{\alpha i} - L^\alpha_{\alpha i} + \frac{e}{N-1} q_i \big[\varphi^\beta (\overline{L}^\alpha_{\alpha\beta} - L^\alpha_{\alpha\beta}) \\ &+ e\varphi^\alpha \varphi^\beta (q_{\underset{1}{\alpha||\beta}} - q_{\underset{1}{\alpha|\beta}})\big] + e\varphi^\alpha (q_{\underset{1}{\alpha||i}} - q_{\underset{1}{\alpha|i}})\big\} - eq_j \underset{1}{\varepsilon}_i \\ &- \frac{1}{N} q_i \big\{\overline{L}^\alpha_{\alpha j} - L^\alpha_{\alpha j} + \frac{e}{N-1} q_j \big[\varphi^\beta (\overline{L}^\alpha_{\alpha\beta} - L^\alpha_{\alpha\beta}) + e\varphi^\alpha \varphi^\beta (q_{\underset{1}{\alpha||\beta}} - q_{\underset{1}{\alpha|\beta}})\big] \\ &+ e\varphi^\alpha (q_{\underset{1}{\alpha||j}} - q_{\underset{1}{\alpha|j}})\big\} - eq_i \underset{1}{\varepsilon}_j - e\underset{1}{\theta}_j q_i + e\underset{1}{\theta}_i q_j. \end{aligned} \tag{17.14}$$

Pretpostavimo da vektor $\underset{1}{\theta}_i$ iz relacije (17.3) zadovoljava uslov

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{\varepsilon}_i\delta^h_j + \underset{1}{\varepsilon}_j\delta^h_i - e\underset{1}{\varepsilon}_i q_j - e\underset{1}{\varepsilon}_j q_i - e\underset{1}{\theta}_j q_i \\
&\quad + e\underset{1}{\theta}_i q_j + \underset{1}{\theta}_j\delta^h_i - \underset{1}{\theta}_i\delta^h_j \equiv 0.
\end{aligned}
\tag{17.15}
$$

Preslikavanje $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$ za koje važi uslov (17.15) obeležavaćemo $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3(e,\theta)$. Korišćenjem uslova (17.12-15) relaciju (17.3) možemo predstaviti u obliku

$$
\underset{3}{\overline{\widetilde{T}}}{}^h_{ij}(x) = \underset{3}{\widetilde{T}}{}^h_{ij}(x),
\tag{17.16}
$$

gde smo označili

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\widetilde{T}}{}^h_{ij} &= L^h_{ij} + e q_{i\underset{1}{|}j}\varphi^h \\
&- \frac{1}{N}(\delta^h_j - e\varphi^h q_j)\big[L^\alpha_{\alpha i} + e q_{\alpha\underset{1}{|}i}\varphi^\alpha + \frac{q_i}{N-1}(e\varphi^\beta L^\alpha_{\alpha\beta} + \varphi^\alpha\varphi^\beta q_{\alpha\underset{1}{|}\beta})\big] \\
&+ \frac{1}{N}(\delta^h_i - e\varphi^h q_i)\big[L^\alpha_{\alpha j} + e q_{\alpha\underset{1}{|}j}\varphi^\alpha + \frac{q_j}{N-1}(e\varphi^\beta L^\alpha_{\alpha\beta} + \varphi^\alpha\varphi^\beta q_{\alpha\underset{1}{|}\beta})\big].
\end{aligned}
\tag{17.17}
$$

Na isti način je definisan iobjekat $\underset{3}{\overline{\widetilde{T}}}{}^h_{ij}$ prostora $G\overline{A}_N$. Prema tome dokazana je

Teorema 17.7. *Geometrijski objekti* (17.17) *prostora* GA_N *su invarijantni u odnosu na preslikavanje* $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3(e,\theta) : GA_N \to G\overline{A}_N$ *koje odgovara vektoru* φ^h *za proizvoljan vektor* q_i *koji zadovoljava uslov* (17.7).

Posmatrajmo sada preslikavanje $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3 : GA_N \to G\overline{A}_N$. Neka vektor q_i zadovoljava relaciju (17.7′). Kompozicijom sa q_i u (17.7′) dobijamo

$$
q_{i\underset{2}{||}j} = q_{i\underset{2}{|}j} - \psi_i q_j - \psi_j q_i - e\sigma_{ij} - \underset{2}{\theta}_j q_i + \underset{2}{\theta}_i q_j.
\tag{17.8 ′}
$$

Kompozicijom sa φ^i i korišćenjem (17.7′) iz prethodne relacije dobijamo

$$
\varphi^\alpha(q_{\alpha\underset{2}{||}j} - q_{\alpha\underset{2}{|}j}) = (-\psi_\alpha\varphi^\alpha + \underset{2}{\theta}_\alpha\varphi^\alpha)q_j - e(\psi_j + \underset{2}{\theta}j) - e\sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha.
\tag{17.9′}
$$

S druge strane, kontrakcijom po indeksima h, i u (17.3′) imamo

$$
\overline{L}^\alpha_{j\alpha} = L^\alpha_{j\alpha} + (N+1)\psi_j + \sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha + (N-1)\underset{2}{\theta}_j.
\tag{17.10 ′}
$$

Eliminacijom $\sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha$ iz (17.9′) i (17.10′) uz uslov (17.7′) imamo

$$
\begin{aligned}
N\psi_j &= \overline{L}^\alpha_{j\alpha} - L^\alpha_{j\alpha} + \frac{e}{N-1}q_j\big[\varphi^\beta(\overline{L}^\alpha_{\beta\alpha} - L^\alpha_{\beta\alpha}) \\
&+ e\varphi^\alpha\varphi^\beta(q_{\alpha\underset{2}{||}\beta} - q_{\alpha\underset{2}{|}\beta})\big] + e\varphi^\alpha(q_{\alpha\underset{2}{||}j} - q_{\alpha\underset{2}{|}j}) + N\underset{2}{\varepsilon}_i,
\end{aligned}
\tag{17.12 ′}
$$

pri čemu je označeno

$$(17.13') \qquad N\underset{2}{\varepsilon}_i = -2eq_i\underset{2}{\theta}_\alpha\varphi^\alpha - (N-2)\underset{2}{\theta}_i.$$

Iz (17.8′,12′) se dobija da je

$$(17.14') \qquad \begin{aligned}\sigma_{ij} &= e(q_{j\underset{2}{|}i} - q_{j\underset{2}{||}i}) - \frac{eq_j}{N}\big\{\overline{L}^\alpha_{i\alpha} - L^\alpha_{i\alpha} + \frac{e}{N-1}q_i\big[\varphi^\beta(\overline{L}^\alpha_{\beta\alpha} - L^\alpha_{\beta\alpha})\\ &+ e\varphi^\alpha\varphi^\beta(q_{\alpha\underset{2}{||}\beta} - q_{\alpha\underset{2}{|}\beta})\big] + e\varphi^\alpha(q_{\alpha\underset{2}{||}i} - q_{\alpha\underset{2}{|}i})\big\} - eq_j\underset{2}{\varepsilon}_i\\ &- \frac{eq_i}{N}\big\{\overline{L}^\alpha_{j\alpha} - L^\alpha_{j\alpha} + \frac{e}{N-1}q_j\big[\varphi^\beta(\overline{L}^\alpha_{\beta\alpha} - L^\alpha_{\beta\alpha}) + e\varphi^\alpha\varphi^\beta(q_{\alpha\underset{2}{||}\beta} - q_{\alpha\underset{2}{|}\beta})\big]\\ &+ e\varphi^\alpha(q_{\alpha\underset{2}{||}j} - q_{\alpha\underset{2}{|}j})\big\} - eq_i\underset{2}{\varepsilon}_j - e\underset{2}{\theta}_iq_j + e\underset{2}{\theta}_jq_i.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da vektor $\underset{2}{\theta}_i$ iz relacije (17.3′) zadovoljava uslov

$$(17.15') \qquad \underset{2}{\varepsilon}_{(i}\delta^h_{j)} - e\underset{2}{\varepsilon}_{(i}q_{j)}\varphi^h - e\underset{2}{\theta}_{[i}q_{j]}\varphi^h + \underset{2}{\theta}_{[i}\delta^h_{j]} \equiv 0.$$

Preslikavanje $\underset{2}{\widetilde{\pi}}3$ koje zadovoljava uslov (17.15′) zva cemo $\underset{2}{\widetilde{\pi}}3(e,\theta)$ preslikavanjem. Ovde (i,j) i $[i,j]$ označavaju simetrizaciju i antisimetrizaciju, respektivno po indeksima i i j . Korišćenjem uslova (17.12′-15′) relacija (17.3′) se može predstaviti u obliku

$$(17.16') \qquad \underset{3}{\overline{\widetilde{\widetilde{T}}}}{}^h_{ij}(x) = \underset{3}{\widetilde{\widetilde{T}}}{}^h_{ij}(x),$$

pri čemu smo označili

$$(17.17') \qquad \begin{aligned}\underset{3}{\widetilde{\widetilde{T}}}{}^h_{ij} &= L^h_{ij} + eq_{j\underset{2}{|}i}\varphi^h\\ &- \frac{1}{N}(\delta^h_j - e\varphi^hq_j)\big[L^\alpha_{i\alpha} + eq_{\alpha\underset{2}{|}i}\varphi^\alpha + \frac{q_i}{N-1}(e\varphi^\beta L^\alpha_{\beta\alpha} + \varphi^\alpha\varphi^\beta q_{\alpha\underset{2}{|}\beta})\big]\\ &- \frac{1}{N}(\delta^h_i - e\varphi^hq_i)\big[L^\alpha_{j\alpha} + eq_{\alpha\underset{2}{|}j}\varphi^\alpha + \frac{q_j}{N-1}(e\varphi^\beta L^\alpha_{\beta\alpha} + \varphi^\alpha\varphi^\beta q_{\alpha\underset{2}{|}\beta})\big].\end{aligned}$$

Prema tome dokazana je sledeća

Teorema 17.8. *Geometrijski objekti* (17.17′) *prostora* GA_N *su invarijantni u odnosu na preslikavanje* $\underset{2}{\widetilde{\pi}}3(e,\theta): GA_N \to G\overline{A}_N$ *koje odgovara vektoru* φ^h *za proizvoljan vektor* q_i *koji zadovoljava uslov* (17.7′).

Glava VII

PRESLIKAVANJA GENERALISANIH KELEROVIH PROSTORA

18. Generalisani Kelerovi prostori

Izučavanjem Kelerovih prostora i njihovim preslikavanjima bavili su se mnogi autori kao na primer K. Yano [102]–[104], M. Prvanović [57], [58], [60], J. Mikeš [21], [25], [26], [28], V. V. Domašev [5], N. Pušić [65]–[68], T. Otsuki i Y. Tasiro [51], S. S. Pujar [63], [64], Sinjukov [85]...

Kelerovim prostorom nazivamo N-dimenzioni Rimanov prostor sa osnovnim metričkim tenzorom $g_{ij}(x)$, u kome postoji skoro kompleksna struktura $F^i_j(x)$, takva da je

$$F^h_p(x)F^p_i(x) = -\delta^h_i\,,$$
$$g_{pq}F^p_iF^q_j = g_{ij}, \quad g^{ij} = g^{pq}F^i_pF^j_q,$$
$$F^h_{i;j} = 0,$$

pri čemu ; označava kovarijantno diferenciranje izvedeno u odnosu na osnovni metrički tenzor g_{ij}. Ovu glavu ćemo posvetiti uopštavanju kako pojma Kelerovog prostora tako i njegovih preslikavanja.

Generalisanim Kelerovim prostorom GK_N zvaćemo generalisani N-dimenzioni Rimanov prostor s osnovnim metričkim tenzorom g_{ij}, pri čemu u opštem slučaju važi

(18.1) $$g_{ij} \neq g_{ji},$$

u kome postoji skoro kompleksna struktura $F^i_j(x)$, tako da je

(18.2) $$F^h_p(x)F^p_i(x) = -\delta^h_i\,,$$

(18.3) $$g_{\underline{pq}}F^p_iF^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}}F^i_pF^j_q,$$

(18.4) $$F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0, \quad (\theta = 1, 2),$$

pri čemu $\underset{\theta}{|}$ označava kovarijantno diferenciranje vrste θ izvedeno u odnosu na osnovni metrički tenzor g_{ij}. Kompozicijom sa F^j_r u (18.3) i korišćenjem (18.2) dobija se

$$g_{\underline{ip}}F^p_j + g_{\underline{pj}}F^p_i = 0, \tag{18.5}$$

$$g^{\underline{ip}}F^j_p + g^{\underline{jp}}F^i_p = 0. \tag{18.6}$$

Označimo

$$F_{ji} = F^p_j g_{\underline{pi}}, \quad F^{ji} = F^j_p g^{\underline{pi}}. \tag{18.7}$$

Tada iz (18.5) i (18.6) dobijamo

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F^{ij} + F^{ji} = 0. \tag{18.8}$$

Tada važi

Teorema 18.1. *Tenzor torzije generalisanog Kelerovog prostora zadovoljava relaciju*

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} = -\Gamma^p_{\underset{\vee}{qm}}F^i_p F^q_j. \tag{18.9}$$

Dokaz. Iz (18.4) imamo

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}F^p_j = \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}F^i_p,$$

odakle kompozicijom sa F^q_i sledi (18.9). ■

Teorema 18.2. *Za tenzore krivine* $\underset{\theta}{R}{}^h{}_{ijk}$ $(\theta = 1, \cdots, 5)$ *prostora* GK_N *su zadovoljene sledeće relacije*

$$F^p_i \underset{1}{R}{}^h{}_{pjk} = F^h_p \underset{1}{R}{}^p{}_{ijk}, \tag{18.10}$$

$$F^p_i \underset{2}{R}{}^h{}_{pjk} = F^h_p \underset{2}{R}{}^p{}_{ijk}, \tag{18.11}$$

$$F^p_i \underset{3}{R}{}^h{}_{pjk} = F^h_p \underset{3}{R}{}^p{}_{ijk}, \tag{18.12}$$

$$F^p_i \underset{4}{R}{}^h{}_{pjk} - F^h_p \underset{3}{R}{}^p{}_{ikj} = 2(\Gamma^q_{\underset{\vee}{ij}\underset{4}{|}k} - \Gamma^q_{\underset{\vee}{ki}\underset{3}{|}j} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{kp}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ki}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pj}})F^h_q. \tag{18.13}$$

Dokaz. a) Iz (18.4) imamo

$$F^h_{i\underset{1}{|}jk} - F^h_{i\underset{1}{|}kj} = 0,$$

odakle primenom Ričijevog identiteta [29], [35] imamo

$$-F^h_p \underset{1}{R}{}^p{}_{ijk} + F^p_i \underset{1}{R}{}^h{}_{pjk} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jk}}F^h_{i\underset{1}{|}p} = 0,$$

odakle zbog (18.4) dobijamo

$$F^p_i \underset{1}{R}{}^h{}_{pjk} - F^h_p \underset{1}{R}{}^p{}_{ijk} = 0, \tag{18.14}$$

tj. dobili smo (18.10).
b) Analogno iz (18.4) primenom Ričijevog identiteta na

$$F^h_{i\underset{2}{|}jk} - F^h_{i\underset{2}{|}kj} = 0,$$

i korišćenjem (18.4) dobijamo

$$F^p_i \underset{2}{R}{}^h{}_{pjk} - F^h_p \underset{2}{R}{}^p{}_{ijk} = 0, \tag{18.15}$$

odakle sledi (18.11).
c) Iz (18.4) je

$$F^h_{i\underset{1}{|}j\underset{2}{|}k} - F^h_{i\underset{2}{|}k\underset{1}{|}j} = 0.$$

S druge strane je

$$F^h_{i\underset{1}{|}j\underset{2}{|}k} - F^h_{i\underset{2}{|}k\underset{1}{|}j} = \underset{3}{R}{}^h{}_{pjk} F^p_i - \underset{3}{R}{}^p{}_{ijk} F^h_p .$$

Iz posednje dve jednakosti sledi relacija (18.12).
d) Iz (18.4) sledi

$$F^h_{i\underset{3}{|}j} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}} F^h_p, \quad F^h_{i\underset{4}{|}k} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ki}} F^h_p,$$

$$F^h_{i\underset{3}{|}j\underset{4}{|}k} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}\underset{4}{|}k} F^h_p + 4\Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{np}} F^h_q, \quad F^h_{i\underset{4}{|}k\underset{3}{|}j} = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ki}\underset{3}{|}j} F^h_p + 4\Gamma^p_{\underset{\vee}{ki}} \Gamma^q_{\underset{\vee}{pj}} F^h_q .$$

Kako je još

$$F^h_{i\underset{3}{|}j\underset{4}{|}k} - F^h_{i\underset{4}{|}k\underset{3}{|}j} = \underset{4}{R}{}^h{}_{pjk} F^p_i - \underset{3}{R}{}^p{}_{ikj} F^h_p ,$$

sledi dokaz relacije (18.13). ■

Teorema 18.3. *Za tenzore krivine* $\underset{\theta}{R}{}_{hijk}$ $(\theta = 1, \cdots, 4)$ *prostora* GK_N *su zadovoljene sledeće relacije*

$$F^p_h \underset{1}{R}{}_{pijk} = F^p_i \underset{1}{R}{}_{phjk}, \tag{18.16}$$

$$F^p_h \underset{2}{R}{}_{pijk} = F^p_i \underset{2}{R}{}_{phjk}, \tag{18.17}$$

$$F^p_h \underset{3}{R}{}_{pijk} = F^p_i \underset{3}{R}{}_{phjk}, \tag{18.18}$$

$$F^p_h \underset{4}{R}{}_{pijk} = F^p_i \underset{3}{R}{}_{phkj} + 2F^p_i (\Gamma_{h.\underset{\vee}{ki}\underset{3}{|}j} - \Gamma_{h.\underset{\vee}{ij}\underset{4}{|}k} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ki}} \Gamma_{h.\underset{\vee}{pj}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}} \Gamma_{h.\underset{\vee}{kp}}), \tag{18.19}$$

$$F^p_h (\underset{4}{R}{}_{pijk} - \underset{3}{R}{}_{pikj}) = 2F^p_i (\Gamma_{h.\underset{\vee}{ki}\underset{3}{|}j} - \Gamma_{h.\underset{\vee}{ij}\underset{4}{|}k} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ki}} \Gamma_{h.\underset{\vee}{pj}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{ij}} \Gamma_{h.\underset{\vee}{kp}}). \tag{18.20}$$

Dokaz. Kompozicijom u (18.10) sa F^q_h imamo

$$F^p_i F^h_q \underset{1}{R}{}^q{}_{pjk} + \underset{1}{R}{}^h{}_{ijk} = 0. \tag{18.21}$$

Spuštanjem u (18.21) indeksa h dobijamo

$$F^p_h F^q_i \underset{1}{R}_{pqjk} - \underset{1}{R}_{hijk} = 0, \tag{18.22}$$

odakle kompozicijom sa F^i_r dobijamo

$$F^p_h \underset{1}{R}_{pijk} + F^p_i \underset{1}{R}_{hpjk} = 0. \tag{18.23}$$

Kako je $\underset{1}{R}_{hijk} = -\underset{1}{R}_{ihjk}$ iz (18.23) dobijamo relaciju (18.16). Relacije (18.17-19) dobijamo na isti način iz (18.11-13) korišćenjem činjenice da su tenzori $\underset{\theta}{R}_{hijk}$ $(\theta = 2, 3, 4)$ antisimetrični po prva dva indeksa [32]. Relacija (18.20) dobija se direktno iz (18.18,19). ■

Teorema 18.4. *Za tenzore krivine* $\underset{\theta}{R}^i{}_{jmn}$ *prostora* GK_N *važe sledeće relacije*

$$\underset{1}{R}_{(pq)} F^p_j F^q_m = \underset{1}{R}_{(jm)} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{ps}} F^r_j F^s_m + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}, \tag{18.24 a}$$

$$\underset{2}{R}_{(pq)} F^p_j F^q_m = \underset{2}{R}_{(jm)} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{ps}} F^r_j F^s_m + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}, \tag{18.24 b}$$

$$\underset{3}{R}_{(pq)} F^p_j F^q_m = \underset{3}{R}_{(jm)} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{ps}} F^r_j F^s_m + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}, \tag{18.24 c}$$

$$\underset{4}{R}_{(pq)} F^p_j F^q_m = \underset{4}{R}_{(jm)} + 6\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{ps}} F^r_j F^s_m - 6\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}, \tag{18.24 d}$$

$$\underset{5}{R}_{(pq)} F^p_j F^q_m = \underset{5}{R}_{(jm)} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{ps}} F^r_j F^s_m - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}, \tag{18.24 e}$$

gde (jm) *označava simetrizaciju po indeksima* j, m.

Dokaz. (a) Iz $F^h_{\underset{1}{i|j}} = 0$, $\quad F^h_{\underset{2}{i|j}} = 0$ sabiranjem i deljenjem sa 2 imamo

$$F^h_{i;j} = 0. \tag{18.25}$$

Uslovi integrabilnosti jednačine (18.25) dovode do relacije

$$F^h_p R^p{}_{ijk} - F^p_i R^h{}_{pjk} = 0,$$

gde je $R^h{}_{ijk}$ tenzor krivine pridruženog prostora simetrične afine koneksije $\Gamma^h_{\underline{ij}}$. Korišćenjem uslova (18.2) dobijamo

$$F^h_p F^q_i R^p{}_{ijk} + R^h{}_{ijk} = 0,$$

odakle je

$$F^p_h F^q_i R_{pqjk} - R_{hijk} = 0.$$

Prema (18.2), poslednja jednačina postaje

$$F^p_h R_{pijk} - F^p_i R_{phjk} = 0.$$

Kompozicijom sa $g^{\underline{ij}}$ i kontrakcijom po indeksima i,j, dobijamo

$$F^p_h R_{pk} = F^p_q R_{ph.k}^{q}.$$

Simetrizacijom po h, k dobijamo

$$R_{hk} = F^p_h F^q_k R_{pq},$$

odakle, ponovnom simetrizacijom po indeksima h, k, dobijamo

(18.26) $$R_{(hk)} = F^p_h F^q_k R_{(pq)}.$$

Tenzor $\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn}$ se može izraziti preko tenzora $R^i{}_{jmn}$ na sledeći način [37]:

$$\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm;n}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn;m}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n, a zatim simetrizacijom po indeksima j, m, dobijamo

(18.27) $$\underset{1}{R}{}_{(jm)} = R_{(jm)} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}}.$$

Iz (18.26) i (18.27) sledi (18.24a).
(b) Tenzor $\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn}$ se može izraziti preko tenzora $R^i{}_{jmn}$ na sledeći način [37]:

$$\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm;n}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn;m}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n, a zatim simetrizacijom po indeksima j, m, dobijamo

$$\underset{2}{R}{}_{(jm)} = R_{(jm)} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},$$

odakle korišćenjem (18.26) zaključujemo da važi (18.24b).
(c) Tenzor $\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn}$ se može izraziti preko tenzora $R^i{}_{jmn}$ na sledeći način [37]:

$$\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm;n}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn;m}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n, a zatim simetrizacijom po indeksima j, m, dobijamo

$$\underset{3}{R}{}_{(jm)} = R_{(jm)} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},$$

odakle korišćenjem (18.26) zaključujemo da važi (18.24c).
(d) Tenzor $\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn}$ se može izraziti preko tenzora $R^i{}_{jmn}$ na sledeći način [37]:

$$\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm;n}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn;m}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n, a zatim simetrizacijom po indeksima j, m, dobijamo

$$\underset{4}{R}_{(jm)} = R_{(jm)} + 6\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},$$

odakle korišćenjem (18.26) zaključujemo da važi (18.24d).
(e) Tenzor $\underset{5}{R}^i{}_{jmn}$ se može izraziti preko tenzora $R^i{}_{jmn}$ na sledeći način [37]:

$$\underset{5}{R}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n, a zatim simetrizacijom po indeksima j, m, dobijamo

$$\underset{5}{R}_{(jm)} = R_{(jm)} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jq}}\Gamma^q_{\underset{\vee}{pm}},$$

odakle korišćenjem (18.26) zaključujemo da važi (18.24e). ■

Za generalisane Kelerove prostore takodje važi

Teorema 18.5. *Ako skoro kompleksna struktura F^h_i prostora GK_N zadovoljava uslov $F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0$, $(\theta = 3, 4)$ tada je $\Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}} = 0$.*

Dokaz. Sledi direktno iz $F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0$, $(\theta = 1, \cdots, 4)$. ■

19. Holomorfno projektivna preslikavanja Generalisanih Kelerovih prostora koja očuvavaju kompleksnu strukturu

Uopštavajući pojam analitički planarne krive Kelerovih prostora [51], [83] dolazimo do analognog pojma kod generalisanih Kelerovih prostora.

Definicija 19.1. Krivu prostora GK_N, koja je u parametarskom obliku zadata jednačinama

$$x^h = x^h(t), \quad (h = 1, 2, \cdots, N) \tag{19.1}$$

zvaćemo **analitički planarnom** ako važi

$$\lambda^h{}_{\underset{\theta}{|}p}\lambda^p = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p, \quad (\theta = 1, 2) \tag{19.2}$$

gde je

$$\lambda^h = \frac{dx^h}{dt},$$

a $a(t)$ i $b(t)$ su proizvoljne funkcije parametra t.

Kako je

$$\lambda^h{}_{\underset{1}{|}p}\lambda^p = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \lambda^h{}_{\underset{2}{|}p}\lambda^p,$$

zaključujemo da je izraz na levoj strani u (19.2) isti, bez obzira na vrstu kovarijantnog diferenciranja, odakle sledi da se analitički planarne krive prostora GK_N mogu uvesti relacijom

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p. \tag{19.3}$$

Neka su dati generalisani Kelerovi prostori GK_N i $G\overline{K}_N$ sa kompleksnim strukturama F^h_i i $\overline{F}^h_i$ redom, pri čemu je

$$F^h_i = \overline{F}^h_i \tag{19.4}$$

u zajedničkom po preslikavanju $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ koordinatnom sistemu.

Definicija 19.2. Difeomorfizam $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ zvaćemo **holomorfno projektivnim** ili **analitički planarnim** ako se pri tom preslikavanju analitički planarne krive prostora GK_N preslikavaju u analitički planarne krive prostora $G\overline{K}_N$.

Označimo sa

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} \tag{19.5}$$

tenzor deformacije koneksije pri analitički planarnom preslikavanju, pri čemu su Γ^h_{ij} i $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ Kristofelovi simboli druge vrste prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ redom. Analitički planarne krive prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ date su redom jednačinama

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = a(t)\lambda^h + b(t)F^h_p\lambda^p,$$
$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \overline{\Gamma}^h_{pq}\lambda^p\lambda^q = \overline{a}(t)\lambda^h + \overline{b}(t)F^h_p\lambda^p,$$

Iz prethodne dve relacije dobijamo

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq})\lambda^p\lambda^q = \psi(t)\lambda^h + \sigma(t)F^h_p\lambda^p,$$

gde smo označili

$$\psi(t) = \overline{a}(t) - a(t), \quad \sigma(t) = \overline{b}(t) - b(t).$$

Stavimo

$$\psi(t) = \psi_p\lambda^p, \quad \sigma(t) = \sigma_q\lambda^q.$$

Tada imamo

$$(\overline{\Gamma}^h_{pq} - \Gamma^h_{pq} - \psi_p\delta^h_q - \sigma_pF^h_q)\lambda^p\lambda^q = 0,$$

odakle zaključujemo da je

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)} + \xi^h_{ij}, \tag{19.6}$$

gde (ij) označva simetrizaciju po indeksima i, j a ξ^h_{ij} je proizvoljan antisimetrični tenzor. U (19.6) vektor σ_i možemo izabrati tako da je

$$\sigma_i = -\psi_p F^p_i.$$

Tada je

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} - \psi_p F^p_{(i}F^h_{j)} + \xi^h_{ij}. \tag{19.7}$$

Kontrakcijom po indeksima h, i u (19.7) i korišćenjem

$$F^p_p = 0, \quad \xi^p_{pj} = 0$$

dobijamo

$$\overline{\Gamma}^p_{pj} - \Gamma^p_{pj} = (N+2)\psi_j. \tag{19.8}$$

Iz (19.8) je očigledno ψ_j gradijentni vektor. Zamenom (19.8) u (19.7) imamo

$$\begin{aligned} &\overline{\Gamma}^h_{ij} - \frac{1}{N+2}(\overline{\Gamma}^p_{pi}\delta^h_j + \overline{\Gamma}^p_{pj}\delta^h_i - \overline{\Gamma}^q_{qp}\overline{F}^p_{(i}\overline{F}^h_{j)}) - \overline{\Gamma}^h_{\underset{\vee}{ij}} \\ &= \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{N+2}(\Gamma^p_{pi}\delta^h_j + \Gamma^p_{pj}\delta^h_i - \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}) - \Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}. \end{aligned} \tag{19.9}$$

Označimo

$$HT^h_{ij} = \Gamma^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{N+2}(\Gamma^p_{p(i}\delta^h_{j)} - \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}). \tag{19.10}$$

Tada (19.9) možemo predstaviti u obliku

$$H\overline{T}^h_{ij} = HT^h_{ij}, \tag{19.11}$$

gde smo sa $H\overline{T}^h_{ij}$ označili objekat oblika (19.10) prostora $G\overline{K}_N$. Veličina HT^h_{ij} nije tenzor. Zvaćemo je *holomorfno projektivnim parametrom tipa projektivnih parametara Tomasa*. Prema tome dokazana je

Teorema 19.1. *Veličine* (19.10) *predstavljaju invarijante holomorfno projektivnih preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora sa jednakim kompleksnim strukturama.*

20. Ekvitorziona holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora

Neka je $f : GK_N \to G\overline{K}_N$ holomorfno projektivno preslikavanje i neka za tenzore torzije prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ važi

$$\overline{\Gamma}^h_{\underset{\vee}{ij}} = \Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}. \tag{20.1}$$

Tada je

$$\xi^h_{ij} = 0. \tag{20.2}$$

20.1. Holomorfno projektivni parametri prve vrste

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{1}{R}$ i $\underset{1}{\overline{R}}$ prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ data je sa

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} - P^i_{jn\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{pm} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}P^i_{jp}. \tag{20.3}$$

Zamenom (19.5), (19.7) i (20.2) u (20.3) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{1}{\psi}{}_{jn} + \delta^i_j \underset{1}{\psi}{}_{[mn]} - \delta^i_j \underset{1}{\psi}{}_{jm}\\ &\quad + F^p_j(F^i_n\underset{1}{\psi}{}_{pm} - F^i_m\underset{1}{\psi}{}_{pn}) + F^i_j(F^p_n\underset{1}{\psi}{}_{pm} - F^p_m\underset{1}{\psi}{}_{pn})\\ &\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mn}\psi_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_q F^q_j F^i_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_q F^q_p F^i_j,\end{aligned} \tag{20.4}$$

gde smo označili

$$\underset{1}{\psi}{}_{ij} = \psi_{i\underset{1}{|}j} - \psi_i\psi_j + \psi_p F^p_i \psi_q F^q_j. \tag{20.5}$$

Kontrakcijom po indeksima i, n u (20.4) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}_{jm} &= \underset{1}{R}{}_{jm} + \underset{1}{\psi}{}_{[mj]} - N\underset{1}{\psi}{}_{jm} - F^p_j F^q_m \underset{1}{\psi}{}_{(pq)}\\ &\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\psi_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_j F^r_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_p F^r_j.\end{aligned} \tag{20.6}$$

Antisimetrizacijom bez deljenja u (20.6) po indeksima j, m dobijamo

$$\begin{aligned}(N+2)\underset{1}{\psi}{}_{[jm]} &= \underset{1}{R}{}_{[jm]} - \underset{1}{\overline{R}}{}_{[jm]} + 4\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\psi_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_j F^r_p\\ &\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jr}\psi_q F^q_m F^r_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_p F^r_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jr}\psi_q F^q_p F^r_m.\end{aligned} \tag{20.7}$$

Simetrizacijom bez deljenja po indeksima j, m u (20.6) imamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}{}_{(jm)} &= \underset{1}{R}{}_{(jm)} - N\underset{1}{\psi}{}_{(jm)} - 2F^p_j F^q_m \underset{1}{\psi}{}_{(pq)} - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_j F^r_p\\ &\quad - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jr}\psi_q F^q_m F^r_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_p F^r_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jr}\psi_q F^q_p F^r_m.\end{aligned} \tag{20.8}$$

Važi analogna relacija relaciji (18.24a) za prostor $G\overline{K}_N$, tj.

$$\underset{1}{\overline{R}}{}_{(pq)} F^p_i F^q_j = \underset{1}{\overline{R}}{}_{(ij)} - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{ps} F^r_j F^s_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jq}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pm}. \tag{18.24$'$}$$

Kompozicijom sa $F^j_p F^m_q$, kontrakcijom po indeksima j, m, i korišćenjem uslova (18.24a), (18.24a′) iz (20.8) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}_{(jm)} &= \underset{1}{R}_{(jm)} - N\underset{1}{\psi}_{(pq)}F^p_j F^q_m - 2\underset{1}{\psi}_{(jm)} + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_j F^r_p F^q_m \\ &+ 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_m F^r_p F^q_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{rj}\psi_q F^q_p F^r_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{rm}\psi_m F^q_p F^r_j.\end{aligned} \tag{20.9}$$

Iz (20.8) i (20.9) dobijamo

$$\begin{aligned}(N-2)F^p_j F^q_m \underset{1}{\psi}_{(pq)} &= (N-2)\underset{1}{\psi}_{(jm)} + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\psi_q F^q_j F^r_p \\ &+ 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jr}\psi_q F^q_m F^r_p + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_j F^r_p F^q_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_m F^r_p F^q_j.\end{aligned} \tag{20.10}$$

Zamenom (20.10) u (20.9) dobijamo

$$\begin{aligned}(N+2)\underset{1}{\psi}_{(jm)} &= \underset{1}{R}_{(jm)} - \underset{1}{\overline{R}}_{(jm)} - \frac{2}{N-2}(N\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\psi_q F^q_j F^r_p \\ &+ N\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jr}\psi_q F^q_m F^r_p + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_j F^r_p F^q_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_m F^r_p F^q_j) \\ &- 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\psi_q F^q_p F^r_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jr}\psi_q F^q_p F^r_m.\end{aligned} \tag{20.11}$$

Koristeći (20.7) i (20.11) dobijamo

$$\begin{aligned}(N+2)\underset{1}{\psi}_{jm} &= \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm} + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mj}\psi_p - \frac{2N-2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\psi_q F^q_j F^r_p \\ &- \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jr}\psi_q F^q_m F^r_p - \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_j F^r_p F^q_m \\ &- \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\psi_m F^r_p F^q_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\psi_q F^q_p F^r_j.\end{aligned} \tag{20.12}$$

Eliminacijom ψ_i koričenjem uslova (19.8) poslednja jednakost postaje

$$(N+2)\underset{1}{\psi}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{\overline{R}}_{jm} + \underset{1}{\overline{P}}_{jm} - \underset{1}{P}_{jm}, \tag{20.13}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}\underset{1}{P}_{jm} &= \frac{2}{N+2}(\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mj}\Gamma^q_{qp} - \frac{N-1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\Gamma^s_{sq}F^q_j F^r_p - \frac{1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jr}\Gamma^s_{sq}F^q_m F^r_p \\ &- \frac{1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\Gamma^s_{sj}F^r_p F^q_m - \frac{1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{qr}\Gamma^s_{sm}F^r_p F^q_j - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{mr}\Gamma^s_{sq}F^q_p F^r_j).\end{aligned} \tag{20.14}$$

Na isti način je definisan objekat $\underset{1}{\overline{P}}_{jm}$ prostora $G\overline{K}_N$. Eliminacijom $\underset{1}{\psi}_{jm}$ iz (20.4) dobijamo

$$HP\underset{1}{\overline{W}}{}^i{}_{jmn} = HP\underset{1}{W}{}^i{}_{jmn}, \tag{20.15}$$

pri čemu je veličina

$$
\begin{aligned}
HP\underset{1}{W}{}^{i}{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{N+2}[\delta^i_m (\underset{1}{R}_{jn} - \underset{1}{P}_{jn}) + \delta^i_j (\underset{1}{R}_{[mn]} - \underset{1}{P}_{[mn]}) \\
&- \delta^i_n (\underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{P}_{jm}) + F^p_j F^i_n (\underset{1}{R}_{pm} - \underset{1}{P}_{pm}) - F^p_j F^i_m (\underset{1}{R}_{pn} - \underset{1}{P}_{pn}) \\
&+ F^i_j F^p_n (\underset{1}{R}_{pm} - \underset{1}{P}_{pm}) - F^i_j F^p_m (\underset{1}{R}_{pn} - \underset{1}{P}_{pn}) - 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^q_{qj} - 2\delta^i_j \Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^q_{qp} \\
&+ 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^s_{sq} F^q_j F^i_p + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^s_{sq} F^q_p F^i_j]
\end{aligned} \tag{20.16}
$$

izražena preko objekata prostora GK_N. Na isti način je izražena veličina $HP\underset{1}{\overline{W}}{}^{i}{}_{jmn}$ preko geometrijskih objekata prostora $G\overline{K}_N$. Očigledno je da veličina $HP\underset{1}{W}{}^{i}{}_{jmn}$ nije tenzor, pa ćemo je zvati **ekvitorzionim holomorfno projektivnim parametrom prve vrste** prostora GK_N. Prema tome dokazana je sledeća teorema:

Teorema 20.1. *Ekvitorzioni holomorfno projektivni parametar prve vrste je invarijanta ekvitorzionog holomorfno projektivnog preslikavanja koje očuvava kompleksnu strukturu generalisanih Kelerovih prostora GK_N i $G\overline{K}_N$.*

20.2. Holomorfno projektivni parametri druge vrste

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{2}{R}$ i $\underset{2}{\overline{R}}$ prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ data je sa

$$
\underset{2}{\overline{R}}{}^{i}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{mp} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}P^i_{pj}. \tag{20.17}
$$

Zamenom (19.5), (19.7) i (20.2) u (20.17) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} + \delta^i_j \underset{2}{\psi}_{[mn]} - \delta^i_n \underset{2}{\psi}_{jm} \\
&+ F^p_j (F^i_n \underset{2}{\psi}_{pm} - F^i_m \underset{2}{\psi}_{pn}) + F^i_j (F^p_n \underset{2}{\psi}_{pm} - F^p_m \underset{2}{\psi}_{pn}) \\
&+ 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi_p \delta^i_j + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\psi_j - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi_q F^q_p F^i_j - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\psi_q F^q_j F^i_p,
\end{aligned} \tag{20.18}
$$

gde smo označili

$$
\underset{2}{\psi}_{ij} = \psi_{i\underset{2}{|}j} - \psi_i\psi_j + \psi_p F^p_i \psi_q F^q_j. \tag{20.19}
$$

Kontrakcijom po indeksima i, n u (20.18) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}_{jm} &= \underset{2}{R}_{jm} + \underset{2}{\psi}_{[mj]} - N\underset{2}{\psi}_{jm} - F^p_j F^q_m \underset{2}{\psi}_{(pq)} \\
&+ 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\psi_p - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{rm}}\psi_q F^q_p F^r_j - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{rm}}\psi_q F^q_j F^r_p
\end{aligned} \tag{20.20}
$$

Antisimetrizacijom bez deljenja u (20.20) po indeksima j, m dobijamo

$$
\begin{aligned}
(N+2)\underset{2}{\psi}_{[jm]} &= \underset{2}{R}_{[jm]} - \underset{2}{\overline{R}}_{[jm]} + 4\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jm}\psi_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_p F^r_j \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_p F^r_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_j F^r_p + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_m F^r_p .
\end{aligned}
\tag{20.21}
$$

Simetrizacijom bez deljenja po indeksima j, m u (20.20) dobija se

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}_{(jm)} &= \underset{2}{R}_{(jm)} - N\underset{2}{\psi}_{(jm)} - 2F^p_j F^q_m \underset{2}{\psi}_{(pq)} - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_p F^r_j \\
&\quad - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_p F^r_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_j F^r_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_m F^r_p .
\end{aligned}
\tag{20.21}
$$

Važi analogna relacija relaciji (18.24b) za prostor $G\overline{K}_N$, tj.

$$
\underset{2}{\overline{R}}_{(pq)} F^p_i F^q_j = \underset{2}{\overline{R}}_{(ij)} - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{ps} F^r_j F^s_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jq}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pm} .
\tag{18.24b$'$}
$$

Kompozicijom sa $F^j_p F^m_q$, kontrakcijom po indeksima j, m, i korišćenjem uslova (18.24b), (18.24b$'$) iz (20.21) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}_{(jm)} &= \underset{2}{R}_{(jm)} - N\underset{2}{\psi}_{(pq)} F^p_j F^q_m - 2\underset{2}{\psi}_{(jm)} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jr}\psi_q F^q_p F^r_m \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mr}\psi_q F^q_p F^r_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_j F^r_p F^q_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_m F^r_p F^q_j .
\end{aligned}
\tag{20.22}
$$

Iz (20.21) i (20.22) dobijamo

$$
\begin{aligned}
(N-2)F^p_j F^q_m \underset{2}{\psi}_{(pq)} &= (N-2)\underset{2}{\psi}_{(jm)} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_j F^r_p \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_m F^r_p + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_j F^r_p F^q_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_m F^r_p F^q_j .
\end{aligned}
\tag{20.23}
$$

Zamenom (20.23) u (20.22) dobijamo

$$
\begin{aligned}
(N+2)\underset{2}{\psi}_{(jm)} &= \underset{2}{R}_{(jm)} - \underset{2}{\overline{R}}_{(jm)} - \frac{2}{N-2}\big(N\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_j F^r_p \\
&\quad + N\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_m F^r_p + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_j F^r_p F^q_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_m F^r_p F^q_j\big) \\
&\quad - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_p F^r_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_p F^r_m .
\end{aligned}
\tag{20.24}
$$

Iz (20.21) i (20.24) dobijamo sabiranjem

$$
\begin{aligned}
(N+2)\underset{2}{\psi}_{jm} &= \underset{2}{R}_{jm} - \underset{2}{\overline{R}}_{jm} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jm}\psi_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_p F^r_j \\
&\quad - \frac{2N-2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rm}\psi_q F^q_j F^r_p - \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rj}\psi_q F^q_m F^r_p \\
&\quad - \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_j F^r_p F^q_m - \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{rq}\psi_m F^r_p F^q_j .
\end{aligned}
\tag{20.25}
$$

Eliminacijom ψ_i koričenjem uslova (19.8) poslednja jednakost postaje

$$(N+2)\underset{2}{\psi}_{jm} = \underset{2}{R}_{jm} - \underset{2}{\overline{R}}_{jm} + \underset{2}{\overline{P}}_{jm} - \underset{2}{P}_{jm}, \tag{20.26}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned} \underset{2}{P}_{jm} = {} & \frac{2}{N+2}\Big(\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^q_{qp} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{rm}}\Gamma^s_{sq}F^q_pF^r_j - \frac{N-1}{N-2}\Gamma^p_{\underset{\vee}{rm}}\Gamma^s_{sq}F^q_jF^r_p \\ & - \frac{1}{N-2}\Gamma^p_{\underset{\vee}{rj}}\Gamma^s_{sq}F^q_mF^r_p - \frac{1}{N-2}\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^s_{sj}F^r_pF^q_m - \frac{1}{N-2}\Gamma^p_{\underset{\vee}{rq}}\Gamma^s_{sm}qF^r_pF^q_j\Big). \end{aligned} \tag{20.27}$$

Na isti način je definisan objekat $\underset{2}{\overline{P}}_{jm}$ prostora $G\overline{K}_N$. Eliminacijom $\underset{2}{\psi}_{jm}$ iz (20.18) dobijamo

$$HP\underset{2}{\overline{W}}{}^i{}_{jmn} = HP\underset{2}{W}{}^i{}_{jmn}, \tag{20.28}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned} HP\underset{2}{W}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+2}\big[\delta^i_m(\underset{2}{R}_{jn} - \underset{2}{P}_{jn}) + \delta^i_j(\underset{2}{R}_{[mn]} - \underset{2}{P}_{[mn]}) \\ & - \delta^i_n(\underset{2}{R}_{jm} - \underset{2}{P}_{jm}) + F^p_jF^i_n(\underset{2}{R}_{pm} - \underset{2}{P}_{pm}) - F^p_jF^i_m(\underset{2}{R}_{pn} - \underset{2}{P}_{pn}) \\ & + F^i_jF^p_n(\underset{2}{R}_{pm} - \underset{2}{P}_{pm}) - F^i_jF^p_m(\underset{2}{R}_{pn} - \underset{2}{P}_{pn}) - 2\delta^i_j\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\Gamma^q_{qp} - 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{nm}}\Gamma^q_{qj} \\ & + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\Gamma^s_{sq}F^q_pF^i_j + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}\Gamma^s_{sq}F^q_jF^i_p\big]. \end{aligned} \tag{20.29}$$

Očigledno je da veličina $HP\underset{2}{W}{}^i{}_{jmn}$ nije tenzor, pa ćemo je zvati **ekvitorzionim holomorfno projektivnim parametrom druge vrste** prostora GK_N. Prema tome dokazana je sledeća teorema:

Teorema 20.2. *Ekvitorzioni holomorfno projektivni parametar druge vrste je invarijanta ekvitorzionog holomorfno projektivnog preslikavanja koje očuvava kompleksnu strukturu generalisanih Kelerovih prostora* GK_N *i* $G\overline{K}_N$.

20.3. Holomorfno projektivni parametri treće vrste

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{3}{R}$ i $\underset{3}{\overline{R}}$ prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ data je sa

$$\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + 2P^p_{nm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{nm}}P^i_{\underset{\vee}{pj}}. \tag{20.30}$$

Zamenom (19.5), (19.7) i (20.2) u (20.30) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} + \delta^i_j\,(\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm} \\
&\quad + F^p_j(F^i_n \underset{1}{\psi}_{pm} - F^i_m \underset{2}{\psi}_{pn}) + F^i_j(F^p_n \underset{1}{\psi}_{pm} - F^p_m \underset{2}{\psi}_{pn}) \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mj}\psi_n + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{nj}\psi_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\psi_q F^q_n F^p_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\psi_q F^q_m F^p_n,
\end{aligned} \tag{20.31}
$$

gde smo označili

$$
\underset{\theta}{\psi}_{ij} = \psi_{i\underset{\theta}{|}j} - \psi_i\psi_j + \psi_p F^p_i \psi_q F^q_j, \quad (\theta = 1, 2). \tag{20.32}
$$

Kako je još

$$
\underset{2}{\psi}_{[mn]} = \underset{1}{\psi}_{[mn]} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_p,
$$

jednačina (20.31) postaje

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{1}{\psi}_{jn} + \delta^i_j\,(\underset{1}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm} \\
&\quad + F^p_j(F^i_n \underset{1}{\psi}_{pm} - F^i_m \underset{1}{\psi}_{pn}) + F^i_j(F^p_n \underset{1}{\psi}_{pm} - F^p_m \underset{1}{\psi}_{pn}) \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jn}\psi_p\delta^i_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\psi_p\delta^i_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn}\psi_q F^p_j F^i_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn}\psi_q F^i_j F^p_m \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mj}\psi_n + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{nj}\psi_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\psi_q F^q_n F^p_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\psi_q F^q_m F^p_n,
\end{aligned} \tag{20.32}
$$

Kontrakcijom po indeksima i, n u (20.32) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}_{jm} &= \underset{3}{R}_{jm} + \underset{1}{\psi}_{[mj]} - N\underset{1}{\psi}_{jm} - F^p_j F^q_m \underset{1}{\psi}_{(pq)} \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\psi_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pm}\psi_q F^q_r F^p_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\psi_q F^q_m F^p_r.
\end{aligned} \tag{20.33}
$$

Antisimetrizacijom bez deljenja u (20.33) po indeksima j, m dobijamo

$$
\begin{aligned}
(N+2)\underset{1}{\psi}_{[jm]} &= \underset{3}{R}_{[jm]} - \overline{\underset{3}{R}}_{[jm]} + 4\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\psi_p - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\psi_q F^q_r F^p_m \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pm}\psi_q F^q_r F^p_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\psi_q F^q_m F^p_r + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pm}\psi_q F^q_j F^p_r.
\end{aligned} \tag{20.34}
$$

Simetrizacijom bez deljenja po indeksima j, m u (20.33) dobija se

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}_{(jm)} &= \underset{3}{R}_{(jm)} - N\underset{1}{\psi}_{(jm)} - 2F^p_j F^q_m \underset{1}{\psi}_{(pq)} - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pj}\psi_q F^q_r F^p_m \\
&\quad - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pm}\psi_q F^q_r F^p_j - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pj}\psi_q F^q_m F^p_r - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pm}\psi_q F^q_j F^p_r.
\end{aligned} \tag{20.35}
$$

Kompozicijom sa $F^j_p F^m_q$, kontrakcijom po indeksima j, m, i korišćenjem uslova (18.24c), i analogne relacije relaciji (18.24c) za prostor $G\overline{K}_N$ iz (20.33) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}_{(jm)} &= \underset{3}{R}_{(jm)} - N\underset{1}{\psi}_{(pq)} F^p_j F^q_m - 2\underset{1}{\psi}_{(jm)} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{mp}\psi_q F^q_r F^p_j \\
&\quad + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{jp}\psi_q F^q_r F^r_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_m F^p_r F^q_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_j F^p_r F^q_m.
\end{aligned} \tag{20.36}
$$

Iz (20.35) i (20.36) dobijamo

$$\begin{aligned}(N-2)F^p_j F^q_m \underset{1}{\psi}_{(pq)} &= (N-2)\underset{1}{\psi}_{(jm)} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_m F^p_r F^q_j \\ &+ 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_j F^p_r F^q_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\psi_q F^q_m F^p_r + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pm}\psi_q F^q_j F^p_r.\end{aligned} \tag{20.37}$$

Zamenom (20.37) u (20.36) dobijamo

$$\begin{aligned}(N+2)\underset{1}{\psi}_{(jm)} = \underset{3}{R}_{(jm)} - \underset{3}{\overline{R}}_{(jm)} &- \frac{2}{N-2}(N\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pj}\psi_q F^q_m F^p_r \\ &+ N\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pm}\psi_q F^q_j F^p_r + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_m F^p_r F^q_j + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_j F^p_r F^q_m) \\ &- 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\psi_q F^q_r F^p_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pm}\psi_q F^q_r F^p_j.\end{aligned} \tag{20.38}$$

Iz (20.34) i (20.38) dobijamo sabiranjem

$$\begin{aligned}(N+2)\underset{1}{\psi}_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} - \underset{3}{\overline{R}}_{jm} + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\psi_p &- \frac{2N-2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\psi_q F^q_m F^p_r \\ &- \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pm}\psi_q F^q_j F^p_r - \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_m F^p_r F^q_j \\ &- \frac{2}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\psi_j F^p_r F^q_m - \underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pj}\psi_q F^q_r F^p_m.\end{aligned} \tag{20.39}$$

Eliminacijom ψ_i koričenjem uslova (18.8) poslednja jednakost postaje

$$(N+2)\underset{1}{\psi}_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} - \underset{3}{\overline{R}}_{jm} + \underset{3}{\overline{P}}_{jm} - \underset{3}{P}_{jm}, \tag{20.40}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}\underset{3}{P}_{jm} = \frac{2}{N+2}(\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mj}\Gamma^q_{qp} &- \frac{N-1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pj}\Gamma^s_{sq}F^q_m F^p_r - \frac{1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pm}\Gamma^s_{sq}F^q_j F^p_r \\ - \frac{1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\Gamma^s_{sm}F^p_r F^q_j &- \frac{1}{N-2}\underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pq}\Gamma^s_{sj}F^p_r F^s_m - \underset{\vee}{\Gamma}{}^r_{pj}\Gamma^s_{sq}F^q_r F^p_m).\end{aligned} \tag{20.41}$$

Eliminacijom $\underset{1}{\psi}_{jm}$ iz (20.31) dobijamo

$$HP\underset{3}{\overline{W}}{}^i{}_{jmn} = HP\underset{3}{W}{}^i{}_{jmn}, \tag{20.42}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}HP\underset{3}{W}{}^i{}_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \frac{1}{N+2}[\delta^i_m(\underset{3}{R}_{jn} - \underset{3}{P}_{jn}) + \delta^i_j(\underset{3}{R}_{[mn]} - \underset{3}{P}_{[mn]}) \\ &- \delta^i_n(\underset{3}{R}_{jm} - \underset{3}{P}_{jm}) + F^p_j F^i_n(\underset{3}{R}_{pm} - \underset{3}{P}_{pm}) - F^p_j F^i_m(\underset{3}{R}_{pn} - \underset{3}{P}_{pn}) \\ &+ F^i_j F^p_n(\underset{3}{R}_{pm} - \underset{3}{P}_{pm}) - F^i_j F^p_m(\underset{3}{R}_{pn} - \underset{3}{P}_{pn}) - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{jn}\Gamma^q_{qp}\delta^i_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^p_{mn}\Gamma^q_{qp}\delta^i_j \\ &+ 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn}\Gamma^s_{sq}F^p_j F^i_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^q_{pn}\Gamma^s_{sq}F^i_j F^p_m - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{mj}\Gamma^p_{pn} - 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{nj}\Gamma^p_{pm} \\ &+ 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\Gamma^s_{sq}F^q_n F^p_m + 2\underset{\vee}{\Gamma}{}^i_{pj}\Gamma^s_{sq}F^q_m F^p_n].\end{aligned} \tag{20.43}$$

Veličina $HP\underset{3}{W}{}^i{}_{jmn}$ nije tenzor, pa ćemo je zvati **ekvitorzionim holomorfno projektivnim parametrom treće vrste** prostora GK_N. Prema tome dokazana je sledeća teorema:

Teorema 20.3. *Ekvitorzioni holomorfno projektivni parametar treće vrste je invarijanta ekvitorzionog holomorfno projektivnog preslikavanja koje očuvava kompleksnu strukturu generalisanih Kelerovih prostora GK_N i $G\overline{K}_N$.*

20.4. Holomorfno projektivni parametri četvrte vrste

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{4}{R}$ i $\underset{4}{\overline{R}}$ prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ data je sa

$$\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + 2P^p_{mn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}P^i_{\underset{\vee}{pj}}. \tag{20.44}$$

Zamenom (19.5), (19.7) i (20.2) u (20.44) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\psi}_{jn} + \delta^i_j (\underset{2}{\psi}_{mn} - \underset{1}{\psi}_{nm}) - \delta^i_n \underset{1}{\psi}_{jm}\\ &+ F^p_j(F^i_n\underset{1}{\psi}_{pm} - F^i_m\underset{2}{\psi}_{pn}) + F^i_j(F^p_n\underset{1}{\psi}_{pm} - F^p_m\underset{2}{\psi}_{pn})\\ &+ 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{mj}}\psi_n + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{nj}}\psi_m - 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}\psi_q F^q_n F^p_m - 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}\psi_q F^q_m F^p_n,\end{aligned} \tag{20.45}$$

Na isti način kao u prethodnom slučaju dobija se

$$HP\underset{4}{\overline{W}}{}^i{}_{jmn} = HP\underset{4}{W}{}^i{}_{jmn}, \tag{20.46}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned}HP\underset{4}{W}{}^i{}_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+2}[\delta^i_m (\underset{4}{R}_{jn} - \underset{3}{P}_{jn}) + \delta^i_j (\underset{4}{R}_{[mn]} - \underset{3}{P}_{[mn]})\\ &- \delta^i_n (\underset{4}{R}_{jm} - \underset{3}{P}_{jm}) + F^p_j F^i_n(\underset{4}{R}_{pm} - \underset{3}{P}_{pm}) - F^p_j F^i_m(\underset{4}{R}_{pn} - \underset{3}{P}_{pn})\\ &+ F^i_j F^p_n(\underset{4}{R}_{pm} - \underset{3}{P}_{pm}) - F^i_j F^p_m(\underset{4}{R}_{pn} - \underset{3}{P}_{pn}) - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^q_{qp}\delta^i_m - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^q_{qp}\delta^i_j\\ &+ 2\Gamma^q_{\underset{\vee}{pn}}\Gamma^s_{sq}F^p_j F^i_m + 2\Gamma^q_{\underset{\vee}{pn}}\Gamma^s_{sq}F^i_j F^p_m - 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{mj}}\Gamma^p_{pn} - 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{nj}}\Gamma^p_{pm}\\ &+ 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}\Gamma^s_{sq}F^q_n F^p_m + 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}}\Gamma^s_{sq}F^q_m F^p_n].\end{aligned} \tag{20.47}$$

Veličina $HP\underset{4}{W}{}^i{}_{jmn}$ nije tenzor, pa ćemo je zvati **ekvitorzionim holomorfno projektivnim parametrom četvrte vrste** prostora GK_N. Prema tome dokazana je sledeća teorema:

Teorema 20.4. *Ekvitorzioni holomorfno projektivni parametar četvrte vrste je invarijanta ekvitorzionog holomorfno projektivnog preslikavanja koje očuvava kompleksnu strukturu generalisanih Kelerovih prostora GK_N i $G\overline{K}_N$.*

20.5. Holomorfno projektivni tenzor

Veza izmedju tenzora krivine $\underset{5}{R}$ i $\underset{5}{\overline{R}}$ prostora GK_N i $G\overline{K}_N$ data je sa

$$(20.48)\qquad \begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{2}(P^i_{\underset{1}{jm|n}} - P^i_{\underset{2}{jn|m}} + P^i_{\underset{2}{mj|n}} - P^i_{\underset{1}{nj|m}} \\ &+ P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{mp} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + 4\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}P^i_{\underset{\vee}{pm}} + 4\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}P^i_{\underset{\vee}{pn}}).\end{aligned}$$

Zamenom (19.5), (19.7) i (20.2) u (20.48) dobijamo

$$(20.49)\qquad \begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} &+ \delta^i_m \underset{12}{\psi}_{jn} + \delta^i_j \underset{12}{\psi}_{[mn]} - \delta^i_n \underset{12}{\psi}_{jm} \\ &+ F^p_j(F^i_n \underset{12}{\psi}_{pm} - F^i_m \underset{12}{\psi}_{pn}) + F^i_j(F^p_n \underset{12}{\psi}_{pm} - F^p_m \underset{12}{\psi}_{pn}),\end{aligned}$$

gde smo označili

$$(20.50)\qquad \underset{12}{\psi}_{jm} = \frac{1}{2}(\psi_{\underset{1}{j|m}} + \psi_{\underset{2}{j|m}}) - \psi_j\psi_m + \psi_p F^p_j \psi_q F^q_m.$$

Kontrakcijom po indeksima i, n u (20.49) dobijamo

$$(20.51)\qquad \underset{5}{\overline{R}}_{jm} = \underset{5}{R}_{jm} - \underset{12}{\psi}_{[jm]} - N\underset{12}{\psi}_{jm} - F^p_j F^q_m \underset{12}{\psi}_{(pq)}.$$

Antisimetrizacijom bez deljenja u (20.51) po indeksima j, m dobijamo

$$(20.52)\qquad (N+2)\underset{1}{\psi}_{[jm]} = \underset{5}{R}_{[jm]} - \underset{5}{\overline{R}}_{[jm]}.$$

Simetrizacijom bez deljenja po indeksima j, m u (20.51) dobija se

$$(20.53)\qquad \underset{5}{\overline{R}}_{(jm)} = \underset{5}{R}_{(jm)} - N\underset{12}{\psi}_{(jm)} - 2F^p_j F^q_m \underset{12}{\psi}_{(pq)}.$$

Kompozicijom sa $F^j_p F^m_q$, kontrakcijom po indeksima j, m, i korišćenjem uslova (18.24e), i analogne relacije relaciji (18.24e) za prostor $G\overline{K}_N$ iz (53) dobijamo

$$(20.54)\qquad \underset{5}{\overline{R}}_{(jm)} = \underset{5}{R}_{(jm)} - N\underset{12}{\psi}_{(pq)} F^p_j F^q_m - 2\underset{12}{\psi}_{(jm)}.$$

Iz (20.53) i (20.54) dobijamo

$$F_j^p F_m^q \underset{12}{\psi}_{(pq)} = \underset{12}{\psi}_{(jm)}. \tag{20.55}$$

Zamenom (20.55) u (20.54) dobijamo

$$(N+2)\underset{12}{\psi}_{(jm)} = \underset{5}{R}_{(jm)} - \underset{5}{\overline{R}}_{(jm)}. \tag{20.56}$$

Iz (20.52) i (20.56) dobijamo sabiranjem

$$(N+2)\underset{12}{\psi}_{jm} = \underset{5}{R}_{jm} - \underset{5}{\overline{R}}_{jm}. \tag{20.57}$$

Eliminacijom $\underset{12}{\psi}_{jm}$ iz (20.49) dobijamo

$$HP\underset{5}{\overline{W}}{}^i{}_{jmn} = HP\underset{5}{W}{}^i{}_{jmn}, \tag{20.58}$$

gde smo označili

$$\begin{aligned} HP\underset{5}{W}{}^i{}_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+2}[\delta^i_m \underset{5}{R}_{jn} + \delta^i_j \underset{5}{R}_{[mn]} - \delta^i_n \underset{5}{R}_{jm} \\ + F^p_j(F^i_n \underset{5}{R}_{pm} - F^i_m \underset{5}{R}_{pn}) + F^i_j(F^p_n \underset{5}{R}_{pm} - F^p_m \underset{5}{R}_{pn})]. \end{aligned} \tag{20.59}$$

Za razliku od prethodnih slučajeva kada veličine $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1, \cdots, 4)$ nisu bile tenzori, veličina $HP\underset{5}{W}{}^i{}_{jmn}$ je tenzor, pa ćemo je zvati **ekvitorzionim holomorfno projektivnim tenzorom** prostora GK_N. Prema tome dokazana je sledeća teorema:

Teorema 10. *Ekvitorzioni holomorfno projektivni tenzor je invarijanta ekvitorzionog holomorfno projektivnog preslikavanja koje očuvava kompleksnu strukturu generalisanih Kelerovih prostora* GK_N *i* $G\overline{K}_N$*.*

20.6. Slučaj Kelerovih prostora

U slučaju holomorfno projektivnih preslikavanja Kelerovih prostora veličine $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1, \cdots, 5)$, date formulama (20.16, 29, 43, 47, 59) svode se na tenzor holomorfno projektivne krivine [83]

$$HPW^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+2}(R_{j[n}\delta^i_{m]} + F^p_j R_{p[m}F^i_{n]} + 2F^i_j F^p_n R_{pm}).$$

LITERATURA

[1] A. V. Aminova, *On geodesic mappings of the Riemannian spaces Tensor N. S.* 46, (1987), 179–186.

[2] T. P. Andjelić, *Tenzorski račun*, *"Naučna knjiga" Beograd*, 1987.

[3] S. M. Bahrah, *Conform euclidian generalzed Riemannian spaces*, Izvestija VUZ, No 6(49), 1965, 23–26 (In Rissian).

[4] V. Berezovski, J. Mikeš, *On the classification of almost geodesic mappings of affine connected spaces*, Dif. Geom. and Apl., Proc. of the Conf. Dubrovnik, 3, 1988, 41–48.

[5] V. V. Domašev, J. Mikeš, *On the theory of holomorphically projective mappings of Kählerian spaces*, Mat. zametki, 23, 2, 1978, 297–304.

[6] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Modern deometry* , *Moscow "Nauka",* 1979 (In Rissian).

[7] A. Einstein, Prilog II u knjizi: *The meaning of relativity*, 4^{th} edit., Princeton, 1953.

[8] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian geometry*, *New York,* 1927.

[9] L. P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces I*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 1951, 311-315.

[10] L. P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces II*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38, 1952, 505-508.

[11] S. Formella, *Geodesic mappings of pseudo-Riemannian manifolds*, Demon. Math. XXVII, *No* 2, 1994, 451–460.

[12] G. C. Goel, *Generalized Riemann spaces*, Tensor, 16No 1, 1965, 66–69.

[13] F. Graif, *Sulla posibilita di construire paralelogrami chiusi in alcune varieta a torsione*, Boll. d. Un. math. Ital., Ser. III,7, 1952, 132-135.

[14] Д. Громол, В. Клингеберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Москва "Мир", 1971.

[15] И. Иванова-Каратопраклиева, *Диференциална геометрия*, Софийски университет, 1989.

[16] В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей* II, Т. И, ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948.

[17] В. Ф. Каган, *Субпроективные пространства* М.:Физматгиз, 1961.

[18] T. Levi-Civita, *Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche*, Ann. di. Mat. Ser. 2, 24, 1896, 255-300.

[19] S. B. Mathur, *Conformal spaces and curvature tensors*, Indian J. of Pure and Appl. Math., 2, No 1, 1971, 29–31.

[20] Й. Микеш, *О геодезических отображениях полусиметрических римановых пространств*, ВИНИТИ, $N^{\underline{o}}5, 3924 - 76$ Деп.$1 - 19$, 1979.

[21] J. Mikeš, *On holomorphicaly projective mappings of Kählerian spaces*, Ukr. Geom. Sb., 23, 1980, 90–98.

[22] J. Микеш, *О геодезических отображениях пространства Эйнештейна*, Мат. заметки, 28, 1980, 313–317.

[23] J. Mikeš, *Geodesic mappings of special Riemannian spaces*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 46. Topics in Diff. Geom., Debrecen (Hungary), , 1984, 793–813.

[24] J. Mikeš, *On an order of special transformartion of Riemannian spaces*, Dif. Geom. and Apl., Proc. of the Conf. Dubrovnik, 3, 1988, 199–208.

[25] Й. Микеш, Ж. Радулович, *О конциркулярных и торсообразующих векторных полях "в целом"*, Math. Montisnigri, IV, 1995, 43–54

[26] J. Mikeš, *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, Itogi Nauki i Tekhniky, Ser. Probl. Geom. VINITI, 1988.

[27] J. Mikeš, *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, J. Math. Sci. New York, , , 311–333, 1996.

[28] J. Mikeš, G. A. Starko, *K-koncircular vector fields and holomorphically projective mappings on Kählerian spaces*, Rend. del Circolo di Palermo, 46, 1997, 123–127.

[29] S. M. Minčić, *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion*, Matematički vesnik, 10(25)Sv. 2 , 1973, 161-172.

[30] S. M. Minčić, *A Generalization of the Codazzi and Gauss Equatoons of a Subspace of a Generalized Riemannian Space*, Boll. de. Un. Mat. italiana, (4),10, 1974, 375-379.

[31] С. М. Минчич , *О тензорах и псеудотензорах кривизны пространства несимметричной связности*, Math. Balk., 4. 76, 1974, 427-430.

[32] S. M. Minčić, *Generalisani Rimanovi prostori*, Doktorska disertacija, N. Sad, 1975.

[33] S. M. Minčić, *Ricci type identities in a subspace of a space of non-summetric affine connexion*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 18(32), 1975 , 137-148.

[34] S. M. Minčić, *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Matematički vesnik , 13(28), 1976, 421-435.

[35] S. M. Minčić, *New commutation formulas in the non-symetric affine connexion space*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N. S) Matematički vesnik, 22(36), 1977, 189-199.

[36] С. М. Минчич, *Новые тождества типа Риччи в подпространстве пространства несимметричной аффинной связаности*, Известия ВУЗ, Математика, 4(203), 1979, 17-27.

[37] S. M. Minčić, *Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-symmetric affine connexion*, Coll. math. soc. János Bolayai, 31. Dif. geom., Budapest (Hungary), 1979, 445-460.

[38] S. M. Minčić, *Integrability conditions of derivational formulas of subspace of a generalized Riemannian space*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 31(45), 1980, 141-157.

[39] S. M. Minčić, *Derivational formulas of a subspace of a generalized Riemannian space*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 34(48), 1983, 125-135.

[40] С. М. Минчич, *О векторе кривизны кривой в подпространстве обобщенного риманова пространства* , Facta Universitatis, Ser. Math. Inform, 2, 1987, 75-89.

[41] S. M. Minčić, *Frenet formulas for curves in a generalized Riemannian space*, Zbor. rad. Fil. Fak (Niš) Ser. Mat., 3, 1989, 73-82.

[42] С. М. Минчич, *Геометрические интерпретации тензоров и псевдотензоров кривизны пространства несимметричной аффиной связности*, Publ. de l'Inst. Math., 47(61), 1990, 113-120.

[43] S. M. Minčić, *Ricci coefficients of rotation in a generalized Riemannian space*, Publ. Math. Debrecen, T. 41 FASC. 3-4, 1992, 173-180.

[44] S. M. Minčić, *Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connexion*, Zbor. Rad. Pri. Mat. Fak. (Kragujevac), 16, 1994, 53-60.

[45] S. M. Minčić, *Some characteristics of curvature tensors of nonsymmetric affine connexion*, Novi Sad J. Math., 29 *No.* 3, 1999, 169–186.

[46] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *On geodesic mappings of general affine connexion spaces and of generalized Riemannian spaces*, Matematički vesnik, 49, 1997, 27–33.

[47] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *Equitorsion geodesic mappings of generalized Riemannian spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S), 61 (75), 1997, 97-104.

[48] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces*, submitted.

[49] R. S. Mishra, *Subspaces of a generalized Riemannian space*, Bull. Acad. Roy. Belgique, 1954, 1058-1071.

[50] P. Mocanu, *Spatii partial projective*, Acad RPR, 6, 1955, 3, 4.

[51] T. Otsuki, Y. Tasiro, *On curves in Kählerian spaces*, Math. J. Okayama Univ., 4 No 1 6, 1954, 57–78.

[52] Л. С. Понтрягин, *Диференциальные уравнения*, М.:Наука, 1974.

[53] M. Prvanović, *Équations de Gaus d'un sous-espace plongé dans l'espace Riemannien généralisé*, Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. sci., 1955, 615-621.

[54] M. Prvanović, *Relative Frenet formulas for curves in a subspace of a Riem. space*, Tensor (NS), 9, *N*º3, 1959, 190-204.

[55] M. Prvanović, *Projective and conformal transformations in recurrent and Ricci-recurent Riemannian space*, Tensor (NS), 12, *N*º3, 1962, 219–226.

[56] M. Prvanović, *Une conexion non-symetrique associés á l'espace Riemannien*, Publ. de l'Inst. Math., Beograd (NS), T.10(24), 1970, 53-64.

[57] M. Prvanović, *Holomorphically projective transformations in a locally product Riemannian spaces*, Math. Balcanica, 1, 1971, 195–213.

[58] M. Prvanović, *A note on holomorphically projective transformations of the Kähler space in a locally product Riemannian spaces*, Tensor, N. S. Vol. 35, 1981, 99–104.

[59] M. Prvanović, *π-Projective Curvature Tensors*, Analles Univ. Mariae Curie - Sklodowska, Lublin - Polonia, XLI, 16, 1986, 123–133.

[60] M. Prvanović and N. Pušić, *On manifolds admitting some semi-symmetric metric connection*, Indian Journal of Math., 37, 1, 1995, 37–67.

[61] M. Prvanović, *Four curvature tensors of non-symmetric affine connexion*, , Proceedings of of the conference "150 years of Lobačevski geometry", Kazan 1976, Moscow 1997, , , 199–205. (in Rusian).

[62] M. Prvanović, *Konformne i projektivne transformacije generalisanih Riemanovih prostora u smislu T. Takasu-a*, Godišnjak Fil. fak. u Novom Sadu knj. III (1958), , , 265–272.

[63] S. S. Pujar, *On totaly real submanifolds of a Kaehlerian manifold admitting the complex conformal connection*, Ind. J. pure and appl. Math., II(10), 1980, 12-59.

[64] S. S. Pujar, *On non-metric semi-symmetric complex connection in a Kaehlerian manifold*, Bul. Cal. Math. Soc., 91(4), 1999, 313–332.

[65] N. Pušić, *On an invariant tensor of a conformal transformation of a hyperbolic Kaehlerian manifold*, Zbornik radova Fil. fak. Niš s. Matem., 4, 1990, 55–64.

[66] N. Pušić, *Charasteristic of some hyperbolic Kaehlerian space*, Coll. of Sci. papers of the Fac. of Sci. Kragujevac, 16, 1994, 97–104.

[67] N. Pušić, *Holomorphically-projecive connections of a hyperbolic Kaehlerian space*, Filomat (Niš), 9:2, 1995, 187–195.

[68] N. Pušić, *On geodesic lines of metric semi-symmetric connection on Riemannian and hyperbolic Kaehlerian spaces*, Novi Sad J. Math., 29, *No* 3, 1999, 291–299.

[69] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Москва, 1967.

[70] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начльный курс топологии* , Москва "Наука", 1977.

[71] S. C. Saxena, R. Behari, *Some properties of generalized Riemann spaces*, Proc. nat. Inst. of sci. India, 426 No 2, 1960, 95–103.

[72] S. C. Saxena, R. Behari, *Some properties and applications of Eisenhart's generalized Riemann spaces*, Proc. nat. Inst. of sci. India, Part A (26), 1960, 48–57.

[73] И. А. Схоутен, Д. Стройк, *Введение в новые методы дифференциальной геометрии* t. II, М.:ИЛ, 1948.

[74] K. D. Singh, *On generalized Riemann spaces*, Riv. Math. Univ. di Parma, 7, 1956, 125–138.

[75] Н. С. Синюков, *О геодезическом отображении римановых пространств на симетрические римановы пространства*, ДАН СССР, 98 *N*º1, 1954, 21-23.

[76] Н. С. Синюков, *Нормальные геодезические отображения римановых пространств*, ДАН СССР, 103 *N*º4, 1956, 766-767.

[77] Н. С. Синюков, *О геодезическом отображении римановых пространств*, Труды третьего всесоюзного математического съезда, т. I. М. Изд. АН СССР, 1956, 167-168.

[78] Н. С. Синюков, *Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими*, ДАН СССР, 137 *N*º6, 1961, 1312-1314.

[79] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения аффино-связных и римановых пространств и некаторые обобщения*, Лит. мат. сб, 3 *N*º2, 1963, 236-237.

[80] Н. С. Синюков, *Почти геодезические отображения аффино-связных и римановых пространств*, ДАН СССР, 151 *N*º4, 1963, 781-782.

[81] Н. С. Синюков, *Тензорный признак* $(N-2)$*-проективных пространств первого типа*, -В кн.:Тезисы докладов IV Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии. Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1969, c. 238.

[82] Н. С. Синюков, *Почти геодезические отображения пространств аффиной связности и е-структури*, Матем. заметки, 7 *N*º4, 1970, 449-459.

[83] Н. С. Синюков, *Геодезические отображеня Римановых пространств* , Москва "Наука", 1979.

[84] N. S. Sinjukov, *Алмост геодесиц маппингс оф аффине-цоннецтед анд Риеманниан спацес*, Itogi Nauki i Tekhniky, Ser. Probl. Geom., VINITI, 13, 1983, 3–26.

[85] Н. С. Синюков, Е. Н. Синюкова, *О голоморфно-проективных отображениях специаьных келеровых пространств*, Мар. заметки, 36, 1984, 417–423.

[86] Е. Н. Синюкова, *О геодезических отображениях некоторых специаьных римановых пространств*, Мар. заметки, 30, 1981, 889–894.

[87] Е. Н. Синюкова, *Геодезические отображения пространств* L_n, Известия ВУЗ, No 3 (238), 1982, 57–61.

[88] В. С. Собчук, *Почти геодезические отображения римановых пространств на симметрические римановы пространства*, Матем. заметки, 17 *N*º5 , 1975, 757-763.

[89] V. S. Sobchuk, J. Mikeš, O. Pokorná, *On almost geodesic mappings* π_2 *between semi-symmetric Riemannian spaces*, Novi Sad J. Math., 29 *No* 3 , 1999, 309–312.

[90] M. S. Stanković, *Geodezijska preslikavanja Rimanovih prostora i uopštenja*, Magistarska teza, Fil. fak. Matematika, Niš, 1996.

[91] M. S. Stanković, *Фирст тыпе алмост геодесиц маппингс оф генерал аффине цоннецтион спацес*, Novi Sad J. Math., 29, No. 3, 1999, 313-323.

[92] M. S. Stanković, *On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces*, FILOMAT (Niš), 13, 1999, 105-114.

[93] M. S. Stanković, S. M. Minčić, *New special geodesic mappings of generalized Riemannian space*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S), 67(81), 2000 , 92-102.

[94] M. S. Stanković, S. M. Minčić, *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, submitted.

[95] M. S. Stanković, S. M. Minčić, *New special geodesic mappings of general affine connection spaces*, Filomat, (accepted).

[96] M. S. Stanković, *On a special almost geodesic mappings of the third type of affine spaces*, (submitted).

[97] В. В. Степанов, *Курс диференциальных уравнений*, М.:Физматгиз, 1959.

[98] П. А. Широков, *Тензорное исчисление* Алгебра тензоров. -Казань, 1961.

[99] T. Takasu, *Generalized Riemannian geometry*, The Yokohama Math. Journal, V. No 2, 1957, 115–169.

[100] T. Thomas, *On the projective Geometry of paths*, Mat. Acad. Sci., USA, 11, 1925, 198-203.

[101] G. Vranceanu, *Lecons de geometrie differentielle*, v. II. -Acad. RPR, 1957.

[102] K. Yano, *Concircular geometry*, I-IV. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16, 1940, 195-200; 354-360;442-448; 505-511.

[103] K. Yano, *On comlex conformal connections*, Kodai Math. Sem. Rep., 26, 1975, 137–151.

[104] K. Yano, *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

[105] S. Yamaguchi, *On Kählerian torse-forming vector fields*, Kodai Math. J., 2 *No* 4, 1979, 103–115.

[106] Н. В. Яблонская, *О некоторых класах почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности*, Укр. Геом. Сборник, 27, 1983, 120–124.

[107] Н. В. Яблонская, *Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением*, ВИНИТИ, *No* 2190–79. БУ, *No* 11, УДК 52.Астрономия, 1979.

[108] H. Weyl, *Zur infintenzimalgeometrie Einordnung der projektiven und der Konformen Auffassung*, Gottinger Nachrichten, 1921, 99-119.

[109] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, Гос. изд. иностр. литер. Москва, 1948.

PREFACE

In this dissertation are considered Some special geodesic mappings of the spaces with non-symmetric affine connection, equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces, almost geodesic mappings of the spaces with non-symmetric affine connection and holomorphically projective mappings of generalized K*ä*hlerian spaces are considered in this dissertation.

The theory of geodesic mappings of Riemannian and the affine connected spaces, and also its generalizations, is very interesting both theoretically and practically. That is to say that namely, the movement of many tipes of mechanical systems, and as well as bodis or particles in gravitational or electromagnetic fields, in continual constant surrounding, is often done in paths, which can be looked upon as geodesic lines of Riemannian or affinne connected spaces, which is defined by energetic regime, along which the process is realizing. So, for example, two Riemannian spaces, which admit reciprocally geodesic mapping, described processes which are unfolded by equivalent exterior load, equal orbit, but different energetic regimes. In this case, one of these processes can be modeled by another.

Still Levi-Civita [18] has came to the problem of geodesic mappings of Riemannian spaces studying the dynamics equations. Kagan in [16] studies the geodesic mappings of surfaces. In recent time geodesic mappings of Riemannian spaces and their generalizations were particularly investigated by Russian authors, especially N. S. Sinjukov [75]-[79], E. N. Sinjukova [86], [87], V. S. Sobčuk [88], [89], J. Mikeš [20]-[28], M. Prvanović [55], [57]-[60], [62], S. M. Minčić and M. S. Stanković [46]-[48], [93], [95] and others.

Basing the existing results on the theory of geodesic and almost geodesic mappings of the spaces with symmetric affine connection, and on the study of the generalized Riemannian spaces and spaces with non-symmetric affine connection, and also on the study of K*ä*ehlerian spaces and holomorphically projective mappings, some existing results are expanded, and also presented the original results partly published in this dissertation [46], [47], [90]-[96].

This dissertation consists of 20 sections, from which §1-4 make Chapter I, §5

Chapter II, §6, 7 Chapter III, §8-10 Chapter IV, §11, 12 Chapter V, §13-17 Chapter VI and §18-20 Chapter VII. Within each paragraph a narrower division is made. Theorems and formulas are numbered within each paragraph independent by on one another like the following: first you name the ordinal paragraph number and then the ordinal number of the theorem or the formula number, for example, the fifth formula of the seventh paragraph is marked like this (7.5). The list of literature in alphabet order is given an the end. We shall present the work content in paragraphs.

Chapter I has a preface character, and containes the basic facts of the theory of the spaces with non-symmetric affine connections and generalized Riemannian spaces, which are necessary for the further presentation in this dissertation. Results expressed in this chapter are based mainly on [2], [3], [6], [7]-[11], [12]-[15], [29]-[45], [49], [55], [56], [61], [69]-[74], [97], [98], [101].

The basic definitions and relations related to the spaces with non-symmetric affine connection and generalized Riemannian spaces are given in §1.

Four kinds of covariant derivative, and also the basic definitions and relations for geodesic lines of the spaces with non-symmetric affine connection are named in §2.

§3 is devoted to the almost geodesic lines of spaces with non-symmetric affine connections, and to generalization of geodesic lines concept. In contrast to geodesic lines, where for both kinds of covariant derivative vector, the same curve line is obtained, in this case we have obtained two kinds of almost geodesic lines, where the geodesic line of the first kind is determined by formula (3.5a) and the second kind by formula (3.5b).

Basic results for Ricci type identities, and curvature tensors and pseudotenzors of the spaces with non-symmetric affine connection are given in §4. Both for spaces with symmetric affine connection, and for Riemannian spaces exist one Ricci identity with respect to mixed covariant derivative of the second kind and one curvature tensor - Riemann-Christoffel's tensor (for example [31], [109]). In the case of the spaces with non-symmetric affine connection, there are ten possibilities to form the difference

$$a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{\pi}{|}m\underset{\rho}{|}n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{\sigma}{|}n\underset{\tau}{|}m}, \quad (\pi,\rho,\sigma,\tau = 1,2) \tag{4.1}$$

where $\underset{1}{|}$ i $\underset{2}{|}$ denotes two kinds of covariant derivative in GA_N, and in this case we have ten Ricci type identities [29], [32]. *Three curvature tensors* given in the formula (4.2-4), and also fifteen *curvature pseudotensors* given in the formula (4.5-19) are appeared. Using the third and the fourth kind of covariant derivative we have yet one new curvature tensor (4.22).

The deformation tensor of the connection and basic relations between the deformation tensor of the connection and five independent curvature tensors are deducted in §5. If $L^h_{ij}(x)$ and $\overline{L}^h_{ij}(x)$ are connection coefficients of the spaces GA_N and $G\overline{A}_N$ then $\overline{L}^h_{ij}(x) = L^h_{ij}(x) + P^h_{ij}(x), \qquad (h,i,j = 1,2,...,N)$. The magnitude $P^h_{ij}(x)$ is a deformation tensor of the connection, according to the mapping f. The formulas (5.3-7) according the relations between the deformation tensor and five independent curvature tensors.

The conform mappings of generalized Riemannian spaces are considered in §6. In the case of this mappings the basic metric tensors of the spaces GR_N and $G\overline{R}_N$ satisfy the condition (6.1). The Christoffel's symbol of the second kind of these spaces are connected by the relation $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\,\psi_k + \delta^i_k\,\psi_j - \psi^i g_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk}$, where ξ^i_{jk} is an antisymmetric tensor. A mapping $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ is *equitorsion* if $\xi^i_{jk} = 0$. In the case of conform mapping f of Riemannian spaces R_N and $\overline{R}_N$ [19], [50], [55], [83], we get an invariant geometric object - the conform curvature tensor

$$C^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \delta^i_m\,P_{jn} - \delta^i_n\,P_{jm} + P^i_m g_{jn} - P^i_n g_{mj}$$

where is

$$P_{jm} \equiv \frac{1}{N-2}(R_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}Rg_{jm}).$$

Having a conform mapping of two generalized Riemannian spaces, we can not find a generalization of conform curvature tensor as an invariant of conform mapping in general case. Five conform curvature tensors (7.17, 20, 30, 31 i 42) for the case of equitorsion conform mapping of generalized Riemannian spaces are obtained in §7.

The basic definitions and relations of the theory of geodesic mappings of the spaces with non-symmetric affine connection and of generalized Riemannian spaces are given in §8. The Theorem 8.1. gives necessary and sufficient condition that a mapping f of the spaces with non-symmetric affine connection is to be geodesic. Necessary and sufficient condition that a mapping of generalized Riemannian spaces to be geodesic are given in the Theorem 8.4. Consequences 1, 2, 3 gave the relations between basic metric tensors of two generalized Riemannian spaces according to the geodesic mappings. In this section is given the retrospect to the geodesic mappings of Riemanian and of the spaces with symmetric affine connection.

A generalization for Thomas's projective parameters in the case of the spaces with non-symmetric affine connection is given in §9. Obtained generalized Thomas's (9.4) projective parameters are an invariant of geodesic mapping of the spaces with non-symmetric affine connection. A new characterization in the Theorem 9.2. of the spaces with non-symmetric affine connection which allows geodesic mappings is also given.

The relations between five independent curvature tensors of the space GA_N with corresponding curvature tensors of the space $G\overline{A}_N$ in geodesic mappings of the theorems 10.1-5 are given in §10. The Theorem 10.6. gives the retrospect to the case of symmetric affine connection and generalized Riemannian spaces.

Some special geodesic mappings of non-symmetric affine connection are investigated in Chapter V . In general case it is not possible to find a generalization of the Weyl's curvature tensor [83]

$$W^i_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \frac{1}{N-1}(\delta^i_m R_{jn} - \delta^i_n N R_{jm}), \tag{11.38}$$

and we introduced some extra conditions for non-symmetric part of the deformation tensor.

The equitorsion geodesic mappings of non-symmetric affinne connection spaces, i.e. geodesic mappings with zero anti-symmetric part of the deformation tensor are investigated in §11. Five invariant geometric objects (11.10, 19, 27, 31, 37) of equitorsion geodesic mappings of nonsymmetric affine connection spaces are obtained here, where $\underset{\theta}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ $(\theta = 1, \cdots, 4)$ are not tensors and we call them the equitorsion projective parameter of the kind θ, and $\underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ is a tensor. In the case of generalized Riemannian spaces the magnitudes $\underset{\theta}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ $(\theta = 1, \cdots, 4)$ reduce to (11.11, 20, 28, 32) and $\underset{5}{\varepsilon}{}^i{}_{jmn}$ has the same form.

By new conditions for anti-symmetric part of the deformation tensor of the connection, five new special geodesic mappings, called $\underset{\theta}{R}$-mappings are obtained in §12. The tensors $W(\underset{\theta}{R})^i{}_{jmn}$ given by formulas (12.12, 21, 31, 36, 41) represented the generalizations of Weil's tensor in the case of $\underset{\theta}{R}$-mappings. In the case of generalized Riemannian spaces they reduce to the tensors (12.12′, 21′, 31′, 36′, 41′) respectively.

Generalizing the conception of a geodesic mappings for Riemannian and affine connected spaces Sinyukov [83] introduced a notion of almost geodesic mappings of these spaces. Beside Sinyukov, almost geodesic mappings of Riemannian and spaces with symmetric affine connection were studed by many other authors, for example [4], [24], [25], [80], [84], [88], [102]. In the works [106] i [107], part of problem of almost geodesic mappings for spaces with non-symmetric affine connection was investigated. In the Chapter VI almost geodesic mappings of the spaces with non-symmetric affine connection were studied. In §13 we introduce two kinds of almost geodesic mappings of the spaces with non-symmetric affine connection spaces. The necessary and sufficient conditions are also given for a mapping of the non-symmetric affine connection spaces to be an almost geodesic of the first kind (Theorem 13.1.), i.e. the second kind (Theorem 13.2). A concept of (N-2)-projective spaces is also introduced and characterization of these spaces in Theorem 13.3. is given.

A classification of the first and second kind almost geodesic mappings is given in §14. In servitude of the form of the function $\underset{1}{b}$ i.e. $\underset{2}{b}$ in (13.3, 3′) three types of the first kind almost geodesic mappings and three types of the second kind almost geodesic mappings are obtained. The theorems 14.1. and 14.2. give the necessary and sufficient conditions for a mapping $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ to be the first type almost geodesic mapping of the first kind i.e. the second kind.

The theorems 14.3. and 14.4. give the characterization of the first type almost geodesic mapping of the first kind i.e. the second kind in affine coordinate system. The necessary and sufficient condition for the first kind almost geodesic mapping $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ to be second type are gave in Theorem 14.5. The relation (14.5) and (14.6′) are necessary and sufficient conditions for a mapping $f : GA_N \to G\overline{A}_N$ to be second type. The third type almost geodesic mapping of the first kind is characterized by equations (14.8) and (14.9), while the third type almost geodesic mapping of the second kind is characterized by equations (14.8) and (14.9′).

The necessary and sufficient conditions that a mapping $\underset{1}{\pi}_1$ has the property of reciprocity by the Theorem 15.1 is given in §15, while by the Theorem 15.3, the necessary and sufficient conditions are given for a mapping $\underset{2}{\pi}_2$ to have the property of reciprocity. The the basic equations of the first i.e. of the second kind almost geodesic mappings which have the property of reciprocity are given by the theorems 15.2. and 15.4. The necessary condition for a space GA_N to be (N-2)-projective of the first type is given by the theorems 15.5-15.8.

The second type almost geodesic mappings $\underset{1}{\pi}_2$ and $\underset{2}{\pi}_2$ is considered in §16. Here we present the basic equations of these mappings which have the property of reciprocity. A canonic almost geodesic mappings $\underset{1}{\pi}_2(e)$ and $\underset{2}{\pi}_2(e)$ are also considered.

Some invariant geometric objects of canonic almost geodesic mappings $\underset{1}{\pi}2$ are expressed by the theorems 16.4., 16.5. and 16.6. and some invariant geometric objects of canonic almost geodesic mappings $\underset{2}{\pi}2$ are expresed.

The third type almost geodesic mappings of the first and the second kind is investigated in §17. Here we get the basic equations of almost geodesic mappings of both kind with the property of reciprocity. Some special mappings $\underset{1}{\pi}2(e,\theta)$ i $\underset{2}{\pi}2(e,\theta)$ are constructed here and in both cases we find some invariant geometric objects in the form (17.17) and (17.17′).

The last chapter VII of this dissertation initiated to the generalized Käehlerian spaces and for their mappings. The Käehlerian spaces and their mappings investigated by many authors, for example K. Yano [102]–[104], M. Prvanović [57], [58], [60], J. Mikeš [21], [25], [26], [28], V. V. Domašev [5], N. Pušić [65]–[68], T. Otsuki i Y. Tasiro [51], S. S. Pujar [63], [64], Sinjukov [85]...

A generalized N-dimensional Riemannian space with basic metric tensor g_{ij}, where in the general case $g_{ij} \neq g_{ji}$, is a *generalized Käehlerian space* if there exist the almost complex structure $F^i_j(x)$, such that

$$F^h_p(x)F^p_i(x) = -\delta^h_i\,, \tag{18.2}$$

$$g_{\underline{pq}}F^p_iF^q_j = g_{\underline{ij}}, \quad g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}}F^i_pF^j_q, \tag{18.3}$$

$$F^h_{i\underset{\theta}{|}j} = 0, \quad (\theta = 1,2), \tag{18.4}$$

where $\underset{\theta}{|}$ denotes the covariant derivative of the kind θ with respect to the basic metric tensor g_{ij}. The theorems 18.1, 2, 3, 4 give the basic relations between geometric objects of generalized Käehlerian space.

In §19 we investigate holomorphicaly projective mappings of generalized Käehlerian spaces. An invariant geometric object of such mapping is expressed in Theorem 19.1.

An equitorsion holomorphicaly projective mappingse we investigate in §20. For these mappings we find five invariant geometric objects $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1,\cdots,5)$, where the magnitude $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1,\cdots,4)$ are not tensors, and the magnitude $HP\underset{5}{W}{}^i{}_{jmn}$, is a tensor. The magnitudes $HP\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}$, $(\theta = 1,\cdots,5)$ are expresed by theorems 20.1 – 20.5.

This dissertation is done the supervision of dr Svetislav Minčić. I am honored to thank him for his great and sincere help during my work on the dissertation, his support in the process of working, his evaluation of the results I came to, as well as his useful remarks and suggestions which led to the last version of this dissertation.

I would also like to thank dr Mileva Prvanović on her support, useful suggestions and remarks in my scientific work.

I wold also like to thank to my dear collegues at the Department of Mathematics and Physics, Faculty of Science, who help me realize this work by the help of their suggestions and remarks.

I wold like specially express my gratitude to my family, their understanding and support they gave to me unselfishly, during the realization of this dissertation.

mr Mića Stanković

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
NIŠ

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj, RBR:	
Identifikacioni broj, IBR:	
Tip dokumentacije, TD:	Monografska
Tip zapisa, TZ:	tekstualni / grafički
Vrsta rada, VR:	doktorska disertacija
Autor, AU:	**Mića S. Stanković**
Mentor, MN:	Svetislav M. Minčić
Naslov rada, NR:	NEKA PRESLIKAVANJA PROSTORA NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE
Jezik publikacije, JP:	Srpski
Jezik izvoda, JI:	Engleski
Zemlja publikovanja, ZP:	Jugoslavija
Uže geografsko područje, UGP:	Srbija
Godina, GO:	2001.
Izdavač, IZ:	Autorski reprint
Mesto i adresa, MA:	Niš, Čarnojevića 10a
Fizički opis rada, FO: (poglavqa/strana/ citata/tabela/slika/grafika/priloga)	7 gl., 20 pogl. 122 str.
Naučna oblast, NO:	Matematika
Naučna disciplina, ND:	Geometrija
Predmetna odrednica / Ključne reči, PO:	53B05, 53B15, 53B21, 53B35, 53C22, 53C55/ Generalisani Rimanov prostor, prostor nesimetrične afine koneksije, geodezijska linija, skoro geodezijska linija, konformna preslikavanja, ekvitorziona konformna preslikavanja, geodezijska preslikavanja, parametri Tomasa, ekvitorziona geodezijska preslikavanja, ekvitorziono projektivni parametri, ekvitorziono projektivni tenzor, R-preslikavanja, R-projektivni tenzor krivine, prvi tip skoro geodezijskih preslikavanja, (N-2)-projektivni prostor, skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa, kanonička skoro geodezijska preslikavanja, treći tip skoro geodezijskih preslikavanja, generalisani Kelerov prostor, holomorfno projektivna preslikavanja, holomorfno pojektivni parametr, holomorfno projektivni tenzor.
UDK	517.983.2 (043.3) 517.984/.986 (043.3)

^uva se, ^U:	Biblioteka
Va`na napomena, VN:	
Izvod, IZ:	Posmatrana su geodezijska preslikavanja dva prostora nesimetrične afine koneksije i dobijeni potrebni i dovoqni uslovi da preslikavanje dva takva prostora bude geodezijsko. Posebno su razmatrana geodezijska preslikavanja dva generalisana Rimanova prostora . Izvršena je generalizacija projektivnih parametara Tomasa kao invarijante geodezijskih preslikavanja. Definisana su ekvitorziona geodezijska prelikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i dobijeni neki invarijantni geometrijski objekti takvih preslikavanja, koji predstavqaju generalizaciju Vejlovog tenzora. Definisano je i pet specijalnih geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i dobijeni su neki invarijantni geomerijski objekti tih preslikavanja koji takođe predstavnjaju generalizaciju Vejlovog tenzora. Proučavana su i konformna preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora. Uvedeno je ekvitorziono konformno preslikavanje i pronađeno pet tenzora konformne krivine. Razmatrane su dve vrste skoro geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije i data njihova klasifikacija. Dobijena su po tri tipa tih preslikavanja za svaku vrstu. Dobijene su osnovne jednačine, kao i uslovi uzajamnosti za sva tri tipa obe vrste takvih preslikavanja. Uvedeno je kanoničko skoro geodezijsko preslikavanje. Takođe su nađeni neki invarijantni geometrijski objekti kanoničkih skoro geodezijskih preslikavanja. Definisani su generalisani Kelerovi prostori i za njih razmatrana holomorfno projektivna preslikavanja koja očuvavaju kompleksnu strukturu. Takođe su razmatrana ekvitorziona holomorfna preslikavanja i za njih dobijeni neki invarijantni geometrijski objekti.
Datum prihvatanja teme, DP:	16.03.2001.
Članovi komisije, KO: Predsednik:	Dr Mileva Prvanović
Član:	Dr Ljubica Velimirović
Član, mentor:	Dr Svetislav Minčić (mentor)

Obrazac Q4.09.13 - Izdanje 1

FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
NIŠ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO:	
Identification number, INO:	
Document type, DT:	monograph
Type of record, TR:	textual / graphic
Contents code, CC:	doctoral dissertation
Author, AU:	**Mića S. Stanković**
Mentor, MN:	Svetislav M. Minčić
Title, TI:	**SOME MAPPINGS OF NON-SYMMETRIC AFFINE CONNECTION SPACES**
Language of text, LT:	Serbian
Language of abstract, LA:	English
Country of publication, CP:	Yugoslavia
Locality of publication, LP:	Serbia
Publication year, PY:	2001
Publisher, PB:	author's reprint
Publication place, PP:	Niš, Čarnojevića 10a
Physical description, PD: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	7 ch., 20 sec., 122 p., 109 ref.
Scientific field, SF:	mathematics
Scientific discipline, SD:	Geometry
Subject/Key words, S/KW:	53B05, 53B15, 53B21, 53B35, 53C22, 53C55 / generalized Riemannian space, non-symmetric affine connection space, geodesic line, almost geodesic line, conform mapping, equitorsion conform mapping, geodesic mapping, Thomas's parameters, equitorsion geodesic mappings, equitorsion projective parameters, equitorsion projective tensor, R-projective mappings, R-projective curvature tensor, first type almost geodesic mappings, (N-2)-projective space, second type almost geodesic mappings, canonic almost geodesic mappings, third type almost geodesic mappings, generalized Kaehlerian space, holomorphically projective mapping, holomorphically projective parameters, holomorphically projective tensor.
UC	517.983.2(043.3) 517.984/.986(043.3)
Holding data, HD:	Library
Note, N:	

Abstract, AB:		In this dissertation we define a geodesic mappings of two non-symmetric affine connection spaces, and obtain necessary and sufficient conditions that a mapping of two such spaces be geodesic. Particularly we study a geodesic mapping of two generalized Riemannian spaces. Finally, we generalize the notion of Thomas's projective parameters as an invariant of geodesic mappings. We define an equitorsion geodesic mapping of two non-symmetric affine connection spaces and obtain some invariant geometric objects of this mapping, generalizing the Weil's tensor. Also we define five new special geodesic mappings of the spaces with non-symmetric affine connection and obtain some invariant geometric objects of these mappings, also gebneralizing the Weil's tensor. We investigate conform mappings of generalized Riemannian space and define an equitorsion conform mappings and obtain five conform curvature tensors. Also we consider two kinds almost geodesic mappings of non-symmetric affine connection spaces. We get by three types of these mappings for each kind and for all of them we get the basic equations. For canonic almost geodesic mappings we find some invariant geometric objects. Finally we define generalized Kaehlerian spaces and for them consider holomorpically projective mappings with invariant complex structure. Also we consider an equitorsion holomorphically projective mappings and for them find som invariant geometric objects.
Accepted by the Scientific Board on,		
Defended on, DE:		
Defended Board,	President:	Dr Mileva Prvanović
	Member:	Dr Ljubica Velimirović
	Member,	Dr Svetislav Minčić (mentor)

Obrazac Q4.09.13 - Izdawe 1