Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku

Nada Damljanović

Viševrednosne relacije nad mrežama i poluprstenima: Teorija i primene

Doktorska disertacija

Niš, 2012

Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku

Nada Damljanović

Viševrednosne relacije nad mrežama i poluprstenima: Teorija i primene

Doktorska disertacija

Niš, 2012

Zahvalnica

Želim da izrazim ogromnu zahvalnost profesoru Miroslavu Ćiriću na odličnom mentoskom vođstvu u celokupnom toku mog naučno-stručnog usavršavanja na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. Poseno mu zahvaljujem na uloženom trudu, mnoštvu novih ideja i interesantnih problema koje je predlagao, na nesebičnoj pomoći i izuzetnoj prijateljskoj podršci tokom izrade ove disertacije.

Ovim putem izražavam iskrenu i najtopliju zahvalnost profesoru Mališi Žižoviću na podršci, beskrajnoj brizi i pažnji koju mi je pružio tokom naše saradnje na Tehničkom fakultetu u Čačku, a posebno na svesrdnim i nesebičnim savetima koji su vešto usmeravali moje težnje za nastavno-naučni rad.

Čast mi je i izuzetno zadovoljstvo da se zahvalim profesoru Stojanu Bogdanoviću koji me je, u svim fazama izrade ove disertacije, podržavao i motivisao za naučno-stručno usavršavanje.

Veliku zahvalnost dugujem profesoru Jeleni Ignjatović na izuzetnoj saradnji i dugogodišnjem prijateljstvu, kao i na svestranoj pomoći pri konačnom uobličavanju ovog teksta.

Na kraju, želim da se zahvalim svojoj porodici i svim prijateljima koji su mi, prilikom izrade ove disertacije, pružili neophodno razumevanje.

Uvod

Teoriju binarnih relacija uveo je A. De Morgan još daleke 1860. godine, neposredno nakon pojave sada već klasične Booleove logike, na kojoj se teorija binarnih relacija bazira. Ta teorija se potom razvijala kao jedna od najvažnijih disciplina Booleove matematičke logike, i danas su na njoj zasnovane skoro sve oblasti matematičkih i računarskih nauka, a ima veoma značajne primene i u drugim naukama. Sa pojavom viševrednosnih logika krenulo se i sa proučavanjem viševrednosnih relacija. Verovatno najbolji okvir za izučavanje viševrednosnih relacija pružila je teorija fazi skupova, odnosno fazi logika. Koncept fazi relacije uveo je L. A. Zadeh [207], u istom radu u kome je uveo i koncept fazi skupa. U originalnoj Zadehovoj definiciji fazi skupa i fazi relacije, istinitosne vrednosti su uzimane iz realnog jediničnog intervala $[0, 1]$, a nešto kasnije, J. A. Goguen [84] je predložio uzučavanje fazi skupova i relacija koje uzimaju istinitosne vrednosti u proizvoljnoj mreži.

Veliki podstrek daljem razvoju teorije fazi relacija dalo je i izučavanje sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina, koje je 1974. godine pokrenuo E. Sanchez. Potreba za izučavanjem tih sistema proizašla je iz Sanchezovih istraživanja usmerenih ka primenama u medicini, ali kasnije su ti sistemi, kao i fazi relacije uopšte, pronašli i mnogo šire polje primena, tako da se danas koriste u fazi kontroli, diskretnim dinamičkim sistemima, reprezentaciji znanja, identifikaciji fazi sistema, prognoziranju fazi sistema, teoriji odlučivanja, fazi ekstrakciji informacija, fazi prepoznavanju oblika, kompresiji i rekonstrukciji slika, i u drugim oblastima.

Distributivne mreže i srodne mrežno-uređene algebarske strukture, kao što su reziduirane mreže, mrežno-uređeni monoidi i druge, predstavljaju odličnu podlogu za izučavanje viševrednosnih relacija. Naime, uređenje i neka druga dobra svojstva ovih struktura, kao što su idempotentnost supremuma i distributivnost infimuma ili množenja u odnosu na supremum, omogućuju da se mnoga važna svojstva klasičnih dvovrednosnih relacija prenesu i na viševrednosne relacije. Na primer, moguće je definisati tranzitivnost, fazi ekvivalencije i fazi kvazi-uređenja (ili fazi pred-uređenja, u nekim izvorima), efektivno rešavati fazi relacijske jednačine i nejednačine, itd.

Centralnu temu ove doktorske disertacije, temu ka kojoj gravitiraju sve ostale teme, predstavljaju bisimulacije. Bisimulacije su u okviru teorije konkurencije (konkurentnih izračunavanja), uveli R. Milner [145] i D. Park [150], kao relacije između stanja dva sistema pomoću kojih bi se modelirala ekvivalencija između tih stanja, a takođe i kao veoma uspešno oruđe za redukciju broja stanja tih sistema. Otprilike u isto vreme, ali nezavisno, bisimulacije su se pojavile i u modalnoj logici (Kripkeovi sistemi) i teoriji skupova. Danas one imaju izuzetno važne primene u mnogim oblastima računarskih nauka, kao što su funkcionalni jezici, objektno-orijentisani jezici, baze podataka, analiza i verifikacija programa, itd.

Struktura na kojoj su simulacije i bisimulacije do sada najčešće izučavane su *označeni tranzicioni sistemi*, a delimično, bisimulacije su izučavane i kod nedeterminističkih automata. U ovoj disertaciji razmatraće se bisimulacije u okviru teorije fazi automata, gde bisimulacije do sada nikada nisu izučavane, kao i u okviru teorije težinskih (weighted) automata, gde postoji samo nekoliko skorijih radova koji su se bavili tom problematikom. Izučavaće se dve vrste simulacija (direktne i povratne simulacije), čijom kombinacijom se dobijaju četiri vrste bisimulacija (direktne, povratne, povratno-direktne i direktno-povratne bisimulacije). U brojnim radovima koji su se bavili bisimulacijama uglavnom je razmatran samo jedan tip bisimulacija, one koje se ovde nazivaju direktnim bisimulacijama. Postoji nekoliko radova u kojima je napravljena razlika između direktnih i povratnih simulacija i direktnih i povratnih bisimulacija, ali se manje ili više ti koncepti razlikuju od istoimenih koncepata koji se ovde razmatraju. Znatno bliži ovim konceptima direktne i povratne bisimulacije su istoimeni koncepti koje su nedavno razmatrali J. Högberg, A. Maletti i J. May [100] u okviru teorije tree automata, a konceptu povratno-direktne bisimulacije odgovara koncept koji je pod različitim imenima razmatran u okviru teorije težinskih automata (P. Buchholz [23] i drugi). Izučavanje bisimulacija biće u konjunkciji sa nedavno uvedenim konceptom uniformnih fazi relacija. Naime, rekli smo da je glavna uloga bisimulacija da modeliraju ekvivalenciju između stanja istog ili različitih automata. Međutim, bisimulacije obezbeđuju jedino kompatibilnost sa prelazima, inicijalnim i završnim stanjima automata, ali se ne ponašaju kao ekvivalencije. Vrsta fazi relacija koje se mogu shvatiti kao fazi ekvivalencije između elemenata različitih skupova su uniformne fazi relacije, koje su nedavno uveli M. Ćirić, J. Ignjatović i S. Bogdanović [41]. Rezultati dobijeni i publikovani u radu [42] pokazuju da konjunkcija ova dva koncepta, uniformnih fazi relacija i bisimulacija, obezbeđuje veoma moćno sredstvo za izučavanje ekvivalencije između fazi automata.

Simulacije i bisimulacije između fazi automata definišu se pomoću izvesnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina, i njihovo izučavanje prirodno pokreće neka opštija pitanja koja se tiču nalaženja rešenja sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina. U homogenom slučaju, kada se razmatraju fazi relacije na jednom skupu, takvi sistemi, nazvani *slabo linearnim sistemima*, proučeni su nedavno u radu J. Ignjatović, M. Ćirića i S. Bogdanovića [106]. U ovoj disertaciji biće izučavani slabo linearni sistemi u heterogenom slučaju, kada nepoznata fazi relacija u tim sistemima jeste fazi relacija između dva različita skupa. Dobijeni rezultati deo su rada [108].

Drugi važan tip viševrednosnih relacija su viševrednosne relacije između konačnih skupova (ili na konačnom skupu) sa vrednostima u polju, prstenu ili poluprstenu. Takve viševrednosne relacije poznate su kao matrice. Dobro je poznato da su matrice intenzivno izučavane pre svega kao moćno sredstvo za rešavanje sistema jednačina i nejednačina, ali su veoma retko razmatrane kao uopštenja klasičnih dvovrednosnih relacija. Postoje verovatno dva glavna razloga za to. Prvo, za razliku od uređenih struktura koje se koriste kao osnova teorije fazi relacija, poluprsteni ne moraju biti uređeni. Drugo, opet za razliku od struktura koje leže u osnovi teorije fazi skupova, skup $\{0, 1\}$, koji se sastoji od nule i jedinice poluprstena, ne mora da bude podpoluprsten, pa se matrice sa vrednostima u skupu $\{0, 1\}$ ne mogu razmatrati kao klasične dvovrednosne relacije. Ovi problemi se mogu prevazići ako se vrednosti uzimaju u poluprstenima iz jedne prilično široke i veoma značajne klase poluprstena, klase aditivno idempotentnih poluprstena. Toj klasi pripadaju mnogi veoma važni tipovi poluprstena, kao što su dobro poznati tropski poluprsteni, arktički poluprsteni, Viterbiev poluprsten, Booleov prsten, i drugi. Treba reći i da aditivno idempotentni poluprsteni imaju značajne primene u mnogim oblastima matematike, računarskih nauka, i operacionih istraživanja, na primer, u teoriji automata i formalnih jezika, teoriji optimizacije, idempotentnoj analizi, teoriji programskih jezika, analizi podataka, teoriji diskretnih sistema događaja, algebarskom modeliranju neodređenosti i neizvesnosti, algebri formalnih procesa, itd. Posebno, primene aditivno idempotentnih poluprstena uključuju rešenja brojnih problema optimalnih puteva u grafu, proširenja klasičnih algoritama za nalaženje najkraćih puteva na široku klasu neklasičnih problema nalaženja puteva, rešavanje raznih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, kao što su Hamilton-Jakobijeva i Bürgersova jednačina, čiji značaj je veoma dobro poznat u fizici, itd.

Veoma važan tip aditivno idempotentnih poluprsena čine max-plus algebre. One imaju važne primene u diskretnoj matematici, računarskim jezicima, lingvističkim problemima, konačnim automatima, grafovskim problemima optimizacije, diskretnim sistemima događaja i Petrijevim mrežama, stohastičkim sistemima, i slično. Posebno su interesantne iz razloga što mnogi nelinearni problemi u tradicionalnom smislu postaju linearni kada se posmatraju nad max-plus algebrom. Prvi poznati radovi u kojima se posmatraju sistemi max-linearnih jednačina su radovi S. Kleenea [120] i R. A. Cuninghame-Greena [46]. Kasnije, u mnogim radovima izučavani su sistemi matričnih jednačina i nejednačina nad max-plus algebrom kod kojih se nepoznata matrica nalazi na jednoj strani, tzv. jednostrani sistemi, a tek od skora se pažnja poklanja dvostranim sistemima kod kojih se nepoznata matrica nalazi na obe strane jednakosti, odnosno nejednakosti [25, 52, 53, 195]. Dobijeni rezultati [54] pokazuju da se mnogi metodi i metodologije korišćene u izučavanju sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina mogu preneti i na dvostrane sisteme max-linearnih jednačina i nejednačina.

Konačni težinski automati, kao i njihova ponašanja (engl. behavior), definišu se pomoću matrica i formalnih stepenih redova, pa se u teoriji konačnih težinskih automata koriste mnoge metode linearne algebre nad poluprstenima. Ukoliko težine uzimaju vrednosti iz aditivno idempotentnog poluprstena, onda se težinska matrica prelaza, početni i završni težinski vektori mogu tretirati kao težinske relacije.

Ova doktorska disertacija sastoji se iz pet glava. U prvoj glavi disertacije biće uvedeni osnovni pojmovi i navedeni glavni rezultati teorije mreža, teorije fazi skupova i teorije fazi relacija, kao i teorije poluprstena, matrica nad poluprstenima, i formalnih stepenih redova. Potom u drugoj glavi će se preći na dublje izučavanje svojstava raznih fazi relacija nad potpunim reziduiranim mrežama, a glavna tema ove glave je traženje rešenja slabo linearnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina u bipartitnom slučaju. U trećoj glavi ti rezultati će biti primenjeni na izučavanje bisimulacija između fazi automata.

Metodologija razvijena u Glavama 2 i 3 će u Glavama 4 i 5 biti primenjena na izučavanje viševrednosnih relacija nad poluprstenima i bisimulacija između težinskih automata. Kao što je već rečeno, glavnu ulogu u tome igraće aditivno idempotentni poluprsteni, kao struktura u kojoj razmatrane viševrednosne relacije uzimaju vrednosti.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

1.1 Relacije i preslikavanja

U ovom poglavlju biće napravljen kratak osvrt na neke dobro poznate algebarske pojmove, oznake i rezultate koji će biti korišćeni u daljem radu. Svi nedefinisani pojmovi iz univerzalne algebre mogu se pronaći u monografijama G. Grätzer [89], S. Burris, H. P. Sankappanavar [24] i G. Birkhoff, T. Barti [18]. Terminologija i sistem oznaka su pre svega u skladu sa S. Bogdanović, M. Ćirić [20] i M. Ćirić, T. Petković, S. Bogdanović [43].

Neka je H neprazan skup. Pod pojmom *binarne relacije* na H podrazumevamo svaki podskup ξ skupa H^2, pri čemu to može biti i prazan podskup. Budući da ćemo nadalje raditi i sa drugim vrstama relacija (fazi relacije, težinske relacije), onda ćemo ove relacije nazivati *obične* ili *krisp relacije*. Specijalne relacije na skupu H koje su vredne pažnje su *prazna relacija*, sa oznakom $\varnothing$, *relacija jednakosti* $\Delta_H = \{(x,x) \mid x \in H\}$, koja se takođe naziva i *dijagonala* ili *identička relacija*, i *univerzalna* ili *puna relacija* $\nabla_H = H \times H$. U slučajevima kada ne postoji opasnost od zabune, mi izostavljamo indeks H u Δ_H i ∇_H i pišemo prosto Δ i ∇. Ako je ξ relacija na H i $(a,b) \in \xi$, tada kažemo da su a i b u relaciji ξ i obično izrazom "$a\xi b$" zamenjujemo izraz "$(a,b) \in \xi$". *Proizvod relacija* ξ, $\eta \in \mathcal{B}(H)$ je relacija $\xi \circ \eta$ definisana sa

$$\xi \circ \eta = \{(a,c) \in H \times H \mid (\exists b \in H)\, a\xi b, b\eta c\}.$$

Za ξ binarnu relaciju ξ na nepraznom skupu H, relacija

$$\xi^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in \xi\}$$

naziva se *inverzna* ili *obratna relacija* relacije ξ, a relacija

$$\xi' = \{(a, b) \mid (a, b) \notin \xi\}$$

naziva se *suprotna relacija* ili *negacija relacije* ξ, a skupovi

$$\operatorname{dom} \xi = \{a \in H \mid (\exists b \in H)\, a\xi b\} \quad \text{i} \quad \operatorname{ran} \xi = \{b \in H \mid (\exists a \in H)\, a\xi b\}$$

nazivaju se *domen* i *rang* relacije ξ, tim redom.

Za $a \in H$ pišemo $\quad a\xi = \{x \in H \mid a\xi x\} \quad$ i $\quad \xi a = \{x \in H \mid x\xi a\}$.

Neka su H i K neprazani skupovi i ϕ relacija na $H \cup K$. Ako je $(a, b) \in \phi$ samo ako je $a \in H$, $b \in K$ i za svaki $a \in H$ postoji tačno jedan $b \in K$ takav da je $(a, b) \in \phi$, onda kažemo da je ϕ *preslikavanje* (*funkcija*) iz H u K, što simbolički označavamo sa $\phi : H \to K$. Element b nazivamo slikom elementa a pri preslikavanju ϕ i koristimo oznake $\phi : a \longmapsto b$ i $a\phi = b$, kao i funkcionalni zapis $\phi(a) = b$.

Proizvod preslikavanja se definiše kao specijalan slučaj proizvoda relacija. Ako su H, K i L neprazni skupovi, i $\phi : H \to K$ i $\psi : K \to L$, onda je funkcija $\phi \circ \psi : H \to L$ data sa $\phi \circ \psi(a) = \psi(\phi(a))$, za svako $a \in K$.

Neka su H i K neprazni skupovi i $\phi : H \to K$. Preslikavanje ϕ je *jedan-jedan* ako za sve $a, b \in H$, $\phi(a) = \phi(b)$ povlači $a = b$. Osim ovog naziva koristićemo i nazive *injektivno preslikavanje* ili *injekcija*. Sa druge strane, ako je $\phi(H) = K$, tj. ako za svaki $b \in K$ postoji $a \in H$ takav da je $\phi(a) = b$, tada kažemo da je ϕ preslikavanje na K, odnosno da *slika* H *na* K. Takođe govorimo i da je ϕ *sirjektivno preslikavanje ili sirjekcija.* Preslikavanje ϕ nazivamo *bijektivnim preslikavanjem*, *bijekcijom* ili *obostrano jednoznačnim preslikavanjem* ako je ϕ i jedan-jedan i na.

Preslikavanje $i_H : H \to H$ nepraznog skupa H definisano sa $i_H(x) = x$, za svaki $x \in H$, nazivamo *identičkim preslikavanjem skupa* H. Neka su H i K neprazni skupovi i neka $\varphi : H \to K$. Ako postoji $\psi : K \to H$ tako da je $\varphi \circ \psi = i_H$ i $\psi \circ \varphi = i_K$, tada kažemo da je ψ *inverzno preslikavanje* od φ. Ako je ψ inverzno preslikavanje od φ prema gornjoj definiciji, tada je $\psi = \varphi^{-1}$, gde je φ^{-1} inverzna relacija od φ. Preslikavanje φ neraznog skupa H u neprazan skup K ima inverzno preslikavanje ako i samo ako je bijekcija.

Osim preslikavanja za nas će biti naročito interesantna tri tipa relacija, i to relacije parcijalnog uređenja, relacije kvazi-uređenja i relacije ekvivalencije. Neka je H neprazan skup. Relacija ξ na skupu H je:

- *refleksivna*, ako je $a\xi a$, za svaki $a \in H$, tj. ako je $\Delta_H \subseteq \xi$;
- *simetrična*, ako za $a, b \in H$, iz $a\xi b$ sledi $b\xi a$, tj. ako je $\xi \subseteq \xi^{-1}$;
- *anti-simetrična*, ako za $a, b \in H$, iz $a\xi b$ i $b\xi a$ sledi da je $a = b$, tj. ako je $\xi \cap \xi^{-1} = \Delta_H$;
- *tranzitivna*, ako za $a, b, c \in H$, iz $a\xi b$ i $b\xi c$ sledi $a\xi c$, tj. ako je $\xi\xi \subseteq \xi$.

Refleksivnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *kvazi-uređenjem*. Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju nazivmo *uređenjem* ili *relacijom poretka*. Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *relacijom ekvivalencije* ili samo *ekvivalencijom*. O uređenjima će više reči biti u narednim glavama, dok ćemo se ovde pozabaviti relacijama ekvivalencije. Neka je θ relacija ekvivalencije na skupu H. Ako su elementi $a, b \in H$ u relaciji θ, tj. $a\theta b$, tada kažemo i da su oni *θ-ekvivalentni*. Skup $a\theta$ nazivamo *klasom ekvivalencije* elementa $a \in H$ u odnosu na θ ili kraće *θ-klasom elementa* a. Jasno je da je u tom slučaju $a \in a\theta$. Skup svih θ-klasa označavamo sa H/θ i nazivamo ga *faktor skupom* skupa H, ili prosto *faktorom skupa* H, u odnosu na θ. Preslikavanje $\theta^\natural : a \mapsto a\theta$ koje slika skup H na faktor skup H/θ nazivamo *prirodnim preslikavanjem* skupa H određenim relacijom ekvivalencije θ. Sa druge strane, neka su H i K neprazni skupovi i $\phi : H \to K$. Relaciju $\ker\phi = \{(x, y) \in H \times H \mid \phi(x) = \phi(y)\}$ na skupu H nazivamo jezgrom preslikavanja ϕ. Vezu između relacija ekvivalencije i preslikavanja daje nam naredna teorema

Teorema 1.1. *Neka je H neprazan skup. Ako je ϕ preslikavanje skupa H u skup K, tada je* $\ker\phi$ *relacija ekvivalencije na H. Osim toga, za proizvoljnu relaciju ekvivalencije θ na H je* $\ker\left(\theta^\natural\right) = \theta$.

Struktura je skup snabdeven operacijama i relacijama zadatih arnosti. Arnost relacija i operacija se određuje tzv. tipom. Formalno, *tip* je uređena trojka $\tau = (R, F, \sigma)$ koja se sastoji iz skupa simbola relacija R, skupa simbola operacija F, pri čemu je $R \cap F = \varnothing$, i preslikavanja $\sigma : R \cup F \to \mathbb{N}_0$. Za $s \in R \cup F$, sa $\sigma(s)$ je data *arnost* simbola s. *Struktura* tipa (R, F, σ) je trojka $\mathcal{A} = (A, R^A, F^A)$, gde je A neprazan skup (*skup nosač*), $R^A = \{r^A \subseteq A^{\sigma(r)} \mid r \in R\}$ je skup relacija r^A koje odgovaraju relacijskim simbolima $r \in R$, i $F^A = \{f^A : A^{\sigma(f)} \to A \mid f \in F\}$ je skup operacija f^A koje odgovaraju simbolima $f \in F$. Ako ne postoji opasnost od zabune, izostavljaćemo indeks A, i pisaćemo jednostavno r i f umesto r^A i f^A.

Algebra je struktura $\mathcal{A}$ tipa $\tau = (R, F, \sigma)$ sa $R = \varnothing$ (struktura bez relacija), i u tom slučaju pišemo (F, σ) i (A, F^A). Ako je još i $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, onda pišemo jednostavno $(A, f_1, \ldots, f_n)$.

Relacijski sistem je je struktura $\mathcal{A}$ tipa $\tau = (R, F, \sigma)$ sa $F = \varnothing$ (struktura bez operacija), i u tom slučaju pišemo (R, σ) i (A, R^A). Ako je još i $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$, onda pišemo jednostavno $(A, r_1, \ldots, r_n)$.

Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra tipa (F, σ). Podskup $B \subseteq A$ je *poduniverzum* od A ako je zatvoren za sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$, tj. ako za svaki $f \in F$, $n = \sigma(f)$ i proizvoljne $a_1, \ldots, a_n \in B$ važi $f^A(a_1, \ldots, a_n) \in B$. Svaki poduniverzum $B \neq \varnothing$ snabdeven sa operacijama koje su restrikcije na B operacija algebre $\mathcal{A}$ jeste algebra istog tipa (F, σ) koju nazivamo je *podalgebrom* od $\mathcal{A}$.

Neka je θ binarna relacija na algebri $\mathcal{A} = (A, F)$ tipa (F, σ). Ako je $f \in F$, $n = \sigma(f)$, tada kažemo da je θ *saglasna* (*kompatibilna*) sa fundamentalnom operacijom f^A ako iz $a_i \theta b_i$, za sve $i \in [1, n]$, sledi

$$f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, \theta f^A(b_1, b_2, \ldots, b_n)\,.$$

Relaciju ekvivalencije koja je saglasna sa svim fundamentalnim operacijama na algebri $\mathcal{A}$ nazivamo *relacijom kongruencije* na $\mathcal{A}$, ili kraće samo *kongruencijom* na $\mathcal{A}$. Skup svih kongruencija definisanih na algebri $\mathcal{A}$ označićemo sa $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$. Za datu algebru $\mathcal{A} = (A, F)$ i kongruenciju $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$, količnički skup A/θ takođe se može načiniti algebrom istog tipa ako fundamentalne operacije na A/θ definišemo na sledeći način: za svaki $f \in F$, $n = \sigma(f)$ i proizvoljne $a_1, \ldots, a_n \in A$ stavljamo da je $f^{A/\theta}(a_1\theta, \ldots, a_n\theta) = (f^A(a_1, \ldots, a_n))\theta$. Algebru $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, F^{A/\theta})$ sa ovako definisanim fundamentalnim operacijama nazivamo *faktor* (*količnička*) *algebra* od $\mathcal{A}$ po θ.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre istog tipa. Preslikavanje $\phi : A \to B$ je *homomorfizam* algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ako za svaki $f \in F$, $n = \sigma(f)$ i proizvoljne $a_1, \ldots, a_n \in A$ važi $\phi\left(f^A(a_1, \ldots, a_n)\right) = f^B(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))\,.$

Vezu između kongruencija i homomorfizama daje nam sledeća teorema.

Teorema 1.2 (Teorema o homomorfizmu). *Ako je θ kongruencija na algebri A tipa τ, tada je $\theta^\natural$ homomorfizam od A na A/θ.*

Obratno, ako je ϕ homomorfizam algebre A tipa τ na algebru B istog tipa, tada je $\ker\phi$ kongruencija na A i reslikavanje $\Phi : A/\ker\phi \to B$, definisano sa

$$\Phi(a \ker\phi) = \phi(a),$$

za $a \in A$, jeste izomorfizam iz $A/\ker\phi$ u B.

Za kongruenciju θ, homomorfizam $\theta^\natural$ se naziva *prirodni homomorfizam kongruencije* θ, a za homomorfizam ϕ, kongruencija $\ker\phi$ se naziva *jezgro homomorfizma* ϕ.

Teorema 1.3 (Druga teorema o izomorfizmu). *Neka je A algebra tipa τ i neka su θ i ρ kongruencije na A takve da je $\theta \subseteq \rho$. Tada relacija ρ/θ na A/θ definisana sa*

$$\rho/\theta = \{(a\theta, b\theta) \in (A/\theta) \times (A/\theta) \mid (a,b) \in \rho\}$$

jeste kongruencija na A/θ i $(A/\theta)\,/\,(\rho/\theta) \cong A/\rho$.

1.2 Uređeni skupovi i mreže

U ovom poglavlju biće uvedeni neki pojmovi i biće dati neki rezultati koji se tiču koncepta uređenog skupa. Takođe, biće navedena dva standardna pristupa definisanju mreža (mreža kao relacijska struktura i mreža kao algebra). Svi pojmovi i oznake su u skladu sa G. Grätzer [90], G. Birkhoff [17] i S. Roman [172].

Podsetimo se da refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju na skupu A nazivamo *parcijalnim uređenjem* na A, ili kraće samo *uređenjem* na A. Uređenja najčešće označavamo simbolom $\leqslant$. Par $(A, \leqslant)$ koji se sastoji od skupa A i parcijalnog uređenja $\leqslant$ na njemu nazivamo *parcijalno uređenim skupom*, ili kraće samo *uređenim skupom*. Uređenje $\leqslant$ na A nazivamo *linearnim* ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$, i u tom slučaju kažemo da je A linearno *uređen skup* ili *lanac*.

Za preslikavanje ϕ koje slika uređen skup A u uređen skup B kažemo da je *izotono* ili *rastuće* ili da *očuvava uređenje* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. Slično, za preslikavanje ϕ iz A u B kažemo da je *antitono* ili da je *opadajuće* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(b) \leqslant \phi(a)$. Za ϕ kažemo da je *izomorfizam uređenih skupova* A i B, ili *uređajni izomorfizam* iz A na B, ako je ϕ bijekcija iz A na B i ϕ i ϕ^{-1} su izotona preslikavanja. Sa druge strane, za ϕ kažemo da je *dualni izomorfizam uređenih skupova* A i B, ili *dualni uređajni izomorfizam* iz A na B, ako je ϕ bijekcija iz A na B i ϕ i ϕ^{-1} su antitona preslikavanja.

Neka je A uređen skup. Za element $a \in A$ kažemo da je

- *minimalan element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo manji od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $x \leqslant a$ sledi $x = a$;

– *maksimalan element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo veći od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $a \leqslant x$ sledi $a = x$;
– *najmanji element* skupa A, ako je manji od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in A$;
– *najveći element* skupa A, ako je veći od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in A$.

Neka je H neprazan podskup uređenog skupa A. Za element $a \in A$ kažemo da je

– *gornja granica* skupa H, ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in H$;
– *donja granica* skupa H, ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in H$;
– *najmanja gornja granica*, ili *supremum*, skupa H, ako je a najmanji element skupa svih gornjih granica skupa H, tj. ako je a gornja granica skupa H i za svaku gornju granicu b skupa H važi $a \leqslant b$;
– *najveća donja granica*, ili *infimum*, skupa H, ako je a najveći element skupa svih donjih granica skupa H, tj. ako je a donja granica skupa H i za svaku donju granicu b skupa H važi $b \leqslant a$.

Supremum skupa H, ako postoji, označavamo sa $\bigvee H$, a infimum, takođe ako postoji, sa $\bigwedge H$. Ukoliko je $H = \{x_i \mid i \in I\}$, tada umesto $\bigvee H$ i $\bigwedge H$ pišemo redom $\bigvee_{i\in I} x_i$ i $\bigwedge_{i\in I} x_i$, a ako je $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, za neki $n \in \mathbb{N}$, tada umesto gornjih oznaka koristimo oznake $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ i $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$.

Uređen skup čiji svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum nazivamo *mrežom*. Lako se dokazuje da i svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum. Za beskonačne podskupove mreže to ne mora da važi.

Uređen skup L je *gornja* (*donja*) *polumreža* ako svaki dvoelementni, a samim tim i svaki konačan, podskup od L ima supremum (infimum).

Ako je L mreža, tada se na L mogu definisati dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ sa

$$\wedge : (a, b) \longmapsto a \wedge b \qquad \text{i} \qquad \vee : (a, b) \longmapsto a \vee b.$$

Po analogiji sa odgovarajućim operacijama na skupovima, operacije $\vee$ i $\wedge$ nazivaćemo, redom, *unijom* i *presekom*. Drugim rečima, govorićemo da je $\bigvee H$ *unija skupa* H, a $a \vee b$ je *unija elemenata* a i b, i slično, da je $\bigwedge H$ *presek skupa* H, a $a \wedge b$ je *presek elemenata* a i b. Koristeći operacije unije i preseka, mrežu možemo definisati i kao univerzalnu algebru sa dve binarne operacije koje zadovoljavaju nekoliko specijalnih uslova. Naime, neposredno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.4. *Ako je L mreža, tada je $(L, \wedge, \vee)$ univerzalna algebra takva da za sve $x, y, z \in L$ važe sledeći uslovi:*

$(L1)$	$x \wedge x = x,\ x \vee x = x$	(*idempotentnost*)
$(L2)$	$x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x$	(*komutativnost*)
$(L3)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)\,,\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	(*asocijativnost*)
$(L4)$	$x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y) = x$	(*apsorpcija*)

Obratno, ako je L algebra sa dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju uslove $(L1) - (L4)$, tada je L mreža, u odnosu na parcijalno uređenje $\leqslant$ definisano sa

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \qquad (\textit{ili ekvivalentno } a \leqslant b \Leftrightarrow a \vee b = b).$$

Uslove $(L1) - (L4)$ u prethodnoj teoremi nazivamo *aksiomama mreže*. Tretiranje mreže kao univerzalne algebre omogućava nam da kao i kod svake druge univerzalne algebre govorimo o podmrežama, kongruencijama, homomorfizmima, izomorfizmima, direktnim proizvodima mreža itd.

Jasno, u terminima univerzalne algebre, *polumreža* je algebarska struktura sa jednom binarnom idempotentnom, komutativnom i asocijativnom operacijom.

Neprazan podskup H mreže L naziva se *podmreža* mreže L ako za svaka dva elementa $a, b \in H$ važi $a \wedge b \in H$ i $a \vee b \in H$.

Za mrežu L i $a \in L$, podmreže $[a) = \{x \in L \mid a \leqslant x\}$ i $(a] = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$ su *poluotvoreni intervali* mreže L, a za $a, b \in L$ takve da je $a \leqslant b$, podmreže $(a, b) = \{x \in L \mid a < x < b\}$ i $[a, b] = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ su *otvoreni interval* i *zatvoreni interval* (*segment*) mreže L, tim redom.

Neprazan podskup J mreže L naziva se *ideal* mreže L ako važi: za sve $a, x \in L$, iz $x \leqslant a$ i $a \in J$ sledi $x \in J$ i za proizvoljne $a, b \in J$ je $a \vee b \in J$. Nije teško pokazati da je J ideal mreže L ako važi $a \vee b \in J$ ako i samo ako $a \in J$ i $b \in J$. Neprazan podskup F mreže L je *filter* ili *dualni ideal* mreže L ako važi za sve $a, x \in F$, iz $a \leqslant x$ i $a \in F$ sledi $x \in F$ i za proizvoljne $a, b \in F$ je $a \wedge b \in F$.

Neka je element $a \in L$. Primetimo, tada da su poluotvoreni intervali $(a]$ i $[a)$, redom ideal, odnosno dualni ideal mreže L i nazivaju se *glavni ideal* mreže L generisan sa a i *glavni dualni ideal* (*glavni filter*) mreže L generisan sa a.

Što se tiče izomorfizama mreža, oni se mogu povezati sa izomorfizmima uređenih skupova na način koji prikazuje sledeća teorema.

Teorema 1.5. *Neka su L i K mreže i neka je ϕ preslikavanje iz L u K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(*i*) *ϕ je izomorfizam mreže L na mrežu K;*

(*ii*) *ϕ je sirjekcija iz L na K i za proizvoljne $a, b \in L$ važi*

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \phi(a) \leqslant \phi(b);$$

(*iii*) *ϕ je uređajni izomorfizam iz L na K.*

Najmanji element mreže L, ako takav postoji, nazivamo *nulom*, a najveći element, ukoliko postoji, nazivamo *jedinicom mreže* L. Nulu i jedinicu mreže obično označavamo sa 0 i 1, tim redom. Mrežu koja ima nulu i jedinicu nazivamo *ograničenom mrežom*. Ograničena mreža se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju $(L1) - (L4)$, i nularnim operacijama (konstantama) 0 i 1 koje zadovoljavaju uslove

$(L5)$ $0 \wedge x = 0$ (ili ekvivalentno $0 \vee x = x$), za svaki $x \in L$;
$(L6)$ $1 \wedge x = x$ (ili ekvivalentno $1 \vee x = 1$), za svaki $x \in L$.

Ako je L mreža sa najmanjim elemntom 0, tada $a \in L \setminus \{0\}$ je *atom* u L ako ne postoji $b \in L$ takav da je $0 < b < a$.

Za neprazan podskup H mreže L kažemo da je *ograničen* ako ima bar jednu donju i bar jednu gornju granicu.

Nije teško pokazati da su na proizvoljnoj mreži L sledeći uslovi ekvivalentni:

$(L7)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, za sve $x, y, z \in L$;
$(L7')$ $x \vee (z \wedge y) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, za sve $x, y, z \in L$.

Mrežu koja zadovoljava bilo koji od tih uslova nazivamo *distributivnom mrežom*. Neka je L ograničena mreža sa nulom 0 i jedinicom 1. Za element $y \in L$ kažemo da je *komplement* (*dopuna*) elementa $x \in L$ ako važi

$$x \wedge y = 0 \qquad \text{i} \qquad x \vee y = 1.$$

U tom slučaju je i x komplement od y, tj. relacija "biti komplement" je simetrična. Ako je pri tome mreža L još i distributivna, tada se lako dokazuje da svaki element $x \in L$ može imati najviše jedan komplement, koji ćemo označiti sa x'.

Ograničenu distributivnu mrežu u kojoj svaki element ima komplement nazivamo *Booleovom algebrom*. Preslikavanje $x \longmapsto x'$ je unarna oparacija na L, i nazivamo je *operacijom komplementacije*. Bulova algebra se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$, unarnom operacijom $'$ i konstantama 0 i 1 koje pored uslova $(L1) - (L7)$ zadovoljavaju i uslove

$$
\begin{aligned}
(L8) &\ x \wedge x' = 0,\ x \vee x' = 1,\ \text{za sve } x \in L;\\
(L9) &\ (x')' = x, \text{za svaki } x \in L\,;\\
(L10) &\ (x \wedge z)' = x' \vee y',\ (x \vee y)' = x' \wedge y', \text{za sve } x, y \in L.
\end{aligned}
$$

Napomenimo da su aksiome $(L10)$ poznate kao *DeMorganovi zakoni*.

Kako smo napred napomenuli, svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum, ali to ne mora da važi za beskonačne podskupove. Stoga za mrežu u kojoj svaki neprazan podskup ima supremum i infimum nazivamo *potpunom* ili *kompletnom mrežom*. Jasno, svaka takva mreža je ograničena. Podskup K potpune mreže L je *potpuna podmreža* od L ako se supremum i infumum (u L) svakog nepraznog podskupa od K nalaze u K.

Na kraju ovog poglavlja navedimo i sledeću teoremu.

Teorema 1.6 (Teorema o korespodenciji). *Neka je θ kongruencija na algebri $\mathcal{A}$. Tada je mreža* $\mathrm{Con}\,(\mathcal{A}/\theta)$ *izomorfna glavnom filtru $[\theta)$ mreže* $\mathrm{Con}\,(\mathcal{A})$.

1.3 Kompletne reziduirane mreže

Reziduirane mreže su veoma opšte algebarske strukture i generalizuju mnoge algebre sa značajnim primenama (videti npr. [12, 14, 93, 101]). S obzirom na to da ćemo koristiti kompletne reziduirane mreže kao strukture istinitosnih vrednosti fazi podskupova, ovo poglavlje posebno posvećujemo reziduiranim mrežama i njihovim osnovnim svojstvima. Terminologija i oznake su u skladu sa R. Bělohlávek [12] i R. Bělohlávek and V. Vychodil [14].

Reziduirana mreža je algebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ takva da

(RL1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1,

(RL2) $(L, \otimes, 1)$ je komutativni monoid sa jedinicom 1,

(RL3) $\otimes$ i $\to$ čine *adjungovani par*, tj., zadovoljavaju *svojstvo adjunkcije*: za sve $x, y, z \in L$,

$$x \otimes y \leqslant z \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y \to z. \tag{1.1}$$

Ako je još $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ i kompletna mreža, tada se $\mathcal{L}$ naziva *kompletna reziduirana mreža*. Naglašavajući njihovu monoidalnu strukturu, u nekim izvorima reziduirane mreže se nazivaju i integralima, komutativnim reziduiranim ℓ-monoidima [101].

Operacije $\otimes$ (nazvana *množenje*) i $\to$ (nazvana *reziduum*) služe za modelovanje konjunkcije i implikacije odgovarajućeg logičkog računa, a supremum ($\bigvee$) i infimum ($\bigwedge$) za modelovanje egzistencijalnog i univerzalnog kvantifikatora, tim redom. Operacija $\leftrightarrow$ definisana sa

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x), \tag{1.2}$$

nazvana *bireziduum* (ili *biimplikacija*), se koristi za modelovanje ekvivalencije istinitosnih vrednosti.

Najviše izučavane i primenjivane strukture istinitosnih vrednosti su one koje su definisane na jediničnom intervalu $[0, 1]$ sa

$$x \wedge y = \min(x, y) \qquad \text{i} \qquad x \vee y = \max(x, y)$$

i to:

- *Łukasiewiczeva struktura*
  ($x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$, $x \to y = \min(1 - x + y, 1)$),

- *Goguenova (product) struktura*
  ($x \otimes y = x \cdot y$, $x \to y = 1$ ako $x \leqslant y$, i $= y/x$ inače),

- *Gödelova struktura*
  ($x \otimes y = \min(x, y)$, $x \to y = 1$ ako $x \leqslant y$, i $= y$ inače).

Opštije, algebra $([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ je kompletna reziduirana mreža ako i samo ako je $\otimes$ levo-neprekidna t-norma i reziduum je definisan sa

$$x \rightarrow y = \bigvee\{u \in [0,1] \mid u \otimes x \leqslant y\}.$$

Drugi veoma važan skup istinitosnih vrednosti je skup $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, gde je $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$, sa

$$a_k \otimes a_l = a_{\max(k+l-n,0)} \quad \text{i} \quad a_k \rightarrow a_l = a_{\min(n-k+l,n)}.$$

Specijalni slučaj ovih slovnih algebri je dvoelementna Booleova algebra klasične logike sa skupom nosačem $\{0,1\}$. Jedini adjungovani par na dvoelementnoj Booleovoj algebri se sastoji od klasičnih operacija konjunkcije i implikacije. Ovu strukturu istinitosnih vrednosti nazivamo *Booleova struktura*. Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ koja zadovoljava $x \otimes y = x \wedge y$ se naziva *Heytingova algebra*. Heytingova algebra koja zadovoljava uslov prelinearnosti $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ se naziva *Gödelova algebra*. Ako je svaka konačno generisana podalgebra reziduirane mreže $\mathcal{L}$ konačna, tada se $\mathcal{L}$ naziva *lokalno konačna*. Na primer, svaka Gödelova algebra, a samim tim, Gödelova struktura, je lokalno konačna, dok product struktura nije lokalno konačna.

Ako je $\mathcal{L}$ kompletna reziduirana mreža, onda za sve $x, y, z \in L$ i svako $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq L$ važi:

$$x \leqslant y \;\Rightarrow\; x \otimes z \leqslant y \otimes z, \tag{1.3}$$

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \rightarrow y = 1, \tag{1.4}$$

$$x \otimes \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I}(x \otimes y_i), \tag{1.5}$$

$$x \otimes \bigwedge_{i \in I} y_i \leqslant \bigwedge_{i \in I}(x \otimes y_i), \tag{1.6}$$

Kompletna reziduirana mreža $\mathcal{L}$ je *mreža u kojoj je supremum distributivan u odnosu na infimume*, ako je

$$x \vee \Big(\bigwedge_{i \in I} y_i\Big) = \bigwedge_{i \in I}(x \vee y_i), \tag{1.7}$$

za sve $x \in L$ i $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq L$. Takođe, kažemo da je $\mathcal{L}$ *mreža u kojoj je multiplikacija distributivna u odnosu na infimume*, ako je

$$x \otimes \Big(\bigwedge_{i \in I} y_i\Big) = \bigwedge_{i \in I}(x \otimes y_i), \tag{1.8}$$

za sve $x \in L$ i $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq L$. Napomenimo da ako $\mathcal{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$, gde je $[0,1]$ realni jedinični interval i $\otimes$ je levo neprekidna t-norma na $[0,1]$, onda (1.7) sledi direktno na osnovu linearnosti $\mathcal{L}$, i $\mathcal{L}$ zadovoljava (1.8) ako i samo ako $\otimes$ jeste neprekidna t-norma, tj., ako i samo ako $\mathcal{L}$ jeste BL-algebra (videti [12, 14]). Stoga, uslovi (1.7) i (1.8) važe za svaku BL-algebru na realnom jediničnom intervalu. Posebno, Łukasiewiczeva, Goguenova (product) i Gödelova struktura zadovoljavaju (1.7) i (1.8).

1.4 Poluprsteni

Poluprstene je 1934. godine uveo H. S. Vandiver [191], ali su se oni pojavili i ranije u istraživanjima ideala prstena i pri aksiomatizaciji prirodnih brojeva. Danas oni imaju dobro razvijenu algebarsku teoriju kao i veoma značajne primene. Poluprsteni, kao i formalni stepeni redovi i matrice nad njima, igraju veoma važnu ulogu u teoriji formalnih jezika i automata, u izučavanju kontekstno nezavisnih jezika, težinskih automata i drugo. U literaturi posvećenoj poluprstenima može se sresti više različitih varijanti definicije poluprstena, a definicija i rezultati koje ovde navodimo su u skladu sa [83, 85, 87, 95, 125].

Poluprsten je algebra $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ takva da

- $(S1)$ $(S, +, 0)$ je komutativan monoid sa neutralnim elementom 0;
- $(S2)$ $(S, \cdot, 1)$ je monoid sa neutralnim elementom 1;
- $(S3)$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, za sve $a, b, c \in S$;
- $(S4)$ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, za sve $a \in S$.

Poluprsten $\mathcal{S}$ je *komutativan* ako je $ab = ba$, za sve $a, b \in S$. Poluprsten $\mathcal{S}$ je *antiprsten* ako $a + b = 0$ povlači $a = b = 0$, za sve $a, b \in S$.

Neka je $(S, +, 0)$ monoid. Tada binarna relacija $\leqslant$ na S, definisana sa

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad (\exists c \in L)\ b = c + a, \quad \text{za sve } a, b \in S, \tag{1.9}$$

je relacija kvazi-uređenja (refleksivna i tranzitivna) i naziva se *prirodno kvazi-uređenje*. Monoid je *prirodno uređen* ako i samo ako njegovo prirodno preuređenje jeste uređenje, ili ekvivalentno ako i samo ako je $\leqslant$ antisimetrična relacija.

Poluprsten $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ takav da je $(S, +, 0)$ prirodno uređen naziva se *dioid*. Sledeća svojstva proizilaze direktno iz prethodne definicije.

(i) Element 0 je najmanji element dioida $\mathcal{S}$, tj., $0 \leqslant a$ za sve $a \in S$.

(ii) Za sve $a, b, c, d \in S$, $a \leqslant b$ i $c \leqslant d$ povlači $a + c \leqslant b + d$ i $ac \leqslant bd$.

Napomenimo da svaki dioid jete antiprsten.

Poluprsten $\mathcal{S}$ je *aditivno idempotentan* ako je njegovo sabiranje idempotentno, tj., ako je $a + a = a$ za svako $a \in S$. Aditivno idempotentni poluprsteni su takođe izučavani pod imenom putne algebre (engl. path algebras). Napomenimo da svaki aditivno idempotentan poluprsten jeste dioid, i

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b, \quad \text{za sve } a, b \in S, \tag{1.10}$$

tj., $\mathcal{S}$ je prirodno uređen u odnosu na sabiranje.

Najpoznatiji primer poluprstena je poluprsten prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ sa običnim sabiranjem i množenjem. Jasno, svi prsteni (sa jedinicom), kao i polja, jesu poluprsteni, pa celi, racionalni, realni i kompleksni brojevi formiraju poluprstene u odnosu na sabiranje i množenje. Važni primeri poluprstena svakako uključuju sledeće poluprstene.

- Booleov poluprsten $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1)$, gde je $1 + 1 = 1 \cdot 1 = 1$;
- Tropski poluprsten $Trop = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$ (takođe poznat kao min-plus poluprsten), gde se min i + na prirodan način proširuju na $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- Arktički poluprsten $Arc = (\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$;
- Viterbiev poluprsten $([0, 1], \max, \cdot, 0, 1)$ koji se koristi za množenje verovatnoća;
- Poluprsten $(\mathbf{2}^{X^*}, \cup, \cdot, \varnothing, \{e\})$ formalnih jezika nad konačnim alfabetom X;
- Poluprsten $(\mathbf{2}^{U \times U}, \cup, \circ, \varnothing, \Delta)$ binarnih relacija na U;
- Łukasiewiczev poluprsten $([0, 1], \max, \otimes, 0, 1)$, pri čemu je operacija $\otimes$ definisana sa $x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$;

– Idempotentan prirodno uređen komutativan poluprsten $(\{0, 1, a, \infty\}, +, \cdot, 0, 1)$, sa $0 \leqslant 1 \leqslant a \leqslant \infty$ i $a \cdot a = a$;

– Svaka ograničena distributivna mreža $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je poluprsten.

Nadalje, do kraja ovog poglavlja, neka je $\mathcal{S}$ poluprsten i neka su I, J i K neprazni konačni skupovi. *Matrica sa vrednostima u* $\mathcal{S}$ indeksirana sa I i J, ili kraće samo *matrica*, je svako preslikavanje $A : I \times J \to S$. Za $i \in I$ i $j \in J$, vrednost $A(i, j)$ od A, takođe ćemo označavati i sa A_{ij}, i nazivaćemo je (i, j)-*ta vrednost* od A.

Skup svih matrica sa vrednostima u $\mathcal{S}$ indeksirane skupovima I i J označavaćemo sa $S^{I\times J}$. Ako su I ili J jednoelementni skupovi, onda ćemo umesto $S^{I\times J}$ koristiti oznake $S^{1\times J}$ i $S^{I\times 1}$, i za A ćemo reći da je *vrsta* ili *kolona matrica*, tim redom.

Za matricu $A \in S^{I\times J}$, matricu $A^t \in S^{J\times I}$ definisanu sa

$$A^t_{ji} = A_{ij}, \qquad \text{za sve } j \in J \text{ i } i \in I, \tag{1.11}$$

nazivamo *transponovana matrica* matrice A.

Za $A, B \in S^{I\times J}$, definišemo *sumu* $A + B \in S^{I\times J}$ sa

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad \text{za sve } i \in I \text{ i } j \in J, \tag{1.12}$$

i *Hadamardov proizvod* $A \odot B$ sa

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}, \quad \text{za sve } i \in I \text{ i } j \in J. \tag{1.13}$$

Dalje, *nula matrica* $0 \in S^{I\times J}$ je matrica čije su sve vrednosti jednake 0. Prema ovoj definiciji $(S^{I\times J}, +, 0)$ je komutativan monoid.

Neka su $A \in S^{I\times J}$ i $B \in S^{J\times K}$ matrice. Tada se *proizvod* $A \circ B \in S^{I\times K}$ definiše sa

$$(A \circ B)_{ik} = \sum_{j\in J} A_{ij}B_{jk}, \qquad \text{za sve } i \in I \text{ i } k \in K. \tag{1.14}$$

Dalje, *jedinična matrica* $E \in S^{I\times I}$ je matrica čiji su svi elementi na dijagonali jednaki 1, a svi elementi van dijagonale su jednaki 0, tj., $E_{ii} = 1$ i $E_{ij} = 0$ ako je $i \neq j$.

Jednostavno se proverava da je matrično množenje asocijativna operacija, da važi distributivni zakon za množene u odnosu na sabiranje matrica, dalje, da je E multiplikativna jedinica, a da je 0 multiplikativna nula. Dakle, $(S^{I\times I}, +, \cdot, 0, E)$ je poluprsten.

Ako je $\mathcal{S}$ uređen poluprsten, onda se uređenje na $S^{I\times J}$ definiše na sledeći način:

$$A \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} \leqslant B_{ij}, \qquad \text{za sve } i \in I \text{ i } j \in J. \tag{1.15}$$

1.5 Fazi relacije

Koncept fazi skupova koji će biti razmatran u ovoj disertaciji baziran je na kompletnim reziduiranim mrežama i znatno je opštiji od originalnog Zadehovog koncepta [207], gde se koristi realni zatvoreni jedinični interval $[0, 1]$. Fazi ekvivalencije su uvedene u radu Zadeha [208], kao uopštenje koncepta obične relacije ekvivalencije, i opsežno su izučavane u nizu radova, gde zavisno od autora i konteksta u kom su razmatrane dobijaju različita imena. U ovom poglavlju, dati pojmovi i rezultati su u skladu sa radom M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović [40], kao i sa monografijama D. Dubois, H. Prade [71, 72] i G. J. Klir, B. Yuan [121].

Dalje u tekstu $\mathcal{L}$ će biti kompletna reziduirana mreža.

Fazi podskup skupa A *nad* $\mathcal{L}$, ili jednostavno *fazi podskup* od A, je svaka funkcija iz A u L. Obični krisp podskupovi od A se smatraju fazi podskupovima od A koji uzimaju vrednosti samo u skupu $\{0, 1\} \subseteq L$. Neka su f i g dva fazi podskupa od A. *Jednakost* od f i g se definiše kao uobičajena jednakost funkcija, tj. $f = g$ ako i samo ako je $f(x) = g(x)$, za svako $x \in A$. *Inkluzija* $f \leqslant g$ se takođe definiše pokoordinatno: $f \leqslant g$ ako i samo ako je $f(x) \leqslant g(x)$, za svako $x \in A$. Snabdeven ovim parcijalnim uređenjem, skup $\mathcal{F}(A)$ svih fazi podskupova od A čini kompletnu reziduiranu mrežu, u kojoj presek $\bigwedge_{i\in I} f_i$ i unija $\bigvee_{i\in I} f_i$ proizvoljne familije $\{f_i\}_{i\in I}$ fazi podskupova od A jesu funkcije iz A u L definisane sa

$$\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} f_i(x), \qquad \left(\bigvee_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x),$$

a *proizvod* $f \otimes g$ je fazi podskup definisan sa $f \otimes g(x) = f(x) \otimes g(x)$, za svako $x \in A$.

Krisp deo fazi podskupa f od A je krisp podskup $f^c = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ od A. Takođe, f^c ćemo posmatrati i kao funkciju $f^c : A \to L$ definisanu sa $f^c(a) = 1$, ako je $f(a) = 1$, i $f^c(a) = 0$, ako je $f(a) < 1$.

Neka su A i B neprazni skupovi. *Fazi relacija između skupova* A i B (ili *fazi relacija iz* A *u* B) je svaka funkcija iz $A \times B$ u L, odnosno, svaki fazi podskup od $A \times B$, i jednakost, inkluzija (uređenje), unija i presek fazi relacija se definišu kao za fazi podskupove. Posebno, *fazi relacija na skupu* A je svaka funkcija iz $A \times A$ u L, tj. svaki fazi podskup od $A \times A$. Skup svih fazi relacija iz A u B biće označen sa $\mathcal{R}(A, B)$, a skup svih fazi relacija na skupu A biće označen sa $\mathcal{R}(A)$. *Inverzna fazi relacija* (u nekim izvorima nazvana i *obratna* ili *transponovana*) date fazi relacje $R \in \mathcal{R}(A, B)$ je fazi relacija $R^{-1} \in \mathcal{R}(B, A)$ definisana sa $R^{-1}(b, a) = R(a, b)$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. *Krisp relacija* je fazi relacija koja uzima vrednosti jedino u skupu $\{0, 1\}$, i ako je R krisp relacija iz A u B, tada izrazi "$R(a, b) = 1$" i "$(a, b) \in R$" imaju isto značenje.

Za neprazne skupove A, B i C, i fazi relacije $R \in \mathcal{R}(A, B)$ i $S \in \mathcal{R}(B, C)$, njihova *kompozicija* $R \circ S$ je fazi relacija iz $\mathcal{R}(A, C)$ definisana sa

$$(R \circ S)(a, c) = \bigvee_{b \in B} R(a, b) \otimes S(b, c), \tag{1.16}$$

za sve $a \in A$ i $c \in C$. Ako su R i S krisp relacije, tada je $R \circ S$ obična kompozicija relacija, tj.,

$$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b \in B)\, (a, b) \in R \;\&\; (b, c) \in S\},$$

a ako su R i S funkcije, tada $R \circ S$ jeste obična kompozicija preslikavanja, tj. $(R \circ S)(a) = S(R(a))$, za svako $a \in A$.

Dalje, neka je $f \in \mathcal{F}(A)$, $R \in \mathcal{R}(A, B)$ i $g \in \mathcal{F}(B)$, onda su *kompozicije* $f \circ R$ i $R \circ g$ fazi podskupovi od B i A, tim redom, definisani sa

$$(f \circ R)(b) = \bigvee_{a \in A} f(a) \otimes R(a, b), \quad (R \circ g)(a) = \bigvee_{b \in B} R(a, b) \otimes g(b), \tag{1.17}$$

za svaki $a \in A$ i $b \in B$.

Posebno, za $f, g \in \mathcal{F}(A)$ pišemo

$$f \circ g = \bigvee_{a \in A} f(a) \otimes g(a). \tag{1.18}$$

Vrednost $f \circ g$ se moše sagledati kao "stepen preklapanja" f i g. Posebno, ako su f i g krisp skupovi i R je krisp relacija, onda je

$$f \circ R = \{b \in B \mid (\exists a \in f)\,(a,b) \in R\}\,, \quad R \circ g = \{a \in A \mid (\exists b \in g)\,(a,b) \in R\}\,.$$

Neka su A, B, C i D neprazni skupovi. Tada za sve $R_1 \in \mathcal{R}(A,B)$, $R_2 \in \mathcal{R}(B,C)$ i $R_3 \in \mathcal{R}(C,D)$ važi

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3), \tag{1.19}$$

pa se zagrade u (1.19) mogu izostaviti. Takođe, za $R_0 \in \mathcal{R}(A,B)$, $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(B,C)$ i $R_3 \in \mathcal{R}(C,D)$ važi

$$R_1 \leqslant R_2 \ \text{ povlači } \ R_1^{-1} \leqslant R_2^{-1}, \quad R_0 \circ R_1 \leqslant R_0 \circ R_2, \quad \text{i} \quad R_1 \circ R_3 \leqslant R_2 \circ R_3. \tag{1.20}$$

Dalje, za sve $R_1 \in \mathcal{R}(A,B)$, $R_2 \in \mathcal{R}(B,C)$, $f \in \mathcal{F}(A)$, $g \in \mathcal{F}(B)$ i $h \in \mathcal{F}(C)$ jednostavno se proverava da važi

$$(f \circ R_1) \circ R_2 = f \circ (R_1 \circ R_2), \ (f \circ R_1) \circ g = f \circ (R_1 \circ g), \ (R_1 \circ R_2) \circ h = R_1 \circ (R_2 \circ h) \tag{1.21}$$

pa se stoga zagrade u (1.21) mogu izostaviti, kao i zagrade u (1.19).

Konačno, za sve $R, R_i \in \mathcal{R}(A,B)$ $(i \in I)$ i $S, S_i \in \mathcal{R}(B,C)$ $(i \in I)$ važi

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \tag{1.22}$$

$$R \circ \big(\bigvee_{i \in I} S_i\big) = \bigvee_{i \in I} (R \circ S_i), \quad \big(\bigvee_{i \in I} R_i\big) \circ S = \bigvee_{i \in I} (R_i \circ S), \tag{1.23}$$

$$\big(\bigvee_{i \in I} R_i\big)^{-1} = \bigvee_{i \in I} R_i^{-1}. \tag{1.24}$$

Napomenimo da ako su A, B i C konačni skupovi kardinalnosti $|A| = k$, $|B| = m$ i $|C| = n$, tada se $R \in \mathcal{R}(A,B)$ i $S \in \mathcal{R}(B,C)$ mogu posmatrati kao $k \times m$ i $m \times n$ fazi matrice nad $\mathcal{L}$, a $R \circ S$ kao matrični proizvod. Analogno, za $f \in \mathcal{F}(A)$ i $g \in \mathcal{F}(B)$ se $f \circ R$ može tretirati kao proizvod $1 \times k$ matrice f i $k \times m$ matrice R, a $R \circ g$ kao proizvod $k \times m$ matrice R i $m \times 1$ matrice g^t (transponovane matrice od g).

Fazi relacija E na skupu A je

(R) *refleksivna* ako $E(a,a) = 1$, za svako $a \in A$;

(S) *simetrična* ako $E(a,b) = E(b,a)$, za sve $a,b \in A$;

(T) *tranzitivna* ako $E(a,b) \otimes E(b,c) \leqslant E(a,c)$, za sve $a,b,c \in A$.

Ako je E refleksivna i tranzitivna, onda je $E \circ E = E$. Fazi relacija na A koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna naziva se *fazi ekvivalencija* ili *fazi relacija ekvivalencije*.

U odnosu na uređenje fazi relacija, skup $\mathcal{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija na A je kompletna mreža, u kojoj se presek poklapa sa presekom fazi relacija, ali u opštem slučaju, unija u $\mathcal{E}(A)$ se ne poklapa sa unijom fazi relacija.

Za fazi ekvivalencije E na A i $a \in A$, definišemo fazi podskup E_a od A sa:

$$E_a(x) = E(a,x), \quad \text{za svako} \;\; x \in A.$$

Fazi podskup E_a nazivamo *klasom ekvivalencije* od E određene sa a. Skup $A/E = \{E_a \,|\, a \in A\}$ se naziva *faktor skup* od A u odnosu na E (videti [12, 40]). Kardinalnost faktor skupa A/E, u oznaci $\mathrm{ind}(E)$, naziva se *indeks* od E. Isti način označavanja koristićemo za krisp ekvivalencije, tj. za relaciju ekvivalencije π na A, odgovarajući faktor skup se označava sa A/π, klasa ekvivalencije elementa $a \in A$ se označava sa π_a, a indeks od π se označava sa $\mathrm{ind}(\pi)$.

Sledeća svojstva fazi ekvivalencija dokazana u [40] će se koristiti u daljem radu.

Lema 1.1. *Neka je E fazi ekvivalencija na skupu A i neka je E^c njen krisp deo. Tada je E^c krisp ekvivalencija na A, i za sve $a,b \in A$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $E(a,b) = 1$;

(ii) $E_a = E_b$;

(iii) $E^c_a = E^c_b$;

(iv) $E(a,x) = E(b,x)$, *za svako* $x \in A$.

Otuda, $\mathrm{ind}(E) = \mathrm{ind}(E^c)$.

Napomenimo da E^c_a označava klasu krisp ekvivalencije od E^c određenu elementom a.

Fazi ekvivalencija E na skupu A se naziva *fazi jednakost* ako za sve $x, y \in A$, $E(x, y) = 1$ povlači $x = y$. Drugim rečima, E je fazi jednakost ako i samo ako njen krisp deo E^c jeste identička relacija. Za fazi ekvivalenciju E na skupu A, fazi relacija $\widetilde{E}$ definisana na faktor skupu A/E sa

$$\widetilde{E}(E_x, E_y) = E(x, y),$$

za sve $x, y \in A$, jeste dobro definisana, i jeste fazi jednakost na A/E.

1.6 Uniformne fazi relacije

U ovom poglavlju biće dati pojmovi, oznake i rezultati koji se tiču uniformnih fazi relacija i srodnih koncepata. Uniformne fazi relacije uvedene su u [41] kao takve fazi relacije koje bi se mogle shvatiti kao fazi ekvivalencije između elemenata dva različita skupa. U tom radu dati su osnovni pojmovi, oznake i rezultati koji se tiču uniformnih fazi relacija i srodnih koncepata. Drugačija karakterizacija koncepta uniformne fazi relacije, preko operacije kompozicije fazi relacija data je u [42].

Neka su A i B neprazni skupovi i neka su E i F fazi ekvivalencije na A i B, tim redom. Ako fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ zadovoljava

(EX1) $R(a_1, b) \otimes E(a_1, a_2) \leqslant R(a_2, b)$, za sve $a_1, a_2 \in A$ i $b \in B$,

nazivamo je *ekstenzionalnom u odnosu na* E, a ako zadovoljava

(EX2) $R(a, b_1) \otimes F(b_1, b_2) \leqslant R(a, b_2)$, za sve $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$,

nazivamo je *ekstenzionalnom u odnosu na* F. Ako je R ekstenzionalna u odnosu na E i F, i ako zadovoljava uslov

(PFF) $R(a, b_1) \otimes R(a, b_2) \leqslant F(b_1, b_2)$, za sve $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$,

onda je R *parcijalna fazi funkcija* u odnosu na E i F.

Parcijalne fazi funkcije uveo je Klawonn [119], takođe ih je proučavao Demirci [60, 61]. S obzirom na svojstvo adjunkcije i simetriju, uslovi (EX1) i (EX2) mogu se prestaviti i na sledeći način

(EX1') $E(a_1, a_2) \leqslant R(a_1, b) \leftrightarrow R(a_2, b)$, za sve $a_1, a_2 \in A$ i $b \in B$;

(EX2') $F(b_1, b_2) \leqslant R(a, b_1) \leftrightarrow R(a, b_2)$, za sve $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$.

Za proizvoljnu fazi relaciju $R \in \mathcal{R}(A, B)$ možemo definisati fazi ekvivalenciju E_A^R na A sa

$$E_A^R(a_1, a_2) = \bigwedge_{b \in B} R(a_1, b) \leftrightarrow R(a_2, b), \tag{1.25}$$

za sve $a_1, a_2 \in A$, i fazi ekvivalenciju E_B^R na B sa

$$E_B^R(b_1, b_2) = \bigwedge_{a \in A} R(a, b_1) \leftrightarrow R(a, b_2), \tag{1.26}$$

za sve $b_1, b_2 \in B$. Nazivaće se *fazi ekvivalencije* na A i B *indukovane sa* R, i posebno, E_A^R će se nazivati the *jezgro* od R, i E_B^R *kojezgro* od R. Prema (EX1') i (EX2'), E_A^R i E_B^R su najveće fazi ekvivalencije na A i B, redom, takve da je R ekstenzionalnau odnosu na njih.

Fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ je *parcijalna fazi funkcija* ako je parcijalna fazi funkcija u odnosu na E_A^R i E_B^R. Karakterizacija parcijalnih fazi funkcija može se dati na sledeći način.

Teorema 1.7. *Neka su A i B neprazni skpovi i neka je $R \in \mathcal{R}(A, B)$ fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je parcijalna fazi funkcija;*

(ii) *R^{-1} je parcijalna fazi funkcija;*

(iii) *$R^{-1} \circ R \leqslant E_B^R$;*

(iv) *$R \circ R^{-1} \leqslant E_A^R$;*

(v) *$R \circ R^{-1} \circ R \leqslant R$.*

Fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ je *$\mathcal{L}$-funkcija* ako za svako $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $R(a, b) = 1$ [62], takođe za R kažemo da je *sirjektivna* ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $R(a, b) = 1$, tj., ako R^{-1} jeste $\mathcal{L}$-funkcija. Za sirjektivnu fazi relaciju $R \in \mathcal{R}(A, B)$ takođe kažemo da je fazi relacija iz A *na* B. Ako R jeste $\mathcal{L}$-funkcija i ako je sirjektivna, tj., ako i R i R^{-1} jesu $\mathcal{L}$-funkcije, tada za R kažemo da je *sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija*.

Napomenimo da fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ jeste $\mathcal{L}$-funkcija ako i samo ako postoji funkcija $\psi : A \to B$ takva da $R(a, \psi(a)) = 1$, za sve $a \in A$ (videti [61, 62]). Funkcija ψ sa ovim svojstvom se naaziva *krisp opis* fazi relacije R, i sa $CR(R)$ se označava skup svih takvih funkcija.

Svaka $\mathcal{L}$-fnkcija koja je parcijalna fazi u odnosu na E i F naziva se *perfektna fazi funkcija* u odnosu na E i F. Perfektne fazi funkcije je uveo i izučavao Demirci [60, 61]. Fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ koja je perfektna fazi funkcija u odnosu na E_A^R i E_B^R naziva se *perfektna fazi funkcija.*

Neka su A i B neprazni skupovi i neka je E fazi ekvivalencija na B. Obična funkcija $\psi : A \to B$ je *E-sirjektivna* ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $E(\psi(a), b) = 1$. Drugim rečima, ψ je E-sirjektivna ako i samo ako $\psi \circ E^\sharp$ funkcija iz A na B/E, gde je $E^\sharp : B \to B/E$ fnkcija data sa $E^\sharp(b) = E_b$, za svaki $b \in B$. Jasno, ψ je E-sirjektivna funkcija ako i samo ako $\operatorname{Im}\psi$ ima neprazan presek sa svakom klasom relacije ekvivalencije $\ker(E)$.

Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $R \in \mathcal{R}(A, B)$ parcijalna fazi funkcja. Ako je R još i sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, onda se R naziva *uniformna fazi relacija* [41]. Drugim rečima, uniformna fazi relacija je prefektna fazi funkcija koja ima dodatno svojstvo da je sirjektivna. Uniformna fazi relacija koja je krisp relacija naziva se *uniformna relacija.*

Teorema 1.8. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $R \in \mathcal{R}(A, B)$ fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je uniformna fazi relacija;*

(ii) *R^{-1} je uniformna fazi relacija;*

(iii) *R je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i*

$$R \circ R^{-1} \circ R = R; \tag{1.27}$$

(iv) *R je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i*

$$E_A^R = R \circ R^{-1}; \tag{1.28}$$

(v) *R je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i*

$$E_B^R = R^{-1} \circ R; \tag{1.29}$$

(vi) *R je $\mathcal{L}$-funkcija, i za sve $\psi \in CR(R)$, $a \in A$ i $b \in B$ funkcija ψ je E_B^R-sirjektivna i*

$$R(a, b) = E_B^R(\psi(a), b); \tag{1.30}$$

(vii) *R je $\mathcal{L}$-funkcija, i za sve $\psi \in CR(R)$ i $a_1, a_2 \in A$ funkcija ψ je E_B^R-sirjektivna i*

$$R(a_1, \psi(a_2)) = E_A^R(a_1, a_2). \tag{1.31}$$

Dokaz. Uslovi (i), (ii), (vi) i (vii) su isti kao u Teoremi 3.3 [41], a uslovi (iv) i (v) predstavljaju samo drugačiju formulaciju uslova (v) i (vi) Teoreme 3.3 [41]. Implikacija (iii)$\Rightarrow$(i) direktno sledi iz Teoreme 1.7. Stoga, ostaje da pokažemo (i)$\Rightarrow$(iii).

Ako je R uniformna fazi relacija, onda je ona i sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, i prema Teoremi 1.7 važi $R \circ R^{-1} \circ R \leqslant R$, pa ostaje da pokažemo obratnu nejednakost. Neka su $\psi \in CR(R)$, $a \in A$ i $b \in B$ proizvoljni. Tada $R(a, \psi(a)) = R^{-1}(\psi(a), a) = 1$, i

$$\begin{aligned} R(a,b) &= R(a,\psi(a)) \otimes R^{-1}(\psi(a),a) \otimes R(a,b) \\ &\leqslant \bigvee_{a' \in A, b' \in B} R(a,b') \otimes R^{-1}(b',a') \otimes R(a',b) = (R \circ R^{-1} \circ R)(a,b). \end{aligned}$$

Dakle, $R \leqslant R \circ R^{-1} \circ R$, čime smo pokazali da je $R \circ R^{-1} \circ R = R$. □

Posledica 1.1. [41] *Neka su A i B neprazni skupovi, i neka je $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija. Tada za sve $\psi \in CR(\varphi)$ i $a_1, a_2 \in A$ važi*

$$E_A^{\varphi}(a_1, a_2) = E_B^{\varphi}(\psi(a_1), \psi(a_2)). \tag{1.32}$$

Napomena 1.1. Neka su A i B neprazni skupovi. Tada prema Teoremi 1.8, fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ je uniformna fazi relacija ako i samo ako njena inverzna relacija R^{-1} jeste uniformna fazi relacija. Štaviše, prema (iv) i (v) Teoreme 1.8, imamo da jezgro od R^{-1} jeste kojezgro od R, i obratno, kojezgro od R^{-1} jeste jezgro od R, tj.

$$E_B^{R^{-1}} = E_B^R \quad \text{i} \quad E_A^{R^{-1}} = E_A^R.$$

Lema 1.2. *Neka su A i B neprazni skupovi, $R \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija, $E = E_A^R$ i $F = E_B^R$, i neka je funkcija $\widetilde{R} : A/E \to B/F$ definisana sa*

$$\widetilde{R}(E_a) = F_{\psi(a)}, \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } \psi \in CR(R). \tag{1.33}$$

Tada je $\widetilde{R}$ dobro definisana funkcija (ne zavisi od izbora $\psi \in CR(R)$ i $a \in A$), to je bijekcija od A/E na B/F, i $(\widetilde{R})^{-1} = \widetilde{R^{-1}}$.

Dokaz. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da $E_{a_1} = E_{a_2}$ i neka je $\psi \in CR(R)$. Prema Posledici 1.1 je $F(\psi(a_1), \psi(a_2)) = E(a_1, a_2) = 1$, pa $F_{\psi(a_1)} = F_{\psi(a_2)}$.

Sa druge strane, neka su $a \in A$ i $\psi_1, \psi_2 \in CR(R)$. Tada na osnovu Teoreme 1.8 imamo da je $F(\psi_1(a), \psi_2(a)) \geqslant R(a, \psi_1(a)) \otimes R(a, \psi_2(a)) = 1$, i ponovo dobijamo da je $F_{\psi(a_1)} = F_{\psi(a_2)}$. Dakle, $\widetilde{R}$ je dobro definisano, tj., ne zavisi od izbora $\psi \in CR(R)$ i prestavnika klase fazi ekvivalencije E.

Dalje, za proizvoljne $\psi \in CR(R)$, $\xi \in CR(R^{-1})$, $a \in A$ i $b \in B$, na osnovu (vi) i (vii) Teoreme 1.8 važi

$$
\begin{aligned}
E(a, \xi(\psi(a))) &= R^{-1}(\psi(a), a) = R(a, \psi(a)) = 1, \\
F(b, \psi(\xi(b))) &= R(\xi(b), b) = R^{-1}(b, \xi(b)) = 1,
\end{aligned}
$$

pa je $E_a = E_{\xi(\psi(a))}$ i $F_b = E_{\psi(\xi(a))}$. Odave sledi da je $(\widetilde{R})^{-1} = \widetilde{R^{-1}}$. □

Lema 1.3. *Neka su A i B neprazni skupovi, i neka su $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformne fazi relacije. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $R_1 \leqslant R_2$;

(ii) $R_1^{-1} \leqslant R_2^{-1}$;

(iii) $CR(R_1) \subseteq CR(R_2)$ *i* $E_A^{R_1} \leqslant E_A^{R_2}$;

(iv) $CR(R_1) \subseteq CR(R_2)$ *i* $E_B^{R_1} \leqslant E_B^{R_2}$.

Dokaz. Ekvivalencija (i)⇔(ii) je očigledna.

(i)⇒(iii). Neka je $R_1 \leqslant R_2$. Ako je $\psi \in CR(R_1)$, onda za svaki $a \in A$ važi $1 = R_1(a, \psi(a)) \leqslant R_2(a, \psi(a))$, što povlači $R_2(a, \psi(a)) = 1$, odnosno $\psi \in CR(R_2)$.

Dalje, neka su $a_1, a_2 \in A$. Prema (vii) Teoreme 1.8, za svaki $\psi \in CR(R_1) \subseteq CR(R_2)$ važi

$$
E_A^{R_1}(a_1, a_2) = R_1(a_1, \psi(a_2)) \leqslant R_2(a_1, \psi(a_2)) = E_A^{R_2}(a_1, a_2),
$$

i stoga je $E_A^{R_1} \leqslant E_A^{R_2}$.

(iv)⇒(i). Neka su $a \in A$, $b \in B$ i $\psi \in CR(R_1) \subseteq CR(R_2)$ proizvoljni. Prema (vi) Teoreme 1.8 važi

$$
R_1(a, b) = E_B^{R_1}(\psi(a), b) \leqslant E_B^{R_2}(\psi(a), b) = R_2(a, b),
$$

pa je $R_1 \leqslant R_2$.

Imajući u vidu Napomenu 1.1, isti argumenti koji se koriste pri dokazu (i)⇒(iii) mogu se koristiti za dokazivanje implikacije (ii)⇒(iv), dok se argumenti korišćeni za dokaz (iv)⇒(i) mogu iskoristiti za dokaz (iii)⇒(ii). □

Direktna posledica prethodne leme je i sledeći rezultat koji kaže da je uniformna fazi relacija na jedinstven način određena njenom krisp reprezentacijom i jezgrom, odnosno krisp reprezentacijom i ko-jezgrom.

Posledica 1.2. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka su $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformne fazi relacije. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $R_1 = R_2$;

(ii) $R_1^{-1} = R_2^{-1}$;

(iii) $CR(R_1) = CR(R_2)$ *i* $E_A^{R_1} = E_A^{R_2}$;

(iv) $CR(R_1) = CR(R_2)$ *i* $E_B^{R_1} = E_B^{R_2}$.

Poznato je da kompozicija dve uniformne relacije ne mora biti uniformna fazi relacija (Primer 6.1 [41]). Sledećom lemom se tvrdi da ako je kojezgro prve komponente u kompoziciji sadržano u jezgru druge komponente, onda je kompozicija takođe uniformna fazi relacija.

Lema 1.4. *Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $R_1 \in \mathcal{R}(A, B)$ i $R_2 \in \mathcal{F}(B \times C)$.*

(a) *Ako su R_1 i R_2 sirjektine $\mathcal{L}$-funkcije, onda je $R_1 \circ R_2$ takođe sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija.*

(b) *Ako su R_1 i R_2 uniformne fazi relacije takve da $E_B^{R_1} \leqslant E_B^{R_2}$, onda je $R_1 \circ R_2$ uniformna fazi relacija.*

Dokaz. (a) Ovo je posledica činjenice da za proizvoljne $\psi_1 \in CR(R_1)$ i $\psi_2 \in CR(R_2)$ važi $\psi_1 \circ \psi_2 \in CR(R_1 \circ R_2)$.

(b) Na osnovu pretpostavke $E_B^{R_1} \leqslant E_B^{R_2}$ i Teoreme 1.8 imamo

$$R_2 \circ R_2^{-1} \circ R_1^{-1} \circ R_1 = E_B^{R_2} \circ E_B^{R_1} = E_B^{R_2} = R_2 \circ R_2^{-1},$$

pa za $R = R_1 \circ R_2$ važi

$$R \circ R^{-1} \circ R = R_1 \circ R_2 \circ R_2^{-1} \circ R_1^{-1} \circ R_1 \circ R_2 = R_1 \circ R_2 \circ R_2^{-1} \circ R_2 = R_1 \circ R_2 = R.$$

Zajedno sa (a) ovo povlači da je $R = R_1 \circ R_2$ uniformna fazi relacija. $\square$

Kao što smo već rekli, Booleove (krisp) relacije se mogu shvatiti kao fazi relacije koje uzimaju vrednosti samo u skupu $\{0, 1\}$, pa se prethodno uvedeni pojmovi i dati rezultati odnose i na Booleove relacije. Zbog potreba u daljem radu, ovde ćemo ih eksplicitno navesti.

Neka su A i B neprazni skupovi. Za Booleovu relaciju φ između A i B kažemo da je *kompletna* ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $\varphi(a,b) = 1$, i kažemo da je *sirjektivna* ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $\varphi(a,b) = 1$. Napomenimo da je φ kompletna relacija ako i samo ako postoji funkcija $\psi : A \to B$ tako da je $\varphi(a, \psi(a)) = 1$, za svako $a \in A$. Funkciju ψ nazivamo *funkcionalnim opisom* relacije φ, i sa $CR(\varphi)$ označavamo skup svih takvih funkcija. Za ekvivalenciju F na B, funkcija $\psi : A \to B$ je F-*sirjektivna* ako i samo ako $\psi \circ F^\natural : A \to B/F$ jeste sirjektivna funkcija.

Proizvoljnoj Booleovoj relaciji φ između A i B, pridružujemo ekvivalenciju E_A^φ na A, koju nazivamo *jezgro* od φ, i ekvivalenciju E_B^φ na B, koju nazivamo *kojezgro* od φ, na sledeći način: za sve $a_1, a_2 \in A$ i $b_1, b_2 \in B$ je

$$E_A^\varphi(a_1,a_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall b \in B)\varphi(a_1,b) = \varphi(a_2,b), \tag{1.34}$$

$$E_B^\varphi(b_1,b_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a \in A)\varphi(a,b_1) = \varphi(a,b_2). \tag{1.35}$$

Neka su A i B neprazni skupovi. *Parcijalna uniformna relacija* između A i B je relacija između A i B koja zadovoljava uslov $\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi \leqslant \varphi$. S obzirom da obratna inkluzija uvek važi, φ je parcijalna uniformna relacija ako i samo ako je $\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi = \varphi$. Parcijalna uniformna relacija koja je kompletna i sirjektivna je *uniformna relacija*.

Sledeće teoreme mogu se izvesti iz opštijih teorema dokazanih za fazi relacije (Teoreme 1.7 i 1.8 i Lema 1.2) imajući u vidu da se na Booleove relacije može gledati kao na fazi relacije koje uzimaju vrednosti u skupu $\{0,1\}$.

Teorema 1.9. *Neka su A i B neprazni skpovi i neka je φ relacija između A i B. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *φ je parcijalna uniformna relacija;*

(ii) *φ^t je parcijalna uniformna relacija;*

(iii) $\varphi^t \circ \varphi \leqslant E_B^\varphi$;

(iv) $\varphi \circ \varphi^t \leqslant E_A^\varphi$;

(v) $\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi \leqslant \varphi$.

Teorema 1.10. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je φ relacija između skupova A i B. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *φ je uniformna relacija;*

(ii) *φ^t je uniformna relacija;*

(iii) *φ je sirjektivna i $E_A^\varphi = \varphi \circ \varphi^t$;*

(iv) *φ je sirjektivna i $E_B^\varphi = \varphi^t \circ \varphi$;*

(v) *φ je kompletna i za sve $\psi \in CR(\varphi)$, $a \in A$ i $b \in B$ funkcija ψ je E_B^φ-sirjektivna i $\varphi(a,b) = E_B^\varphi(\psi(a), b)$;*

(vi) *φ je kompletna i za sve $\psi \in CR(\varphi)$ i $a_1, a_2 \in A$ funkcija ψ je E_B^φ-sirjektivna i $\varphi(a_1, \psi(a_2)) = E_A^\varphi(a_1, a_2)$.*

Lema 1.5. *Neka su A i B neprazni skupovi, neka je E ekvivalencija na A i F ekvivalencija na B. Tada postoji uniformna relacija φ između skupova A i B takva da je $E = E_A^\varphi$ i $F = E_B^\varphi$ ako i samo ako postoji bijektivna funkcija $\phi : A/E \to B/F$.*

Ova bijektivna funkcija se može predstaviti kao $\phi = \widetilde{\varphi}$, gde je $\widetilde{\varphi} : A/E \to B/F$ data sa

$$\widetilde{\varphi}(E_a) = F_{\psi(a)}, \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } \psi \in CR(R). \tag{1.36}$$

Takođe, važi $(\widetilde{\varphi})^t = \widetilde{\varphi^t}$.

1.7 Težinski i fazi automati

Težinski i fazi automati su veoma slični. I jedni i drugi su klasični nedeterministički automati kod kojih prelazi, početna i završna stanja uzimaju vrednosti iz izvesnih struktura. Kod težinskih automata ove vrednosti se nazivaju *težine* i najčešće se uzimaju iz poluprstena, dok se kod fazi automata nazivaju *istinitosne vrednosti* i uzimaju se iz izvesnih uređenih struktura, vrlo često iz mrežno-uređenih struktura.

M. P. Schutzenberger [186] je 1961. godine dao osnovne karakterizacije konačnih automata sa težinama. Ovi rezultati su inspirisali veliki broj raznih uopštenja i daljih istraživanja (videti monografije [16, 68, 73, 125, 173, 175, 176, 196]).

Izučavanje fazi automata i jezika započeli su 1960-tih godina Santos [182, 183, 184], Wee [197], Wee i Fu [198], i Lee i Zadeh [129]. Do skora su uglavnom razmatrani fazi automati i jezici koji uzimaju vrednosti u Gödelovoj strukturi (videti na primer [71, 92, 148]). W. Wechler [196] je inicirao razmatranje fazi automata koji uzimaju vrednosti nad nekim opštijim strukturama, i poslednjih godina pažnju velikog broja istraživača privlače fazi automati koji uzimaju vrednosti iz kompletne reziduirane mreže, mrežno-uređenog monoida i drugih tipova mreža. Najpre je D. W. Qiu [163, 164] dao onovna svojstva fazi automata koju uzimaju vrednosti u kompletnoj reziduiranoj mreži, a kasnije su D. W. Qiu i njegovi saradnici sproveli opsežno istraživanje ovih fazi automata (videti [165, 167, 200, 201, 202, 203, 204]). Sa drugačije tačke gledišta, fazi automate koji uzimaju vrednosti u kompletnoj reziduiranoj mreži izučavali su J. Ignjatović, M. Ćirić i njihovi saradnici u [44, 45, 103, 104, 105, 107, 189]. Fazi automate koji uzimaju vrednosti u mrežno-uređenom monoidu istraživao je Y. M. Li i drugi [130, 131, 133, 135], fazi automati nad nekim drugim tipovima mreža bili su predmet izučavanja u radovima [70, 132, 134, 123, 127, 152, 153, 154, 156], dok su automati koji uopštavaju fazi automate nad proizvoljnim mrežama, kao i težinske automate nad poluprstenima, u skorije vreme izučavani u [38, 69, 115]. Takođe, fazi automati su korišćeni za modeliranje diskretnih sistema događaja (videti [136, 166, 169]).

U ovom poglavlju, najpre ćemo razmatrati fazi automate nad kompletnom reziduiranom mrežom.

Neka je $\mathcal{L}$ kompletna reziduirana mreža i neka je X (konačan) alfabet. *Fazi automat nad* $\mathcal{L}$ i X , ili kraće *fazi automat*, je uređena četvorka $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, gde je A neprazan skup koji nazivamo *skup stanja*, $\delta^A : A \times X \times A \to L$ je fazi podskup od $A \times X \times A$ koji nazivamo *fazi funkcija prelaza*, i $\sigma^A : A \to L$ i $\tau^A : A \to L$ su fazi podskupovi od A koje nazivamo *fazi skup početnih stanja* i *fazi skup završnih stanja*, redom. Vrednost $\delta^A(a, x, b)$ možemo shvatiti kao na stepen od koga ulazno slovo $x \in X$ uzrokuje prelaz iz stanja $a \in A$ u stanje $b \in A$, dok se $\sigma^A(a)$ i $\tau^A(a)$ mogu shvatiti kao stepeni od kojih a jeste početno i završno stanje, tim redom. Iz metodoloških razloga ponekad ćemo dozvoliti da skup stanja A bude beskonačan. Fazi automat čiji je skup stanja konačan nazivamo *konačan fazi automat*.

Neka je sa X^* označen slobodan monoid nad alfabetom X, i neka je $e \in X^*$ prazna reč. Funkcija δ^A se može proširiti do funkcije $\delta^A_* : A \times X^* \times A \to L$ na sledeći način: Ako su $a, b \in A$, onda

$$\delta^A_*(a, e, b) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \ a = b, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \tag{1.37}$$

a ako su $a, b \in A$, $u \in X^*$ i $x \in X$, onda je

$$\delta_*^A(a, ux, b) = \bigvee_{c \in A} \delta_*^A(a, u, c) \otimes \delta^A(c, x, b). \tag{1.38}$$

Prema (1.5) i Teoremi 3.1 [133] (videti takođe [163, 164, 167]), važi

$$\delta_*^A(a, uv, b) = \bigvee_{c \in A} \delta_*^A(a, u, c) \otimes \delta_*^A(c, v, b), \tag{1.39}$$

za sve $a, b \in A$ i $u, v \in X^*$, tj., ako je $w = x_1 \cdots x_n$, za $x_1, \dots, x_n \in X$, onda je

$$\delta_*^A(a, w, b) = \bigvee_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in A^{n-1}} \delta^A(a, x_1, c_1) \otimes \delta^A(c_1, x_2, c_2) \otimes \cdots \otimes \delta^A(c_{n-1}, x_n, b). \tag{1.40}$$

Intuitivno, proizvod $\delta^A(a, x_1, c_1) \otimes \delta^A(c_1, x_2, c_2) \otimes \cdots \otimes \delta^A(c_{n-1}, x_n, b)$ predstavlja stepen sa kojim ulazna reč w uzrokuje prelaz iz stanja a u stanje b preko niza stanja $c_1, \dots, c_{n-1} \in A$, dok $\delta_*^A(a, w, b)$ predstavlja supremum svih stepena po svim mogućim putevima iz a u b pod dejstvom reči w. Takođe, konačan fazi automat $\mathcal{A}$ se može predstaviti kao označen usmeren graf čiji su čvorovi stanja automata $\mathcal{A}$, a grana koja izlazi iz čvora a i ulazi u čvor b je označena parom oblika $x/\delta^A(a, x, b)$, za svaki $x \in X$.

Ako je δ^A krisp podskup od $A \times X \times A$, tj., ako je $\delta^A : A \times X \times A \to \{0, 1\}$, i σ^A i τ^A su krisp podskupovi od A, onda $\mathcal{A}$ je običan *nedeterministički automat*. Drugim rečima, nedeterministički automati su fazi automati nad Booleovom strukturom. Ako je δ^A funkcjija iz $A \times X$ u A, σ^A jednoelementni običan podskup od A, tj., $\sigma^A = \{a_0\}$, za neko $a_0 \in A$, i τ^A je fazi podskup od A, onda se $\mathcal{A}$ naziva *deterministički fazi automat*, u oznaci $\mathcal{A} = (A, \delta^A, a_0, \tau^A)$. U [38, 69] korišćen je naziv *krisp-deterministički automat*. Više informacija o determinističkim fazi automatima može se naći u [13, 103, 104, 107, 133]. Jasno, ako je δ^A krisp podskup od $A \times X \times A$, ili funkcija iz $A \times X$ u A, onda je δ_*^A takođe krisp podskup od $A \times X^* \times A$, ili finkcija iz $A \times X^*$ u A, redom. Deterministički fazi automat $\mathcal{A} = (A, \delta^A, a_0, \tau^A)$ kod koga je τ^A krisp podskup od A, je običan deterministički automat.

Ako za $u \in X^*$ definišemo fazi relaciju δ_u^A na A sa

$$\delta_u^A(a, b) = \delta_*^A(a, u, b), \tag{1.41}$$

za sve $a, b \in A$, koju nazivamo *fazi relacija prelaza* određena sa u, onda se (1.39) može zapisati kao

$$\delta_{uv}^A = \delta_u^A \circ \delta_v^A, \tag{1.42}$$

za sve $u, v \in X^*$.

Reverzni fazi automat fazi automata $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ se definiše kao fazi automat $\bar{\mathcal{A}} = (A, \bar{\delta}^A, \bar{\sigma}^A, \bar{\tau}^A)$ čiji su fazi funkcija prelaza i fazi skupovi početnih i završnih stanja definisani sa $\bar{\delta}^A(a_1, x, a_2) = \delta^A(a_2, x, a_1)$ za sve $a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$, $\bar{\sigma}^A = \tau^A$ i $\bar{\tau}^A = \sigma^A$. Drugim rečima, $\bar{\delta}^A_x = (\delta^A_x)^{-1}$, za svaki $x \in X$.

Fazi jezik u X^* nad $\mathcal{L}$, ili kraće *fazi jezik*, je svaki fazi podskup od X^*, tj., svaka funkcija iz X^* u L. *Fazi jezik raspoznat automatom* $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, u oznaci $L(\mathcal{A})$, je fazi jezik u $\mathcal{F}(X^*)$ definisan sa

$$L(\mathcal{A})(u) = \bigvee_{a,b \in A} \sigma^A(a) \otimes \delta^A_*(a, u, b) \otimes \tau^A(b), \tag{1.43}$$

ili ekvivalentno,

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A})(e) &= \sigma^A \circ \tau^A, \\ L(\mathcal{A})(u) &= \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A, \end{aligned} \tag{1.44}$$

za sve $u = x_1 x_2 \dots x_n \in X^+$, gde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Drugim rečima, jednakost (1.43) govori da je da stepen pripadnosi reči u fazi jeziku $L(\mathcal{A})$ jednak stepenu sa kojim $\mathcal{A}$ raspoznaje ili prihvata reč u. Koristeći oznaku iz (1.17) i drugu jednakost iz (1.19), možemo (1.43) predstaviti kao

$$L(\mathcal{A})(u) = \sigma^A \circ \delta^A_u \circ \tau^A. \tag{1.45}$$

Fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su *jezički ekvivalentni* ako je $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati. Funkcija $\varphi : A \to B$ je *izomorfizam* između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ako je bijekcija i za sve $a, a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$, važi:

$$\delta^A_x(a_1, a_2) = \delta^B_x(\varphi(a_1), \varphi(a_2)), \tag{1.46}$$

$$\sigma^A(a) = \sigma^B(\varphi(a)), \tag{1.47}$$

$$\tau^A(a) = \tau^B(\varphi(a)). \tag{1.48}$$

Ako postoji izomorfizam između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, onda kažemo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ *izomorfni* fazi automati. Jasno, inverz izomorfizma fazi automata je takođe izomorfizam, kao i kompozicija dva izomorfizma.

Kardinalnost fazi automata $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, u oznaci $|\mathcal{A}|$, se definiše kao kardinalnost njegovog skupa stanja A. Fazi automat $\mathcal{A}$ je *minimalani fazi* *automat* jezika $f \in \mathcal{F}$ ako raspoznaje f i $|\mathcal{A}| \leqslant |\mathcal{A}'|$, za svaki fazi automat $\mathcal{A}'$ koji raspoznaje f. Minimalani fazi automat koji raspoznaje dati fazi jezik f ne mora biti jedinstven do na izomorfizam (videti Primer 3.4). Ovo takođe važi i za nedeterminističke automate.

Neka je $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ poluprsten i neka je X (konačan) alfabet. *Težinski automat nad* $\mathcal{S}$ i X, ili kraće *težinski automat*, je četvorka $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, pri čemu je A neprazan konačan skup stanja, $\delta^A : A \times X \times A \to S$ je *težinska funkcija (matrica) prelaza*, $\sigma^A : A \to S$ je *početni težinski vektor*, i $\tau^A : A \to S$ je *završni težinski vektor*. S obzirom da se težinski automati uvode na isti način kao i fazi automati, svi pojmovi i oznake koji su prethodno uvedeni za fazi automate se na isti način definišu i za težinske automate (reč fazi zamenjuje se rečju težinski, a operacije $\vee$ i $\otimes$ se zamenjuju operacijama $+$ i $\cdot$, tim redom). Zapravo, svaki fazi automat nad kompletnom reziduiranom mrežom $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ može se tretirati kao težinski automat nad poluprstenom $\mathcal{L}^* = (L, \vee, \otimes, 0, 1)$. Međutim, ne mogu se sva svojstva fazi automata preneti na težinske automate jer se mnoga od njih dokazuju uz pomoć uređenja i operacija $\wedge$, $\to$ i $\leftrightarrow$ kojima raspolaže kompletna reziduirana mreža $\mathcal{L}$, a kojima ne raspolaže poluprsten $\mathcal{L}^*$. Stoga, težinski automati predstavljaju opštiji koncept od koncepta fazi automata. Fazi automati imaju bogatiju teoriju, dok sa druge strane, težinski automati imaju širi spektar primena.

Sada ćemo dati definiciju faktor fazi automata u odnosu na datu fazi ekvivalenciju, a potom u analogiji sa tim uvešćemo pojam faktor težinskog automata u odnosu na (krisp) ekvivalenciju.

Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi automat i neka je E fazi ekvivalencija na A. Bez ikakvih ograničenja na E, možemo definisati fazi funkciju prelaza $\delta^{A/E} : (A/E) \times X \times (A/E) \to L$ sa

$$\delta^{A/E}(E_a, x, E_b) = \bigvee_{a', b' \in A} E(a, a') \otimes \delta^A(a', x, b') \otimes E(b', b) \tag{1.49}$$

ili ekvivalentno,

$$\delta^{A/E}(E_a, x, E_b) = (E \circ \delta^A_x \circ E)(a, b) = E_a \circ \delta^A_x \circ E_b, \tag{1.50}$$

za sve $a, b \in A$ i $x \in X$.

Takođe, možemo definisati fazi skup $\sigma^{A/E} \in \mathcal{F}(A/E)$ inicijalnih stanja i fazi skup $\tau^{A/E} \in \mathcal{F}(A/E)$ završnih stanja sa

$$\sigma^{A/E}(E_a) = \bigvee_{a' \in A} \sigma^A(a') \otimes E(a', a) = (\sigma^A \circ E)(a) = \sigma^A \circ E_a, \tag{1.51}$$

$$\tau^{A/E}(E_a) = \bigvee_{a' \in A} E(a, a') \otimes \tau^A(a') = (E \circ \tau^A)(a) = E_a \circ \tau^A, \tag{1.52}$$

za svako $a \in A$.

Jasno, $\delta^{A/E}$, $\sigma^{A/E}$ i $\tau^{A/E}$ su dobro definisane, $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ je fazi automat koji nazivamo *faktor fazi automat* od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.

Napomenimo da je jezik $L(\mathcal{A}/E)$ raspoznat faktor fazi automatom $\mathcal{A}/E$ dat sa

$$L(\mathcal{A}/E)(e) = \sigma^A \circ E \circ \tau^A, \tag{1.53}$$

$$L(\mathcal{A}/E)(u) = \sigma^A \circ E \circ \delta^A_{x_1} \circ E \circ \delta^A_{x_2} \circ E \circ \cdots \circ E \circ \delta^A_{x_n} \circ E \circ \tau^A, \tag{1.54}$$

dok je jezik $L(\mathcal{A})$ raspoznat fazi automatom $\mathcal{A}$ dat sa

$$L(\mathcal{A})(e) = \sigma^A \circ \tau^A, \tag{1.55}$$

$$L(\mathcal{A})(u) = \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A, \tag{1.56}$$

za svako $u = x_1 x_2 \dots x_n \in X^+$, gde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Dakle, fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$ raspoznaju isti jezik ako i samo ako je fazi ekvivalencija E rešenje sistema fazi relacijskih jednačina

$$\begin{aligned} \sigma^A \circ \tau^A &= \sigma^A \circ E \circ \tau^A, \\ \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A &= \sigma^A \circ E \circ \delta^A_{x_1} \circ E \circ \cdots \circ E \circ \delta^A_{x_n} \circ E \circ \tau^A, \end{aligned} \tag{1.57}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Za (1.57) kažemo da je *opšti sistem*.

Analogno se definiše težinski faktor automat. Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ težinski automat i E ekvivalencija na A. Tada, menjajući $\bigvee$ sa $\sum$, sa (1.49) je definisana težinska matrica prelaza, a sa (1.51) i (1.52) redom su definisani početni i završni težinski vektori odgovarajućeg težinskog faktor automata $\mathcal{A}/E$, i težinski automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$ raspoznaju isti jezik ako i samo ako je ekvivalencija E rešenje opšteg sistema (1.57).

Glava 2

Slabo linearni sistemi fazi relacijskih nejednačina: Heterogeni slučaj

Izučavanje sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina pokrenuo je E. Sanchez u okviru medicinskih istraživanja (videti [177, 178, 179, 180]). Kasnije ovi sistemi nalailaze na širok spektar primena i u današnje vreme se koriste u fazi kontroli, diskretnim dinamičkim sistemima, reprezentaciji znanja, identifikaciji fazi sistema, prognoziranju fazi sistema, teoriji odlučivanja, fazi ekstrakciji informacija, fazi prepoznavanju oblika, kompresiji i rekonstrukciji slika, kao i u mnogim drugim oblastima (na primer videti [63, 65, 71, 72, 121, 151, 154]).

Najviše su izučavani oni sistemi jednačina i nejednačina koji sa jedne strane sadrže nepoznatu fazi relaciju i datu fazi relaciju ili fazi skup, dok sa druge strane sadrže samo neku drugu datu fazi relaciju ili fazi skup. Takvi sistemi se nazivaju *linearni sistemi*. Rešavanje linearnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina, kao i metode za nalaženje njihovih najvećih rešenja prvi put se razmatraju u napred pomenutim radovima Sancheza, koji je posmatrao linearne sisteme nad Gödelovom strukturom. Kasnije, u nizu radova izučavani su sistemi nad opštijim strukturama, uključujući i sisteme nad kompletnim reziduiranim mrežama (videti [41, 63, 119, 155, 157, 158, 159]).

Složeniji sistemi fazi relacijskih nejednačina i jednačina, nazvani *slabo linearni sistemi*, nedavno su uvedeni i izučavani u radu [106]. Oni se sastoje od nejednačina i jednačina oblika $V_i \circ U \bowtie U \circ V_i$ i $U \leqslant W$, gde su V_i $(i \in I)$ i W date fazi relacije na skupu A, U je nepoznata fazi relacija na A, $\circ$ označava kompoziciju fazi relacija, i $\bowtie$ je jedan od simbola $\leqslant$, $\geqslant$ i $=$. Pored toga, ovi sistemi mogu uključiti i dodatne nejednakosti i jednakosti oblika $V_i \circ U^{-1} \bowtie U^{-1} \circ V_i$ i $U^{-1} \leqslant W$. Slabo linearni sistemi, koji uključuju samo fazi relacije na jednom skupu, nazivaju se *homogeni sistemi*. Svaki homogeni slabo linearni sistem, sa kompletnom reziduiranom mrežom kao strukturom istinitosnih vrednosti, ima najveće rešenje, i u [106] dat je algoritam za izračunavanje tog najvećeg rešenja. Ovaj algoritam je zasnovan na izračunavanju najveće post-fiksne tačke izvesne izotone funkcije na mreži fazi relacija, koja je sadržana u datoj fazi relaciji. Algoritam se zavrŽava u konačnom broju koraka kada je kompletna reziduirana mreža lokalno konačna, kao na primer, kada radimo sa Booleovom i Gödelovom strukturom. Pomenuti algoritam je iterativan, i svaki njegov pojedinačni korak se može sagledati kao rešavanje izvesnog partikularnog linearnog sistema, pa su iz tog razloga ovi sistemi nazvani slabo linearni sistemi.

U ovoj glavi biće izučavani heterogeni slabo linearni sistemi fazi relacijskih nejednačina i jednačina, koji se sastoje iz fazi relacija između dva različita skupa, a nepoznata fazi relacija je između ta dva skupa [108]. Naime, ako su V_i i W_i $(i \in I)$ date fazi relacije na nepraznim skupovima A i B, tim redom, a Z je data fazi relacija između A i B, pod heterogenim slabo linearnim sistemom podrazumevamo dva sistema koja se sastoje iz nejednačina oblika $U^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ U^{-1}$, $U \leqslant Z$, i $V_i \circ U \leqslant U \circ W_i$, $U \leqslant Z$, kao i od četiri sistema dobijena kombinacijom ova dva (za U i U^{-1}).

U ovoj glavi biće prikazani sledeći rezultatai. Biće pokazano da svaki heterogeni slabo linearni sistem ima najveće rešenje (Teorema 2.1). Zatim će biti definisane izotone i image-lokalizovane funkcije $\phi^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ na mreži fazi relacija između A i B takve da svaki od šest heterogenih slabo linearnih sistema može biti predstavljen na ekvivalentan način u obliku $U \leqslant \phi^{(i)}(U)$, $U \leqslant Z$ (Teorema 2.2). Takva reprezentacija će omogućiti da se problem izračunavanja najvećeg rešenja heterogenog slabo linearnog sistema prevede na problem izračunavanja najveće post-fiksne tačke funkcije $\phi^{(i)}$, sadržane u fazi relaciji Z. U tu svrhu, iterativni metod razvijen u [106] biće modifikovan tako da se mođe primeniti na heterogeni slučaj. Takođe će biti pokazano kako se dati metod možde modifikovati tako da se koristi za izračunavanje najvećih krisp rešenja ovih sistema. Nakon toga biće uveden koncept faktor fazi relacijskog sistema u odnosu na fazi ekvivalenciju, i biće dokazane se teoreme analogne poznatim teoremama univerzalne algebre: teorema o homomorfizmu, izomorfizmu i teorema o korespodenciji (videti Teoreme 2.7–2.11).

Korišćenjem ovog koncepta uspostaviće se prirodna veza između rešenja heterogenih i homogenih slabo linearnih sistema (Teoreme 2.12–2.14).

Glava ima sledeću strukturu. U Poglavlju 2.1 daju se definicije homogenih slabo linearnih sistema, potom i definicije heterogenih, i dokazuju se njihova osnovna svojstva. U Poglavlju 2.2 se predstavlja metod za izračunavanje najvećeg rešenja heterogenog slabo linearnog sistema. U Poglavlju 2.3 su razmatrani faktor fazi relacijski sistemi i njihova osnovna svojstva, a u Poglavlju 2.4 opisana je veza između heterogenih i homogenih slabo linearnih sistema.

2.1 Slabo linearni sistemi

U ovom poglavlju biće uvedeni slabo linearni sistemi fazi relacijskih nejednačina i jednačina (homogeni i heterogeni), i biće predstavljeni neki rezultati kojima se opisuju njihova osnovna svojstva.

Neka je A neprazan skup (ne nužno konačan), neka je $\{V_i\}_{i\in I}$ data familija fazi relacija na A (pri čemu I takođe ne mora biti konačan skup), i neka je W data fazi relacija na A.

Sledeći sistemi fazi relacijskih nejednačina i jednačina su razmatrani u [106]:

$$U\circ V_i \leqslant V_i\circ U \qquad (i\in I), \qquad U\leqslant W\,; \tag{$wl1$-1}$$

$$V_i\circ U \leqslant U\circ V_i \qquad (i\in I), \qquad U\leqslant W\,; \tag{$wl1$-2}$$

$$U\circ V_i = V_i\circ U \qquad (i\in I), \qquad U\leqslant W\,; \tag{$wl1$-3}$$

$$U\circ V_i \leqslant V_i\circ U, \quad U^{-1}\circ V_i \leqslant V_i\circ U^{-1}, \quad (i\in I), \quad U\leqslant W\,, \quad U^{-1}\leqslant W\,; \tag{$wl1$-4}$$

$$V_i\circ U \leqslant U\circ V_i, \quad V_i\circ U^{-1} \leqslant U^{-1}\circ V_i, \quad (i\in I), \quad U\leqslant W\,, \quad U^{-1}\leqslant W\,; \tag{$wl1$-5}$$

$$U\circ V_i = V_i\circ U, \quad U^{-1}\circ V_i = V_i\circ U^{-1} \quad (i\in I), \quad U\leqslant W\,, \quad U^{-1}\leqslant W\,; \tag{$wl1$-6}$$

gde je U nepoznata fazi relacija na A. Jasno, fazi relacija $R\in\mathcal{R}(A)$ je rešenje sistema ($wl1$-4) (odnosno sistema ($wl1$-5), ($wl1$-6)) ako i samo ako su i R i R^{-1} rešenja sistema ($wl1$-1) (odnosno ($wl1$-2), ($wl1$-3)), i štaviše, simetrična fazi relacija je rešenje sistema ($wl1$-4) (odnosno ($wl1$-5), ($wl1$-6)) ako i samo ako je rešenje sistema (wl1-1) (odnosno (wl1-2), (wl1-3)). Jasno, ako je $W(a_1, a_2) = 1$, za sve $a_1, a_2 \in A$, tada nejednakost $U \leqslant W$ postaje trivijalna i može se izostaviti.

Sistemi (wl1-1)–(wl1-6) su u radu [106] nazvani *slabo linearni sistemi*. Preciznije, ovde ćemo ih nazivati *homogeni slabo linearni sistemi*. Za svaki $t \in \{1, \ldots, 6\}$, odgovarajući sistem (wl1-t) biće označen sa $WL^{1\text{-}t}(A, I, V_i, W)$. Ako je $W(a_1, a_2) = 1$, za sve $a_1, a_2 \in A$, onda će sistem (wl1-t) jednostavno biti označen sa $WL^{1\text{-}t}(A, I, V_i)$.

U radu [106] je dokazano da svaki od ovih sistema ima najveće rešenje, i ako data fazi relacija W jeste fazi kvazi-uređenje, onda su najveća rešenja sistema (wl1-1), (wl1-2) i (wl1-3) takođe fazi kvazi-uređenja, a ako je W fazi ekvivalencija, onda najveća rešenja sistema (wl1-4), (wl1-5) i (wl1-6) jesu fazi ekvivalencije. U istom radu razvijen je i metod za izračunavanje najvećih rešenja, zasnovan na izračunavanju najveće post-fiksne tačke, sadržane u datoj fazi relaciji, izotone funkcije na mreži fazi relacija.

Ovde će biti uvedeni heterogeni slabo linearni sistemi, biće pokazano da i svaki od ovih sistema ima najveće rešenje (koje može biti i prazno), kao i da se metod iz [106] može modifikovati tako da se može iskoristiti za izračunavanje najvećih rešenja heterogenih slabo linearnih sistema.

Neka su A i B neprazni skupovi (ne nužno konačni), neka je $\{V_i\}_{i\in I}$ data familija fazi relacija na A i $\{W_i\}_{i\in I}$ data familija fazi relacija na B (I takođe ne mora biti konačan skup), i neka je Z data fazi relacija između A i B.

Posmatraćemo sledeće sisteme

$$U^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ U^{-1} \quad (i \in I), \quad U \leqslant Z\,; \tag{wl2-1}$$

$$V_i \circ U \leqslant U \circ W_i \quad (i \in I), \quad U \leqslant Z\,; \tag{wl2-2}$$

i sisteme dobijene kombinacijom sistema (wl2-1) i (wl2-2) (za U i U^{-1})

$$U^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ U^{-1} \quad U \circ W_i \leqslant V_i \circ U \quad (i \in I), \quad U \leqslant Z; \tag{wl2-3}$$

$$V_i \circ U \leqslant U \circ W_i \quad W_i \circ U^{-1} \leqslant U^{-1} \circ V_i \quad (i \in I), \quad U \leqslant Z; \tag{wl2-4}$$

$$V_i \circ U = U \circ W_i \quad (i \in I), \quad U \leqslant Z; \tag{wl2-5}$$

$$U^{-1} \circ V_i = W_i \circ U^{-1} \quad (i \in I), \quad U \leqslant Z; \tag{wl2-6}$$

gde je U nepoznata fazi relacija između A i B. Sistemi ($wl2$-1)–($wl2$-6) će biti nazvani *heterogeni slabo linearni sistemi*. Za svaki $t \in \{1, \ldots, 6\}$, sistem ($wl2$-t) biće označen sa $WL^{2\text{-}t}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$. Ako je $Z(a, b) = 1$, za sve $a \in A$ i $b \in B$, onda će sistem ($wl2$-t) biti označen sa $WL^{2\text{-}t}(A, B, I, V_i, W_i)$.

Sasvim jednostavno mogu se pokazati sledeće dve propozicije.

Propozicija 2.1. *Neka je A neprazan skup, neka je $\{V_i\}_{i \in I}$ familija fazi relacija na A, i neka je W fazi relacija na A. Za proizvoljnu fazi reelaciju $R \in \mathcal{R}(A)$ važi:*

(a) *R je rešenje sistema $WL^{1-1}(A, I, V_i, W)$ ako i samo ako je R^{-1} rešenje sistema $WL^{1-2}(A, I, V_i^{-1}, W^{-1})$;*

(b) *R je rešenje sistema $WL^{1-4}(A, I, V_i, W)$ ako i samo ako je R rešenje sistema $WL^{1-5}(A, I, V_i^{-1}, W^{-1})$.*

Propozicija 2.2. *Neka su A i B neprazni skupovi, neka je $\{V_i\}_{i \in I}$ familija fazi relacija na A i $\{W_i\}_{i \in I}$ familija fazi relacija na B, i neka je Z fazi relacija između A i B. Za proizvoljnu fazi relaciju $R \in \mathcal{R}(A, B)$ važi:*

(a) *R je rešenje sistema $WL^{2-1}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ ako i samo ako je i rešenje sistema $WL^{2-2}(A, B, I, V_i^{-1}, W_i^{-1}, Z)$;*

(b) *R je rešenje sistema $WL^{2-3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ ako i samo ako je i rešenje sistema $WL^{2-4}(A, B, I, V_i^{-1}, W_i^{-1}, Z)$;*

(c) *R je rešenje sistema $WL^{2-5}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ ako i samo ako je i rešenje sistema $WL^{2-6}(A, B, I, V_i^{-1}, W_i^{-1}, Z)$;*

(d) *R je rešenje sistema $WL^{2-3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ ako i samo ako je R^{-1} rešenje sistema $WL^{2-4}(B, A, I, W_i, V_i, Z)$.*

Tvrđenje (a) u Propoziciji 2.1 kaže da su sistemi ($wl1$-1) i ($wl1$-2) dualni, u smislu da za svako tvrđenje koje univerzalno važi za sistem ($wl1$-1) postoji odgovarajuće tvrđenje koje univerzalno važi za sistem ($wl1$-2), i obratno. Slično, dualni su sistemi ($wl1$-4) i ($wl1$-5), ($wl2$-1) i ($wl2$-2), ($wl2$-3) i ($wl2$-4), i ($wl2$-5) i ($wl2$-6). Iz tog razloga, dalje u tekstu uglavnom će biti razmatrani sistemi ($wl1$-1), ($wl1$-4), ($wl2$-1), ($wl2$-3) i ($wl2$-5).

Takođe jednostavno se pokazuje i sledeća propozicija.

Propozicija 2.3. *Neka su R i S fazi relacije takve da je R rešenje sistema $WL^{2-3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ i S je rešenje sistema $WL^{2-3}(B, C, I, W_i, X_i, Y)$. Tada je $R \circ S$ rešenje sistema $WL^{2-3}(A, C, I, V_i, X_i, Z \circ Y)$.*

Teorema 2.1. *Svi heterogeni slabo linearni sistemi imaju najveće rešenje (koje može biti prazno).*

Ako je Z parcijalna fazi funkcija, onda najveća rešenja sistema (wl2-3) i (wl2-4) takođe jesu parcijalne fazi funkcije.

Dokaz. Za svaki $t \in \{1, \dots, 6\}$, neposredno se proverava da je unija proizvoljne familije fazi relacija koje su rešenja sistema ($wl2$-t) takođe rešenje sistema ($wl2$-t), i stoga unija svih rešenja sistema ($wl2$-t) jeste najveće rešenje tog sistema.

Dalje, neka je Z parcijalna fazi funkcija i neka je R najveće rešenje sistema ($wl2$-t), gde je $t = 3$ ili $t = 4$. Tada je $R \circ R^{-1} \circ R \leqslant Z \circ Z^{-1} \circ Z \leqslant Z$, i prema Propoziciji 2.3 imamo da je $R \circ R^{-1} \circ R$ rešenje sistema ($wl2$-t). Kako je R najveće rešenje sitema, sledi da je $R \circ R^{-1} \circ R \leqslant R$, što znači da je R parcijalna fazi funkcija. □

Dalje, neka su A i B neprazni skupovi i neka je $V \in \mathcal{R}(A)$, $W \in \mathcal{R}(B)$ i $Z \in \mathcal{R}(A, B)$. *Desni rezidual* od Z sa V je fazi relacija $Z/V \in \mathcal{R}(A, B)$ definisana sa

$$(Z/V)(a, b) = \bigwedge_{a' \in A} (\, V(a', a) \to Z(a', b)\,), \tag{2.1}$$

za sve $a \in A, b \in B$, a *levi rezidual* od Z sa W je fazi relacija $Z \backslash W \in \mathcal{R}(A, B)$ definisana sa

$$(Z \backslash W)(a, b) = \bigwedge_{b' \in B} (\, W(b, b') \to Z(a, b')\,), \tag{2.2}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$. U slučaju da je $A = B$, ova dva koncepta se svode na dobro poznate koncepte desnog i levog reziduala fazi relacije na skupu (videti [106]).

Prema poznatim rezultatima E. Sancheza (videti [178, 179, 180]), desni rezidual Z/V je najveće rešenje fazi relacijske nejednačine $V \circ U \leqslant Z$, gde je U nepoznata fazi relacija između A i B. Štaviše, skup svih rešenja nejednačine $V \circ U \leqslant Z$ je glavni ideal od $\mathcal{R}(A, B)$ generisan sa Z/V. Analogno, levi rezidual $Z \backslash W$ je najveće rešenje fazi relacijske nejednačine $U \circ W \leqslant Z$, gde je U nepoznata fazi relacija između A i B, i skup svih rešenja nejednačine $U \circ W \leqslant Z$ je glavni ideal od $\mathcal{R}(A, B)$ generisan sa $Z \backslash W$.

Odavde, za date familije fazi relacija $\{V_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{R}(A)$, $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{R}(B)$, i $\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{R}(A, B)$, i nepoznatu fazi relaciju U iz $\mathcal{R}(A, B)$, najveće rešenje sistema $V_i \circ U \leqslant Z_i$ $(i \in I)$ je

$$\bigwedge_{i\in I} Z_i/V_i,$$

tj., presek najvećih rešenja pojedinačnih nejednačina $V_i \circ U \leqslant Z_i$, $i \in I$, a najveće rešenje sistema $U \circ W_i \leqslant Z_i$ $(i \in I)$ je

$$\bigwedge_{i\in I} Z_i \backslash W_i,$$

tj., presek najvećih rešenja pojedinačnih nejednačina $U \circ W_i \leqslant Z_i$, $i \in I$.

Neka su $\phi^{(t)} : \mathcal{R}(A,B) \to \mathcal{R}(A,B)$, za $1 \leqslant t \leqslant 6$, funkcije definisane na sledeći način:

$$\phi^{(1)}(R) = \bigwedge_{i\in I} [(W_i \circ R^{-1})\backslash V_i]^{-1} \tag{2.3}$$

$$\phi^{(2)}(R) = \bigwedge_{i\in I} (R \circ W_i)/V_i \tag{2.4}$$

$$\phi^{(3)}(R) = \bigwedge_{i\in I} [(W_i \circ R^{-1})\backslash V_i]^{-1} \wedge [(V_i \circ R)\backslash W_i] = \phi^{(1)}(R) \wedge [\phi^{(1)}(R^{-1})]^{-1} \tag{2.5}$$

$$\phi^{(4)}(R) = \bigwedge_{i\in I} [(R \circ W_i)/V_i] \wedge [(R^{-1} \circ V_i)/W_i]^{-1} = \phi^{(2)}(R) \wedge [\phi^{(2)}(R^{-1})]^{-1} \tag{2.6}$$

$$\phi^{(5)}(R) = \bigwedge_{i\in I} [(R \circ W_i)/V_i] \wedge [(V_i \circ R)\backslash W_i] = \phi^{(2)}(R) \wedge [\phi^{(1)}(R^{-1})]^{-1} \tag{2.7}$$

$$\phi^{(6)}(R) = \bigwedge_{i\in I} [(W_i \circ R^{-1})\backslash V_i]^{-1} \wedge [(R^{-1} \circ V_i)/W_i]^{-1} = \phi^{(1)}(R) \wedge [\phi^{(2)}(R^{-1})]^{-1} \tag{2.8}$$

za sve $R \in \mathcal{R}(A,B)$. Napomenimo da je u izrazu "$\phi^{(t)}(R^{-1})$" $(t \in \{1,2\})$ sa $\phi^{(t)}$ označena funkcija iz $\mathcal{R}(B,A)$ u $\mathcal{R}(B,A)$.

Najpre će biti pokazano da se sistemi $(wl2\text{-}1)$–$(wl2\text{-}6)$ mogi predstaviti u ekvivalentnom obliku, pomoću funkcija $\phi^{(t)}$, $1 \leqslant t \leqslant 6$, na sledeći način.

Teorema 2.2. *Za svaki $t \in \{1,\ldots,6\}$, sistem (w2-t) je ekvivalentan sistemu*

$$U \leqslant \phi^{(t)}(U), \qquad U \leqslant Z. \tag{2.9}$$

Dokaz. Ovde će biti dokazan jedino slučaj $t = 1$. Slučaj $t = 2$ je dualan prvom, a sva ostala tvrđenja slede na osnovu prva dva, prema (2.5)–(2.8).

Za proizvoljnu fazi relaciju $U \in \mathcal{R}(A,B)$ je $U^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ U^{-1}$ ako i samo ako je

$$U^{-1}(b,a) \otimes V_i(a,a') \leqslant (W_i \circ U^{-1})(b,a'),$$

za sve $a, a' \in A$, $b \in B$ i $i \in I$. Na osnovu svojstva adjunkcije, ovo je ekvivalentno sa

$$U^{-1}(b,a) \leqslant \bigwedge_{a' \in A} [V_i(a,a') \to (W_i \circ U^{-1}(b,a'))] = ((W_i \circ U^{-1})\backslash V_i)(b,a)$$

za sve $a \in A$, $b \in B$ i $i \in I$, što je dalje ekvivalentno sa

$$U(a,b) \leqslant \bigwedge_{i \in I} [(W_i \circ U^{-1})\backslash V_i]^{-1}(a,b) = (\phi^{(1)}(U))(a,b)$$

za sve $a \in A$ and $b \in B$. Stoga, U je rešenje sistema (wl2-1) ako i samo ako je rešenje sistema (2.9). $\square$

2.2 Izračunavanje najvećih rešenja

U ovom poglavlju ćemo problem izračunavanja najvećeg rešenja heterogenog slabo linearnog sistema prevesti na problem izračunavanja najveće post-fiksne tačke funkcije $\phi^{(i)}$, sadržane u datoj fazi relaciji.

Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\phi : \mathcal{R}(A,B) \to \mathcal{R}(A,B)$ izotona funkcija, tj. $R \leqslant S$ povlači $\phi(R) \leqslant \phi(S)$, za sve $R, S \in \mathcal{R}(A,B)$. Fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A,B)$ se naziva *post-fiksna tačka* od ϕ ako je $R \leqslant \phi(R)$. Dobro poznata Teorema Knaster-Tarskog o fiksnoj tački (formulisana i dokazana u opštijem kontekstu, za kompletne mreže) tvrdi da skup svih post-fiksnih tačaka od ϕ čini kompletnu mrežu (videti [172]). Štaviše, za proizvoljnu fazi relaciju $Z \in \mathcal{R}(A,B)$ imamo da skup svih post-fiksnih tačaka od ϕ sadržanih u Z jeste neprazan, jer uvek sadrži najmanji element od $\mathcal{R}(A,B)$ (praznu relaciju), i ovaj skup takođe čini kompletnu mrežu. Prema Teoremi 2.2, glavni zadatak ovde će biti da se nađe efektivni postupak za izračunavanje najveće post-fiksne tačke funkcije $\phi^{(t)}$ koja je sadržana u datoj fazi relaciji Z, za svaki $t \in \{1, \ldots, 6\}$.

Neka je $\phi : \mathcal{R}(A,B) \to \mathcal{R}(A,B)$ izotona funkcija i $Z \in \mathcal{R}(A,B)$. Definišimo niz $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ fazi relacija iz $\mathcal{R}(A,B)$ na sledeći način:

$$R_1 = Z, \qquad R_{k+1} = R_k \wedge \phi(R_k), \quad \text{for each } k \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je očigledno opadajući. Ako je sa $\hat{R}$ označena najveća postfiksna tačka od ϕ sadržana u Z, onda se jednostavno proverava da je

$$\hat{R} \leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} R_k. \tag{2.11}$$

Sada se nameću dva veoma važna pitanja. Prvo, pod kojim uslovima u (2.11) važi jednakost? A možda i važnije pitanje je: pod kojim uslovima je niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan? U slučaju da je ovaj niz konačan, nije teško pokazati da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $R_k = R_m$, za svaki $m \geqslant k$, tj., postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da se niz stabilizuje na R_k. Jasno, niz se stabilizuje kada pronađemo najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $R_k = R_{k+1}$. U tom slučaju je $\hat{R} = R_k$, i time se dobija algoritam za izračunavanje fazi relacije $\hat{R}$ u konačnom broju koraka.

Neki uslovi pod kojima jednakost važi u (2.11), ili je niz konačan, su dati u [106], ali u slučaju kada se razmatraju fazi relacije na jednom skupu. Ovde će biti dati analogni rezultati za fazi relacije između dva (moguće različita) skupa.

Za niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi relacija iz $\mathcal{R}(A,B)$ kažemo da je je *image-konačan* ako je skup $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(R_k)$ konačan. Može se pokazati da je ovaj niz image-konačan ako i samo ako je konačan. Dalje, funkcija $\phi : \mathcal{R}(A,B) \to \mathcal{R}(A,B)$ je *image-lokalizovana* ako postoji konačan podskup $K \subseteq L$ takav da za svaku fazi relaciju $R \in \mathcal{R}(A,B)$ važi

$$\mathrm{Im}(\phi(R)) \subseteq \langle K \cup \mathrm{Im}(R)\rangle, \tag{2.12}$$

gde je $\langle K \cup \mathrm{Im}(R)\rangle$ podalgebra od $\mathcal{L}$ generisana skupom $K \cup \mathrm{Im}(R)$. Takav K se naziva *lokalizacijski skup* funkcije ϕ.

Sledeća teorema može se dokazati kao i Teorema 5.2 u [106].

Teorema 2.3. *Neka je funkcija ϕ image-lokalizovana, neka je K njen lokalizacijski skup, neka je $Z \in \mathcal{R}(A,B)$, i neka je $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz fazi relacija iz $\mathcal{R}(A,B)$ definisan sa* (2.10). *Tada*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(R_k) \subseteq \langle K \cup \mathrm{Im}(Z)\rangle. \tag{2.13}$$

Ako je $\langle K \cup \mathrm{Im}(Z)\rangle$ konačna podalgebra od $\mathcal{L}$, tada je niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan.

Nadalje, razmatraće se funkcije $\phi^{(t)}$, za $t \in \{1,\ldots,6\}$, definisane u (2.3)–(2.8).

Teorema 2.4. *Sve funkcije $\phi^{(t)}$, za $t \in \{1, \dots, 6\}$, su izotone, i ako su A, B i I konačni skupovi, onda su sve ove funkcije image-lokalizovane.*

Dokaz. Biće dokazano tvrđenje za funkciju $\phi^{(1)}$. Odgovarajuće tvrđenje za funkciju $\phi^{(2)}$ važi zbog dualnosti sa prvim, a sva ostala tvrđenja slede iz prva dva, prema (2.5)–(2.8).

Neka su $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(A, B)$ takve da $R_1 \leqslant R_2$, Posmatrajmo sledeći sistem fazi relacijskih nejednačina:

$$U^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ R_1^{-1}, \quad i \in I; \tag{2.14}$$

$$U^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ R_2^{-1}, \quad i \in I, \tag{2.15}$$

gde je U nepoznata fazi relacija između A i B. Kao što je pomenuto ranije, fazi relacije

$$\phi^{(1)}(R_1) = \bigwedge_{i \in I} [(W_i \circ R_1^{-1}) \backslash V_i]^{-1} \quad \text{i} \quad \phi^{(1)}(R_2) = \bigwedge_{i \in I} [(W_i \circ R_2^{-1}) \backslash V_i]^{-1}$$

redom, su najveća rešenja sistema (2.14) i (2.15), a iz $R_1 \leqslant R_2$ sledi da je $W_i \circ R_1^{-1} \leqslant W_i \circ R_2^{-1}$, za svaki $i \in I$, pa svako rešenje sistema (2.14) jeste i rešenje sistema (2.15). Otuda, $\phi^{(1)}(R_1)$ jeste rešenje sistema (2.15), što znači da $\phi^{(1)}(R_1) \leqslant \phi^{(1)}(R_2)$. Stoga, $\phi^{(1)}$ je izotona funkcija.

Ako su A, B i I konačni skupovi, onda je skup $K = \bigcup_{i \in I}(\mathrm{Im}(V_i) \cup \mathrm{Im}(W_i))$ takođe konačan, i za sve $R \in \mathcal{R}(A, B)$ je $\mathrm{Im}(\phi^{(1)}(R)) \subseteq \langle K \bigcup \mathrm{Im}(R) \rangle$. To znači da je funkcija $\phi^{(1)}$ image-lokalizovana. $\square$

Sada će biti formulisana i dokazana jedna od glavnh teorema.

Teorema 2.5. *Neka su A, B i I konačni skupovi, neka je $\phi = \phi^{(t)}$, za neki $t \in \{1, \dots, 6\}$, i neka je $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ niz fazi relacija iz $\mathcal{R}(A, B)$ definisan sa* (2.10).

Ako je $\langle \mathrm{Im}(Z) \cup \bigcup_{i \in I}(\, \mathrm{Im}(V_i) \cup \mathrm{Im}(W_i)\,) \rangle$ konačna podalgebra od $\mathcal{L}$, tada važi sledeće:

(a) *niz $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je konačan i opadajući, i postoji najmanji prirodan broj k takav da $R_k = R_{k+1}$;*

(b) *R_k je najveće rešenje sistema (wl2-t).*

Dokaz. Neka je $\langle \mathrm{Im}(Z) \cup \bigcup_{i\in I}(\mathrm{Im}(V_i) \cup \mathrm{Im}(W_i))\rangle$ konačna podalgebra od $\mathcal{L}$.

(a) Prema Teoremi 2.4 i 2.3, niz $\{R_k\}_{k\in N}$ je konačan i opadajući, pa postoje $k, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $R_k = R_{k+m}$, pa je

$$R_{k+1} \leqslant R_k = R_{k+m} \leqslant R_{k+1}.$$

Dakle, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $R_k = R_{k+1}$, pa postoji i najmanji prirodan broj sa takvim svojstvom.

(b) Neka je k najmanji prirodan broj takav da je $R_k = R_{k+1}$. Jasno da je tada $R_k \leqslant Z$. Štaviše, važi $R_k = R_{k+1} \leqslant \phi^{(t)}(R_k)$, pa prema Teoremi 2.2 sledi da je R_k rešenje sistema (wl2-t).

Neka je R proizvoljno rešenje sistema (wl2-t). Tada je $R \leqslant Z = R_1$. Dalje, uzmimo da je $R \leqslant R_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $R \leqslant \phi^{(t)}(R) \leqslant \phi^{(t)}(R_m)$, pa je $R \leqslant R_m \wedge \phi^{(t)}(R_m) = R_{m+1}$. Stoga, principom matematičke indukcije zaključujemo da je $R \leqslant R_m$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, i otuda, $R \leqslant R_k$. Dakle, pokazano je da je R_k najveće rešenje sistema (wl2-t). □

Pod ovim uslovima imamo sledeće.

Teorema 2.6. *Neka je $\phi = \phi^{(t)}$, za neki $t \in \{1, \dots, 6\}$, neka je $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz fazi relacija iz $\mathcal{R}(A, B)$ definisan sa* (2.10)*, i neka je $\mathcal{L}$ kompletna reziduirana mreža u kojoj su supremum i multiplikacija distributivni u odnosu na infimum.*

Tada fazi relacija

$$R = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} R_k,$$

jeste najveće rešenje sistema (wl2-t).

Dokaz. Ovde će jedino biti dokazan slučaj $t = 1$. Ostali slučajevi se dokazuju na sličan način.

Ako važi (1.7), onda, kako je pokazano u [45], za proizvoljne opadajuće nizove $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L$ važi

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (x_k \vee y_k) = \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} x_k\Big) \vee \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} y_k\Big). \tag{2.16}$$

Sada, za proizvoljne $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$ imamo

$$\begin{aligned}
\left(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}}(W_i \circ R_k^{-1})\right)(b,a) &= \bigwedge_{k\in\mathbb{N}}(W_i \circ R_k^{-1})(b,a) \\
&= \bigwedge_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigvee_{b'\in B} W_i(b,b') \otimes R_k^{-1}(b',a)\right) \\
&= \bigvee_{b'\in B}\left(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} W_i(b,b') \otimes R_k^{-1}(b',a)\right) && \text{(by (2.16))} \\
&= \bigvee_{b'\in B}\left(W_i(b,b') \otimes \left(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} R_k^{-1}(b',a)\right)\right) && \text{(by (1.8))} \\
&= \bigvee_{b'\in B}\left(W_i(b,b') \otimes R^{-1}(b',a)\right) \\
&= (W_i \circ R^{-1})(b,a),
\end{aligned}$$

što znači da je

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} W_i \circ R_k^{-1} = W_i \circ R^{-1},$$

za svaki $i \in I$. Upotreba uslova (2.16) je opravdana činjenicom da je B konačan skup, i da $\{R_k^{-1}(b',a)\}_{k\in\mathbb{N}}$ jeste opadajući niz, pa je

$$\{W_i(b,b') \otimes R_k^{-1}(b',a)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

takođe opadajući niz.

Dalje, za sve $i \in I$ i $k \in \mathbb{N}$ je

$$R \leqslant R_{k+1} \leqslant \phi^{(1)}(R_k) = [(W_i \circ R_k^{-1})\backslash V_i]^{-1},$$

što je ekvivalentno sa

$$R^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ R_k^{-1}.$$

Kako poslednja nejednakost važi za svaki $k \in \mathbb{N}$, to je

$$R^{-1} \circ V_i \leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} W_i \circ R_k^{-1} = W_i \circ R^{-1},$$

za svaki $i \in I$. Stoga, R je rešenje sistema (wl2-1).

Neka je $S \in \mathcal{R}(A,B)$ proizvoljna fazi relacija koja jeste rešenje sistema (wl2-1). Prema Teoremi 2.2 je $S \leqslant \phi^{(1)}(S)$ i $S \leqslant Z = R_1$. Indukcijom se jednostavno pokazuje da je $S \leqslant R_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa je $S \leqslant R$. To znači da je R najveće rešenje sistema (wl2-1). □

U nekim situacijama nisu nam potrebna rešenja sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina koja su fazi relacije, već su nam potrebna rešenja koja su obične krisp relacije. Štaviše, u slučajevima kada se naši algoritmi za izračunavanje najvećih rešenja slabo linearnih sistema ne zaustavljaju u konačnom broju koraka, treba potražiti najveća krisp rešenja ovih sistema. Njih možemo shvatiti kao neku vrstu "aproksimacije" najvećih fazi rešenja. U [106] je pokazano da se algoritmi za izračunavanje najvećih fazi rešenja homogenih slabo linearnih sistema mogu prilagoditi tako da se izračunavaju najveća krisp rešenja ovih sistema. Na isti način se može prilagoditi i metod za izračunavanje najvećih rešenja heterogenih slabo linearnih sistema [108], što će ovde i biti prikazano.

Neka su A i B neprazni skupovi, i neka je $\mathcal{R}^c(A,B)$ skup svih krisp relacija iz $\mathcal{R}(A,B)$. Jednostavno se proverava da je $\mathcal{R}^c(A,B)$ kompletna podmreža mreže $\mathcal{R}(A,B)$, tj., presek i unija u $\mathcal{R}(A,B)$ proizvoljne familije krisp relacija iz $\mathcal{R}^c(A,B)$ su takođe krisp relacije (u suštini one su upravo obični presek i unija krisp relacija). Štaviše, za svaku fazi relaciju $R \in \mathcal{R}(A,B)$ važi $R^c \in \mathcal{R}^c(A,B)$, gde R^c označava *krisp deo* fazi relacije R (u nekim izvorima naziva se i *jezgro* od R), tj., funkcija $R^c : A \times B \to \{0,1\}$ definisana sa $R^c(a,b) = 1$, za $R(a,b) = 1$, i $R^c(a,b) = 0$, ako je $R(a,b) < 1$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Ekvivalentno, R^c se može posmatrati kao obična krisp relacija između A i B data sa $R^c = \{(a,b) \in A \times B \mid R(a,b) = 1\}$.

Za $\phi : \mathcal{R}(A,B) \to \mathcal{R}(A,B)$ definišimo funkciju $\phi^c : \mathcal{R}^c(A,B) \to \mathcal{R}^c(A,B)$ na sledeći način:

$$\phi^c(R) = (\phi(R))^c, \quad \text{za sve } R \in \mathcal{R}^c(A,B).$$

Ako je ϕ izotona, onda je i ϕ^c izotona funkcija.

Propozicija 2.4. *Neka su A i B neprazni skupovi, neka je funkcija $\phi : \mathcal{R}(A,B) \to \mathcal{R}(A,B)$ izotona i neka je $W \in \mathcal{R}(A,B)$ data fazi relacija. Tada je krisp relacija $\varrho \in \mathcal{R}^c(A,B)$ je najveće rešenje u $\mathcal{R}(A,B)$ sistema*

$$U \leqslant \phi(U), \qquad\qquad U \leqslant W, \tag{2.17}$$

ako i samo ako je najveće rešenje u $\mathcal{R}^c(A,B)$ sistema

$$\xi \leqslant \phi^c(\xi), \qquad\qquad \xi \leqslant W^c, \tag{2.18}$$

gde je U nepoznata fazi relacija i ξ je nepoznata krisp relacija.

Štaviše, niz $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}(A,B)$ definisan sa

$$\varrho_1 = W^c, \quad \varrho_{k+1} = \varrho_k \wedge \phi^c(\varrho_k), \quad \textit{za svako} \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{2.19}$$

je konačan opadajući niz krisp relacija, i najmanji element ovog niza je najveće rešenje sistema (2.18) *in* $\mathcal{R}^c(A,B)$.

Uzimajući da je ϕ neka od funkcija $\phi^{(t)}$, for $t \in \{1,\dots,6\}$, Propozicija 2.4 daje algoritam za izračunavanje najvećeg krisp rešenja heterogenih slabo linearnih sistema. Kao što smo videli u Propoziciji 2.4, ovi algoritmi se završavaju u konačnom broju koraka, nezavisno od svojstava strukture istinitosnih vrednosti, i mogu se koristiti u slučajevima kada se algoritmi za izračunavanje najvećih fazi rešenja ne završavaju u konačnom broju koraka. Ipak, postoje primeri kada heterogeni slabo linearni sistemi imaju neprazna fazi rešenja, ali nemaju neprazna krisp rešenja.

Primer 2.1. Neka je $\mathcal{L}$ Gödel-ova struktura, neka su A i B skupovi kardinalnosti $|A| = 3$ i $|B| = 2$, i neka su fazi relacije $V_1, V_2 \in \mathcal{R}(A)$, $W_1, W_2 \in \mathcal{R}(B)$, i $Z \in \mathcal{R}(A,B)$ predstavljene sledećim fazi matricama:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći algoritam zasnovan na Teoremi 2.5 dobijamo da su najveća rešenja sistema (wl2-1)–(wl2-6) redom data fazi matricama

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 1 & 0.7 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.6 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 1 & 0.7 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sa druge strane, korišćenjem algoritma za računanje najvećeg krisp rešenja vidimo da ne postoji neprazno krisp rešenje sistema (wl2-1)–(wl2-6).

Funkcije $(\phi^{(t)})^c$, za sve $t \in \{1, \dots, 6\}$, mogu se predstaviti na sledeći način:

$$(a, b) \in (\phi^{(1)})^c(\varrho) \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)(\forall a' \in A)\, V_i(a, a') \leqslant (W_i \circ \varrho^{-1})(b, a'),$$

$$(a, b) \in (\phi^{(2)})^c(\varrho) \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)(\forall a' \in A)\, V_i(a', a) \leqslant (\varrho \circ W_i)(a', b),$$

$$(\phi^{(3)})^c(\varrho) = (\phi^{(1)})^c(\varrho) \wedge [(\phi^{(1)})^c(\varrho^{-1})]^{-1},$$

$$(\phi^{(4)})^c(\varrho) = (\phi^{(2)})^c(\varrho) \wedge [(\phi^{(2)})^c(\varrho^{-1})]^{-1},$$

$$(\phi^{(5)})^c(\varrho) = (\phi^{(2)})^c(\varrho) \wedge [(\phi^{(1)})^c(\varrho^{-1})]^{-1},$$

$$(\phi^{(6)})^c(\varrho) = (\phi^{(1)})^c(\varrho) \wedge [(\phi^{(2)})^c(\varrho^{-1})]^{-1},$$

za sve $\varrho \in \mathcal{R}^c(A, B)$, $a \in A$ i $b \in B$.

2.3 Faktor fazi relacijski sistemi

Potsetimo se da se relacijski sistem definiše kao par $(A, \mathcal{R})$ koji se sastoji iz nepraznog skupa A i neprazne familije $\mathcal{R}$ konačnih relacija na A koje mogu imati različitu arnost. Za dva relacijska sistema $(A, \mathcal{R}_1)$ i $(B, \mathcal{R}_2)$ se smatra da su istog tipa ako postoji bijektivna funkcija između $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ koja očuvava arnost. Kada radimo samo sa binarnim relcijama, dva relacijska sistema $(A, \mathcal{R}_1)$ i $(B, \mathcal{R}_2)$ jesu istog tipa ako se $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ mogu predstaviti kao $\mathcal{R}_1 = \{V_i\}_{i \in I}$ i $\mathcal{R}_2 = \{W_i\}_{i \in I}$, za neki neprazan indeksni skup I. U tom slučaju, napred pomenuta bijektivna funkcija je funkcija koja slika V_i u W_i, za svaki $i \in I$.

Ovde ćemo posmatrati relacijske sisteme u fazi kontekstu, i radićemo samo sa binarnim fazi relacijama. Definišemo *fazi relacijski sistem* kao par $\mathcal{A} = (A, \{V_i\}_{i \in I})$, gde je A neprazan skup i $\{V_i\}_{i \in I}$ je neprazna familija fazi relacija na A, a pod fazi relacijskim sistemima istog tipa podrazumevaćemo sisteme oblika $\mathcal{A} = (A, \{V_i\}_{i \in I})$ i $\mathcal{B} = (B, \{W_i\}_{i \in I})$. Radi jednostavnijeg označavanja fazi relacijskog sistema $\mathcal{A} = (A, \{V_i\}_{i \in I})$, ponekad ćemo koristiti oznaku $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$. Svi fazi relacijski sistemi koji se nadalje razmatraju biće istog tipa.

Neka su $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ i $\mathcal{B} = (B, I, W_i)$ dva fazi relacijska sistema. Funkcija $\phi : A \to B$ je *izomorfizam* ako je bijekcija i ako za sve $a_1, a_2 \in A$ i $i \in I$ važi

$$V_i(a_1, a_2) = W_i(\phi(a_1), \phi(a_2)).$$

Neka je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ fazi relacijski sistem i neka je E fazi ekvivalencija na A. Za svaki $i \in I$, definišimo fazi relaciju $V_i^{A/E}$ na faktor skupu A/E na sledeći način:

$$V_i^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = (E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2), \tag{2.20}$$

za sve $a_1, a_2 \in A$. Desna strana jednakosti (2.20) može se ekvivalentno zapisati kao

$$(E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = \bigvee_{a_1', a_2' \in A} E(a_1, a_1') \otimes V_i(a_1', a_2') \otimes E(a_2', a_2) = E_{a_1} \circ V_i \circ E_{a_2},$$

i za sve $a_1, a_2, a_1', a_2' \in A$ takve da je $E_{a_1} = E_{a_1'}$ i $E_{a_2} = E_{a_2'}$ imamo da je $(E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (E \circ V_i \circ E)(a_1', a_2')$. Stoga, fazi relacija $V_i^{A/E}$ je dobro definisana, i $\mathcal{A}/E = (A/I, I, V_i^{A/E})$ jeste fazi relacijski sistem istog tipa kao i $\mathcal{A}$. Ovaj sistem naziva se *faktor fazi relacijski sistem* od $\mathcal{A}$, u odnosu na fazi ekvivalenciju E.

Napomenimo da ovakav koncept faktor fazi relacijskog sistema nastaje u teoriji automata, naime, ovaj koncept proističe iz koncepta faktor fazi automata. Faktor fazi automati su uvedeni u [44, 45], gde su korišćeni za redukciju broja stanja fazi automata. Faktor fazi relacijski sistemi mogu se takođe koristiti za redukciju broja čvorova (fazi) mreža (engl. network) zadržavajući pri tom osnovnu strukturu te mreže. Takođe, napomenimo da su u skorije vreme krisp faktor relacijski sistemi definisani na isti način u [32].

Sledeća teorema se može shvatiti kao analogon poznate teoreme univerzalne algebre koja uspostavlja korespodenciju između funkcija i relacija ekvivalencije, kao i korespodenciju između homomorfizama i kongruencija (videti [24, § 2.6]).

Teorema 2.7. *Neka je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ fazi relacijski sistem, E fazi ekvivalencija na A, i $\mathcal{A} = (A/E, I, V_i^{A/E})$ faktor fazi relacijski sitem od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.*

Tada fazi relacija $E^\natural \in \mathcal{R}(A, A/E)$ definisana sa

$$E^\natural(a_1, E_{a_2}) = E(a_1, a_2), \qquad \text{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{2.21}$$

jeste uniformna F-funkcija čije jezgro je E.

Štaviše, fazi relacija $E^\natural$ je rešenje i sistema $WL^{2\text{-}1}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$ i sistema $WL^{2\text{-}2}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$.

Dokaz. Prema Teoremi 7.1 [41], $E^\natural$ je uniformna F-funkcija iz A na A/E i njeno jezgro je E.

Dalje, neka je (radi jednostavnijeg označavanja) $E^\natural = R$. Tada za sve $i \in I$ i $a_1, a_2 \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
(R^{-1} \circ V_i)(E_{a_1}, a_2) &= \bigvee_{a_3 \in A} R^{-1}(E_{a_1}, a_3) \otimes V_i(a_3, a_2) \\
&= \bigvee_{a_3 \in A} E(a_1, a_3) \otimes V_i(a_3, a_2) = (E \circ V_i)(a_1, a_2) \\
&\leqslant (E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (E \circ V_i \circ E \circ E)(a_1, a_2) \\
&= \bigvee_{a_4 \in A} (E \circ V_i \circ E)(a_1, a_4) \otimes E(a_4, a_2) \\
&= \bigvee_{a_4 \in A} V_i^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_4}) \otimes R^{-1}(E_{a_4}, a_2) \\
&= (V_i^{A/E} \circ R^{-1})(E_{a_1}, a_2),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

pa $R = E^\natural$ jeste rešenje sistema $WL^{2\text{-}1}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$, Takođe,

$$\begin{aligned}
(V_i \circ R)(a_1, E_{a_2}) &= \bigvee_{a_3 \in A} V_i(a_1, a_3) \otimes R(a_3, E_{a_2}) \\
&= \bigvee_{a_3 \in A} V_i(a_1, a_3) \otimes E(a_3, a_2) = (V_i \circ E)(a_1, a_2) \\
&\leqslant (E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (E \circ E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) \\
&= \bigvee_{a_4 \in A} E(a_1, a_4) \otimes (E \circ V_i \circ E)(a_4, a_2) \\
&= \bigvee_{a_4 \in A} R(a_1, E_{a_4}) \otimes V_i^{A/E}(E_{a_4}, E_{a_2}) = (R \circ V_i^{A/E})(a_1, E_{a_2}),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

što znači da $R = E^\natural$ jeste rešenje sistema $WL^{2\text{-}2}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$. □

Teorema 2.8. *Neka je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ fazi relacijski sistem, E fazi ekvivalencija na A, i $\mathcal{A} = (A/E, I, V_i^{A/E})$ faktor fazi relacijski sistem od $\mathcal{A}$ u odnosu na E. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *E je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i)$;*

(ii) *$E^\natural$ je rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$;*

(iii) *$E^\natural$ je rešenje sistema $WL^{2\text{-}5}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Na osnovu Teoreme 2.7, fazi relacija $R = E^\natural$ je rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E})$ ako i samo ako $R \circ V_i^{A/E} \leqslant V_i \circ R$, a prema (2.23), ovo važi ako i samo ako $E \circ V_i \circ E \leqslant V_i \circ E$. Sa druge strane, kako je $E \circ V_i \leqslant E \circ V_i \circ E$ i $E \circ E = E$, to je $E \circ V_i \circ E \leqslant V_i \circ E$ ekvivalentno sa $E \circ V_i \leqslant V_i \circ E$. Kako je E simetrična, to je E rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i)$. Prem tome, (i)$\Leftrightarrow$(ii) važi.

Slično se može pokazati da je (i)$\Leftrightarrow$(iii). □

Sledeća teorema može se shvatiti kao analogon Druge teoreme o izomorfizmu iz univerzalne algebre (videti [24, § 2.6]).

Teorema 2.9. *Neka je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ fazi relacijski sistem, neka su E i F fazi ekvivalencije na A takve da je $E \leqslant F$, i neka je $\mathcal{A}/E = (A/E, I, V_i^{A/E})$ faktor fazi relacijski sistem od $\mathcal{A}$ u odnosu na E. Tada fazi relacija F/E na A/E definisana sa*

$$F/E(E_{a_1}, E_{a_2}) = F(a_1, a_2), \quad \textit{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{2.24}$$

jeste fazi ekvivalencija na A/E, i faktor fazi relacijski sistemi $(\mathcal{A}/E)/(F/E)$ i $\mathcal{A}/F$ su izomorfni.

Dokaz. Pokažimo najpre da je F/E dobro definisana fazi relacija. Zaista, ako su $a_1, a_1', a_2, a_2' \in A$ takvi da je $E_{a_1} = E_{a_1'}$ i $E_{a_2} = E_{a_2'}$, onda je $E(a_1, a_1') = 1 = E(a_2, a_2')$, pa je $F(a_1, a_1') = 1 = F(a_2, a_2')$, i stoga je $F/E(E_{a_1}, E_{a_1'}) = F/E(E_{a_2}, E_{a_2'})$. Jednostavno se proverava da je F/E fazi ekvivalencija.

Radi jednostavnijeg zapisa stavimo da je $Q = F/E$, i definišimo funkciju $\phi : A/G \to (A/E)/Q$ sa $\phi(F_a) = Q_{E_a}$, za svaki $a \in A$. Za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ je

$$\begin{aligned} F_{a_1} = F_{a_2} \quad &\Leftrightarrow \quad F(a_1, a_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad F/E(E_{a_1}, E_{a_2}) = 1 \\ &\Leftrightarrow Q(E_{a_1}, E_{a_2}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad Q_{E_{a_1}} = Q_{E_{a_2}}, \end{aligned}$$

pa je ϕ dobro definisana injektivna funkcija. Jasno je da je ϕ sirjektivna funkcija.

Dalje, iz $E \leqslant F$ sledi $F \circ E = E \circ F = F$, pa za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i

$i \in I$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
V_i^{(A/E)/Q}(\phi(F_{a_1}), \phi(F_{a_2})) &= V_i^{(A/E)/Q}(Q_{E_{a_1}}, Q_{E_{a_2}}) \\
&= (Q \circ V_i^{A/E} \circ Q)(E_{a_1}, E_{a_2}) \\
&= \bigvee_{a_3, a_4 \in A} Q(E_{a_1}, E_{a_3}) \otimes V_i^{A/E}(E_{a_3}, E_{a_4}) \otimes Q(E_{a_4}, E_{a_2}) \\
&= \bigvee_{a_3, a_4 \in A} F(a_1, a_3) \otimes (E \circ V_i \circ E)(a_3, a_4) \otimes F(a_4, a_2) \\
&= (F \circ E \circ V_i \circ E \circ F)(a_1, a_2) = (F \circ V_i \circ F)(a_1, a_2) \\
&= V_i^{A/G}(F_{a_1}, F_{a_2}).
\end{aligned}
$$

Ovim je pokazano da je ϕ izomorfizam fazi relacijskih sistema $(\mathcal{A}/E)/(F/E)$ i $\mathcal{A}/F$. $\square$

Dokazaćemo takođe analogon Teoreme o korespodenciji iz univerzalne algebre (videti [24, § 2.6]).

Teorema 2.10. *Neka je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ fazi relacijski sistem i neka je E fazi ekvivalencija na A.*

Funkcija $\Phi : \mathcal{E}_E(A) \to \mathcal{E}(A/E)$, gde je $\mathcal{E}_E = \{F \in \mathcal{E}(A) \mid E \subseteq F\}$, definisana sa

$$
\Phi(F) = F/E, \quad \text{za sve} \;\; F \in \mathcal{E}_E(A), \tag{2.25}
$$

je uređajno potapanje od $\mathcal{E}_E(A)$ u $\mathcal{E}(A/E)$, tj.,

$$
F \leqslant G \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(F) \leqslant \Phi(G), \quad \text{za sve} \;\; F, G \in \mathcal{E}_E(A). \tag{2.26}
$$

Dokaz. Za proizvoljne $F, G \in \mathcal{E}_E(A)$ je

$$
\begin{aligned}
F \leqslant G \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{ za sve } a_1, a_2 \in A)\ F(a_1, a_2) \leqslant G(a_1, a_2) \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{ za sve } a_1, a_2 \in A)\ \Phi(F)(E_{a_1}, E_{a_2}) \leqslant \Phi(G)(E_{a_1}, E_{a_2}) \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi(F) \leqslant \Phi(G),
\end{aligned}
$$

pa Φ jeste uređajno potapanje iz $\mathcal{E}_E(A)$ u $\mathcal{E}(A/E)$. $\square$

Treba napomenuti da je u slučaju Booleovih (krisp) relacijskih sistema funkcija Φ takođe sirjektivna, što znači da je uređajni izomorfizam, ili ekvivalentno, mrežni izomorfizam iz $\mathcal{E}_E(A)$ u $\mathcal{E}(A/E)$.

Teorema 2.11. *Neka je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ fazi relacijski sistem, neka su E i F fazi ekvivalencije na A takve da je $E \leqslant F$, i neka je $\mathcal{A}/E = (A/E, I, V_i^{A/E})$ faktor fazi relacijski sistem od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.*

Fazi relacija $F_E \in \mathcal{R}(A, A/E)$ definisana sa

$$F_E(a_1, E_{a_2}) = F(a_1, a_2), \quad \textit{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{2.27}$$

jeste uniformna fazi relacija sa jezgrom F i kojezgrom F/E.

Ako je, osim toga, E rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$, za neko $W \in \mathcal{R}(A)$, onda važi sledeće:

(a) *F je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$ ako i samo ako je F/E rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$.*

(b) *F je najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$ ako i samo ako je F/E najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$.*

(c) *F je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$ iako i samo ako je F_E rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E}, W_E)$.*

Dokaz. Radi pojednostavljenja oznaka neka je $F_E = G$.

Za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ jednostavno se proverava da važi

$$\begin{aligned}
&(G \circ G^{-1} \circ G)(a_1, E_{a_2}) = (F \circ F^{-1} \circ F)(a_1, a_2) = F(a_1, a_2) = G(a_1, E_{a_2}),\\
&(G \circ G^{-1})(a_1, a_2) = (F \circ F^{-1})(a_1, a_2) = F(a_1, a_2),\\
&(G^{-1} \circ G)(E_{a_1}, E_{a_2}) = (F^{-1} \circ F)(a_1, a_2) = F(a_1, a_2) = F/E(E_{a_1}, E_{a_2}),
\end{aligned}$$

što znači da $G \circ G^{-1} \circ G = G$, $G \circ G^{-1} = F$ i $G^{-1} \circ G = F/E$. Dakle, G je uniformna fazi relacija sa jezgrom F i kojezgrom F/E.

Dalje, neka je E rešenje sistema $WL^{1-4}(A, I, V_i)$.

(a) Na osnovu Teoreme 2.10, $F \leqslant W$ ako i samo ako je $F/E \leqslant W/E$. Štaviše, kako je $E \leqslant F$ ekvivalentno sa $E \circ F = F \circ E = F$, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i $i \in I$ imamo da je

$$\begin{aligned}
&(F/E) \circ V_i^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = (F \circ E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (F \circ V_i \circ E)(a_1, a_2),\\
&V_i^{A/E} \circ (F/E)(E_{a_1}, E_{a_2}) = (E \circ V_i \circ E \circ F)(a_1, a_2) = (E \circ V_i \circ F)(a_1, a_2),
\end{aligned}$$

Kako je F/E simetrična, F/E je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$ ako i samo ako je

$$F \circ V_i \circ E \leqslant E \circ V_i \circ F, \quad F \leqslant W \tag{2.28}$$

za svaki $i \in I$. Ostaje da dokažemo da je F rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$ ako i samo ako važi (2.28). Imamo da je E rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$, ako je F takođe rešenje ovog sistema, onda je $F \leqslant W$ i

$$F \circ V_i \circ E \leqslant V_i \circ F \circ E = V_i \circ F,$$

$$E \circ V_i \circ F \leqslant V_i \circ E \circ F = V_i \circ F,$$

pa (2.28) važi.

Obratno, neka važi (2.28). Tada je

$$F \circ V_i \leqslant F \circ V_i \circ E \leqslant E \circ V_i \circ F \leqslant V_i \circ E \circ F = V_i \circ F,$$

za svaki $i \in I$, što znači da je F rešenje sistema $WL^{1\text{-}1}(A, I, V_i, W)$.

(b) Neka je F najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$. Pretpostavimo da je Q najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$. Definišimo fazi relaciju G na A na sledeći način:

$$G(a_1, a_2) = Q(E_{a_1}, E_{a_2}), \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A.$$

Jednostavno se proverava da je G fazi ekvivalencija na A. Prema tvrđenju (a) ove teoreme, E/E je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$, pa je $E/E \leqslant Q$. Sada, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ imamo da je

$$E(a_1, a_2) = E/E(E_{a_1}, E_{a_2}) \leqslant Q(E_{a_1}, E_{a_2}) = G(a_1, a_2),$$

što znači da je $E \leqslant G$, i prema tome, $Q = G/E$. Dalje, prema tvrđenju (a) ove teoreme dobijamo da G jeste rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$, a kako je F najveće rešenje ovog sistema, to je $G \leqslant F$. Na osnovu Teoreme 2.10 je $Q = G/E \leqslant F/E$, a kako je F/E rešenje sistena $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$ i Q je najveće rešenje ovog sistema, dobijamo da je $Q = F/E$, tj., F/E je najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$.

Obratno, neka je F/E najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$. Prema tvrđenju (a), F je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$. Neka je G najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$. Na osnovu Teoreme 4.5 [106], G je fazi ekvivalencija, i važi $E \leqslant F \leqslant G$. Dalje, prema (a) dobijamo da

G/E jeste rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A/E, I, V_i^{A/E}, W/E)$, pa je $G/E \leqslant F/E$. Međutim, na osnovu Teoreme 2.10 sledi da je $G \leqslant F$, tj., $G = F$, pa smo pokazali da je F najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, W)$.

(c) Za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i $i \in I$ je

$$
\begin{aligned}
&(F_E^{-1} \circ V_i)(E_{a_1}, a_2) = (F \circ V_i)(a_1, a_2),\\
&(V_i^{A/E} \circ F_E^{-1})(E_{a_1}, a_2) = (E \circ V_i \circ E \circ F)(a_1, a_2) = (E \circ V_i \circ F)(a_1, a_2),\\
&(F_E \circ V_i^{A/E})(a_1, E_{a_2}) = (F \circ E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (F \circ V_i \circ E)(a_1, a_2),\\
&(V_i \circ F_E)(a_1, E_{a_2}) = (V_i \circ F)(a_1, a_2),
\end{aligned}
$$

pa je F_E rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E}, W_E)$ ako i samo ako je $F \circ V_i \leqslant E \circ V_i \circ F$ i $F \circ V_i \circ E \leqslant V_i \circ F$, za sve $i \in I$, i $F \leqslant W$. Lako se dokazuje da je $F \circ V_i \circ E \leqslant V_i \circ F$ ekvivalentno sa $F \circ V_i \leqslant V_i \circ F$ čak i ako E nije rešenje sistema $WL^{1-4}(A, I, V_i, W)$ (koristeći jedino refleksivnost od E i jednakost $F \circ E = F$). Sa druge strane, pod pretpostavkom da je E rešenje sistema $WL^{1-4}(A, I, V_i, W)$ dobijamo da $F \circ V_i \leqslant E \circ V_i \circ F$ jeste ekvivalentno sa $F \circ V_i \leqslant V_i \circ F$. Dakle, pokazali smo da (c) važi. □

2.4 Veza između heterogenih i homogenih slabo linearnih sistema

U ovom poglavlju biće određena veza između rešenja heterogenih i homogenih slabo linearnih sistema. Posebno, biće pokazano da jezgro i kojezgro uniformnog rešenja heterogenog slabo linearnog sistema jesu rešenja odgovarajućih homogenih slabo linearnih sistema, i biće uspostavljena veza između najvećih rešenja heterogenih slabo linearnih sistema i odgovarajućih homogenih slabo linearnih sistema.

Propozicija 2.5. *Neka je fazi relacija $R \in \mathcal{R}(A, B)$ rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$. Tada*

(a) $R \circ R^{-1}$ *je rešenje sistema* $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$;

(b) $R^{-1} \circ R$ *je rešenje sistema* $WL^{1\text{-}4}(B, I, W_i, Z^{-1} \circ Z)$.

Dokaz. Za svaki $i \in I$, iz $R^{-1} \circ V_i \leqslant W_i \circ R^{-1}$ i $R \circ W_i \leqslant V_i \circ R$ dobija se da je

$$R \circ R^{-1} \circ V_i \leqslant R \circ W_i \circ R^{-1} \leqslant V_i \circ R \circ R^{-1},$$

$$R^{-1} \circ R \circ W_i \leqslant R^{-1} \circ V_i \circ R \leqslant W_i \circ R^{-1} \circ R,$$

a iz $R \leqslant Z$ dobija se da je $R \circ R^{-1} \leqslant Z \circ Z^{-1}$ i $R^{-1} \circ R \leqslant Z^{-1} \circ Z$. Kako su $R \circ R^{-1}$ i $R^{-1} \circ R$ simetrične fazi relacije, to je $R \circ R^{-1}$ rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$ i $R^{-1} \circ R$ je rešenje $WL^{1\text{-}4}(B, I, W_i, Z^{-1} \circ Z)$. $\square$

U prethodnoj propoziciji razmatrano je rešenje sistema (wl2-3) koje je proizvoljna fazi relacija. Sada ćemo navesti neke rezultate koji se tiču uniformnih fazi relacija, odnosno koristeći koncept uniformne fazi relacije uspostavićemo vezu između rešenja heterogenih i homogenih slabo linearnih sistema.

Teorema 2.12. *Neka je $R \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija i neka je $Z \in \mathcal{R}(A, B)$ fazi relacija takva da je $R \leqslant Z$.*

Tada je R rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ ako i samo ako važi sledeće:

(i) *E_A^R je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$;*

(ii) *E_B^R je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(B, I, W_i, Z^{-1} \circ Z)$;*

(iii) *$\widetilde{R}$ je izomorfizam faktorh fazi relacijskih sistema $\mathcal{A}/E_A^R$ i $\mathcal{B}/E_B^R$;*

gde je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ i $\mathcal{B} = (B, I, W_i)$.

Dokaz. Uvedimo sledeće oznake $E_A^R = E$, $E_B^R = F$ i $\widetilde{R} = \phi$. Iz uniformnosti fazi relacije R imamo da je $E = R \circ R^{-1}$ i $F = R^{-1} \circ R$.

Neka je R rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$. Prema Propoziciji 2.5, važe uslovi (i) i (ii). Na osnovu Teoreme 1.2, ϕ je bijekcija iz A/E na B/F. Štaviše, za proizvoljan $i \in I$ je

$$\begin{aligned} E \circ V_i \circ E &= R \circ R^{-1} \circ V_i \circ R \circ R^{-1} \leqslant R \circ W_i \circ R^{-1} \circ R \circ R^{-1} \\ &= R \circ W_i \circ R^{-1} = R \circ W_i \circ R^{-1} = R \circ R^{-1} \circ R \circ W_i \circ R^{-1} \\ &\leqslant R \circ R^{-1} \circ V_i \circ R \circ R^{-1} = E \circ V_i \circ E, \end{aligned}$$

pa važi $E \circ V_i \circ E = R \circ W_i \circ R^{-1}$.

Dalje, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$, $i \in I$ i $\psi \in CR(R)$ važi

$$\begin{aligned}
V_i^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_2}) &= (E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (R \circ W_i \circ R^{-1})(a_1, a_2) \\
&= \bigvee_{b_1, b_2 \in B} R(a_1, b_1) \otimes W_i(b_1, b_2) \otimes R^{-1}(b_1, a_2) \\
&= \bigvee_{b_1, b_2 \in B} F(\psi(a_1), b_1) \otimes W_i(b_1, b_2) \otimes F(b_1, \psi(a_2)) \\
&= (F \circ W_i \circ F)(\psi(a_1), \psi(a_2)) = W_i^{B/F}(F_{\psi(a_1)}, F_{\psi(a_2)}) \\
&= W_i^{B/F}(\phi(E_{a_1}), \phi(E_{a_2})).
\end{aligned}$$

Dakle, ϕ je izomorfizam između fazi relacijskih sistema $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$.

Obratno, neka važi (i), (ii) i (iii). Neka je $\varphi \in CR(R)$, $\psi \in CR(R^{-1})$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ i $i \in I$. Tada je

$$\begin{aligned}
(E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) &= V_i^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = W_i^{B/F}(\phi(E_{a_1}), \phi(E_{a_2})) \\
&= W_i^{B/F}(F_{\varphi(a_1)}, F_{\varphi(a_2)}) = (F \circ W_i \circ F)(\varphi(a_1), \varphi(a_2)),
\end{aligned}$$

i slično,

$$(F \circ W_i \circ F)(b_1, b_2) = (E \circ V_i \circ E)(\psi(b_1), \psi(b_2)).$$

Sada, za proizvoljne $a \in A$, $b \in B$, $i \in I$, $\varphi \in CR(R)$ i $\psi \in CR(R^{-1})$ važi

$$\begin{aligned}
(R^{-1} \circ V_i)(b, a) &= (R^{-1} \circ E \circ V_i)(b, a) \leqslant (R^{-1} \circ V_i \circ E)(b, a) \\
&= \bigvee_{a_1, a_2 \in A} R^{-1}(b, a_1) \otimes V_i(a_1, a_2) \otimes E(a_2, a) \\
&= \bigvee_{a_1, a_2 \in A} E(\psi(b), a_1) \otimes V_i(a_1, a_2) \otimes E(a_2, a) \\
&= (E \circ V_i \circ E)(\psi(b), a) = (F \circ W_i \circ F)(\varphi(\psi(b)), \varphi(a)) \\
&= \bigvee_{b_1, b_2 \in B} F(\varphi(\psi(b)), b_1) \otimes W_i(b_1, b_2) \otimes F(b_2, \varphi(a)),
\end{aligned}$$

a kako $F(\varphi(\psi(b)), b) = R(\psi(b), b) = R^{-1}(b, \psi(b)) = 1$ povlači

$$F(\varphi(\psi(b)), b_1) = F_{\varphi(\psi(b))}(b_1) = F_b(b_1) = F(b, b_1),$$

to dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
&\bigvee_{b_1,b_2\in B} F(\varphi(\psi(b)),b_1)\otimes W_i(b_1,b_2)\otimes F(b_2,\varphi(a))\\
&\qquad=\bigvee_{b_1,b_2\in B} F(b,b_1)\otimes W_i(b_1,b_2)\otimes F(b_2,\varphi(a))\\
&\qquad=(F\circ W_i\circ F)(b,\varphi(a))\leqslant (W_i\circ F)(b,\varphi(a))\\
&\qquad=\bigvee_{b_3\in B} W_i(b,b_3)\otimes F(b_3,\varphi(a))\\
&\qquad=\bigvee_{b_3\in B} W_i(b,b_3)\otimes R^{-1}(b_3,a)=(W_i\circ R^{-1})(b,a).
\end{aligned}
$$

Dakle, $R^{-1}\circ V_i \leqslant W_i\circ R^{-1}$, i slično se pokazuje da je $R\circ W_i\leqslant V_i\circ R$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Prirodno pitanje koje se ovde nameće je veza između najvećeg rešenja heterogenog slabo linearnog sistema i najvećeg rešenja odgovarajućih homogenih slabo linearnih sistema. Sledeća teorema daje odgovor na to pitanje.

Teorema 2.13. *Neka je $Z\in\mathcal{R}(A,B)$ uniformna fazi relacija i pretpostavimo da sistem $WL^{2\text{-}3}(A,B,I,V_i,W_i,Z)$ ima bar jedno uniformno rešenje. Tada najveće rešenje R sistema $WL^{2\text{-}3}(A,B,I,V_i,W_i,Z)$ jeste uniformna fazi relacija čije jezgro E_A^R je najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A,I,V_i,Z\circ Z^{-1})$ i njeno kojezgro E_B^R je najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(B,I,W_i,Z^{-1}\circ Z)$.*

Dokaz. Prema Teoremi 2.1, najveće rešenje R heterogenog slabo linearnog sistema $WL^{2\text{-}3}(A,B,I,V_i,W_i,Z)$ je parcijalna fazi funkcija. Kako ovaj sistem ima uniformno rešenje, to je ovo uniformno rešenje sadržano u R, pa je R takođe uniformna fazi relacija.

Neka je $E_A^R=E$, $E_B^R=F$ i $\widetilde{R}=\phi$. Na osnovu Teoreme 2.12 sledi da je E rešenje homogenog slabo linearnog sistema $WL^{1\text{-}4}(A,I,V_i,Z\circ Z^{-1})$, dok je F rešenje homogenog slabo linearnog sistema $WL^{1\text{-}4}(B,I,W_i,Z^{-1}\circ Z)$ a ϕ je izomorfizam faktorh fazi relacijskih sistema $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$, gde je $\mathcal{A}=(A,I,V_i)$ i $\mathcal{B}=(A,I,W_i)$.

Dalje, pretpostavimo da je G najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A,I,V_i,Z\circ Z^{-1})$ i da je H najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(B,I,W_i,Z^{-1}\circ Z)$. Neka je $S=G_E$ i $T=H_F$, gde su $G_E\in\mathcal{R}(A,A/E)$ i $H_F\in\mathcal{R}(B,B/F)$ fazi relacije definisane kao u (2.27). Prema Teoremi 2.11, imamo da su S i T uniformne fazi relacije takve da je $E_A^S=G$, $E_{A/E}^S=G/E$, $E_B^T=H$ i $E_{B/F}^T=H/F$. Na osnovu iste teoreme imamo da je S rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, A/E, I, V_i, V_i^{A/E}, P_E)$ a da je T rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(B, B/F, I, W_i, W_i^{B/F}, Q_F)$, pri čemu još važi i $P = Z \circ Z^{-1}$ i $Q = Z^{-1} \circ Z$. Štaviše, ako posmatramo izomorfizam ϕ kao fazi relaciju između A/E i B/F, onda se jednostavno može proveriti da je ϕ rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A/E, B/F, I, V_i^{A/E}, W_i^{B/F}, \phi)$.

Neka je fazi relacija $M \in \mathcal{R}(A, B)$ definisana sa $M = S \circ \phi \circ T^{-1}$. Sada, na osnovu Propozicije 2.2 (d) i Propozicije 2.3, imamo da je M rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, B, I, V_i, W_i, P_E \circ \phi \circ Q_F^{-1})$. Dokazaćemo da je $P_E \circ \phi \circ Q_F^{-1} = Z$.

Posmatrajmo proizvoljne $a \in A$ i $b \in B$. Najpre imamo da je

$$(P_E \circ \phi \circ Q_F^{-1})(a, b) = \bigvee_{a_1 \in A} P_E(a, E_{a_1}) \otimes (\phi \circ Q_F^{-1})(E_{a_1}, b).$$

Dalje, za proizvoljne $a_1 \in A$ i $\psi \in CR(R)$ važi

$$\begin{aligned}(\phi \circ Q_F^{-1})(E_{a_1}, b) &= \bigvee_{b_1 \in B} \phi(E_{a_1}, F_{b_1}) \otimes Q_F^{-1}(F_{b_1}, b) = Q_F^{-1}(F_{\psi(a_1)}, b) \\ &= Q_F(b, F_{\psi(a_1)}) = Q(b, \psi(a_1)),\end{aligned}$$

a kako je Z uniformna fazi relacija i $Q = Z^{-1} \circ Z = E_B^Z$, to iz Teoreme 1.8 imamo da je $Q(b, \psi(a_1)) = E_B^Z(\psi(a_1), b) = Z(a_1, b)$. Dakle,

$$\begin{aligned}(P_E \circ \phi \circ Q_F^{-1})(a, b) &= \bigvee_{a_1 \in A} P_E(a, E_{a_1}) \otimes Z(a_1, b) \\ &= \bigvee_{a_1 \in A} (Z \circ Z^{-1})(a, a_1) \otimes Z(a_1, b) \\ &= (Z \circ Z^{-1} \circ Z)(a, b) = Z(a, b),\end{aligned}$$

odnosno pokazali smo da je $P_E \circ \phi \circ Q_F^{-1} = Z$. Dakle, M je rešenje sistema $WL^{2\text{-}3}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$, a kako je R najveće rešenje ovog sistema, možemo zaključiti da je $M \leqslant R$.

Dalje, neka su $a \in A$ i $\psi \in CR(R)$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned}M(a, \psi(a)) = (S \circ \phi \circ T^{-1})(a, \psi(a)) &= \bigvee_{a_1 \in A} S(a, E_{a_1}) \otimes (\phi \circ T^{-1})(E_{a_1}, \psi(a)) \\ &= \bigvee_{a_1 \in A} S(a, E_{a_1}) \otimes \left(\bigvee_{b \in B} (\phi(E_{a_1}, F_b) \otimes T^{-1}(F_b, \psi(a)) \right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{a_1 \in A} S(a, E_{a_1}) \otimes T^{-1}(F_{\psi(a_1)}, \psi(a)) \\
&= \bigvee_{a_1 \in A} G(a, a_1) \otimes H(\psi(a), \psi(a_1)) \\
&\geqslant G(a, a) \otimes H(\psi(a), \psi(a)) = 1,
\end{aligned}
$$

i prema tome,

$$(M \circ M^{-1})(a, a) = \bigvee_{b \in B} M(a, b) \otimes M^{-1}(b, a) \geqslant M(a, \psi(a)) \otimes M^{-1}(\psi(a), a) = 1.$$

Dakle, $M \circ M^{-1}$ je refleksivna fazi relacija. Kako je $G = E_A^S = S \circ S^{-1}$, to je

$$G \circ M = S \circ S^{-1} \circ S \circ \phi \circ T^{-1} = S \circ \phi \circ T^{-1} = M,$$

pa na osnovu refleksivnosti od $M \circ M^{-1}$ dobijamo da je

$$G \leqslant G \circ M \circ M^{-1} = M \circ M^{-1} \leqslant R \circ R^{-1} = E.$$

Kako su i G i E rešenja sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$, a G je najveće, to je $E = G$, tj., $E = E_A^R$ je najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$.

Na sličan način se pokazuje da je $F = H$, tj., $F = E_B^R$ je najveće rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(B, I, W_i, Z^{-1} \circ Z)$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Napomenimo da se fazi relacija M definisana u dokazu prethodne teoreme može predstaviti i kao $M = G \circ \psi \circ H$, za proizvoljan $\psi \in CR(R)$.

Rezultat analogon Teoremi 2.12 može se dokazati za sistem (wl2-5).

Teorema 2.14. *Neka je $R \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija i neka je $Z \in \mathcal{R}(A, B)$ fazi relacija takva da je $R \leqslant Z$.*

Tada je R rešenje sistema $WL^{2\text{-}5}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$ ako i samo ako važi sledeće:

(i) *E_A^R je rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$;*

(ii) *E_B^R je rešenje sistema $WL^{1\text{-}5}(B, I, W_i, Z^{-1} \circ Z)$;*

(iii) *$\widetilde{R}$ je izomorfizam faktorh fazi relacijskih sistema $\mathcal{A}/E_A^R$ i $\mathcal{B}/E_B^R$;*

gde je $\mathcal{A} = (A, I, V_i)$ i $\mathcal{B} = (B, I, W_i)$.

Dokaz. Neka je $E^R_A = E$, $E^R_B = F$ i $\widetilde{R} = \phi$. Na osnovu uniformnosti fazi relacije R važi $E = R \circ R^{-1}$ i $F = R^{-1} \circ R$.

Neka je R rešenje sistema $WL^{2\text{-}5}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$. Zbog refleksivnosti fazi relacija E i F, za svaki $i \in I$ važi

$$E \circ V_i \leqslant E \circ V_i \circ E = R \circ R^{-1} \circ V_i \circ R \circ R^{-1} = R \circ R^{-1} \circ R \circ W_i \circ R^{-1}$$

$$= R \circ W_i \circ R^{-1} = V_i \circ R \circ R^{-1} = V_i \circ E,$$

$$W_i \circ F \leqslant F \circ W_i \circ F = R^{-1} \circ R \circ W_i \circ R^{-1} \circ R = R^{-1} \circ V_i \circ R \circ R^{-1} \circ R$$

$$= R^{-1} \circ V_i \circ R = R^{-1} \circ R \circ W_i = F \circ W_i,$$

pa zbog simetričnosti fazi relacija E i F imamo da je E rešenje sistema $WL^{1\text{-}4}(A, I, V_i, Z \circ Z^{-1})$ a F je rešenje sistema $WL^{1\text{-}5}(B, I, W_i, Z^{-1} \circ Z)$. Kao što smo prethodno pokazali, važi $E \circ V_i \circ E = R \circ W_i \circ R^{-1}$, za svaki $i \in I$, i kao u dokazu Teoreme 2.12 može se pokazati da je ϕ izomorfizam između fazi relacijskih sistema $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$.

Obratno, neka važe uslovi (i), (ii) i (iii). Kao u dokazu Teoreme 2.12 može se pokazati da je

$$(E \circ V_i \circ E)(a_1, a_2) = (F \circ W_i \circ F)(\varphi(a_1), \varphi(a_2)),$$
$$(F \circ W_i \circ F)(b_1, b_2) = (E \circ V_i \circ E)(\psi(b_1), \psi(b_2)),$$

za sve $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $i \in I$, $\varphi \in CR(R)$ i $\psi \in CR(R^{-1})$. Dakle, za sve $a \in A$, $b \in B$ i $i \in I$ važi

$$\begin{aligned}
(V_i \circ R)(a, b) &= (V_i \circ E \circ R)(a, b) = (E \circ V_i \circ E \circ R)(a, b) \\
&= (E \circ V_i \circ R)(a, b) = \bigvee_{a_1 \in A} (E \circ V_i)(a, a_1) \otimes R(a_1, b) \\
&= \bigvee_{a_1 \in A} (E \circ V_i)(a, a_1) \otimes E(a_1, \psi(b)) = (E \circ V_i \circ E)(a, \psi(b)) \\
&= (F \circ W_i \circ F)(\varphi(a), \varphi(\psi(b))) \\
&= \bigvee_{b_1 \in B} (F \circ W_i)(\varphi(a), b_1) \otimes F(b_1, \varphi(\psi(b))) \\
&= (F \circ W_i \circ F)(\varphi(a), b) = (F \circ W_i)(\varphi(a), b) \\
&= \bigvee_{b_2 \in B} F(\varphi(a), b_2) \otimes W_i(b_2, b) \\
&= \bigvee_{b_2 \in B} R(a, b_2) \otimes W_i(b_2, b) = (R \circ W_i)(a, b).
\end{aligned}$$

Dakle, $V_i \circ R = R \circ W_i$, za svaki $i \in I$, čime smo dokazali da je R rešenje sistema $WL^{2\text{-}5}(A, B, I, V_i, W_i, Z)$. □

Otvoreno je pitanje da li se tvrđenje analogno Teoremi 2.13 može dokazati za sistem (wl2-5). Metodologija korišćena u Teoremi 2.13 ne daje rezultat kada se radi o ovom sistemu.

Glava 3

Bisimulacije između fazi automata

Koncept bisimulacije pojavio se skoro istovremeno u više različitih oblasti, i danas igra veoma važnu ulogu u teoriji konkurentnih izračunavanja, modalnoj logici i teoriji skupova. U današnje vreme bisimulacije se koriste i u velikom broju oblasti u okviru računarskih nauka, kao što su funkcionalni jezici, objektno-orijentisani jezici, baze podataka, analiza i verifikacija programa, i slično. Više informacija o bisimulacijama može se naći u [67, 80, 141, 146, 147, 171, 181].

U modalnoj logici, bisimulacije je uveo J. van Benthem [15], kao princip ekvivalencije Kripkeovih sistema, a u okviru teorije skupova uveli su ih Forti i Honsell [78]. U teoriji konkurencije, bisimulacije su uveli Milner [145] i Park [150] za potrebe ispitivanja ekvivalentnosti procesa u procesnim algebrama, ali su one isto tako bile uspešno korišćene i za redukciju broja stanja u slođenim sistemima koji se tamo javljaju. Bisimulacije su pre svega izučavane na označenim tranzicionim sistemima. U suštini to su označeni direktni grafovi, ili nedeterministički automati, ako dodamo početna i završna stanja. Bisimulacije su najčešće korišćene za modeliranje ekvivalencije između stanja pojedinačnih sistema i za redukciju broja stanja tih sistema. U nizu radova dati su brojni algoritmi za konstrukciju najveće bisimulacione ekvivalencije na datom označenom grafu ili označenom tranzicionom sistemu ([67, 80, 116, 170, 149]). Međutim, mnogo su manje izučavane bisimulacije koje uspostavljaju ekvivalenciju između stanja između dva različita sistema, verovatno zbog nedostatka takvog koncepta relacije između dva različita skupa koja bi se ponašala kao ekvivalencija. Naime, bisimulacije su uglavnom razmatrane kao proizvoljne relacije (koje su previše opšte) ili kao funkcije (koje su opet suviše specijalne). Međutim, pogodan koncept se pojavio nedavno u radu [41], to je koncept uniformne relacije, a u fazi kontekstu to je koncept uniformne fazi relacije. Uniiformne fazi relacije uvedene su u [41] kao sredstvo koje je obezbedilo korespodenciju između fazi funkcija i fazi ekvivalencija analognu onoj između krisp funkcija i krisp ekvivalencija. Međutim, pokazalo se da su uniformne fazi relacije uspostavile i prirodnu vezu između fazi particija dva skupa, neku vrstu "uniformnosti" između ovih fazi particija i da se stoga mogu shvatiti kao fazi ekvivalencije koje povezuju elemente dva različita skupa.

U ovoj glavi pokazaćemo da konjunkcija dva koncepta, uniformnih fazi relacija i bisimulacija, obezbeđuje zaista moćan alat za izučavanje ekvivalencije između fazi automata, kao i nekih srodnih koncepata. U ovoj simbiozi, uniformne fazi relacije služe kao fazi ekvivalencije koje povezuju elemente dva moguće različita skupa, dok bisimulacije obezbeđuju kompatibilnost sa prelazima, početnim i završnim stanjima. Dalje, u ovoj glavi biće uvedeni i neki nazivi koji bi bolje regulisali prilično nesređenu terminologiju koja se tiče simulacija i bisimulacija. Takođe, ovde će biti izložen algebarski pristup ovoj problematici i biće data veza sa osnovnim algebarskim pojmovima homomorfizma, kongruencije i relacijskog morfizma.

Glavni rezultati u ovoj glavi su sledeći. Najpre su definisana dva tipa simulacija, direktne i povratne simulacije, i uzimajući u obzir četiri moguća slučaja kada fazi relacija i njen inverz jesu direktna i povratna simulacija, ovde će biti definisana četiri tipa bisimulacija. Dva tipa bisimulacija, kada su i posmatrana fazi relacija i njen inverz ili direktne simulacije ili povratne simulacije (direktne bisimulacije i povratne bisimulacije) su homotipna (istorodna), a dva tipa bisimulacija, kada je jedna od njih direktna simulacija, a druga povratna simulacija (povratno-direktne bisimulacije i direktno-povratne bisimulacije) su heterotipna (raznorodna). Kako direktne bisimulacije i povratne bisimulacije, kao i povratno-direktne bisimulacije i direktno-povratne bisimulacije, jesu dualni koncepti, u ovoj glavi biće razmatrane samo direktne bisimulacije i povratno-direktne bisimulacije. Najpre se razmatraju direktne bisimulacije. Biće pokazano da ako postoji direktna bisimulacija između dva fazi automata, onda postoji i najveća takva bisimulacija, i ona je parcijalna fazi funkcija (Teorema 3.2). Ovaj rezultat ukazuje na značaj onih bisimulacija koje su parcijalne fazi funkcije, odnosno uniformne fazi relacije, pa se pažnja nadalje poklanja uniformnim direktnim bisimulacijama. Biće pokazano da data fazi relacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jeste direktna bisimulacija ako i samo ako njeno jezgro i kojezgro jesu direktne bisimulacione ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i postoji posebna vrsta izomorfizma između odgovarajućih faktor fazi automata (Teorema 3.5). Dalje, biće dati i neki drugi rezultati koji povezuju bisimulacije, bisimulacione fazi ekvivalencije i faktor fazi automate, a koji su analogni teoremama o homomorfizmu i izomorfizmu, i drugim algebarskim konceptima koji povezuju homomorfizme, kongruencije i relacijske morfizme (Teoreme 3.7 i 3.8). Takođe, ovde će biti prikazan i drugi način definisanja uniformnih direktnih bisimulacija, gde će nejednakosti u originalnoj definiciji biti zamenjene jednakostima (Teorema 3.4), i biće određeni potrebni i dovoljni uslovi za egziztenciju uniformne direktne bisimulacije sa datim jezgrom i kojezgrom (Teorema 3.6).

Dalje, za dva automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su UFB-ekvivalentni ako postoji uniformna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Glavni rezultat ove glave kaže da ako dva fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu UFB-ekvivalentni, onda postoji uniformna direktna bisimulacija čije jezgro i kojezgro jesu najveće direktne bisimulacione fazi ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ (Teorema 3.9). Ovaj rezultat i njegove posledice daju način za testiranje kada dva fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu UFB-ekvivalentna. Najpre je potrebno izračunati najveće direktne bisimulacione fazi ekvivalencije E na $\mathcal{A}$ i F na $\mathcal{B}$. U većini slučajeva ovo se efektivno može uraditi korišćenjem algoritma datog u [45]. Potom se konstruišu faktor fazi automati $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$, i proverava se da li postoji izomorfizam između njih koji zadovoljava određeni uslov. Međutim, čak i ako je jednostavno izračunati najveće direktne bisimulacione fazi ekvivalencije E i F i konstruisati faktor fazi automate $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$, može biti veliki problem da se ispita da li postoji izomorfizam između $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$. Ovaj problem je tesno povezan sa dobro poznatim problemom izomorfizma grafova.

Struktura glave je sledeća. U Poglavlju 3.1 biće date definicije četiri tipa bisimulacija i biće ispitana osnovna svojstva direktnih bisimulacija. U Poglavlju 3.2 biće data karakterizacija uniformnih direktnih bisimulacija. Potom u Poglavlju 3.3 biće definisana UFB-ekvivalencija između fazi automata i biće predstavljeni glavni rezultati u vezi sa UFB-ekvivalentnim automatima. Takođe, ovde će se razmatrati i problem testiranja UFB-ekvivalencije. U Poglavlju 3.4 biće razmatrana svojstva povratno-direktnih bisimulacija i biće istaknute njihove sličnosti i razlike u odnosu na direktne bisimulacije. U Poglavlju 3.5 osvrnućemo se na neke koncepte srodne bisimulacijama.

3.1 Simulacije i bisimulacije

U ovom poglavlju biće date definicije bisimulacija i biće razmatrana njihova osnovna svojstva.

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati i neka je $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ neprazna fazi relacija. Govorićemo da je φ *direktna simulacija* ako je

$$\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1}, \tag{3.1}$$
$$\varphi^{-1} \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^{-1}, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.2}$$
$$\varphi^{-1} \circ \tau^A \leqslant \tau^B, \tag{3.3}$$

i da je *povratna simulacija* ako je

$$\sigma^A \circ \varphi \leqslant \sigma^B, \tag{3.4}$$
$$\delta_x^A \circ \varphi \leqslant \varphi \circ \delta_x^B, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.5}$$
$$\tau^A \leqslant \varphi \circ \tau^B. \tag{3.6}$$

Dalje, za φ ćemo govoriti da je *direktna bisimulacija* ako su i φ i φ^{-1} direktne simulacije, tj., ako φ zadovoljava uslove (3.1)–(3.3) i

$$\sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi, \tag{3.7}$$
$$\varphi \circ \delta_x^B \leqslant \delta_x^A \circ \varphi, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.8}$$
$$\varphi \circ \tau^B \leqslant \tau^A, \tag{3.9}$$

i da je *povratna bisimulacija* ako su i φ i φ^{-1} povratne simulacije, tj., ako φ zadovoljava uslove (3.4)–(3.6) i

$$\sigma^B \circ \varphi^{-1} \leqslant \sigma^A, \tag{3.10}$$
$$\delta_x^B \circ \varphi^{-1} \leqslant \varphi^{-1} \circ \delta_x^A, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.11}$$
$$\tau^B \leqslant \varphi^{-1} \circ \tau^A. \tag{3.12}$$

Takođe, ako je φ direktna simulacija, a φ^{-1} je povratna simulacija, tj., ako je

$$\sigma^A = \sigma^B \circ \varphi^{-1}, \tag{3.13}$$
$$\varphi^{-1} \circ \delta_x^A = \delta_x^B \circ \varphi^{-1}, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.14}$$
$$\varphi^{-1} \circ \tau^A = \tau^B, \tag{3.15}$$

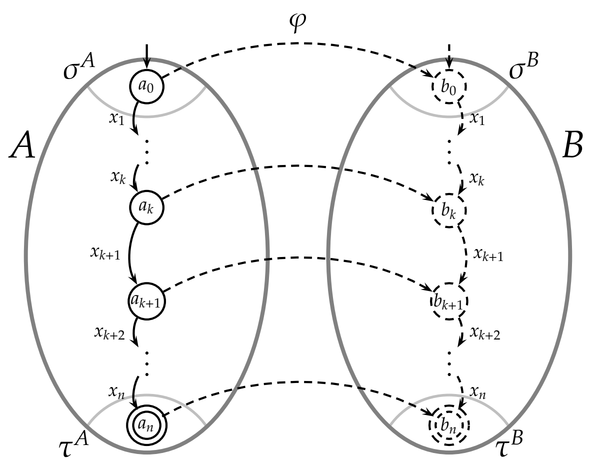
onda kažemo da je φ *direktno-povratna bisimulacija*, ili kratko *FB-bisimulacija*, a ako je φ povratna simulacija, a φ^{-1} je direktna simulacija, tj., ako je

$$\sigma^A \circ \varphi = \sigma^B, \tag{3.16}$$

$$\delta_x^A \circ \varphi = \varphi \circ \delta_x^B, \quad \text{za sve } x \in X, \tag{3.17}$$

$$\tau^A = \varphi \circ \tau^B. \tag{3.18}$$

onda kažemo da je φ *povratno-direktna bisimulacija*, ili kratko *BF-bisimulacija*. Jednostavnosti radi, govorićemo da je φ *simulacija* ako je φ ili direktna ili povratna simulacija, i *bisimulacija* ako je φ jedna od četiri vrste prethodno definisanih bisimulacija. Štaviše, za direktne i povratne bisimulacije rećićemo da su *homotipne*, dok ćemo za povratno-direktne i direktno-povratne bisimulacije reći da su *heterotipne*.



Slika 1.

Značenje direktnih i povratnih bisimulacija najbolje se može objasniti u slučaju kada su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nedeterministički (Booleovi) automati. U tu svrhu koristićemo dijagram prikazan Slikom 1. Neka je φ direktna simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i neka je $a_0, a_1, \dots, a_n$ proizvoljan uspešan put u automatu $\mathcal{A}$ pod dejstvom reči $u = x_1x_2\cdots x_n$ $(x_1, x_2, \dots, x_n \in X)$, tj., niz stanja automata $\mathcal{A}$ takav da $a_0 \in \sigma^A$, $(a_k, a_{k+1}) \in \delta^A_{x_{k+1}}$, za $0 \leqslant k \leqslant n-1$, i $a_n \in \tau^A$. Prema (3.1), postoji inicijalno stanje $b_0 \in \sigma^B$ takvo da $(a_0, b_0) \in \varphi$. Pretpostavimo da smo za neki k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, napravili niz stanja $b_0, b_1, \dots, b_k$ tako da $(b_{i-1}, b_i) \in \delta^B_{x_i}$ i $(a_i, b_i) \in \varphi$, za svaki i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Tada $(b_k, a_{k+1}) \in \varphi^{-1} \circ \delta^A_{x_{k+1}}$, a prema (3.2) dobijamo da $(b_k, a_{k+1}) \in \delta^B_{x_{k+1}} \circ \varphi^{-1}$, pa postoji $b_{k+1} \in B$ takav da $(b_k, b_{k+1}) \in \delta^B_{x_{k+1}}$ i $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \varphi$. Dakle, uspešno smo izgradili niz $b_0, b_1, \dots, b_n$ stanja automata $\mathcal{B}$ takav da $b_0 \in \sigma^B$, $(b_k, b_{k+1}) \in \delta^B_{x_{k+1}}$, za svaki k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, i $(a_k, b_k) \in \varphi$, za svaki k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Štaviše, prema (3.3) dobijamo da $b_n \in \tau^B$. Dakle, niz $b_0, b_1, \dots, b_n$ je jedan uspešan put u automatu $\mathcal{B}$ pod dejstvom reči u koji simulira originalni put $a_0, a_1, \dots, a_n$ u automatu $\mathcal{A}$ pod dejstvom reči u. Za direktne simulacije niz $b_0, b_1, \dots, b_n$ smo gradili tako što smo se kretali unapred, polazeći od b_0 i završavajući sa b_n. U slučaju povratnih simulacija ovaj niz bi se gradio kretanjem unazad, polazeći od b_n i završavajući sa b_0. Na sličan način mogu se shvatiti direktne i povratne simulacije između fazi automata, pri čemu se uzimaju u obzir stepeni do kojih postoji mogućnost prelaza iz stanja u stanje i stepene do kojih su stanja povezana fazi relacijom.

Jasno, bisimulacija je fazi relacija koja realizuje simulaciju jednog fazi automata drugim, a njen inverz realizuje obratnu simulaciju. Treba napomenuti da je bisimulacija stroǐ koncept od *dvosmernih simulacija*, koje predstavljaju par simulacija jednog automata drugim i obratno, koje ne moraju nužno biti međusobno inverzne. Sledeći primer prikazuje par fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takvih da postoji direktna simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$, a da pri tom ne postoji direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Primer 3.1. Neka je $\mathcal{L}$ Gödel-ova struktura, neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati nad $\mathcal{L}$ i $X = \{x, y\}$ sa $|A| = 3$, $|B| = 2$ i

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta^A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}, \delta^A_y = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^B = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \delta^B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}, \delta^B_y = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tau^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazi relacije

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 1 & 0.7 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix},$$

su, tim redom, najveće direktne simulacije između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i obratno, ali ne postoji ni jedna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Zaista, neka je α proizvoljna fazi relacija između A i B takva da $\varphi \leqslant \alpha$, tj.,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{sa } a \geqslant 0.7,\ b \geqslant 0.7,\ \text{i } c \geqslant 0.6.$$

Ako je $\alpha^{-1} \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \alpha^{-1}$, onda se jednostavno dobija da je $a \leqslant 0.7$, $b \leqslant 0.7$ i $c \leqslant 0.7$, što znači da je $a = b = 0.7$ i $0.6 \leqslant c \leqslant 0.7$. Dalje, ako je $\alpha^{-1} \circ \delta_y^A \leqslant \delta_y^B \circ \alpha^{-1}$, onda je $c \leqslant 0.6$, i stoga je $c = 0.6$. Dakle, pokazali smo da je $\alpha = \varphi$, što znači da je φ najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i B. Na sličan način se može pokazati da je ψ najveća direktna simulacija između $\mathcal{B}$ i A.

Pretpostavimo sada da je β proizvoljna direktna simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Tada je $\beta \leqslant \varphi$ i $\beta^{-1} \leqslant \psi$, tj., $\beta \leqslant \varphi \wedge \psi^{-1}$, što povlači

$$\sigma^A \circ \beta \leqslant \sigma^A \circ (\varphi \wedge \psi^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^B.$$

Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom da je β direktna bisimulacija. Dakle, ne postoji ni jedna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

U velikom broju radova koji se bave simulacijama i bisimulacijama razmatrane su uglavnom direktne simulacije i direktne bisimulacije. One su jednostavno nazivane simulacije i bisimulacije, ili *jake simulacije* i *jake bisimulacije* ([146, 147, 171]), a najveća bisimulaciona relacija ekvivalencije je nazivana *bisličnost* (engl. bisimilarity). Automati između kojih postoji bisimulacija često su nazivani *bisličnim* (engl. bisimilar). U radovima [23, 98, 141] ukazuje se na razliku između direktnih i povratnih simulacija, i direktnih i povratnih bisimulacija (za razne vrste automata), ali više-manje ovi koncepti se bitno razlikuju od koncepata koji se ovde razmatraju pod istim imenom. Mnogo sličniji našim konceptima su direktne i povratne simulacije proučavane u [22], i u [99, 100] (za tree-automate).

Sledeća lema se jednostavno dokazuje indukcijom.

Lema 3.1. *Ako uslov* (3.2) *ili uslov* (3.5) *važi za svako slovo* $x \in X$*, onda on važi i ako slovo* x *zamenimo proizvoljnom reči* $u \in X^*$.

Sledeća teorema prikazuje jedno od najznačajnijih svojstava simulacija i bisimulacija.

Teorema 3.1. *Neka su* $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *i* $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ *fazi automati i neka je* $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ *fazi relacija. Tada važi sledeće.*

(A) *Ako je* φ *simulacija, onda je* $L(\mathcal{A}) \leqslant L(\mathcal{B})$.

(B) *Ako je* φ *bisimulacija, onda je* $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Dokaz. (A) Neka je φ direktna simulacija. Tada na osnovu (3.1)–(3.3) i Leme 3.1, za proizvoljnu reč $u \in X^*$, važi

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A})(u) &= \sigma^A \circ \delta_u^A \circ \tau^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1} \circ \delta_u^A \circ \tau^A \leqslant \sigma^B \circ \delta_u^B \circ \varphi^{-1} \circ \tau^A \\ &\leqslant \sigma^B \circ \delta_u^B \circ \tau^B = L(\mathcal{B})(u). \end{aligned}$$

Dakle, $L(\mathcal{A})(u) \leqslant L(\mathcal{B})(u)$. Slično se može dokazati i slučaj kada je φ povratna simulacija.

(B) Ovo tvrđenje je direktna posledica definicije četiri vrste bisimulacija i tvrđenja pod (A). □

Napomenimo da obrat prethodnog tvrđenja u opštem slučaju ne mora da važi. Sledećim primerom data su dva fazi automata koja su jezički ekvivalentna ali između njih ne postoji ni jedna simulacija ili bisimulacija.

Primer 3.2. Neka je $\mathcal{L}$ Gödel-ova struktura, i neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati nad $\mathcal{L}$ i $X = \{x\}$ sa $|A| = 3$, $|B| = 2$ i

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Tada $L(\mathcal{A})(e) = L(\mathcal{B})(e) = 0.6$, $L(\mathcal{A})(x) = L(\mathcal{B})(x) = 0.5$, i $L(\mathcal{A})(x^k) = L(\mathcal{B})(x^k) = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Dakle, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su jezički ekvivalentni fazi automati.

Pokazaćemo da ne postoji ni jedna vrsta simulacije ili bisimulacije između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Posmatrajmo proizvoljnu fazi relaciju

$$\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

između A i B. Ako je $\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1}$, onda je $1 \leqslant 0.6 \wedge a_{31} \leqslant 0.6$, pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, ne postoji direktna simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Takođe, ako je $\delta_x^A \circ \varphi \leqslant \varphi \circ \delta_x^B$, onda je $a_{31} = 0$, i ako je $\tau^A \leqslant \varphi \circ \tau^B$, onda je $0.6 \leqslant a_{31} \vee (a_{32} \wedge 0.5) = a_{32} \wedge 0.5 \leqslant 0.5$, i ponovo dolazimo do kontradikcije. Dakle, ne postoji povratna simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. S obzirom da ne postoji ni jedna vrsta simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, zaključujemo da ne postoji ni jedna vrsta bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Slično se dokazuje da ne postoji ni jedna vrsta simulacija između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$.

Dokaz sledeće leme sledi neposredno iz definicija direktne i povratne simulacije i Propozicije 2.2 (A).

Lema 3.2. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati. Fazi relacija $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ je povratna simulacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ako i samo ako je direktna simulacija između reverznih fazi automata $\bar{\mathcal{A}}$ i $\bar{\mathcal{B}}$.*

Propozicija 2.2 takođe obezbeđuje da će prethodna lema važiti i ako sva pojavljivanja reči simulacija zamenimo rečju bisimulacija. U svetlu ove leme, za svako tvrđenje o direktnim simulacijama ili bisimulacijama koje univerzalno važi (važi za sve fazi automate), postoji odgovarajuće tvrđenje o povratnim simulacijama ili bisimulacijama koje univerzalno važi. Iz tog razloga, nadalje ćemo pažnju usmeriti samo na direktne bisimulacije.

Sledeća lema je samo drugačija formulacija Propozicije 2.3.

Lema 3.3. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ i $\mathcal{C} = (C, \delta^C, \sigma^C, \tau^C)$ fazi automati i neka su $\varphi_1 \in \mathcal{R}(A, B)$ i $\varphi_2 \in \mathcal{R}(B, C)$ direktne bisimulacije.*

Tada je $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \mathcal{R}(A, C)$ takođe direktna bisimulacija.

Sledeća lema se može jednostavno dokazati korišćenjem definicije direktnih bisimulacija i uslova (1.23) i (1.24).

Lema 3.4. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati i neka je $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{R}(A, B)$ neprazna familija direktnih bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Tada je $\bigvee_{i \in I} \varphi_i$ takođe direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Napomenimo da prethodne dve leme takođe važe za sve tipove simulacija i bisimulacija.

Teorema 3.2. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati takvi da postoji bar jedna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Tada postoji najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Štaviše, najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je parcijalna fazi funkcija.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.1 postoji fazi relacija $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ koja je najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i to je upravo unija familije svih direktnih bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ koja je po pretpostavkama ove teoreme neprazna.

Dalje, na osnovu Leme 3.3, $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ je direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, a kako je φ najveća takva, zaključujemo da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \leqslant \varphi$. Sada, prema Teoremi 1.7 imamo da je φ parcijalna fazi funkcija. $\square$

Prethodna teorema ukazuje na značaj izučavanja onih bisimulacija koje su parcijalne fazi funkcije. Međutim, bisimulacije su namenjene za modeliranje ekvivalencije između fazi automata (ili nekih srodnih sistema), i dva automata se mogu smatrati ekvivalentnim ako je svako stanje jednog automata ekvivalentno nekom stanju drugog automata i obratno. U kontekstu fazi automata ovo znači da fazi relacija koju koristimo za modeliranje ekvivalencije mora biti sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija. Kako je parcijalna fazi funkcija koja je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija upravo uniformna fazi relacija, može se zaključiti da je potrebno izučavati one bisimulacije koje su uniformne fazi relacije. Upravo ta vrsta bisimulacija je razmatrana u [42].

U mnogim radovima, bisimulacije su razmatrane u kontekstu automata (ili srodnih sistema) bez fiksiranja inicijalnih stanja, ili definicija bisimulacije nije uključivala nikakav uslov u vezi sa inicijalnim stanjima. U takvom slučaju postoji bisimulacija između svaka dva fazi automata, to je prazna relacija. Međutim, ovde prazna relacija nije direktna bisimulacija jer ne zadovoljava uslove (3.1) i (3.7) (izuzev u slučaju kada su σ^A i σ^B prazni). Iz tog razloga, u formulaciji Teoreme 3.2 smo bili prinuđeni da pretpostavimo da postoji bar jedna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Na početku ovog poglavlja definisali smo simulacije i bisimulacije između fazi automata koji u opštem slučaju mogu biti različiti. Nadalje u ovom poglavlju biće razmatran slučaj kada su ti fazi automati jednaki, tj., razmatraćemo bisimulacije na jednom fazi automatu.

Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljan fazi automat. Ako je fazi relacija $\varphi \in \mathcal{R}(A, A)$ direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$, onda ćemo je nazivati *direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ (analogno se definiše *povratna bisimulacija na* $\mathcal{A}$). Direktna (odn. povratna) bisimulacija na $\mathcal{A}$ koja je fazi ekvivalencija nazivaće se *direktna (odn. povratna) bisimulaciona fazi ekvivalencija.*

Kako svaka fazi ekvivalencija zadovoljava uslov (3.1) (zbog refleksivnosti i simetričnosti), to imamo da fazi ekvivalencija E na $\mathcal{A}$ jeste direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je

$$E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E, \qquad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.19}$$

$$E \circ \tau^A \leqslant \tau^A. \tag{3.20}$$

(uslov (3.20) se može zameniti sa $E \circ \tau^A = \tau^A$). Na osnovu Teoreme 4.1 [45] (videti takođe Teoremu 1 [44]), uslov (3.19) je ekvivalentan sa

$$E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E, \qquad \text{za svaki } x \in X. \tag{3.21}$$

Slično, fazi ekvivalencija E na $\mathcal{A}$ je direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je

$$\delta_x^A \circ E \leqslant E \circ \delta_x^A, \qquad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.22}$$

$$\sigma^A \circ E \leqslant \sigma^A, \tag{3.23}$$

(ponovo uslov (3.23) možemo zameniti sa $\sigma^A \circ E = \sigma^A$), i imamo da je uslov (3.22) ekvivalentan sa

$$E \circ \delta_x^A \circ E = E \circ \delta_x^A, \qquad \text{za svaki } x \in X. \tag{3.24}$$

Direktne i povratne bisimulacione fazi ekvivalencije na fazi automatima su izučavane u radovima [44, 45, 189], gde su nazivane desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije. U opštijem kontekstu, neke slične fazi ekvivalencije, nazvane desno i levo regularne fazi ekvivalencije, su izučavane u [106].

Prema rezultatima dobijenim u [44, 45, 189] (videti takođe [106]), svaki fazi automat ima najveću direktnu i najveću povratnu simulaciju, koje su fazi kvazi-uređenja, i najveću direktnu i najveću povratnu bisimulaciju, koje su fazi relacije ekvivalencije. U istim radovima dati su i algoritmi za njihovo izračunavanje. Treba napomenuti i to da postoje mnogi efikasni algoritmi za izračunavanje najveće bisimulacione ekvivalencije i najvećeg simulacionog kvazi-uređenja na označenom tranzicionom sistemu ili nedeterminističkom automatu (videti [67, 80, 116, 149, 170]).

3.2 Uniformne direktne bisimulacije

U prethodnom poglavlju ukazali smo na značaj uniformnih direktnih bisimulacija, pa ovo poglavlje posebno posvećujemo njima.

Teorema 3.3. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati i neka je $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija. Tada važi sledeće:*

(A) *$\varphi \circ \varphi^{-1}$ je direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi$ je direktna bisimulacija na $\mathcal{B}$, i*

$$\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \delta_x^A \leqslant \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1} \leqslant \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1}, \qquad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.25}$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \delta_x^B \leqslant \varphi^{-1} \circ \delta_x^A \circ \varphi \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \qquad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.26}$$

(B) *Ako je φ uniformna direktna bisimulacija, onda je $\varphi \circ \varphi^{-1}$ direktna bisimulaciona fazi ekvivalencija na $\mathcal{A}$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi$ je direktna bisimulaciona fazi ekvivalencija na $\mathcal{B}$.*

Dokaz. (A) Nejednakosti (3.25) i (3.26) slede neposredno iz definicije direktne bisimulacije i kompatibilnosti uređenja fazi relacija sa kompozicijom fazi relacija (videti jednakost (1.20)).

Prema (3.25) i (3.26) sledi da $\varphi \circ \varphi^{-1}$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi$ jesu direktne bisimulacije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, redom.

(B) Ako je φ uniformna direktna bisimulacija, onda na osnovu Teoreme 1.8 važi da je $\varphi \circ \varphi^{-1} = E_A^\varphi$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi = E_B^\varphi$, tj., $\varphi \circ \varphi^{-1} = E_A^\varphi$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi = E_B^\varphi$ su fazi ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tim redom. Preostali deo tvrđenja sledi iz Propozicije 2.5. □

Napomenimo ponovo da je $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija ako i samo ako je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i $E_A^\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$, ili ekvivalentno, ako je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i $E_B^\varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi$ (videti Teoremu 1.8).

Direktne i povratne bisimulacije definisane su u Poglavlju 3.1 pomoću odgovarajućih nejednakosti. Međutim, često je lakše raditi sa jednakostima nego sa nejednakostima, pa sledećom teoremom pokazujemo da se uniformne direktne bisimulacije mogu definisati i pomoću jednakosti.

Teorema 3.4. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati i neka je $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija. Tada je φ direktna bisimulacija ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

$$\sigma^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \sigma^B \circ \varphi^{-1}, \qquad \sigma^A \circ \varphi = \sigma^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \tag{3.27}$$

$$\delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1}, \quad \varphi^{-1} \circ \delta_x^A \circ \varphi = \delta_x^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{3.28}$$

$$\tau^A = \varphi \circ \tau^B, \qquad \varphi^{-1} \circ \tau^A = \tau^B. \tag{3.29}$$

Dokaz. Neka je φ direktna bisimulacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Tada je $\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1}$, što povlači

$$\sigma^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \sigma^B \circ \varphi^{-1},$$

a $\sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi$ povlači $\sigma^B \circ \varphi^{-1} \leqslant \sigma^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$. Dakle, važi $\sigma^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \sigma^B \circ \varphi^{-1}$. Dalje, imamo da je $\sigma^A \circ \varphi = \sigma^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \sigma^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Na osnovu tvrđenja (A) Teoreme 3.3, za svaki $x \in X$ je

$$\begin{aligned}\varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1} &\leqslant \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \\ &\leqslant \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1},\end{aligned}$$

pa je $\varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1} = \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$, i slično je $\varphi^{-1} \circ \delta_x^A \circ \varphi = \delta_x^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Sa druge strane, na osnovu tvrđenja (B) Teoreme 3.3 dobijamo da je

$$\tau^A = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \tau^A \leqslant \varphi \circ \tau^B \leqslant \tau^A,$$

pa je $\tau^A = \varphi \circ \tau^B$, i slično $\tau^B = \varphi^{-1} \circ \tau^A$.

Obratno, neka važi (3.27)–(3.29). Tada je $\sigma^A \leqslant \sigma^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \sigma^B \circ \varphi^{-1}$, i za svaki $x \in X$ je

$$\varphi^{-1} \circ \delta_x^A \leqslant \varphi^{-1} \circ \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \delta_x^B \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi^{-1} = \delta_x^B \circ \varphi^{-1}.$$

Jasno je da je $\varphi^{-1} \circ \tau^A \leqslant \tau^B$, pa φ jeste direktna simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Dalje, $\sigma^B \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \sigma^A \circ \varphi$, i za svaki $x \in X$ je

$$\varphi \circ \delta_x^B \leqslant \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^{-1}\varphi = \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \delta_x^A \circ \varphi.$$

Takođe, $\varphi \circ \tau^A \leqslant \tau^B$, pa φ^{-1} jeste direktna simulacija između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$. Dakle, φ je direktna bisimulacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. □

Sledeća teorema je jedan od glavnih rezultata ovog poglavlja.

Teorema 3.5. *Neka su* $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *i* $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ *fazi automati i neka je* $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ *uniformna fazi relacija. Tada je* φ *direktna bisimulacija ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) E_A^φ *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$*;*

(ii) E_B^φ *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{B}$*;*

(iii) $\widetilde{\varphi}$ *je izomorfizam faktor fazi automata* $\mathcal{A}/E_A^\varphi$ *i* $\mathcal{B}/E_B^\varphi$*.*

Dokaz. Jednostavnosti radi, stavimo da je $E = E_A^\varphi$ i $F = E_B^\varphi$.

Neka je φ direktna bisimulacija. Tada tvrđenja (i) i (ii) slede neposredno iz (iv) i (v) Teoreme 1.8 i Teoreme 3.3. Na osnovu Leme 1.2, $\widetilde{\varphi}$ je bijektivna funkcija iz A/E na B/F.

Dalje, neka su $a \in A$ i $\psi \in CR(\varphi)$ proizvoljni elementi. Prema Teoremi 3.4, imamo da je

$$\begin{aligned}
\sigma^{A/E}(E_a) &= (\sigma^A \circ E)(a) = (\sigma^B \circ \varphi^{-1})(a) = \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes \varphi(a,b) \\
&= \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes F(\psi(a),b) = \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes F(b,\psi(a)) \\
&= (\sigma^B \circ F)(\psi(a)) = \sigma^{B/F}(F_{\psi(a)}) = \sigma^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau^{A/E}(E_a) &= (\tau^A \circ E)(a) = \tau^A(a) = (\varphi \circ \tau^B)(a) = \bigvee_{b\in B} \varphi(a,b) \otimes \tau^B(b) \\
&= \bigvee_{b\in B} F(\psi(a),b) \otimes \tau^B(b) = (F \circ \tau^B)(\psi(a)) \\
&= \tau^{B/F}(F_{\psi(a)}) = \tau^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a))
\end{aligned}$$

Dalje, prema Teoremi 2.12 za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$ važi

$$\delta^{A/E}(E_{a_1}, x, E_{a_2}) = \delta^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_{a_1}), x, \widetilde{\varphi}(E_{a_2})).$$

Dakle, $\widetilde{\varphi}$ je izomorfizam između fazi automata $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$.

Obratno, neka važe uslovi (i), (ii) i (iii). Za proizvoljne $a \in A$ i $\psi \in CR(\varphi)$ je

$$\begin{aligned}
\sigma^A(a) &\leqslant (\sigma^A \circ E)(a) = \sigma^{A/E}(E_a) = \sigma^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a)) = \sigma^{B/F}(F_{\psi(a)}) \\
&= (\sigma^B \circ F)(\psi(a)) = \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes F(b,\psi(a)) \\
&= \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes F(\psi(a),b) = \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes \varphi(a,b) \\
&= \bigvee_{b\in B} \sigma^B(b) \otimes \varphi^{-1}(b,a) = (\sigma^B \circ \varphi^{-1})(a),
\end{aligned}$$

pa je $\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1}$, i slično se pokazuje da je $\sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi$.

Dalje,

$$\begin{aligned}\tau^A(a) &= (E\circ\tau^A)(a) = \tau^{A/E}(E_a) = \tau^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a)) = \tau^{B/F}(F_{\psi(a)})\\ &= \bigvee_{b\in B} F(\psi(a),b)\otimes\tau^B(b) = \bigvee_{b\in B}\varphi(a,b)\otimes\tau^B(b) = (\varphi\circ\tau^B)(a),\end{aligned}$$

pa je $\tau^A = \varphi\circ\tau^B$, i slično, važi $\varphi^{-1}\circ\tau^A \leqslant \tau^B$.

Na osnovu Teoreme 2.12 važi $\varphi^{-1}\circ\delta_x^A \leqslant \delta_x^B\circ\varphi^{-1}$ i $\varphi\circ\delta_x^B \leqslant \delta_x^A\circ\varphi$. Dakle, φ je uniformna direktna bisimulacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. □

Teorema 3.6. *Neka su* $\mathcal{A} = (A,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ *i* $\mathcal{B} = (B,\delta^B,\sigma^B,\tau^B)$ *fazi automati, neka je* E *direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *i* F *direktna bisimulacija na* $\mathcal{B}$.

Tada postoji uniformna direktna bisimulacija $\varphi\in\mathcal{R}(A,B)$ *takva da je*

$$E_A^\varphi = E \quad \textit{and} \quad E_B^\varphi = F, \tag{3.30}$$

ako i samo ako postoji izomorfizam $\phi : \mathcal{A}/E \to \mathcal{B}/F$ *takav da za proizvoljne* $a_1, a_2 \in A$ *važi*

$$\widetilde{E}(E_{a_1},E_{a_2}) = \widetilde{F}(\phi(E_{a_1}),\phi(E_{a_2})). \tag{3.31}$$

Dokaz. Neka je φ uniformna direktna bisimulacija koja zadovoljava uslov (3.30), i neka je $\psi\in CR(\varphi)$. Prema definiciji od $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ i $\widetilde{\varphi}$, i prema Posledici 1.1 , imamo da je

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(E_{a_1},E_{a_2}) &= E(a_1,a_2) = F(\psi(a_1),\psi(a_2)) = \widetilde{F}(F_{\psi(a_1)},F_{\psi(a_2)})\\ &= \widetilde{F}(\widetilde{\varphi}(E_{a_1}),\widetilde{\varphi}(E_{a_2})),\end{aligned}$$

pa prema Teoremi 3.5, $\widetilde{\varphi}$ je izomorfizam od $\mathcal{A}/E$ na $\mathcal{B}/F$ koji zadovoljava uslov (3.31).

Obratno, neka je $\phi : \mathcal{A}/E \to \mathcal{B}/F$ izomorfizam koji zadovoljava uslov (3.31). Definišimo funkcije $\phi_E : A \to A/E$, $\phi_F : B/F \to B$ i $\psi : A \to B$ na sledeći način: Za svaki $x\in A$ neka je $\phi_E(x) = E_x$, za svaki $\eta\in B/F$ neka je $\phi_F(\eta)$ fiksiran element iz $\widehat{\eta}$, i neka je $\psi = \phi_E\circ\phi\circ\phi_F$. Definišimo i fazi relaciju $\varphi\in\mathcal{R}(A,B)$ sa

$$\varphi(a,b) = F(\psi(a),b), \qquad \text{za sve } a\in A \text{ i } b\in B. \tag{3.32}$$

Iz dokaza Teoreme 3.4 [41], φ je uniformna fazi relacija koja zadovoljava (3.30) i $\psi\in CR(\varphi)$. Za proizvoljano $a\in A$ je $\phi(E_a) = F_b$, za neki $b\in B$, i

$$\psi(a) = \phi_F(\phi(\phi_E(a))) = \phi_F(\phi(E(a)) = \phi_F(F_b) \in \widehat{F_b},$$

odakle sledi da je

$$\widetilde{\varphi}(E_a) = F_{\psi(a)} = F_b = \phi(E_a),$$

za svaki $a \in A$. Dakle, $\widetilde{\varphi} = \phi$, pa prema Teoremi 3.5, φ je uniformna direktna bisimulacija. □

3.3 UFB-ekvivalentni fazi automati

Bisimulacije su izučavane u raznim kontekstima ali su uvek razmatrane u kontekstu uspostavljanja strukturne ekvivalencije između stanja jednog ili dva različita automata ili nekih sličnih sistema. Kao što je prethodno naglašeno u Poglavlju 3.1, dva automata se smatraju strukturno ekvivalentnim ako je svako stanje jednog automata ekvivalentno nekom stanju drugog automata i obratno. Može se reći da nema prave ekvivalencije između dva automata ako postoji neko stanje jednog automata koje nije ekvivalentno nijednom stanju drugog automata. Drugim rečima, ekvivalencija bi trebalo da se modelira kompletnom i sirjektivnom relacijom, odnosno u fazi kontekstu, sirjektivnom $\mathcal{L}$-funkcijom. Međutim, ako postoji direktna bisimulacija između dva fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ koja je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, onda najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takođe ima ovo svojstvo, pa prema Teoremi 3.2, ona je uniformna direktna bisimulacija. Dakle, potpuno je svejedno da li ćemo reći da postoji direktna bisimulacija koja je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija ili ćemo reći da postoji uniformna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Iz tog razloga uvodimo sledeći tip ekvivalencije između fazi automata.

Za fazi automate $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ kažemo da su *uniformno direktno bisimulaciono ekvivalentni*, ili kraće da su *UFB-ekvivalentni*, u oznaci $\mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{B}$, ako postoji uniformna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Analogno se može definisati i *uniformna povratna bisimulaciona ekvivalencija* između fazi automata, ali ova vrsta ekvivalencije neće biti posebno razmatrana jer ima svojstva koja su analogna svojstvima UFB-ekvivalencije.

Sledećom teoremom se uspostavlja korespodencija između uniformnih direktnih bisimulacija i direktnih bisimulacionih fazi ekvivalencija, analogna korespodenciji između homomorfizama i kongruencija u algebri.

Teorema 3.7. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi automat, neka je E fazi ekvivalencija na $\mathcal{A}$, i neka je $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ faktor fazi automat od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.*

(A) *Fazi relacija* $\varphi \in \mathcal{R}(A, A/E)$ *definisana sa*

$$\varphi(a_1, E_{a_2}) = E(a_1, a_2), \quad \textit{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{3.33}$$

je uniformna fazi relacija takva da je $E_A^\varphi = E$, $E_{A/E}^\varphi$ *je fazi jednakost, i* φ *je i direktna i povratna simulacija.*

(B) *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) E *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$*;*

(ii) φ *je direktna bisimulacija;*

(iii) φ *je povratno-direktna bisimulacija.*

Dokaz. Za proizvoljan $a \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned}\sigma^A(a) &\leqslant (\sigma^A \circ E \circ E)(a) = \bigvee_{a_3 \in A} (\sigma^A \circ E)(a_3) \otimes E(a_3, a) \\ &= \bigvee_{a_3 \in A} \sigma^{A/E}(E_{a_3}) \otimes \varphi^{-1}(E_{a_3}, a) = (\sigma^{A/E} \circ \varphi^{-1})(a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1} \circ \tau^A)(E_a) &= \bigvee_{a_3 \in A} \varphi^{-1}(E_a, a_3) \otimes \tau^A(a_3) = E(a, a_3) \otimes \tau^A(a_3) \\ &= (E \circ \tau^A)(a) = \tau^{A/E}(E_a),\end{aligned}$$

i takođe važi

$$\begin{aligned}(\sigma^A \circ \varphi)(E_a) &= \bigvee_{a_1 \in A} \sigma^A(a_3) \otimes \varphi(a_1, E_a) = \bigvee_{a_3 \in A} \sigma^A(a_1) \otimes E(a_1, a) \\ &= (\sigma^A \circ E)(a) = \sigma^{A/E}(E_a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau^A(a) &\leqslant (E \circ E \circ \tau^A)(a) = \bigvee_{a_3 \in A} E(a, a_3) \otimes E \circ \tau^A(a_3) \\ &= \bigvee_{a_3 \in A} \varphi(a, E_{a_3}) \otimes \tau^{A/E}(E_{a_3}) = (\varphi \circ \tau^{A/E})(a).\end{aligned}$$

Dalje, na osnovu Teoreme 2.7 dobijamo tvrđenje (A). Na sličan način se iz Teoreme 2.8 dobija tvrđenje (B). □

Sledeći primer pokazuje da postoji fazi relacija φ definisana sa (3.33) koja ne mora biti direktna bisimulacija (ako E nije direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$).

Primer 3.3. Neka je $\mathcal{L}$ Booleova struktura i neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi automat nad $\mathcal{L}$ (tj., nedeterministički automat) sa $|A| = 4$, $X = \{x\}$ i

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i neka su E i F fazi ekvivalencije na A zadate sa

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada su odgovarajući faktor fazi automati $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ i $\mathcal{A}/F = (A/F, \delta^{A/F}, \sigma^{A/F}, \tau^{A/F})$ dati sa: $|A/E| = 3$, $|A/F| = 2$, i

$$\delta_x^{A/E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^{A/E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^{A/E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_x^{A/F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^{A/F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^{A/F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se proverava da je $\mathcal{A}/E$ jezički ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, a da $\mathcal{A}/F$ nije jezički ekvivalentan sa $\mathcal{A}$ (videti Primer 3.1 [45]). Neka je $\varphi_E \in \mathcal{R}(A, A/E)$ fazi relacija data sa

$$\varphi_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Takođe se jednostavno proverava da je φ_E direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$, kao i da je povratno-direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$, pa fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$ jesu UFB-ekvivalentni.

Sa druge strane, fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/F$ nisu UFB-ekvivalentni, jer nisu jezički ekvivalentni (Teorema 3.1), i fazi relacija $\varphi_F \in \mathcal{R}(A, A/F)$ definisana sa $\varphi_F(a_1, F_{a_2}) = F(a_1, a_2)$, za sve $a_1, a_2 \in A$ (tj., definisana kao u (3.33)), nije direktna bisimulacija. Zaista,

$$\varphi_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \varphi_F \circ \delta_x^{A/F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \delta_x^A \circ \varphi_F.$$

Teorema 3.8. *Neka je* $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *fazi automat, neka su* E *i* G *fazi ekvivalencije na* $\mathcal{A}$ *takve da je* $E \leqslant G$, *i* $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ *faktor fazi automat od* $\mathcal{A}$ *u odnosu na* E. *Tada*

(A) *Fazi relacija* G/E *on* $\mathcal{A}/E$ *definisana sa*

$$G/E(E_{a_1}, E_{a_2}) = G(a_1, a_2), \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{3.34}$$

je fazi ekvivalencija na $\mathcal{A}/E$, *i faktor fazi automati* $(\mathcal{A}/E)/(G/E)$ *i* $\mathcal{A}/G$ *su izomorfni.*

(B) *Fazi relacija* $\varphi \in \mathcal{R}(A, A/E)$ *definisana sa*

$$\varphi(a_1, E_{a_2}) = G(a_1, a_2), \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{3.35}$$

je uniformna fazi relacija takva da je $E_A^\varphi = G$ *i* $E_{A/E}^\varphi = G/E$.

Štaviše, ako je E *direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$, *onda važi sledeće:*

(C) G *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako je* G/E *direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}/E$.

(D) G *je najveća direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako je* G/E *najveća direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}/E$.

(E) G *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako je* φ *direktna bisimulacija između* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{A}/E$.

Dokaz. Tvrđenje (A) je dokazano u Teoremi 2.9, dok su tvrđenja (B), (C), (D) i (E) dokazana u Teoremi 2.11, bez razmatranja fazi skupova početnih i završnih stanja. □

Teorema 3.9. *Neka su* $\mathcal{A} = (A, \sigma^A, X, \delta^A, \tau^A)$ *i* $\mathcal{B} = (B, \sigma^B, X, \delta^B, \tau^B)$ *UFB-ekvivalentni fazi automati.*

Tada postoji uniformna direktna bisimulacija φ *između* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *čije jezgro* E_A^φ *je najveća direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *i čije kojezgro* E_B^φ *je najveća direktna bisimulacija na* $\mathcal{B}$.

Štaviše, φ *je najveća direktna bisimulacija između* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$.

Dokaz. Neka je $\chi \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna direktna bisimulacija, i neka je $E_A^\chi = E$ i $E_B^\chi = F$. Na osnovu Teoreme 3.5, E je direktna bisimulacija na

$\mathcal{A}$, F je direktna bisimulacija na $\mathcal{B}$ i $\widetilde{\chi}$ je izomorfizam od $\mathcal{A}/E$ na $\mathcal{B}/F$, i na osnovu Teoreme 3.6, za sve $a_1, a_2 \in A$ važi

$$\widetilde{E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = \widetilde{F}(\widetilde{\chi}(E_{a_1}), \widetilde{\chi}(E_{a_2})). \tag{3.36}$$

Dalje, neka je G najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$, H je najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{B}$, i neka je P najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}/E$, i Q je najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{B}/F$. Na osnovu Teoreme 3.8 je $P = G/E$ i $Q = H/F$, a na osnovu (3.36) i činjenice da je $\widetilde{\chi}$ izomorfizam od $\mathcal{A}/E$ na $\mathcal{B}/F$ dobijamo da je

$$\widetilde{P}(P_{E_{a_1}}, P_{E_{a_2}}) = P(E_{a_1}, E_{a_2}) = Q(\widetilde{\chi}(E_{a_1}), \widetilde{\chi}(E_{a_2})) = \widetilde{Q}(Q_{\widetilde{\chi}(E_{a_1})}, Q_{\widetilde{\chi}(E_{a_2})}). \tag{3.37}$$

Štaviše, $\widetilde{\chi}$ indukuje izomorfizam $\xi : (\mathcal{A}/E)/P \to (\mathcal{B}/F)/Q$ dat sa $\xi(P_{E_a}) = Q_{\widetilde{\chi}(E_a)}$, za svako $a \in A$. Prema Teoremi 3.8, takođe imamo da postoje uniformne direktne bisimulacije $\varphi_1 \in \mathcal{R}(A, A/E)$ i $\varphi_2 \in \mathcal{R}(B, B/F)$ takve da je $E_A^{\varphi_1} = G$, $E_{A/E}^{\varphi_1} = G/E$, $E_B^{\varphi_2} = H$, $E_{B/F}^{\varphi_1} = H/F$, a na osnovu Teorema 3.5 i 3.6 dobijamo da je $\widetilde{\varphi}_1$ izomorfizam iz $\mathcal{A}/G$ na $(\mathcal{A}/E)/P$, i $\widetilde{\varphi}_2$ je izomorfizam iz $\mathcal{B}/H$ na $(\mathcal{B}/F)/Q$, pri čemu je

$$\widetilde{G}(G_{a_1}, G_{a_2}) = \widetilde{P}(\widetilde{\varphi}_1(G_{a_1}), \widetilde{\varphi}_1(G_{a_2})), \quad \widetilde{H}(H_{b_1}, H_{b_2}) = \widetilde{Q}(\widetilde{\varphi}_2(H_{b_1}), \widetilde{\varphi}_2(H_{b_2})), \tag{3.38}$$

za sve $a_1, a_2 \in A$ i $b_1, b_2 \in B$. Dalje, neka su $\psi_1 : A \to A/E$ i $\psi_2 : B \to B/F$ funkcije date sa $\psi_1(a) = E_a$ and $\psi_2(b) = F_b$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Tada iz (3.35) sledi da je $\psi_1 \in CR(\varphi_1)$ i $\psi_2 \in CR(\varphi_2)$, a iz (1.33) dobijamo

$$\widetilde{\varphi}_1(G_a) = P_{\psi_1(a)} = P_{E_a}, \quad \widetilde{\varphi}_2(H_b) = Q_{\psi_2(b)} = Q_{F_b}, \tag{3.39}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dddl, dotted, bend right] & \mathscr{B} \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[dddr, dotted, bend left] & \\
 & \mathscr{A}/E \arrow[r, dashed, "\widetilde{\chi}"] \arrow[d, dotted] & \mathscr{B}/F \arrow[d, dotted] & \\
 & (\mathscr{A}/E)/P \arrow[r, dashed, "\xi"] & (\mathscr{B}/F)/Q \arrow[dr, dashed, shift left, "\widetilde{\varphi}_2^{-1}"] & \\
\mathscr{A}/G \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}_1"] \arrow[rrr, dashed, "\phi"'] & & & \mathscr{B}/H \arrow[ul, dashed, shift left, "\widetilde{\varphi}_2"]
\end{tikzcd}$$

Sada, neka je funkcija $\phi : A/G \to B/H$ definisana sa $\phi = \widetilde{\varphi}_1 \circ \xi \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1}$, tj., neka je $\phi(G_a) = \widetilde{\varphi}_2^{-1}(Q_{\widetilde{\chi}(E_a)})$, za svako $a \in A$. Kako su $\widetilde{\varphi}_1$, ξ, i $\widetilde{\varphi}_2^{-1}$

izomorfizmi, to imamo da je ϕ takođe izomorfizam od $\mathcal{A}/G$ na $\mathcal{B}/H$, i za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$, prema (3.37), (3.38) i (3.39) sledi da je

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(G_{a_1}, G_{a_2}) &= \widetilde{P}(\widetilde{\varphi}_1(G_{a_1}), \widetilde{\varphi}_1(G_{a_2})) = \widetilde{P}(P_{E_{a_1}}, P_{E_{a_2}}) = \widetilde{Q}(Q_{\widetilde{\chi}(E_{a_1})}, Q_{\widetilde{\chi}(E_{a_2})}) \\ &= \widetilde{H}(\widetilde{\varphi}_2^{-1}(Q_{\widetilde{\chi}(E_{a_1})}), \widetilde{\varphi}_2^{-1}(Q_{\widetilde{\chi}(E_{a_2})})) = \widetilde{H}(\phi(G_{a_1}), \phi(G_{a_2})).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Dakle, prema (3.40) i Teoremi 3.6 dobijamo da postoji uniformna direktna bisimulacija $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ takva da je $E_A^\varphi = G$ i $E_B^\varphi = H$.

Dalje, pokazaćemo da je φ najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Na osnovu Teoreme 3.2, postoji najveća direktna bisimulacija θ između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, koja je parcijalna fazi funkcija, i naravno važi $\varphi \leqslant \theta$. Kako je φ sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, to je θ takođe sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, i stoga, θ je uniformna fazi relacija. Sada, prema Lemi 1.3 dobijamo da $CR(\varphi) \subseteq CR(\theta)$, $E_A^\varphi \leqslant E_A^\theta$, i $E_B^\varphi \leqslant E_B^\theta$, a prema Teoremi 3.5 imamo da su E_A^θ i E_B^θ direktne bisimulacije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tim redom. Kako su $E_A^\varphi = G$ i $E_B^\varphi = H$ najveće direktne bisimulacije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, zaključujemo da je $E_A^\varphi = E_A^\theta$ i $E_B^\varphi = E_B^\theta$. Konačno, iz (vi) Teoreme 1.8, za $a \in A$, $b \in B$, i $\psi \in CR(\varphi) \subseteq CR(\theta)$ važi

$$\theta(a, b) = E_B^\theta(\psi(a), b) = E_B^\varphi(\psi(a), b) = \varphi(a, b).$$

Otuda je $\theta = \varphi$, tj., φ je najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. $\square$

Iz Teorema 3.9 i 3.6 dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3.1. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati, i neka su E i F najveće direktne bisimulacije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tim redom.*

Tada fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu UFB-ekvivalentni ako i samo ako postoji izomorfizam $\phi : \mathcal{A}/E \to \mathcal{B}/F$ takav da je

$$\widetilde{E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = \widetilde{F}(\phi(E_{a_1}), \phi(E_{a_2})), \tag{3.41}$$

za sve $a_1, a_2 \in A$.

Posledica 3.2. *Za proizvoljne fazi automate $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ važi:*

(1) $\mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{A}$;

(2) $\mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \sim_{UFB} \mathcal{A}$;

(3) $\mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{B} \;\&\; \mathcal{B} \sim_{UFB} \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{C}$.

Dokaz. Jasno je da važi (1) i (2), jer identičko preslikavanje jeste uniformna direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$, a inverzna relacija svake uniformne direktne bisimulacije između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jeste uniformna direktna bisimulacija između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$.

Dalje, neka je $\mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{B}$ i $\mathcal{B} \sim_{UFB} \mathcal{C}$, neka su E, F i G redom najveće direktne bisimulacije na fazi automatima $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Na osnovu Posledice 3.1, postoje izomorfizmi $\phi_1 : \mathcal{A}/E \to \mathcal{B}/F$ i $\phi_2 : \mathcal{B}/F \to \mathcal{C}/G$ takvi da je

$$\widetilde{E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = \widetilde{F}(\phi_1(E_{a_1}), \phi_1(E_{a_2})) \quad \text{i} \quad \widetilde{F}(F_{b_1}, F_{b_2}) = \widetilde{G}(\phi_2(F_{b_1}), \phi_2(F_{b_2})),$$

za sve $a_1, a_2 \in A$ i $b_1, b_2 \in B$, pa kompozicija $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 : \mathcal{A}/E \to \mathcal{C}/G$ jeste izomorfizam od $\mathcal{A}/E$ na $\mathcal{C}/G$ za koji važi

$$\widetilde{E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = \widetilde{G}(\phi(E_{a_1}), \phi(E_{a_2}))$$

za sve $a_1, a_2 \in A$. Dakle, $\mathcal{A} \sim_{UFB} \mathcal{C}$. $\square$

Prema Posledici 3.2, relacija $\sim_{UFB}$ je relacija ekvivalencije na klasi svih fazi automata, što opravdava naziv UFB-ekvivalentni fazi automati koji je uveden na početku ovog poglavlja.

Iako je kompozicija dve direktne bisimulacije takođe direktna bisimulacija (videti Lemu 3.3), ta nam činjenica nije mnogo korisna u dokazivanju tranzitivnosti UFB-ekvivalencije s obzirom da kompozicija dve uniformne relacije ne mora biti uniformna relacija (videti Primer 6.1 [41]). Ipak, tranzitivnost UFB-ekvivalencije sledi iz činjenice da kompozicija $\varphi_1 \circ \varphi_2$ najveće direktne bisimulacije φ_1 između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i najveće direktne bisimulacije φ_2 između fazi automata $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, jeste uniformna direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$. Naime, kojezgro od φ_1 jednako je jezgru od φ_2 i ovo je upravo najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{B}$. Dalje, $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ je najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$. Zaista, ako je θ najveća direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$, onda je $E_C^\theta = E_C^{\varphi_2}$, najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{C}$, pa iz $\varphi \leqslant \theta$ i Leme 1.3 sledi da je $CR(\varphi) \subseteq CR(\theta)$. Sa druge strane imamo

$$\begin{aligned} E_C^\varphi &= \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \\ &= \varphi_2^{-1} \circ E_B^{\varphi_2} \circ E_B^{\varphi_1} \circ \varphi_2 = \varphi_2^{-1} \circ E_B^{\varphi_2} \circ \varphi_2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \\ &= \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 = E_C^{\varphi_2} = E_C^\theta, \end{aligned}$$

i kao u dokazu Teoreme 3.9 dobijamo da je $\varphi = \theta$.

Na osnovu Teoreme 3.1, UFB-ekvivalencija povlači jezičku ekvivalenciju. Sledećim primerom pokazaćemo da jezička ekvivalencija ne povlači nužno UFB-ekvivalenciju.

Primer 3.4. Neka je $\mathcal{L}$ Gödelova struktura, i neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati nad $\mathcal{L}$, pri čemu je $|A| = |B| = 2$ i $X = \{x, y\}$,

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_x^B = \delta_y^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su jezički ekvivalentni (videti Primer 3.1 [107]), ali nisu UFB-ekvivalentni. Zaista, jednostavno se proverava da su najveće direktne bisimulacije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ upravo relacije jednakosti na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, pa su odgovarajući faktor fazi automati izomorfni sa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, redom. Jasno, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu izomorfni, i prema Posledici 3.1, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu UFB-ekvivalentni.

Takođe, imamo da su i $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ minimalni fazi automati u klasi svih fazi automata koji su jezički ekvivalentni sa njima (ponovo Primer 3.1 [107]).

Daćemo par komentara o smislu Posledice 3.1. Ovaj rezultat daje način za testiranje da li dva fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu UFB-ekvivalentna. Najpre je potrebno izračunati najveće direktne bisimulacione fazi ekvivalencije E na $\mathcal{A}$ i F na $\mathcal{B}$. U velikom broju slučajeva ovo se efikasno može uraditi pomoću algoritma datog u radu [45]. Nakon toga se konstruišu faktor fazi automati $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$, i dalje se proverava da li postoji izomorfizam između njih koji zadovoljava uslov (3.41). Međutim, čak i ako je moguće efektivno izračunati najveće direktne bisimulacije E i F i konstruisati odgovarajuće faktor fazi automate $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$, ipak može biti veliki problem da se ispita da li postoji izomorfizam između $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$ koji zadovoljava uslov (3.41).

Važno je napomenuti da je ovaj problem izomorfizma između fazi automata blisko povezan sa dobro poznatim problemom *izomorfizma grafova.* Naime, problem izomorfizma fazi automata nad Booleovom strukturom je upravo problem izomorfizma grafova. Pored svog praktičnog značaja, problem izomorfizma grafova je u teoriji kompleksnosti algoritama posebno interesantan iz razloga što predstavlja jedan od malobrojnih problema koji pripadaju klasi NP-kompletnih problema (nondeterministic polynomial time) za koje nije poznat algoritam za rešavanje koji radi u polinomijalnom vremenu. Opšte je prihvaćeno mišljenje da problem izomorfizma grafova leži između klasa P i NP, ako je P$\neq$NP (videti [187]). Ipak, u teoriji kompleksnosti algoritama razmatraju se najgori mogući slučajevi, do kojih se u praksi retko dolazi, tako da mnogi algoritmi koji su teorijski teški u praksi jako dobro rade. Problem izomorfizma grafova je težak jer je potrebno proveriti $n!$ permutacija (bijekcija) skupa koji se sastoji iz n čvorova, i taj broj jako brzo raste kada raste broj čvorova grafa. Međutim, ako se nađe pogodan način da se izbegnu neke permutacije, kao što je opisano u [187], onda se taj broj može i značajno smanjiti.

U našem slučaju, testiranje izomorfizma se ne vrši između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, već između faktor fazi automata od $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ u odnosu na najveće direktne bisimulacione fazi ekvivalencije. Broj stanja ovih faktor fazi automata može biti dosta manji od broja stanja fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, što značajno utiče na vreme potrebno za testiranje.

Za fazi automat $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, klasu svih fazi automata koji su UFB-ekvivalentni sa $\mathcal{A}$ označićemo sa $\mathbb{UFB}(\mathcal{A})$.

Propozicija 3.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi automat i neka je E najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$.*

Tada je $\mathcal{A}/E$ minimalni fazi automat u $\mathbb{UFB}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Prema Posledice 3.1 je $\mathcal{A}/E \in \mathbb{UFB}(\mathcal{A})$, i za proizvoljan $\mathcal{B} \in \mathbb{UFB}(\mathcal{A})$ imamo da je $\mathcal{A}/E$ izomorfan sa $\mathcal{B}/F$, gde F označava najveću direktnu bisimulaciju na $\mathcal{B}$. Dakle, $|\mathcal{A}/E| = |\mathcal{B}/F| \leqslant |\mathcal{B}|$, pa $\mathcal{A}/E$ jeste minimalni fazi automat u $\mathbb{UFB}(\mathcal{A})$. □

Sledeći primer pokazuje da minimalni fazi automat u $\mathbb{UFB}(\mathcal{A})$ ne mora biti jedinstven do na izomorfizam.

Primer 3.5. Neka je $\mathcal{L}$ Gödelova struktura, neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati nad $\mathcal{L}$, gde je $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $X = \{x, y\}$,

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_x^B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \sigma^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Najveća direktna bisimulacija E na $\mathcal{A}$ i najveća direktna bisimulacija F na $\mathcal{B}$ su date sa

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

i oba faktor fazi automata $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$ su izomorfna sa $\mathcal{B}$ (videti Primer 5.1 [45]). Takođe imamo da funkcija $\phi : \mathcal{A}/E \to \mathcal{B}/F$ data sa $\phi(E_{a_1}) = F_{b_1}$ i $\phi(E_{a_2}) = F_{b_2}$ jeste izomorfizam koji zadovoljava uslov (3.41), pa prema Posledici 3.1 dobijamo da fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu UFB-ekvivalentni.

Takođe imamo da su oba automata, i $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ minimalni fazi automati u $\mathbb{UFB}(\mathcal{A}) = \mathbb{UFB}(\mathcal{B})$ (prema Posledici 3.1), ali očigledno, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu izomorfni.

Važno je napomenuti da fazi automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu samo minimalni u klasi svih automata koji su UFB-ekvivalentni sa njima, već su minimalni i u klasi svih fazi automata koji su jezički ekvivalentni sa njima.

Napomenimo da razlog zbog čega minimalni fazi automati u $\mathbb{UFB}(\mathcal{A})$ ne moraju da budu izomorfni predstavljaju fazi jednakosti. Naime, za razliku od krisp slučaja, gde faktor automat u odnosu na relaciju jednakosti jeste izomorfan originalnom automatu, u fazi slučaju ovo ne mora da važi. Faktor automat u odnosu na fazi jednakost ima isti broj stanja kao početni automat, ali ne mora biti izomorfan sa njim. Na primer, u prethodnom primeru i E i F su fazi jednakosti, $\mathcal{B}/F$ je izomorfan sa $\mathcal{B}$, dok $\mathcal{A}/E$ nije izomorfan sa $\mathcal{A}$.

3.4 Povratno-direktne bisimulacije

U prethodnom poglavlju razmatrali smo homotipne bisimulacije, a u ovom poglavlju osvrnućemo se na heterotipne bisimulacije, posebno na povratno-direktne bisimulacije. Cilj nam je da uočimo sličnosti i osnovne razlike između homotipnih i heterotipnih bisimulacija.

Prema Lemi 3.2, fazi relacija φ je povratno-direktna bisimulacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ako i samo ako je direktno-povratna bisimulacija između reverznih automata $\bar{\mathcal{A}}$ i $\bar{\mathcal{B}}$. Otuda, za svako tvrđenje koje univerzalno važi za povratno-direktne bisimulacije postoji odgovarajuće tvrđenje koje univerzalno važi za direktno-povratne bisimulacije, pa ćemo pažnju usmeriti samo na povratno-direktne bisimulacije.

Napomenimo da ako je φ direktna ili povratna bisimulacija između fazi automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, onda je to i φ^{-1}. Međutim, ako je φ povratno-direktna ili direktno-povratna bisimulacija, φ^{-1} ne mora biti takva. Ipak, postoji zanimljiva veza između φ i φ^{-1}. Naime, φ je povratno-direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ako i samo ako je φ^{-1} direktno-povratna bisimulacija između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$.

Jednostavno se proverava da važe trđenja analogna Lemama 3.3 i 3.4 za povratno-direktne bisimulacije. Drugim rečima, kompozicija dve povratno-direktne bisimulacije i unija proizvoljne familije povratno-direktnih bisimulacija su takođe povratno-direktne bisimulacije. Dakle, ako postoji bar jedna povratno-direktna bisimulacija između fazi automata $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$, slično kao u Teoremi 3.2 može se pokazati da postoji najveća povratno-direktna bisimulacija φ između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Ipak, za razliku od direktnih ili povratnih bisimulacija, u slučaju direktno-povratnih bisimulacija se ne može pokazati da je φ parcijalna fazi funkcija, jer se ne može pokazati da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ povratno-direktna bisimulacija.

Bez obzira na to, može se pokazati da povratno-direktne bisimulacije imaju neka važna svojstva analogna onim svojstvima koja imaju direktne ili povratne bisimulacije. Na primer, na osnovu Teoreme 2.14 se može dokazati sledeća teorema.

Teorema 3.10. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati i neka je $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ uniformna fazi relacija. Tada je φ povratno-direktna bisimulacija ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) *E_A^φ je direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *E_B^φ je direktna bisimulacija na $\mathcal{B}$;*

(iii) *$\widetilde{\varphi}$ je izomorfizam faktor fazi automata $\mathcal{A}/E_A^\varphi$ i $\mathcal{B}/E_B^\varphi$.*

Takođe važi i sledeća teorema.

Teorema 3.11. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi automati, neka je E direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ i F povratna bisimulacija na $\mathcal{B}$.*

Tada postoji uniformna povratno-direktna bisimulacija $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ takva da je

$$E_A^\varphi = E \quad and \quad E_B^\varphi = F, \tag{3.42}$$

ako i samo ako postoji izomorfizam $\phi : \mathcal{A}/E \to \mathcal{B}/F$ takav da za sve $a_1, a_2 \in A$ važi

$$\widetilde{E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = \widetilde{F}(\phi(E_{a_1}), \phi(E_{a_2})). \tag{3.43}$$

Dokaz ove teoreme će biti izostavljen jer je sličan dokazu Teoreme 3.6.

Za razliku od direktnih bisimulacija, koje služe za definisanje relacije ekvivalencije između fazi automata, povratno-direktne bisimulacije se ne mogu koristiti u tu svrhu jer one ne mogu obezbediti simetričnost. Bez obzira na to, povratno-direktne bisimulacije su puno korišćene u literaturi prvenstveno zbog njihovog važnog svojstva da obezbeđuju jezičku ekvivalenciju.

3.5 Bisimulacije i srodni koncepti

Poznato je da deterministički automati imaju prirodnu interpretaciju kao algebre u kojima se svaki ulazni simbol kao jedna unarna operacija. Ova interpretacija, koju su predložili J. R. Buchi i J. B. Wright kasnih pedesetih godina, povezuje automate sa univerzalnim algebrama, pa se na taj način mnogi osnovni pojmovi univerzalne algebre mogu interpretirati u teoriji automata. Na primer, homomorfizmi se koriste za definisanje simulacija jednog automata drugim, dok se kongruencije koriste za redukciju broja stanja. U bliskoj vezi sa homomorfizmima i kongruencijama su i relacijski morfizmi, relacije između dve algebre (moguće različite) koje su kompatibilne sa algebarskim operacijama. Relacijske morfizme je uveo Tilson [73, Glave 11 i 12] u teoriji polugrupa, za rešavanje nekih problema koji su u bliskoj vezi sa razlaganjima konačnih polugrupa, ali se pokazalo da se oni takođe uspešno mogu koristiti u proučavanju raspoznatljivih jezika (videti [73, 161]). Kasnije su relacijski morfizmi uopšteni na proizvoljne univerzalne algebre, a nedavno su proučavani i u fazi okvirima (cf. [105]). Uprkos njihovom nazivu, na relacijske morfizme ne treba gledati kao na uopštenje pojma homomorfizma, već kao prirodno uopštenje koncepta kongruencije. Ipak, postoji ključna razlika između kongruencija i relacijskih morfizama. Dok su kongruencije kompatibilne relacije ekvivalencije, relacijski morfizmi su samo kompatibilne relacije. Zato se može reći da su uniformni relacijski morfizmi pogodnije proširenje pojma kongruencije od običnih relacijskih morfizama ([105]).

Iako se, za razliku od determinističkih automata, nedeterministički, fazi i težinski automati ne mogu predstaviti kao algebre, mnogi autori su na ovim automatima proučavali neke koncepte koji su bliski homomorfizmima, kongruencijama i relacijskim morfizmima. Ovde ćemo dati kratak osvrt na ove koncepte i ukazaćemo na njihovu vezu sa konceptom bisimulacija.

3.5.1 Deterministički automati

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, a_0, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, b_0, \tau^B)$ obični deterministički automati, tj. neka su $\delta_x^A : A \to A$ i $\delta_x^B : B \to B$ funkcije i $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $\tau^A \subseteq A$, i $\tau^B \subseteq B$. Prema standardnoj definiciji, *homomorfizam* determinističkih automata je funkcija $\varphi : A \to B$ koja zadovoljava sledeće uslove:

$$\varphi(a_0) = b_0, \tag{3.44}$$

$$\varphi(\delta_x^A(a)) = \delta_x^B(\varphi(a)), \quad \text{za sve } a \in A,\ x \in X, \tag{3.45}$$

$$a \in \tau^A \ \Leftrightarrow\ \varphi(a) \in \tau^B, \quad \text{za sve } a \in A. \tag{3.46}$$

Uslovi (3.44)–(3.46) se, redom, mogu predstaviti u istoj formi kao i uslovi (3.16)–(3.18), kojima se definiše povratno-direktna bisimulacija između fazi automata. Drugim rečima, homomorfizmi determinističkih automata su upravo one funkcije koje su povratno-direktne bisimulacije.

Napomenimo takođe da je uslov (3.45) ekvivalentan sa

$$\delta_x^A(a) = a' \Rightarrow \delta_x^B(\varphi(a)) = \varphi(a'), \quad \text{za sve } a, a' \in A,\ x \in X, \tag{3.47}$$

i ako δ_x^A i δ_x^B tretiramo kao relacije, onda se uslov (3.47) može zapisati kao

$$(a, a') \in \delta_x^A \ \Rightarrow\ (\varphi(a), \varphi(a')) \in \delta_x^B, \quad \text{za sve } a, a' \in A,\ x \in X. \tag{3.48}$$

Obratna implikacija u (3.47) ne mora da važi, ali imamo da je

$$\delta_x^B(\varphi(a)) = \varphi(a') \Rightarrow (\exists a'' \in A)\, \delta_x^A(a) = a'' \ \&\ \varphi(a'') = \varphi(a'), \tag{3.49}$$

za sve $a, a' \in A$ i $x \in X$.

Uslov (3.49) nije ekvivalentan sa (3.45), ali ako malo modifikujemo (3.49) možemo dobiti uslov

$$\delta_x^B(\varphi(a)) = b \Rightarrow (\exists a' \in A)\, \delta_x^A(a) = a' \ \&\ \varphi(a') = b, \tag{3.50}$$

za sve $a \in A$, $b \in B$ i $x \in X$, koji je ekvivalentan sa (3.45).

Drugi fundamentalni algebarski koncept koji igra važnu ulogu u teoriji determinističkih automata je koncept kongruencije. *Kongruencija* determinističkog automata $\mathcal{A} = (A, \delta^A, a_0, \tau^A)$ se definiše kao relacija $\varrho \subseteq A \times A$ koja zadovoljava uslove

$$(a, a') \in \varrho \ \Rightarrow\ (\delta_x^A(a), \delta_x^A(a')) \in \varrho, \quad \text{za sve } a, a' \in A \text{ i } x \in X, \tag{3.51}$$

$$(a, a') \in \varrho \ \Rightarrow\ (\, a \in \tau^A \Leftrightarrow a' \in \tau^A\,), \quad \text{za sve } a, a' \in A. \tag{3.52}$$

Uslov (3.52) znači da je relacija ϱ sadržana u relaciji ekvivalencije $\tau^A \times \tau^A \cup (A \setminus \tau^A) \times (A \setminus \tau^A)$ koja ima samo dve klase τ^A i $A \setminus \tau^A$, i u nekim izvorima ovaj uslov nije uključen u definiciju kongruencije.

Koncept kongruencije se može prevesti i na slučaj kada radimo sa dva različita automata $\mathcal{A} = (A, \delta^A, a_0, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, b_0, \tau^B)$. Tada, za relaciju $\varphi \subseteq A \times B$ uslovi (3.51) i (3.52) postaju

$$(a,b) \in \varphi \;\Rightarrow\; (\delta_x^A(a), \delta_x^B(b)) \in \varphi, \quad \text{za sve } a \in A,\, b \in B, \text{ i } x \in X, \tag{3.53}$$

$$(a,b) \in \varphi \;\Rightarrow\; (\, a \in \tau^A \Leftrightarrow b \in \tau^B \,), \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } b \in B, \tag{3.54}$$

i jasno je da uslov (3.54) znači da je relacija φ sadržana u relaciji $\tau^A \times \tau^B \cup (A \setminus \tau^A) \times (B \setminus \tau^B)$. Relaciju φ koja zadovoljava uslove (3.53) i (3.54), Rutten [174] je nazvao *bisimulacija* između determinističkih automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. U originalnoj definiciji ovog koncepta nema uslova koji se odnosi na početna stanja, pa ćemo mi dodatno zahtevati da relacija φ zadovoljava i uslov

$$(a_0, b_0) \in \varphi. \tag{3.55}$$

Koristićemo sledeću terminologiju iz [105]. Relacija $\varphi \subseteq A \times B$ koja zadovoljava uslove (3.53), (3.54), i (3.55) je *relacijski morfizam* između determinističkih automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Jednostavno se proverava da je uslov (3.53) ekvivalentan sa bilo kojim od sledeća dva uslova:

$$\varphi^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^B \circ \varphi^{-1}, \quad \text{za sve } x \in X, \tag{3.56}$$

$$\varphi \circ \delta_x^B \subseteq \delta_x^A \circ \varphi, \quad \text{za sve } x \in X. \tag{3.57}$$

Očigledno je da ovi uslovi imaju upravo istu formu kao i uslovi (3.2) i (3.8) koji se javljaju u definiciji direktne bisimulacije između fazi automata. Štaviše, uslov (3.54) je ekvivalentan konjunkciji uslova $\varphi^{-1} \circ \tau^A \subseteq \tau_B$ i $\varphi \circ \tau^B \subseteq \tau^A$, i kako su σ^A i σ^B jednoelementni skupovi, uslov (3.55) je ekvivalentan svakom od uslova $\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ \varphi$ i $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ \varphi^{-1}$. Dakle, prema terminologiji koja se koristi u ovoj disertaciji, relacijski morfizmi između determinističkih automata su upravo direktne bisimulacije između ovih automata. Štaviše, u slučaju da su automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jednaki, možemo zaključiti da su kongruencije determinističkih automata upravo direktne bisimulacione ekvivalencije determinističkih automata. Sa druge strane, nije teško naći primer kongruencije determinističkog automata koja nije povratna bisimulacija.

Prethodno razmatrani koncepti koji se tiču determinističkih automata mogu se prirodno prevesti i na determinističke fazi automate. Štaviše, fazi analogoni ovih koncepata mogu se definisati na sličan način kao što je to urađeno u [105]. U tom radu, Ignjatović i ostali su uveli koncept fazi relacijskog morfizma između algebri, i isti primenili na determinističke fazi automate [105, Primer 4.1]. Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, a_0, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, b_0, \tau^B)$ deterministički fazi automati, tj. neka su $\delta_x^A : A \to A$ i $\delta_x^B : B \to B$ funkcije, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, i neka su $\tau^A \in \mathcal{F}(A)$ i $\tau^B \in \mathcal{F}(B)$ fazi skupovi. Fazi relacija $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ je *fazi relacijski morfizam* između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ako zadovoljava sledeće uslove

$$\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^{-1}, \quad \text{(ili ekvivalentno } \sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi), \tag{3.58}$$

$$\varphi(a, b) \leqslant \varphi(\delta_x^A(a), \delta_x^B(b)), \quad \text{za sve } a \in A,\ b \in B, \text{ i } x \in X, \tag{3.59}$$

$$\varphi^{-1} \circ \tau^A \leqslant \tau_B, \quad \varphi \circ \tau^B \leqslant \tau^A. \tag{3.60}$$

Kako je $\sigma^A = \{a_0\}$ i $\sigma^B = \{b_0\}$, uslov (3.58) je takođe ekvivalentan sa $\varphi(a_0, b_0) = 1$. Nije teško proveriti da je (3.59) ekvivalentan sa oba uslova (3.2) i (3.8), pa fazi relacijski morfizmi između determinističkih fazi automata jesu upravo direktne bisimulacije između ovih automata.

3.5.2 Nedeterministički automati

U ovom poglavlju, pažnju ćemo usmeriti na nedeterminističke automate. Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ dva nedeterministička automata, pri čemu su $\delta_x^A \subseteq A \times A$ i $\delta_x^B \subseteq B \times B$ krisp relacije, i $\sigma^A, \tau^A \subseteq A$ i $\sigma^B, \tau^B \subseteq B$ su krisp skupovi. Pretpostavimo da je $\varphi : A \to B$ funkcija. U terminologiji nedeterminističkih automata, uslov (3.47) se može zapisati kao

$$(a, a') \in \delta_x^A \Rightarrow (\varphi(a), \varphi(a')) \in \delta_x^B, \quad \text{za sve } a, a' \in A \text{ i } x \in X, \tag{3.61}$$

a uslov (3.50) može biti zapisan na sledeći način

$$(\varphi(a), b) \in \delta_x^B \Rightarrow (\exists a' \in A)\, (a, a') \in \delta_x^A \ \&\ \varphi(a') = b, \tag{3.62}$$

za sve $a \in A$, $b \in B$ i $x \in X$.

Bloom i Ésik [19, Primer 9.4.9] su razmatrali uslove (3.61) i (3.62) zajedno sa dva dodatna uslova za početna i završna stanja koji se mogu formulisati u obliku sličnom uslovima (3.16) i (3.18) (drugi je takođe ekvivalentan sa (3.46)). Uslove (3.61) i (3.62) je koristio Calude sa saradnicima [29] za definisanje *morfizma* nedeterminističkih automata sa izlazima, zajedno sa uslovom za funkciju izlaza. Zapravo, razmatrali su uslov (3.61) sa ekvivalencijom umesto sa implikacijom, ali obratna implikacija je suvišna. Kao što smo već napomenuli, ova implikacija nije neophodno tačna za determinističke automate.

Za determinističke automate, uslov (3.17) je ekvivalentan i sa (3.47) i sa (3.50), ali za nedeterminističke automate uslov (3.17) nije ekvivalentan ni sa (3.61) ni sa (3.62), ali jeste ekvivalentan konjunkciji uslova (3.61) i (3.62). Naime, uslov (3.61) je ekvivalentan sa

$$\delta_x^A \circ \varphi \subseteq \varphi \circ \delta_x^B, \quad \text{za sve } x \in X, \tag{3.63}$$

i (3.62) je ekvivalentan sa

$$\varphi \circ \delta_x^B \subseteq \delta_x^A \circ \varphi, \ \text{za sve } x \in X. \tag{3.64}$$

Jasno, uslovi (3.63) i (3.64) su upravo uslovi (3.5) i (3.8) izrečeni u termima nedeterminističkih automata. Takođe, uslovi (3.16)–(3.18) služe za definisanje simulacija težinskih automata, i svaka relacija između nedeterminističkih automata koja zadovoljava (3.16)–(3.18) se takođe naziva *simulacija* između nedeterminističkih automata [76, 77]. Dakle, simulacije između nedeterminističkih automata u smislu definicija iz [19, 76, 77] jesu upravo direktno-povratne bisimulacije u terminologiji koja je korišćena ovde.

Važno je napomenuti da je funkciju $\varphi : A \to B$ koja zadovoljava uslov (3.61), tj. uslov (3.63), zajedno sa uslovima $\sigma^A \circ \varphi \subseteq \sigma^B$ i $\tau^A \subseteq \varphi \circ \tau^B$, proučavao Lombardy [138], koji ju je u tom radu nazvao *morfizam* između nedeterminističkih automata. Jasno je da su morfizmi nedeterminističkih automata upravo one funkcije koje su povratne simulacije u terminologiji koja se ovde koristi.

Prirodno se nameće pitanje šta su kongruencije nedeterminističkih automata? U algebri, kongruencije su ekvivalencije koje su kompatibilne sa algebarskim relacijama, a kompatibilnost je potrebna da bi se mogle dobro definisati algebarske operacije na odgovarajućem faktor skupu. Kompatibilnost takođe obezbeđuje prenos nekih bitnih algebarskih svojstava originalne algebre na faktor algebru. U slučaju nedeterminističkih automata, relacija ekvivalencije dopušta korektno definisanje odgovarajućeg faktor nedeterminističkog automata, kao i da se, na primer, dokažu neki analogoni Teoreme o homomorfizmu i Druge teoreme o izomorfizmu iz univerzalne algebre (videti Poglavlje 3, Teorema 3.7, i [44, 45, 189]). Ipak, ne dopušta svaka ekvivalencija da se sva bitna svojstva originalnog automata prenesu na faktor automat. Na primer, originalni automat i faktor automat ne moraju nužno raspoznavati isti jezik. Kao što smo već pomenuli, faktor automat raspoznaje isti jezik kao i polazni automat ako i samo ako odgovarajuća ekvivalencija jeste rešenje opšteg sistema (sistem (1.57)).

Prema tome, svaka relacija ekvivalencije koja je rešenje opšteg sistema može se shvatiti kao kongruencija na nedeterminističkom automatu. Međutim, opšti sistem se može sastojati iz beskonačno mnogo jednačina, i nalaženje njegovog netrivijalnog rešenja može biti veoma težak zadatak. Drugim rečima, praktično neće biti mnogo korisno da na kongruencije gledamo kao na ekvivalencije koje su rešenja opšteg sistema. Mnogo je pogodnije razmotriti neke instance opšteg sistema umesto samog opšteg sistema, gde se pod instancom podrazumeva sistem koji se sastoji iz istih relacija i čiji je skup rešenja sadržan u skupu rešenja opšteg sistema. Takođe, poželjno je da ovi sistemi budu što je moguće opštiji, ali i da se sastoje iz konačnog broja jednačina i da su "jednostavni" za rešavanje. Dva takva sistema proučavali su Ilie, Yu i drugi [110, 111, 112, 113], nazivajući njihova rešenja *desno* i *levo invarijantnim ekvivalencijama*. U našoj terminologiji, ovo su upravo direktne i povratne bisimulacione ekvivalencije. Ekvivalencije koje je proučavao Calude i ostali [29] se takođe poklapaju sa direktnim bisimulacionim ekvivalencijama. Oba gore pomenuta tipa ekvivalencija su korišćena za redukciju broja stanja nedeterminističkog automata. Za redukciju stanja, Ilie, Navaro i Yu [112] i Champarnaud i Coulon [33] takođe koriste prirodne ekvivalencije desno i levo invarijantnih kvazi-uređenja, koje nisu nužno desno ili levo invarijantne ekvivalencije ali jesu rešenja opšteg sistema.

Treba napomenuti da se ni jedna od dve napred pomenute ekvivalencije, direktne i povratne bisimulacione ekvivalencije, se ne može smatrati boljom od one druge. Ima slučajeva kada prva daje bolju redukciju broja stanja u odnosu na drugu, i obratno. Takođe postoje slučajevi kada svaka od njih ponaosob indukuje polinomijalno smanjenje broja stanja, ali kada se naizmenično koriste obe ekvivalencije broj stanja se može smanjiti eksponencijalno (videti [111, Sekcija 11]). Napomenimo takođe da su direktne bisimulacije nedeterminističkih automata razmatrane u Kozenovoj knjizi [124].

3.5.3 Fazi automati

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^A, \tau^B)$ fazi automati, i neka je $\varphi : A \to B$ obična funkcija. U termima fazi automata uslovi (3.61) i (3.62) se mogu zapisati kao

$$\delta_x^A(a, a') \leqslant \delta_x^B(\varphi(a), \varphi(a')), \quad \text{za sve } a, a' \in A,\ x \in X, \tag{3.65}$$

$$\delta_x^B(\varphi(a), b) \leqslant \bigvee_{a' \in A, \varphi(a') = b} \delta_x^A(a, a'), \quad \text{za sve } a \in A,\ b \in B,\ x \in X. \tag{3.66}$$

Uslov (3.65) ekvivalentan je sa (3.5), a uslov (3.66) je ekvivalentan sa (3.8), pa je konjunkcija uslova (3.65) i (3.66) ekvivalentna sa (3.17). Takođe može se pokazati da je konjunkcija (3.65) i (3.66) ekvivalentna sa

$$\delta_x^B(\varphi(a),b) = \bigvee_{a'\in A, \varphi(a')=b} \delta_x^A(a,a'), \quad \text{za sve } a\in A,\, b\in B,\, x\in X. \tag{3.67}$$

Dakle, (3.17) je takođe ekvivalentan sa (3.67). Funkcija φ koja zadovoljava uslov (3.67) je u radu T. Petković [160] nazvana *homomorfizam* fazi automata. Zapravo, u tom radu su razmatrani fazi automati sa izlazima pa i ovde definicija sadrži dodatni uslov koji se odnosi na fazi funkciju izlaza. Ova definicija se jednostavno prevodi u definiciju homomorfizma fazi automata sa fazi skupovima početnih i završnih stanja zamenjujući uslov koji se odnosi na fazi funkciju izlaza uslovima (3.16) i (3.18). U tom slučaju, homomorfizmi fazi automata su upravo one funkcije koje su direktno-povratne bisimulacije.

U nešto drugačijem kontekstu, funkcije koje zadovoljavaju (3.67) su proučavane u [143], gde su dobile naziv *pokrivanja* (videti takođe [35, 118, 126, 148]). Napomenimo da su Malik i Mordeson u [148, ¶6.3] koristili naziv homomorfizam za funkciju φ koja zadovoljava uslov (3.65) (videti takođe [35, 118, 126]), kao i naziv *strogi homomorfizam* za funkciju φ koja zadovoljava uslov

$$\delta_x^B(\varphi(a),\varphi(a')) = \bigvee_{a''\in A, \varphi(a'')=\varphi(a')} \delta_x^A(a,a''), \quad \text{za sve } a,a'\in A,\, x\in X. \tag{3.68}$$

Uslov (3.68) je jači od uslova (3.65), ali je slabiji od uslova (3.67). Ako je φ sirjektivna, onda je uslov (3.66) ekvivalentan sa (3.68). Važno je napomenuti da se u tom radu razmatraju fazi automati bez početnih i završnih stanja, pa tu nisu razmatrani uslovi koji se tiču fazi skupova početnih i završnih stanja.

Slična diskusija u vezi sa nedeterminističkim automatima može se dati i za fazi automate. Međutim, postoje neka pitanja koja su specifična samo za fazi automate. Na primer, jedno od najvažnijih pitanja je da li možemo kongruencije posmatrati kao krisp ili fazi relacije. Kao u slučaju nedeterminističkih automata, redukcija broja stanja fazi automata je obično vršena po uzoru na minimizaciju determinističkih automata i bila je zasnovana na krisp relacijama (videti [8, 34, 130, 144, 148, 160]). Čak je koriŽćen i neadekvatan termin "minimizacija", jer fazi automat koji je tako dobijen ne mora biti minimalni u klasi svih fazi automata koji su ekvivalentni originalnom fazi automatu. Za fazi automat $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i krisp ekvivalenciju $\varrho \subseteq A \times A$, možemo pokazati da je uslov

$$\varrho \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ \varrho, \quad \text{za sve } x\in X, \tag{3.69}$$

ekvivalentan sa

$$\bigvee_{c' \in \varrho_c} \delta_x^A(a,c') = \bigvee_{c' \in \varrho_c} \delta_x^A(b,c'), \quad \text{za sve } x \in X \text{ i } a,b,c \in A \text{ takve da } (a,b) \in \varrho. \tag{3.70}$$

Petković [160] je uslov (3.70) posmatrala u kontekstu fazi automata sa izlazima, i relacije ekvivalencije koje zadovoljavaju uslov (3.70), zajedno sa određenim uslovom za fazi funkciju izlaza, nazvane su *kongruencijama* na fazi automatu. Isti koncept, formulisan u terminima particija, Basak i Gupta [8] su nazvali *particija sa svojstvom substitucije*. Ako je struktura istinitosnih vrednosti $\mathcal{L}$ linearno uređena, onda su uslovi (3.70) i (3.69) ekvivalentni sa

$$\begin{aligned}(\forall a,b,c \in A)(\forall x \in X)\ &\big((a,b) \in \varrho \ \ \&\ \ \delta_x^A(b,c) > 0\big) \\ &\Rightarrow\ \big((\exists d \in A)\, \delta_x^A(a,d) \geqslant \delta_x^A(b,c)\ \&\ \ (c,d) \in \varrho\big)\,,\end{aligned} \tag{3.71}$$

a ako uređenje u $\mathcal{L}$ nije linearno, onda (3.71) povlači (3.70) i (3.69), ali obratna inkluzija ne mora da važi. Uslov (3.71) su ispitivali Malik i Mordeson u [148, ¶6.4] u kontekstu fazi automata bez izlaza, i bez fazi skupova inicijalnih i završnih stanja. U pomenutom radu, ekvivalencije koje zadovoljavaju (3.71) nazvane su *prihvatljive relacije* (engl. admissible relations). Dakle, svi pomenuti koncepti se uklapaju u koncept direktne bisimulacione ekvivalencije.

Drugačiji pristup redukcije broja stanja fazi automata je nedavno predložen u [44, 45, 189]. Osnovna ideja tog pristupa je da se koriste fazi ekvivalencije umesto običnih ekvivalencija. Kao što je slučaj i sa nedeterminističkim automatima, faktor fazi automat u odnosu na datu fazi ekvivalenciju raspoznaje isti jezik kao i originalni fazi automat ako i samo ako ova fazi ekvivalencija jeste rešenje opšteg sistema. Neka osnovna svojstva opšteg sistema i nekih njegovih instanci su proučavani u [44, 45, 189]. Neke od instanci opšteg sistema su i sistemi određeni sa (3.19) i (3.20), kao i sistemi određeni sa (3.22) i (3.23). Rešenja ovih sistema u $\mathcal{E}(A)$ su upravo povratne i direktne bisimulacione fazi ekvivalencije. U radovima [44, 45], direktne i povratne bisimulacione fazi ekvivalencije su nazvane *desno* i *levo invarijante fazi ekvivalencije*, dok su u [106] rešenja srodnih sistema nazvana *desno* i *levo regularne fazi relacije*. U ovim radovima je pokazano da za svaki fazi automat postoji najveća direktna i povratna bisimulaciona fazi ekvivalencija, i dat je iterativni algoritam za nalaženje najvećih rešenja koji radi kad god je odgovarajuća struktura istinitosnih vrednosti lokalno konačna kompletna reziduirana mreža. Drugim rečima, dati su neki dovoljni uslovi pod kojima algoritam funkcioniše (videti [44, 45]). Štaviše, ovi algoritmi su i modifikovani tako da izračunavaju najveće krisp direktne i povratne bisimulacione ekvivalencije, i ovi algoritmi se završavaju nakon konačnog broja koraka kada je struktura istinitosnih vrednosti proizvoljna mreža. Ipak, pokazano je da se bolje redukcije dobijaju pomoću najvećih direktnih i povratnih bisimulacionih fazi ekvivalencija.

Važan slučaj opšteg sistema je sistem

$$E \circ \delta_x^A = \delta_x^A, \qquad \text{za svako } x \in X, \qquad E \circ \tau^A \leqslant \tau^A, \tag{3.72}$$

čija se rešenja u $\mathcal{E}(A)$ nazivaju *strogo desno invarijantne fazi ekvivalencije*, kao i sistem

$$\delta_x^A \circ E = \delta_x^A, \qquad \text{for each } x \in X, \qquad \sigma^A \circ E \leqslant \sigma^A, \tag{3.73}$$

čija se rešenja u $\mathcal{E}(A)$ nazivaju *strogo levo invarijantne fazi ekvivalencije*. Najveća rešenja sistema (3.72) i (3.73) mogu se izračunati na jednostavniji način od rešenja sistema (3.19)–(3.20) i (3.22)–(3.23), koristeći efektivni postupak koji nije iterativan i koji funkcioniše ako je struktura istinitosnih vrednosti proizvoljna kompletna reziduirana mreža. Ipak, rešenja sistema (3.72) i (3.73) čine podskup skupa rešenja sistema (3.19)–(3.20) i (3.22)–(3.23), što znači da najveća rešenja sistema (3.72) i (3.73) mogu biti strogo manja od najvećih rešenja sistema (3.19)–(3.20) i (3.22)–(3.23). Zbog toga, najveće desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije daju lošije redukcije u odnosu na redukcije pomoću najvećih direktnih i povratnih bisimulacionih fazi ekvivalencije (videti [44, 45, 189]).

Sistem koji je opštiji od prethodno pominjanih je sistem

$$E \circ \tau_u^A = \tau_u^A, \qquad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{3.74}$$

gde je $\tau_u^A = \delta_u^A \circ \tau^A$, čija se rešenja u $\mathcal{E}(A)$ nazivaju *slabo desno invarijantne fazi ekvivalencije*, kao i sistem

$$\sigma_u^A \circ E = \sigma_u^A, \qquad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{3.75}$$

gde je $\sigma_u^A = \sigma^A \circ \delta_u^A$, čija se rešenja u $\mathcal{E}(A)$ nazivaju *slabo levo invarijantne fazi ekvivalencije* [189]. Ova dva sistema imaju šire skupove rešenja u odnosu na sisteme (3.19)–(3.20) i (3.22)–(3.23), kao i u odnosu na sisteme (3.72) i (3.73), i stoga, njihova najveća rešenja daju bolje redukcije nego najveća rešenja ovih drugih sistema. U nekim slučajevima, najveće slabo desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije se mogu izračunati na jednostavniji način nego najveće direktne i povratne bisimulacione fazi ekvivalencije. Ipak, postoji problem koji se tiče broja jednačina u (3.74) i (3.75). Ovaj broj može biti beskonačan, a čak i ako je konačan, može biti eksponencijalan u odnosu na broj stanja fazi automata $\mathcal{A}$. Naime, formiranje sistema (3.75) i (3.74), tj., konstrukcija fazi relacija σ_u^A i τ_u^A, za svako $u \in X^*$, svodi se na determinizaciju fazi automata $\mathcal{A}$ i njegovog reverznog automata u smislu Nerodovog automata (videti [38, 104, 107]).

Napomenimo još jednom da se bolje redukcije mogu dobiti naizmeničnimm primenama redukcija pomoću najvećih direktnih i povratnih bisimulacionih fazi ekvivalencija. Štaviše, u svim prethodno razmatranim slučajevima, fazi ekvivalencije se mogu zameniti sa fazi-kvazi uređenjima i na taj način se mogu dobiti još bolje redukcije.

Sa druge tačke gledišta, redukcije broja stanja i ekvivalencije fazi automata su bile predmet izučavanja velikog broja autora, kao što su N. C. Basak i A. Gupta [8], W. Cheng i Z. Mo [34], H. Lei i Y. M. Li [130], D. S. Malik, J. N. Mordeson i M. K. Sen [144], K. Peeva [153], K. Peeva i Z. Zahariev [156], T. Petković [160], L. H. Wu i D. W. Qiu [200], H. Xing, D.W. Qiu, F. C. Liu i Z. J. Fan [204]. Takođe, treba pomenuti i knjige J. N. Mordeson i D. S. Malik [148] i K. Peeva i Y. Kyosev [154]. Napomenimo da se u nekim od ovih izvora pojam minimizacija koristi u smislu pojma redukcije i ne podrazumeva uvek uobičajenu konstrukciju minimalnog automata u skupu svih automata koji raspoznaju dati fazi jezik, tj. algoritmi koji su u ovim radovima razvijeni ne moraju nužno kao rezultat da daju minimalni automat fazi jezika. Pravi algoritam za minimizaciju dat je jedino u slučaju krisp-determinističkih fazi automata u radovima J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović i T. Petković [107] i Y. M. Li i W. Pedrycz [134].

3.5.4 Težinski automati

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^A, \tau^B)$ težinski automati. Bloom i Ésik [19], i Ésik i Kuich [76] su definisali *simulaciju* između težinskih automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kao funkciju $\varphi : A \times B \to S$ (matricu nad S) koja zadovoljava uslove (3.16)–(3.18). Simulacije su uvedene sa namenom da uspostave strukturnu ekvivalenciju između težinskih automata. Pod istim nazivom su izučavane i u [77], a sa različitim nazivima proučavane su u [23, 11, 9, 10, 139, 175]. Béal i Perrin [11] su ih nazivali *povratne elementarne ekvivalencije* (engl. backward elementary equivalence), Béal, Lombardy i Sakarovitch [9, 10] su koristili naziv *konjugacija* (engl. conjugacy), koji potiče iz primena u simboličkoj dinamici, dok je Buchholz [23] koristio naziv *direktna relacijska simulacija* (engl. forward relational simulation). U našoj terminologiji to su povratno-direktne bisimulacije.

Prethodno pomenuti koncept je generalizacija relacijskog morfizma. Sa ciljem dobijanja koncepta koji bi bio generalizacija homomorfizma, mnogi autori su zahtevali da φ bude sirjektivna funkcija iz A na B. U [9, 10], za sirjektivnu funkciju $\varphi : A \to B$ koja zadovoljava uslove (3.16)–(3.18) se kaže da je *pokrivanje* (engl. covering) (ili preciznije, $\mathcal{S}$-*covering*), videti takođe [139, 175]), dok se u [23] ona naziva *direktna bisimulacija.* Sa druge strane, funkcija $\varphi : A \times B \to S$ koja zadovoljava uslove (3.13)–(3.15) (odnosno direktno-povratna bisimulacija u našoj terminologiji) je u [11] nazvana *direktna elementarna ekvivalencija*, dok je sirjektivna funkcija $\varphi : A \to B$ koja zadovoljava uslove (3.13)–(3.15) u [23] nazvana *povratna bisimulacija.*

Važno je napomenuti da su Béal, Lombardy i Sakarovitch [9, 10] ukazali na to da poluprsten $\mathcal{S}$ često ima sledeće svojstvo: dva težinska automata nad $\mathcal{S}$ su ekvivalentna (oni definišu isti formalni stepeni red, tj. funkciju iz X^* u S) ako i samo ako su povezani konačnim nizom simulacija. Poluprsteni koji imaju ovo svojstvo uključuju Booleov poluprsten [19], poluprsten prirodnih brojeva i prsten celih brojeva [9, 10], i sl. Primer poluprstena koji nema ovo svojstvo bio bi Tropski poluprsten [77].

Napomenimo da svi koncepti koji su prethodno pomenuti obuhvataju ili povratno-direktne ili direktno-povratne bisimulacije. Direktne ili povratne bisimulacije nisu ranije razmatrane u kontekstu težinskih automata, što i nije iznenađujuće jer se one definišu pomoću nejednakosti, a poluprsteni u opštem slučaju ne moraju biti uređeni. U ovoj disertaciji su razmatrani aditivno idempotentni poluprsteni jer oni imaju pogodno uređenje koje omogućuje da se razvije teorija direktnih i povratnih bisimulacija za težinske automate.

Takođe napomenimo da se bisimulacije javljaju u kontekstu stohastičkih, vremenskih i hibridnih automata. Više informacija o tome može se naći u knjigama i radovima [1, 22, 80, 98, 141, 146, 147, 171, 174, 181].

Glava 4

Viševrednosne relacije nad polupirstenima

Viševrednosna relacija između skupova A i B je svaka funkcija iz $A \times B$ u V, gde je V skup vrednosti takav da je $|V| \geqslant 2$. Ako je $B = A$, onda govorimo o viševrednosnoj relaciji na A. Najviše izučavan tip viševrednosnih relacija su fazi relacije. U originalnoj Zadehovoj definiciji fazi relacije [207] vrednosti se uzimaju iz realnog jediničnog intervala $[0, 1]$, dok je kasnije Goguen [84] predložio izučavanje fazi skupova i relacija sa vrednostima u proizvoljnoj mreži. Drugi važan tip viševrednosnih relacija su viševrednosne relacije između konačnih skupova koje uzimaju vrednosti u polju, prstenu ili polupirstenu. U literaturi su poznate kao *matrice*.

Kao Žto smo već videli, distributivne mreže i slične mrežno uređene strukture kao što su reziduirane mreže, mrežno uređeni monoidi i druge, predstavljaju sjajan okvir za proučavanje viševrednosnih relacija. Naime, uređenje i određena "dobra" svojstva ovih struktura, kao što je idempotentnost supremuma i distributivnost infimuma ili množenja prema supremumu, omogućavaju da se mnoga važna svojstva kasičnih dvovrednosnih relacija mogu preneti i na viševrednosne relacije. Na primer, moguće je definisati tranzitivnost, viševrednosne ekvivalencije, viševrednosna kvazi-uređenja, itd.

Što se tiče matrica nad poljima, prstenima i polupirstenima, one su najčešće korišćene za rešavanje sistema jednačina i nejednačina, a retko se o njima razmišljalo kao o uopštenju dvovrednosnih relacija. Razlog za to verovatno leži u činjenici da za razliku od uređenih struktura koje se koriste u teoriji fazi skupova, polupirsteni ne moraju biti uređeni i skup $\{0, 1\}$, koji se sastoji iz nule i jedinice poluprstena ne mora nužno formirati podpoluprsten, pa se matrice sa vrednostima u $\{0,1\}$ ne mogu tretirati kao obične dvovrednosne relacije.

Ovde se prirodno nameće pitanje: za koji tip poluprstena se matrice nad njim ponašaju kao fazi relacije ili klasične dvovrednosne relacije. Pokazaće se da dosta važna i veoma velika klasa poluprstena, klasa aditivno idempotentnih poluprstena, ima ovo svojstvo. Ispitaćemo neka svojstva viševrednosnih relacija nad aditivno idempotentnim poluprstenom, definisaćemo koncept viševrednosnog kvazi-uređenja, ekvivalencije, uniformne relacije, itd.

U drugom delu ove glave bavićemo se max-plus algebrama. Naime, ako operacije sabiranja i množenja realnih brojeva zamenimo redom operacijama maksimuma i sabiranja, dobijamo takozvanu *max-plus algebru*, a ako ih zamenimo redom operacijama minimuma i sabiranja, onda dobijamo *min-plus algebru*. U oba slučaja, nova aditivna operacija je idempotentna, i novodobijena algebra ima strukturu poluprstena. Štaviše ove dve algebre su izomorfne. Atraktivnost max-plus algebre ogleda se u činjenici da mnogi ne-linearni problemi (u tradicionalnom smislu) postaju linearni kada se posmatraju nad max-plus algebrom. Prilično široka oblast savremene matematičke analize, koja se naziva idempotentna analiza, bazira se upravo na korišćenju max-plus algebre umesto klasičnog polja realnih brojeva (videti [87, 91, 122, 137]).

U prošlosti se umesto max-plus algebre takođe koristio i naziv *algebre rasporeda* (engl. schedule algebras) [81]. U računarskim naukama uveden je izraz *tropski poluprsten* za diskretne verzije max-plus algebre (nad $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$) ili min-plus algebre (nad $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) i njihove podalgebre. Dominic Perrin je diskretne poluprstene ovog tipa nazvao tropskim poluprstenima u čast Brazilskog matematičara i informatičara Imre Simon zbog njegovih pionirskih aktivnosti u ovoj oblasti [162]. U skorije vreme se promenila situacija sa terminologijom, pa za većinu današnjih modernih matematičara, tropski poluprsten je max-plus algebra nad $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (ili min-plus algebra nad $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

Max-plus algebra je više manje nezavisno otkrivena u nekoliko različitih istraživačkih škola i u okviru različitih oblasti matematike. Prvi poznat rad iz idempotentne (linearne) algebre je je rad S. Kleenea [120], u kojem su razmatrani sistemi algebarskih jednačina nad idempotentnim poluprstenom svih formalnih jezika nad konačnim alfabetom.

Takođe, jedan od prvih radova o max-plus algebrama je i rad R. A. Cuninghame-Greena [46], koji je kasnije praćen radovima [47, 49, 50, 51] i mnogim drugim. Nezavisno, veliki broj autora započijne istraživanja koja se baziraju na max-plus algebrama. Među njima su B. Giffler [81, 82], N. N. Vorobyov [192, 193], M. Gondran i M. Minoux [86], A. Carr e [31] , G. M. Engel i H. Schneidre [75] i L. Elsner [74].

U godinama koje slede, max-plus algebre dobijaju mnoge praktične interpretacije. Na desetine autora je ispitivalo matrice nad max-plus poluprstenima i odgovarajuće primene u diskretnoj matematici, računarskim jezicima, lingvističkim problemima, konačnim automatima, grafovskim problemima optimizacije, diskretnim sistemima događaja i Petrijevim mrežama, stohastičkim sistemima, i slično. Max-plus algebre se koriste za rešavanje raznih problema kao što su problemi izvodljivosti i dostižnosti, sinhronizacije i optimizacije, kombinatorne optimizacije, zatim za rešavanje problema maksimalnog protoka i minimalnih troškova, pronalaženje najkraćih (najdužih) puteva, i slično (videti [3, 5, 27, 49, 36, 79, 96, 97, 210, 211]). Kao deo idempotentne analize, max-plus algebre su izučavane u [91, 122, 137].

U ovoj glavi biće izučavani heterogeni slabo linearni sistemi relacijskih nejednačina nad max-plus algebrom. Ako su A_i i B_i $(i \in I)$ date težinske relacije tipa $n \times n$ i $m \times m$, tim redom, V je data težinska relacija tipa $n \times m$, pod heterogenim slabo linearnim sistemom podrazumevamo dva sistema koja se sastoje iz nejednačina oblika $X^{-1} \circ A_i \leqslant B_i \circ X^{-1}$, $X \leqslant V$, i $A_i \circ X \leqslant X \circ B_i$, $X \leqslant V$, kao i od četiri sistema dobijena kombinacijom ova dva (za X i X^{-1}). Rešenja slabo linearnih sistema relacijskih nejednačina predstavićemo kao post-fiksne tačke izvesnih izotonih funkcija na mreži težinskih relacija. Pomoću ovih funkcija, daćemo algoritam za izračunavanje najvećih rešenja ovih sistema.

Struktura glave je sledeća. U Poglavlju 4.1 uvode se osnovni pojmovi i ispituju se osobine težinskih relacija nad aditivno idempotentnim poluprstenom. Dalje se razmatraju slabo linearni sistemi relacijskih jednačina i nejednačina nad max-plus algebrom. Najpre se u Poglavlju 4.2 posmatraju neke posebne vrste relacijskih jednačina i nejednačina koje će se koristiti u daljem radu. Zatim se, u Poglavlju 4.3 bavimo sistemima slabo linearnih relacijskih jednačina i nejednačina. U Poglavlju 4.4 dat je postupak za izračunavanje najvećih rešenja ovih sistema.

4.1 Težinske relacije

Neka je S aditivno idempotentan poluprsten i neka je I konačan skup. *Težinski podskup* od I nad S je svaka funkcija iz I u S. Skup svih težinskih podskupova od I nad S označićemo sa S^I.

Neka su I i J dva neprazna konačna skupa. *Težinska relacija* između skupova I i J nad S je svaka funkcija iz $I \times J$ u S. Drugim rečima, težinska relacija je svaka matrica tipa $I \times J$ nad S. Skup svih težinskih relacija između I i J nad S označićemo sa $S^{I\times J}$. Posebno, *težinska relacija na skupu* I nad S je svaka funkcija iz $I \times I$ u S, odnosno, drugačije rečeno, to je svaka kvadratna matrica nad S tipa $I \times I$. Napomenimo da ćemo ovde koristiti termin "težinska relacija" radije nego termin "težinska matrica" ili "matrica nad poluprstenom S" iz razloga što se u ovoj glavi upućuje na neka svojstva koja su tipična za relacije, a ne za matrice.

Unija težinskih relacija se definiše kao sabiranje matrica, dok se *kompozicija* težinskih relacija definiše kao matrično množenje. Drugim rečima, ako su I, J i K neprazni konačni skupovi, i $A, B \in S^{I\times J}$ težinske relacije, onda je

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j), \quad \text{za sve } i \in I \text{ i } j \in J, \tag{4.1}$$

a ako je $A \in S^{I\times J}$ i $B \in S^{J\times K}$, onda je $A \circ B$ težinska relacija iz $S^{I\times K}$ definisana sa

$$(A \circ B)(i, k) = \sum_{j\in J} A(i, j)B(j, k), \quad \text{za sve } i \in I \text{ i } k \in K. \tag{4.2}$$

Sa ovako definisanim sabiranjem i kompozicijom težinskih relacija, neka dobro poznata svojstva sabiranja i množenja matrica nad poluprstenom se prenose na težinske relacije. Naime, za neprazne konačne skupove I, J, K i L, i proizvoljne $A, B, C \in S^{I\times J}$ važi

$$(A + B) + C = A + (B + C), \tag{4.3}$$

dok za proizvoljne $A \in S^{I\times J}$, $B \in S^{J\times K}$ i $C \in S^{K\times L}$ imamo

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C). \tag{4.4}$$

Takođe, za sve $A, A_1, A_2 \in S^{I\times J}$, $B, B_1, B_2 \in S^{J\times K}$ važi

$$A \circ (B_1 + B_2) = A \circ B_1 + A \circ B_2 \tag{4.5}$$

$$(A_1 + A_2) \circ B = A_1 \circ C + A_2 \circ B, \tag{4.6}$$

dok za proizvoljne težinske relacije $A \in S^{I\times J}$, $A_1, A_2, \in S^{J\times K}$ i $B \in S^{K\times L}$,

$$A_1 \leqslant A_2 \quad \text{povlači} \quad A\circ A_1 \leqslant A\circ A_2 \ \text{ i } \ A_1\circ B \leqslant A_2\circ B. \tag{4.7}$$

S obzirom da je S aditivno idempotentan poluprsten, to skup $\{0,1\}$ čini podpoluprsten od S, pa se Booleove relacije mogu shvatiti kao težinske relacije koje uzimaju vrednosti samo u skupu $\{0,1\}$. Međutim, činjenica da je S aditivno idempotentan poluprsten povlači još neka značajna svojstva težinskih relacija nad S. Naime, u tom slučaju se prirodno uređenje težinskih relacija poklapa sa "po-koordinatnim" uređenjem i operacija sabiranja težinskih relacija je kompatibilna sa relacijom prirodnog uređenja težinskih relacija, odnosno važe sledeće dve leme.

Lema 4.1. *Neka su I i J neprazni konačni skupovi, i A i B težinske relacije između I i J nad aditivno idempotentnim poluprstenom S. Tada je*

$$A \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad A(i,j) \leqslant B(i,j), \quad \textit{za sve } i\in I,\ j\in J. \tag{4.8}$$

Dokaz. Za proizvoljne težinske relacije A i B između I i J nad aditivno idempotentnim poluprstenom S važi $A \leqslant B$ ako i samo ako je $A+B=B$, odnosno, ako i samo ako je $(A+B)(i,j) = B(i,j)$, za sve $i\in I$ i $j\in J$. Prema (4.1), ovo je dalje ekvivalentno sa $A(i,j)+B(i,j) = B(i,j)$, za sve $i\in I$ i $j\in J$, tj., ekvivalentno je sa $A(i,j)\leqslant B(i,j)$, za sve $i\in I$ i $j\in J$. □

Lema 4.2. *Neka su I i J neprazni konačni skupovi, i $A_1, A_2, B \in S^{I\times J}$ proizvoljne težinske relacije nad aditivno idempotentnim poluprstenom S. Tada*

$$A_1 \leqslant A_2 \quad \textit{povlači} \quad A_1 + B \leqslant A_2 + B. \tag{4.9}$$

Dokaz. Imamo da je $A_1 \leqslant A_2$ ekvivalentno sa $A_1 + A_2 = A_2$, odakle je $A_1+A_2+B = A_2+B$. Kako je S aditivno idempotentan poluprsten, iz ovoga dobijamo da je $A_1+A_2+B+B = A_2+B$, odnosno da je $A_1+B+A_2+B = A_2+B$, tj., $A_1+B \leqslant A_2+B$. □

U slučaju da su A i B Booleove relacije između I i J nad S, onda je $A\leqslant B$ obična inkluzija, tj. $A\subseteq B$, dok je suma $A+B$ obična unija relacija A i B. Skup svih Boolovih relacija između I i J označićemo sa $\mathcal{BR}(I,J)$.

Inverzna relacija težinske relacije $A\in S^{I\times J}$ je težinska relacija $A^t \in S^{J\times I}$ definisana sa

$$A^t(j,i) = A(i,j), \quad \text{za sve } i\in I \text{ i } j\in J, \tag{4.10}$$

odnosno ako na $A \in S^{I\times J}$ gledamo kao na matricu, onda je $A^t \in S^{J\times I}$ upravo transponovana matrica.

Lema 4.3. *Neka su I, J i K neprazni konačni skupovi, i neka su $A \in S^{I\times J}$ i $B \in S^{J\times K}$ težinske relacije. Ako svaki element od* $\mathrm{Im}(A)$ *komutira sa svakim elementom od* $\mathrm{Im}(B)$*, onda je*

$$(A \circ B)^t = B^t \circ A^t. \tag{4.11}$$

Dokaz. Za proizvoljne $i \in I$ i $k \in K$ važi

$$\begin{aligned}(A \circ B)^t(k,i) &= (A\circ B)(i,k) = \sum_{j\in J} A(i,j)B(j,k) = \sum_{j\in J} B(j,k)A(i,j)\\ &= \sum_{j\in J} B^t(k,j)A^t(j,i) = (B^t \circ A^t)(k,i).\end{aligned}$$

Prema tome, važi (4.11). □

Posledica 4.1. *Neka su I, J, K i L neprazni konačni skupovi, $A_1 \in \mathcal{BR}(I,J)$ i $A_2 \in \mathcal{BR}(K,L)$ su Booleove relacije i neka je $A \in S^{J\times K}$ težinska relacija. Tada je*

$$(A_1 \circ A)^t = A^t \circ A_1^t \tag{4.12}$$

$$(A \circ A_2)^t = A_2^t \circ A^t \tag{4.13}$$

Dokaz. Booleove relacije uzimaju vrednosti u skupu $\{0,1\}$, a nula 0 i jedinica 1 komutiraju sa svim elementima poluprstena S. □

Sada ćemo uvesti koncept težinske ekvivalencije i težinskog kvazi uređenja.

U daljem tekstu, neka je I neprazan konačan skup. Težinska relacija E na skupu I nad S je

(R) *refleksivna* ako je $E(i,i) = 1$, za svako $i \in I$;

(S) *simetrična* ako je $E(i,j) = E(j,i)$, za sve $i,j \in I$;

(T) *tranzitivna* ako je $E(i,j)E(j,k) \leqslant E(i,k)$, za sve $i,j,k \in I$.

Težinska relacija na I koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna naziva se *težinska ekvivalencija* ili *težinska relacija ekvivalencije*, dok se težinska relacija na I koja je refleksivna i tranzitivna naziva *težinsko kvazi-uređenje*.

Teorema 4.1. *Neka je E težinska ekvivalencija na I. Tada*

(R) *E je refleksivna ako i samo ako je $\Delta \leqslant E$;*

(S) *E je simetrična ako i samo ako je $E^t = E$;*

(T) *E je tranzitivna ako i samo ako je $E \circ E \leqslant E$.*

Dokaz. (T) Ako je $E(i,j)E(j,k) \leqslant E(i,k)$, za sve $i,j,k \in I$, onda je $\sum_{j\in I} E(i,j)E(j,k) \leqslant E(i,k)$, za sve $i,k \in I$, pa je $(E \circ E)(i,k) \leqslant E(i,k)$, za sve $i,k \in I$, odnosno $E \circ E \leqslant E$. Sa druge strane, ako je $E \circ E \leqslant E$, onda za proizvoljne $i,j,k \in I$ važi $E(i,j)E(j,k) \leqslant \sum_{l\in I} E(i,l)E(l,k) = (E \circ E)(i,k) \leqslant E(i,k)$. □

Teorema 4.2. *Neka su A i B težinska kvazi uređenja nad I. Tada*

$$A \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad A \circ B = B \circ A = B.$$

Dokaz. Ako je $A \leqslant B$, onda iz tranzitivnosti težinske relacije B imamo da je $A \circ B \leqslant B \circ B \leqslant B$, a iz refleksivnosti težinske relacije A, za $i,k \in I$ imamo da je $B(i,k) = A(i,i)B(i,k) \leqslant \sum_{j\in I} A(i,j)B(j,k) = (A \circ B)(i,k)$, odnosno $B \leqslant A \circ B$. Dakle, $B = A \circ B$, i slično se dokazuje da je $B = B \circ A$.

Obratno, ako je $A \circ B = B \circ A = B$, onda iz refleksivnosti težinske relacije B imamo da je $A \leqslant A \circ B = B$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Posledica 4.2. *Neka je A proizvoljno težinsko kvazi-uređenje na I. Tada je $A \circ A = A$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 4.2, iz $A \leqslant A$ sledi $A \circ A = A$. □

Za težinsku ekvivalenciju E na I i $i \in I$, definišemo težinski podskup E_i od I sa:

$$E_i(x) = E(i,x), \quad \text{za svako} \;\; x \in I.$$

Težinski podskup E_i nazivamo *klasom ekvivalencije* od E određene sa i. Skup $A/E = \{E_i \,|\, i \in I\}$ se naziva *faktor skup* od A u odnosu na E. Kardinalnost faktor skupa A/E, i oznaci $\mathrm{ind}(E)$, naziva se *indeks* od E.

Lema 4.4. *Neka je E težinska ekvivalencija na skupu I. Tada, za sve $i, j \in I$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $E(i, j) = 1$;

(ii) $E_i = E_j$;

(iii) $E(i, x) = E(j, x)$, *za svako* $x \in A$

Dokaz. Jasno je da (iii)⇒(ii)⇒(i). Dokažimo (i)⇒(iii). Neka su $i, j \in I$. Tada za proizvoljan $x \in I$ važi $E(i, x) = E(i, x)E(i, j) = E(x, i)E(i, j) \leqslant (E \circ E)(x, j) = E(x, j) = E(j, x)$. □

4.2 Relacijske nejednačine nad max-plus algebrom

Sistemi max-linearnih matričnih jednačina istraživani su još u prvim radovima u kojima se razmatra max-plus struktura. U mnogim publikacijama, posmatraju se sistemi jednačina kod kojih se nepoznata matrica nalazi na jednoj strani (videti [49, 192, 210, 26]). Još neki sistemi specijalnog oblika proučavani su u [5]. Drugim rečima, koristeći redom oznake $\oplus$ i $\circ$ za sabiranje i množenje matrica nad max-plus algebrom, izučavani su sistemi sledećih oblika: $A \circ x = b$, $A \circ x = x$ ili $A \circ x = x \oplus b$, gde je A data matrica, b je dati vektor, a x je nepoznati vektor. Ovi sistemi matričnih jednačina izučavani su uporedo sa odgovarajućim sistemima matričnih nejednačina. Na primer, pokazano je da max-linearna nejednačina $A \circ x \leqslant b$ uvek ima najveće rešenje, koje se naziva glavno rešenje, i da ovo glavno rešenje jeste i rešenje jednačine $A \circ x = b$ ako i samo ako je ta jednačina rešiva [49]. Generalizacije jednostranih sistema na beskonačno-dimenzione matrice date su u [2].

Opšti dvostrani max-linearni sistemi jednačina, odnosno sistemi oblika $A \circ x = B \circ y$, gde su A i B date matrice, su proučavani u [25, 52, 53, 195]. Opšti metod za rešavanje ovih sisitema je prezentovan u [195], dok je u [52] dat pseudopolinomijalni algoritam, nazvan *alternirajući algoritam*, za nalaženje rešenja ovih sistema. U [25] je pokazano da je skup svih rešenja dvostranog sistema generisan konačnim skupom vektora. U [53] predložen je opšti iterativni metod za nalaženje onih rešenja dvostranog sistema koja su sa donje i gornje strane ograničena datim matricama. Sistemi oblika $A \circ x = B \circ x$ su nedavno proučavani u [28, 4].

U ovom poglavlju biće izučavani heterogeni slabo linearni sistemi matričnih nejednačina nad max-plus algebrom, koje ćemo ovde nazivati slabo linearnim sistemima relacijskih nejednačina. Na ove sisteme biće primenjena metodologija koju smo koristili za nalaženje najvećih rešenja odgovarajućih sistema fazi relacijskih nejednačina, odnosno, rešenja slabo linearnih sistema relacijskih nejednačina predstavićemo kao post-fiksne tačke izvesnih izotonih funkcija na mreži težinskih relacija, i potom pomoću ovih funkcija, daćemo algoritam za izračunavanje najvećih rešenja ovih sistema. Najpre, daćemo definiciju max-plus algebre.

Max-plus algebra se sastoji iz skupa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ i operacija definisanih sa

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{i} \quad a \otimes b = a + b, \tag{4.14}$$

za sve $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Operacije $\oplus$ (*aditivna operacija*) i $\otimes$ (*multiplikativna operacija*) jesu asocijativne i komutativne, pri čemu je aditivna operacija još i idempotentna, i multiplikativna operacija je distributivna u odnosu na aditivnu operaciju. Aditivni i multiplikativni neutrali su $\varepsilon = -\infty$ i $e = 0$, redom, i ε je absorbtivni element, tj. $a \otimes \varepsilon = \varepsilon$, za svako $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ako je $x \neq \varepsilon$, onda postoji jedinstven element y takav da je $x \otimes y = e$, tj. za svaki $x \neq \varepsilon$ postoji multiplikativni inverz. Međutim, idempotentnost operacije $\oplus$ povlači da nijedan $x \neq \varepsilon$ nema aditivni inverz. Dakle, $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ je aditivno idempotentan komutativan poluprsten.

Na prirodan način se operacije $\oplus$ i $\otimes$ mogu produžiti na skup $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$, pri čemu je po definiciji

$$-\infty + (+\infty) = -\infty = +\infty + (-\infty),$$

i struktura $(\overline{\overline{\mathbb{R}}}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ je kompletan poluprsten. Operacije $\oplus'$ i $\otimes'$ na skupu $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ definišu se na sledeći način

$$a \oplus' b = \min(a, b) \tag{4.15}$$

$$a \otimes' b = a + b, \quad \text{ako je } \{a, b\} \neq \{-\infty, +\infty\}, \tag{4.16}$$

$$(-\infty) \otimes' (+\infty) = +\infty = (+\infty) \otimes' (-\infty), \tag{4.17}$$

su *dualne operacije* operacija $\oplus$ i $\otimes$, redom, odnosno struktura $(\overline{\overline{\mathbb{R}}}, \oplus, \otimes, \oplus', \otimes')$ je samodualna i operacije $\otimes$ i $\otimes'$ se razlikuju jedino u

$$-\infty \otimes +\infty = -\infty, \quad -\infty \otimes' +\infty = +\infty. \tag{4.18}$$

Na standardan način se operacije $\oplus$ i $\otimes$ produžuju na sabiranje i množenje težinskih relacija nad max-plus algebrom. Naime, ako su $A, B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$, za neke $n, m \in \mathbb{N}$ onda je

$$(A \oplus B)(i,j) = A(i,j) \oplus B(i,j) = \max(A(i,j), B(i,j)), \tag{4.19}$$

a ako je $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times p}$ i $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{p\times m}$, za neke $n, m, p \in \mathbb{N}$, onda je

$$(A \circ B)(i,j) = \sum_{k\in[1,p]}^{\oplus} A(i,k) \otimes B(k,j) = \max_{k\in[1,p]}(A(i,k) + B(k,j)), \tag{4.20}$$

i dualno je

$$(A \circ' B)(i,j) = \sum_{k\in[1,p]}^{\oplus'} A(i,k) \otimes' B(k,j) = \min_{k\in[1,p]}(A(i,k) + B(k,j)). \tag{4.21}$$

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$.

Za $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ težinska relacija $A^* \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ data sa $A^* = -A^t$ naziva se *konjugovana težinska relacija* od A, pri čemu sa A^t standardno označavamo transponovanu težinsku relaciju težinske relacije A.

Težinska relacija $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$ je *dvostruko* $\mathbb{R}$*-astična* ako u svakoj vrsti i u svakoj koloni ima bar po jedan konačan element, tj. ako je

$$\sum_{k\in[1,m]}^{\oplus} A(i,k) \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \sum_{k\in[1,n]}^{\oplus} A(k,j) \in \mathbb{R}, \tag{4.22}$$

za sve $i \in [1,n]$, $j \in [1,m]$.

Za $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$ i $b \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times 1}$, relacijska nejednačina $A \circ x \leqslant b$, gde je $x \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times 1}$ nepoznati težinski podskup, uvek ima rešenje. Njeno najveće rešenje je $x = A^* \otimes' b$ i naziva se *glavno rešenje.* Ako je A dvostruko $\mathbb{R}$-astična težinska relacija i b je konačan težinski podskup, onda je i glavno rešenje konačno. Drugim rečima, glavno rešenje se računa nad $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ ali se nalazi u $\overline{\mathbb{R}}$. Iz metodoloških razloga, nadalje ćemo raditi sa težinskim relacijama nad $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$, imajući u vidu da su svi proizvodi i sve sume dvostruko $\mathbb{R}$-astičnih težinskih relacija takođe dvostruko $\mathbb{R}$-astične težinske relacije.

Takođe, važi i sledeće. Glavno rešenje linearne relacijske nejednačine $A \circ x \leqslant b$ jeste i najveće rešenje linearne relacijske jednačine $A \circ x = b$ ako i samo ako ta jednačina ima rešenja.

Neka su $n, m, p \in \mathbb{N}$. Za date težinske relacije $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times p}$ i $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ i nepoznatu težinsku relaciju $X \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{p\times m}$, relacijska nejednačina

$$A \circ X \leqslant B, \tag{4.23}$$

ekvivalentna je sistemu relacijskih nejednačina

$$A \circ X_k \leqslant B_k, \quad k \in [1, m], \tag{4.24}$$

pri čemu X_k i B_k ($k \in [1, m]$) označavaju k-te kolone od X i B, tim redom. Dakle, $A^* \circ' B$ je najveće rešenje relacijske nejednačine (4.23).

Dualnim razmatranjem dolazimo do sledećeg. Neka su $n, m, q \in \mathbb{N}$. Za proizvoljne težinske relacije $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ i $C \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{q\times m}$, i nepoznatu težinsku relaciju $Y \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{q\times n}$, najveće rešenje relacijske nejednačine

$$Y \circ B \leqslant C \tag{4.25}$$

je težinska relacija $C \circ' B^*$ (videti [48, 49]).

Neka su $n, m, p, q \in \mathbb{N}$. Za proizvoljne težinske relacije $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times p}$, $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ i $C \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{q\times m}$ jednostavno se proverava da važi

$$A \circ (A^* \circ' B) \leqslant B \quad \text{i} \quad (C \circ' B^*) \circ B \leqslant C. \tag{4.26}$$

Štaviše, važi sledeća lema.

Lema 4.5. *Neka su $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, i neka su $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times p}$, $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ i $C \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{q\times m}$ proizvoljne težinske relacije. Tada:*

(a) *Skup svih rešenja relacijske nejednačine $A \circ X \leqslant B$, gde je $X \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{p\times m}$ nepoznata težinska relacija, jeste glavni ideal gornje polumreže $(\overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times p}, \leqslant)$ generisan sa $A^* \circ' B$.*

(b) *Skup svih rešenja relacijske nejednačine $Y \circ B \leqslant C$, gde je $Y \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{q\times n}$ nepoznata težinska relacija, jeste glavni ideal gornje polumreže $(\overline{\overline{\mathbb{R}}}^{q\times n}, \leqslant)$ generisan sa $C \circ' B^*$.*

Dokaz. (a) Za težinsku relaciju $Z \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{p\times m}$ koja je rešenje relacijske nejednačine $A \circ X \leqslant B$ važi da je $Z \leqslant A^* \circ' B$ jer je $A^* \circ' B$ njeno najveće rešenje.

Sa druge strane, za proizvoljnu težinsku relaciju $Z \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{p\times m}$, iz kompatibilnosti množenja težinskih relacija sa relacijom uređenja težinskih relacija, dobijamo da $Z \leqslant A^* \circ' B$ povlači $A \circ Z \leqslant A \circ (A^* \circ' B) \leqslant B$, pa Z jeste rešenje relacijske nejednačine $A \otimes X \leqslant B$.

(b) Ovo tvrđenje se dokazuje dualno tvrđenju (a). □

Neka je $n \in \mathbb{N}$, i neka je $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ težinska relacija. Tada relacijska nejednačina $A \circ X \leqslant X \circ A$, gde je $X \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ nepoznata težinska relacija, uvek ima rešenje. Njeno trivijalno rešenje je jedinična težinska relacija I_n, i za svako $r \in \mathbb{R}$, težinska relacija $r \circ I_n$ je njeno netrivijalno rešenje. Štaviše, za proizvoljno rešenje R ove nejednačine i $r > 0$, $r \circ R$ je rešenje koje je strogo veće od R. Relacijske nejednačine ovog tipa ispitivao je A. Stamenković u [188], i u tom radu prikazan je algoritam za izračunavanje najvećeg rešenja ove nejednačine koje je sadržano u datoj matrici, odnosno koje je odozgo ograničeno datom matricom. Nejednačine oblika $A \circ X \leqslant X \circ A$ i $X \circ A \leqslant A \circ X$ nazivaćemo *homogenim slabo linearnim nejednačinama.*

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, i neka su $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ i $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times m}$ date težinske relacije. Posmatraćemo sledeće relacijske nejednačine:

$$A \circ X \leqslant X \circ B, \tag{4.27}$$

pri čemu je $X \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ nepoznata težinska relacija, i

$$Y \circ A \leqslant B \circ Y, \tag{4.28}$$

pri čemu je $Y \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ nepoznata težinska relacija.

Nejednačine (4.27) i (4.28) nazivačemo *heterogene slabo linearne nejednačine.*

Lema 4.6. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, i neka su $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ i $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times m}$ date težinske relacije. Tada težinska relacija $R \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ jeste rešenje nejednačine (4.28) ako i samo ako je R^t rešenje nejednačine*

$$A^t \circ X \leqslant X \circ B^t,$$

gde je $X \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ nepoznata težinska relacija.

Dokaz. Transponovanjem leve i desne strane relacijske nejednačine (4.28) dobija se relacijska nejednačina $A^t \circ Y^t \leqslant Y^t \circ B^t$, i obratno. □

Nejednačina uvedena u prethodnij lemi naziva se *reverzna relacijska nejednačina* nejednačine (4.28). U svetlu prethodne leme, za svako tvrđenje koje univerzalno važi za relacijsku nejednačinu (4.27) postoji odgovarajuće tvrđenje koje univerzalno važi za relacijsku nejednačinu (4.28).

Rešenja relacijskih nejednačina (4.27) i (4.28) predstavićemo kao post-fiksne tačke izvesnih izotonih funkcija.

Za date $n, m \in \mathbb{N}$ i težinske relacije $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ i $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times m}$ neka je funkcija $\Phi_{A,B} : \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m} \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ definisana na sledeći način:

$$\Phi_{A,B}(C) = A^* \circ' (C \circ B), \tag{4.29}$$

za svako $C \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$.

Teorema 4.3. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, i neka su $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$, $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times m}$, $R \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ i $S \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ težinske relacije. Tada važi:*

(a) *težinska relacija R je rešenje relacijske nejednačine (4.27) ako i samo ako je $R \leqslant \Phi_{A,B}(R)$.*

(b) *težinska relacija S je rešenje relacijske nejednačine (4.28) ako i samo ako je $S^t \leqslant \Phi_{A^t,B^t}(S^t)$.*

Dokaz. (a) Za težinsku relaciju R važi $A \otimes R \leqslant R \otimes B$ ako i samo ako je

$$A(i,k) \otimes R(k,j) \leqslant (R \circ B)(i,j), \quad \text{za sve } i,k \in [1,n],\ j \in [1,m],$$

odnosno ako i samo ako je

$$R(k,j) \leqslant A^*(k,i) \otimes' (R \circ B)(i,j), \quad \text{za sve } i,k \in [1,n],\ j \in [1,m],$$

što je ekvivalentno sa

$$R(k,j) \leqslant \sum_{i\in[1,n]}^{\oplus'} A^*(k,i) \otimes' (R \circ B)(i,j), \quad \text{za sve } \ k \in [1,n],\ j \in [1,m],$$

tj. ekvivalentno je sa

$$R(k,j) \leqslant [A \circ' (R \circ B)](k,j), \quad \text{za sve } \ k \in [1,n],\ j \in [1,m],$$

Dakle, težinska relacija R zadovoljava uslov (4.27) ako i samo ako važi $R \leqslant \Phi_{A,B}(R)$.

(b) Slično kao kod dokaza tvrđenja (a) ove teoreme, može se pokazati da je težinska relacija S rešenje relacijske nejednačine (4.28) ako i samo ako je $S \leqslant (B \circ S) \otimes' A^*$, odnosno ako i samo ako je

$$S^t \leqslant [(B \circ S) \circ' A^*]^t = (A^*)^t \circ' (B \circ S)^t = (A^t)^* \circ' (S^t \circ B^t) = \Phi_{A^t, B^t}(S^t).$$

□

Teorema 4.4. *Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, i neka su $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n \times n}$, $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m \times m}$ težinske relacije. Tada je funkcija $\Phi_{A,B}$ definisana relacijom* (4.29) *izotona.*

Dokaz. Neka su težinske relacije $R_1, R_2 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n \times m}$ takve da je $R_1 \leqslant R_2$. Tada važi $R_1 \circ B \leqslant R_2 \circ B$, tj. $A^* \circ' (R_1 \circ B) \leqslant A^* \circ' (R_2 \circ B)$, odnosno $\Phi_{A,B}(R_1) \leqslant \Phi_{A,B}(R_2)$. Dakle, funkcija $\phi_{A,B}$ je izotona. □

4.3 Slabo linearni sistemi nad max-plus algebrom

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, neka su $\{A_i \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n \times n} \mid i \in I\}$ i $\{B_i \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m \times m} \mid i \in I\}$ neprazne familije težinskih relacija i neka je $V \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n \times m}$. Posmatrajmo sledeće sisteme relacijskih nejednačina:

$$A_i \circ X \leqslant X \circ B_i \qquad (i \in I), \qquad X \leqslant V\,; \tag{S_1}$$

$$X^t \circ A_i \leqslant B_i \circ X^t \qquad (i \in I), \qquad X \leqslant V\,; \tag{S_2}$$

$$A_i \circ X \leqslant X \circ B_i, \qquad B_i \circ X^t \leqslant U^t \circ A_i \qquad (i \in I), \qquad X \leqslant V; \tag{S_3}$$

$$X^t \circ A_i \leqslant B_i \circ X^t, \qquad X \circ B_i \leqslant A_i \circ X \qquad (i \in I), \qquad X \leqslant V; \tag{S_4}$$

$$A_i \circ X = X \circ B_i \qquad (i \in I), \qquad X \leqslant V; \tag{S_5}$$

$$X^t \circ A_i = B_i \circ X^t \qquad (i \in I), \qquad X \leqslant V; \tag{S_6}$$

gde je $X \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n \times m}$ nepoznata težinska relacija. Sistemi (S_1)–(S_6) će biti nazvani *heterogeni slabo linearni sistemi*. Za svaki $s \in \{1, \ldots, 6\}$, za sistem (S_s) takođe ćemo koristiti oznaku $S_s(n, m, I, A_i, B_i, V)$.

U slučaju da je $A_i = B_i$, za svako $i \in I$, onda sistem $S_s(n, n, I, A_i, A_i, V)$ označavamo kratko sa $S_s(n, I, A_i, V)$, i nazivamo *homogeni slabo linearni sistem*. Homogene slabo linearne sisteme matričnih nejednačina nad max-plus algebrom proučavao je A. Stamenković [188], pa njih ovde nećemo posebno tretirati.

Jednostavno se proverava da važe sledeće propozicije.

Propozicija 4.1. *Neka su* $n, m \in \mathbb{N}$, *neka su* $\{A_i \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n} \mid i \in I\}$ *i* $\{B_i \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times m} \mid i \in I\}$ *neprazne familije težinskih relacija i neka je* $V \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$. *Za proizvoljnu težinsku relaciju* $R \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ *važi:*

(a) *R je rešenje sistema $S_1(n, m, I, A_i, B_i, V)$ ako i samo ako je i rešenje sistema $S_2(n, m, I, A_i^t, B_i^t, V)$;*

(b) *R je rešenje sistema $S_3(n, m, I, A_i, B_i, V)$ ako i samo ako je i rešenje sistema $S_4(n, m, I, A_i^t, B_i^t, V)$;*

(c) *R je rešenje sistema $S_5(n, m, I, A_i, B_i, V)$ ako i samo ako je i rešenje sistema $S_6(n, m, I, A_i^t, B_i^t, V)$;*

(d) *R je rešenje sistema $S_3(n, m, I, A_i, B_i, V)$ ako i samo ako je R^t rešenje sistema $S_4(m, n, I, B_i, A_i, V)$.*

Propozicija 4.2. *Neka su* $n, m, p \in \mathbb{N}$, *i neka su* $R \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times p}$ *i* $S \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{p\times m}$ *težinske relacije takve da je R rešenje sistema $S_3(n, p, I, A_i, B_i, V)$ i S je rešenje sistema $S_3(p, m, I, B_i, C_i, W)$. Tada je $R \circ S$ rešenje sistema $S_3(n, m, I, A_i, C_i, V \circ W)$.*

Problem nalaženja najvećih rešenja sistema (S_s), za $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ prevešćemo na problem nalaženja najvećih post-fiksnih tački izvesnih izotonih funkcija na mreži težinskih relacija. Iz tog razloga, sisteme (S_s), za $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, predstavićemo u ekvivalentnom obliku.

Za $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, neka je $\phi_s : \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m} \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ funkcija definisana na sledeći način:

$$\Phi_1(R) = \sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i,B_i}(R) \tag{4.30}$$

$$\Phi_2(R) = \sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i^t,B_i^t}(R) \tag{4.31}$$

$$\Phi_3(R) = \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i,B_i}(R) \right] \oplus' \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{B_i,A_i}(R^t) \right]^t \tag{4.32}$$

$$\Phi_4(R) = \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i^t,B_i^t}(R) \right] \oplus' \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{B_i^t,A_i^t}(R^t) \right]^t \tag{4.33}$$

$$\Phi_5(R) = \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i,B_i}(R) \right] \oplus' \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{B_i^t,A_i^t}(R^t) \right]^t \tag{4.34}$$

$$\Phi_6(R) = \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i^t,B_i^t}(R) \right] \oplus' \left[\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{B_i,A_i}(R^t) \right]^t \tag{4.35}$$

za sve $R \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$.

Sada će biti formulisana i dokazana sledeća teorema.

Teorema 4.5. *Za svaki $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, sistem (S_s) je ekvivalentan sistemu*

$$X \leqslant \Phi_s(X), \qquad X \leqslant V.$$

Dokaz. Za svaki $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, tvrđenje sledi iz Teorema 4.3 i 4.4 i definicije funkcije Φ_s. □

4.4 Izračunavanje najvećih rešenja

U ovom poglavlju ćemo dati algoritam za konstrukciju najvećih rešenja relacijskih sistema (S_s), za $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Teorema 4.6. *Za svaki $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, funkcija Φ_s je izotona i ako je I konačan skup onda je Φ_s image-lokalizovana funkcija.*

Dokaz. Dokazaćemo slučaj $s = 1$. Dualno se dokazuje slučaj $s = 2$, dok svi ostali slučajevi slede iz ova dva.

Neka su težinske relacije $R_1, R_2 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ takve da je $R_1 \leqslant R_2$. Tada za svaki $i \in I$, iz Teoreme 4.4 važi $\Phi_{A_i,B_i}(R_1) \leqslant \Phi_{A_i,B_i}(R_2)$. Otuda je $\sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i,B_i}(R_1) \leqslant \sum_{i\in I}^{\oplus'} \Phi_{A_i,B_i}(R_2)$, odnosno $\Phi_1(R_1) \leqslant \Phi_1(R_2)$. Dakle, funkcija Φ_1 je izotona.

Dalje, pretpostavimo da je I konačan skup. Neka je

$$K = \bigcup_{i \in I} (\mathrm{Im}(A_i) \cup \mathrm{Im}(B_i))\,.$$

Tada, za proizvoljnu težinsku relaciju $R \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ važi $\mathrm{Im}(\Phi_1(R)) \subseteq \langle K \cup \mathrm{Im}(R)\rangle$. Jasno, skup K je konačan (jer je I konačan skup), pa je funkcija Φ_1 image-lokalizovana. $\square$

Neka je $V \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ data težinska relacija. Za $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, neka je $\Phi = \Phi_s$. Tada, niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ težinskih relacija iz $\overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ definišemo na sledeći način:

$$R_1 = V, \qquad R_{k+1} = R_k \oplus' \Phi(R_k), \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}. \tag{4.36}$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 4.7. *Neka je I konačan skup i neka je $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz težinskih relacija iz $\overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ definisan sa* (4.36)*. Ako je $\langle \mathrm{Im}\, V \cup \bigcup_{i\in I}(\mathrm{Im}(A_i) \cup \mathrm{Im}(B_i))\rangle$ konačna podalgebra od $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$, tada važi sledeće:*

(*a*) *niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je konačan i opadajući, i postoji najmanji prirodan broj k takav da je $R_k = R_{k+1}$;*

(*b*) *R_k je najveće rešenje sistema (S_s).*

Dokaz. (*a*) Slično kao u dokazu Teoreme 2.5, može se proveriti da je je niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je konačan i opadajući, i da postoji najmanji prirodan broj k takav da je $R_k = R_{k+1}$.

(*b*) Kako je $R_k = R_{k+1} = R_k \circ' \Phi_1(R_k)$, to je $R_k \leqslant \Phi_1(R_k)$. Takođe je $R_k \leqslant R_1 = V$, pa prema Teoremi 4.5 sledi da je R_k rešenje sistema (S_1).

Sa druge strane, ako je R proizvoljno rešenje sistema (S_1), tada imamo da je $R \leqslant V$. Neka je $R \leqslant R_n$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljan $i \in I$ tada imamo da je $A_i \circ R \leqslant R \circ B_i \leqslant R_n \circ B_i$, odnosno važi $R \leqslant A_i^* \circ' (R_n \circ B_i)$, tj., važi $R_n \leqslant \Phi_{A_i,B_i}(R_n)$. Otuda je $R \leqslant \Phi_1(R_n)$, pa je $R \leqslant R_n \oplus' \Phi_1(R_n) = R_{n+1}$. Sada, na osnovu principa matematičke indukcije, možemo zaključiti da je $R \leqslant R_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je $R \leqslant R_k$.

Dakle, R_k je najveće rešenje sistema (S_1). $\square$

Teorema 4.8. *Neka je* $\Phi = \Phi_s$, *za neki* $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. *Neka je* $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *niz težinskih relacija iz* $\overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ *definisan sa* (4.36). *Tada težinska relacija*

$$R = \sum_{k\in\mathbb{N}}^{\oplus'} R_k \tag{4.37}$$

jeste najveće rešenje sistema (S_s).

Dokaz. Dokazaćemo slučaj $s = 1$. Ostali slučajevi se dokazuju slično. Neka je $i \in I$ i $k \in \mathbb{N}$. Tada važi

$$R \leqslant R_{k+1} \leqslant \Phi(R_k) \leqslant \Phi_{A_i,B_i}(R_k) = A_i^* \circ' (R_k \circ B_i).$$

Dalje, na osnovu nejednakosti (4.26) važi

$$A_i \circ R \leqslant A_i \circ [A_i^* \circ' (R_k \circ B_i)] \leqslant R_k \circ B_i.$$

Kako poslednja nejednakost važi za svaki $k \in \mathbb{N}$, to je

$$A_i \circ R \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}}^{\oplus'} (R_k \circ B_i)$$

Dalje, kako je niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opadajući, to je

$$A_i \circ R \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\oplus'} R_k \right) \circ B_i = R \circ B_i,$$

pa je R je rešenje sistema (S_1).

Sa druge strane, ako je T proizvoljno rešenje sistema (S_1), onda je $T \leqslant \Phi(T)$ i $T \leqslant V = R_1$. Dalje se indukcijom jednostavno može pokazati da je $T \leqslant R_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa je stoga $T \leqslant R$. Dakle, R je najveće rešenje sistema (S_1). □

Sledeća teorema kaže da ako sistem (S_s), za $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, ima bar jedno konačno rešenje, onda je i najveće rešenje tog sistema konačno.

Teorema 4.9. *Neka je* V *težinska relacija iz* $\overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$. *Tada, za svaki* $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, *najveće rešenje* R *sistema* (S_s) *jeste težinska relacija iz* $\overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$. *Štaviše, ako sistem* (S_s) *ima bar jedno rešenje koje je težinska relacija iz* $\mathbb{R}^{n\times m}$, *onda je i* R *težinska relacija iz* $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Dokaz. Jasno da ako $V \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$, iz $R \leqslant V$ sledi $R \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$. Za svaki $s \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, ako sistem (S_s) ima bar jedno rešenje $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, onda je $T \leqslant R$, pa $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$. $\square$

Glava 5

Bisimulacije težinskih automata

Težinski automati su klasični nedeterministički automati kod kojih su prelazima pridružene težine. Ove težine mogu modelrati, na primer, cenu, odnosno iznos sredstava ili vreme koji su potrebni za izvršenje prelaza, ili verovatnoću i pouzdanost uspešnog izvršenja prelaza, i dr.

Ponašanje (engl. behavior) konačnih težinskih automata može se sagledati kao funkcija koja svakoj reči pridružuje težinu njenog izvršenja, odnosno kao pogodno definisano preslikavanje slobodnog monoida u poluprsten, koje se naziva *formalni stepeni red*.

Imajući u vidu da se konačni težinski automati, kao i njihova ponašanja, definišu pomoću matrica i formalnih stepenih redova, to se u teoriji težinskih automata koriste mnoge metode linearne algebre nad poluprstenima.

Ako se metode bazirane na fazi relacijama, razvijene u okviru teorije fazi automata, pokušaju primeniti na težinske automate, javlja se niz problema, uglavnom uzrokovanih činjenicom da poluprsten iz koga se uzimaju težine, ne mora biti uređen i skup $\{0,1\}$ ne mora činiti podpoluprsten. Ovi problemi se mogu prevazići ako težine uzimaju vrednosti u aditivno idempotentnom poluprstenu. U tom slučaju se matrice sa vrednostima u $\{0,1\}$ mogu smatrati dvovrednosnim relacijama.

Struktura glave je sledeća. U poglavlju 5.1, definisane su simulacije i bisimulacije težinskih automata po ugledu odgovarajuće koncepte simulacija i bisimulacija fazi automata. U poglavlju 5.2 data je konstrukcija najvećih simulacija i bisimulacija težinskih automata. U poglavlju 5.3 razmatraju se bisimulacione relacije ekvivalencije. U poglavlju 5.4 se dovode u vezu bisimulacije sa uniformnim relacijama.

5.1 Simulacije i bisimulacije težinskih automata

U ovom poglavlju uvešćemo koncept simulacija i bisimulacija težinskih automata po ugledu na odgovarajuće koncepte u slučaju fazi automata. Suštinska razlika u ovim konceptima kod fazi i težinskih automata je u tome što simulacije i bisimulacije fazi automata jesu fazi relacije, dok kod težinskih automata simulacije i bisimulacije će biti Boolove relacije.

Najpre ćemo dati definicije dva tipa simulacija i četiri tipa bisimulacija.

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati nad (konačnim) alfabetom X čije težinske funkcije prelaza i težinske funkcije inicijalnih i završnih stanja uzimaju vrednosti u aditivno idempotentnom poluprstenu S. Neka je φ neprazna Boolova relacija između skupova A i B.

Relacija φ je *direktna simulacija* ako zadovoljava

$$\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^t, \tag{fs-1}$$
$$\varphi^t \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^t, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{fs-2}$$
$$\varphi^t \circ \tau^A \leqslant \tau^B, \tag{fs-3}$$

i *povratna simulacija* ako zadovoljava

$$\tau^A \leqslant \varphi \circ \tau^B, \tag{bs-1}$$
$$\delta_x^A \circ \varphi \leqslant \varphi \circ \delta_x^B, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{bs-2}$$
$$\sigma^A \circ \varphi \leqslant \sigma^B. \tag{bs-3}$$

Dalje, φ *direktna bisimulacija* ako su i φ i φ^t direktne simulacije, tj. ako φ zadovoljava

$$\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^t, \qquad \sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi, \tag{fb-1}$$
$$\varphi^t \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^t, \quad \varphi \circ \delta_x^B \leqslant \delta_x^A \circ \varphi, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{fb-2}$$
$$\varphi^t \circ \tau^A \leqslant \tau^B, \qquad \varphi \circ \tau^B \leqslant \tau^A, \tag{fb-3}$$

i *povratna bisimulacija*, ako su i φ i φ^t povratne simulacije, tj. ako φ zadovoljava

$$\tau^A \leqslant \varphi \circ \tau^B, \qquad \tau^B \leqslant \varphi^t \circ \tau^A, \tag{bb-1}$$
$$\delta_x^A \circ \varphi \leqslant \varphi \circ \delta_x^B, \quad \delta_x^B \circ \varphi^t \leqslant \varphi^t \circ \delta_x^A, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{bb-2}$$
$$\sigma^A \circ \varphi \leqslant \sigma^B, \qquad \sigma^B \circ \varphi^t \leqslant \sigma^A. \tag{bb-3}$$

Takođe, ako je φ direktna simulacija i φ^t je povratna simulacija, tj. ako φ zadovoljava

$$\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^t, \qquad \tau^B \leqslant \varphi^t \circ \tau^A, \tag{fbb-1}$$
$$\varphi^t \circ \delta_x^A = \delta_x^B \circ \varphi^t, \qquad \text{za svaki } x \in X, \tag{fbb-2}$$
$$\sigma^B \circ \varphi^t \leqslant \sigma^A, \qquad \varphi^t \circ \tau^A \leqslant \tau^B, \tag{fbb-3}$$

onda je φ *direktno-povratna bisimulacija*, a ako je φ povratna simulacija i φ^t je direktna simulacija, tj. ako

$$\sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi, \qquad \tau^A \leqslant \varphi \circ \tau^B, \tag{bfb-1}$$
$$\delta_x^A \circ \varphi = \varphi \circ \delta_x^B, \qquad \text{za svako } x \in X, \tag{bfb-2}$$
$$\sigma^A \circ \varphi \leqslant \sigma^B \qquad \varphi \circ \tau^B \leqslant \tau^A. \tag{bfb-3}$$

onda je φ *povratno-direktna bisimulacija*.

I ovde ćemo radi jednostavnijeg izražavanja govoriti da je φ *simulacija* ako je φ ili direktna ili povratna simulacija, i da je *bisimulacija* ako je φ jedna od prethodno uvedena četiri tipa bisimulacija. Takođe, direktne i povratne bisimulacije nazivaćemo *homotipnim* (*istorodnim*), dok ćemo direktno-povratne i povratno-direktne bisimulacije nazivati *heterotipnim* (*raznorodnim*).

Simulacije i bisimulacije (raznih vrsta automata) proučavane su radovima [146, 147, 171, 23, 98, 141], ali se više-manje ovi koncepti razlikuju od koncepta simulacija i bisimulacija koje proučavamo u ovoj disertaciji. Dosta sličniji koncept proučavan je u [22] i [99, 100] (za tree-automate). U kontekstu težinskih automata, povratno-direktne bisimulacije su proučavane u [9, 10, 11, 19, 23, 76, 77].

Slično kao u slučaju fazi automata i kod težinskih automata može se pokazati da za $w \in \{fs, bs, fb, bb, fbb, bfb\}$, ako uslov ($w$-2) važi za svako slovo $x \in X$, onda on važi i ako slovo x zamenimo proizvoljnom rečju $u \in X^*$.

Takođe, važe i sledeće teoreme.

Teorema 5.1. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati i neka je φ Booleova relacija između A i B. Tada važi sledeće.*

(A) *Ako je φ simulacija, onda je $L(\mathcal{A}) \leqslant L(\mathcal{B})$.*

(B) *Ako je φ bisimulacija, onda je $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.*

Teorema 5.2. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati. Za $w \in \{fs, bs, fb, bb, fbb, bfb\}$, ako postoji bar jedna relacija između A i B koja zadovoljava uslove $(w\text{-}1) - (w\text{-}3)$, onda postoji najveća relacija između A i B koja zadovoljava te uslove.*

Dokaz. Dokazaćemo slučaj $w = fs$. Prema pretpostavkama teoreme, familija svih direktnih simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je neprazna. Kako je ova familija i konačna (jer je konačna i familija svih relacija između A i B), to postoji suma ove familije za koju se jednostavno proverava da je direktna simulacija, a samim tim, to je i najveća direktna simulacija između A i B. □

Teorema 5.3. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati takvi da postoji bar jedna direktna (odnosno povratna) bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Tada najveća direktna (odnosno povratna) bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jeste parcijalna uniformna relacija.*

Dokaz. Iz pretpostavke teoreme sledi da postoji najveća direktna (odnosno povratna) bisimulacija φ između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. U tom slučaju je i $\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi$ takođe direktna (odnosno povratna) bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, pa mora biti $\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi \leqslant \varphi$. Sada na osnovu Teoreme 1.9 sledi da φ jeste parcijalna uniformna relacija. □

5.2 Konstrukcija najvećih simulacija i bisimulacija

U ovom poglavlju prokazaćemo metod za izračunavanje najvećih sumulacija i bisimulacija težinskih automata. Najpre ćemo dati neke oznake i pojmove koje ćemo koristiti u daljem radu.

Neka su A i B neprazni skupovi. Skup svih relacija između A i B, prirodno uređen inkluzijom čini kompletnu mrežu, koju označavamo sa $\mathcal{BR}(A, B)$.

Za neprazne skupove A i B i težinske podskupove η od A i ξ od B, relacije $\eta \to \xi$ i $\eta \leftarrow \xi$ između A i B su definisane sa

$$(\eta \to \xi)(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \eta(a) \leqslant \xi(b)\,, \tag{5.1}$$

$$(\eta \leftarrow \xi)(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi(b) \leqslant \eta(a)\,, \tag{5.2}$$

za proizvoljne $a \in A$ i $b \in B$.

Napomenimo da je važi

$$\eta \leftarrow \xi = (\xi \to \eta)^t \tag{5.3}$$

$$((\eta \to \xi) \wedge (\eta \leftarrow \xi))(a,b) = 1 \quad \text{ako i samo ako} \quad \eta(a) = \xi(b) \tag{5.4}$$

$$\eta \circ (\eta \to \xi) \leqslant \xi. \tag{5.5}$$

Takođe važi i sledeća lema.

Lema 5.1. *Neka su A i B neprazni skupovi, neka je η težinska relacija na A i neka je ξ težinska relacija na B.*

(a) *Skup svih rešenja nejednačine $\eta \circ \chi \leqslant \xi$, gde je χ nepoznata relacija između A i B, je glavni ideal od $\mathcal{BR}(A,B)$ generisan relacijom $\eta \to \xi$.*

(b) *Skup svih rešenja nejednačine $\chi \circ \xi \leqslant \eta$, gde je χ nepoznata relacija između A i B, je glavni ideal od $\mathcal{BR}(A,B)$ generisan relacijom $\eta \leftarrow \xi$.*

Dokaz. Neka je ψ proizvoljno rešenje nejednačine $\eta \circ \chi \leqslant \xi$ i neka je $\varphi(a,b) = 1$, za neke $a \in A$ i $b \in B$. Tada je $\eta(a) = \eta(a)\varphi(a,b) \leqslant \eta \circ \varphi(b)$, pa je $(\eta \to \xi)(a,b) = 1$. Dakle, $\varphi \leqslant \eta \to \xi$.

Sa druge strane, ako je $\varphi \leqslant \eta \to \xi$, onda za proizvoljan $b \in B$ imamo da je $\eta \circ \varphi(b) \leqslant (\eta \circ (\eta \to \xi))(b) = \sum_{a \in A} \eta(a) \circ (\eta \to \xi)(a,b) \leqslant \xi(b)$. Dakle, φ je rešenje nejednačine $\eta \circ \chi \leqslant \xi$. □

Dalje, neka su A i B neprazni skupovi i neka je α težinska relacija na A, β težinska relacija na B i $\varphi \in \mathcal{BR}(A,B)$ relacija između A i B. Tada, *desni rezidal* od φ sa α je relacija $\varphi/\alpha \in \mathcal{BR}(A,B)$ definisana sa

$$(\varphi/\alpha)(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a' \in A)\alpha(a',a) \leqslant \varphi(a',b), \tag{5.6}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$, i *levi rezidual* od φ sa β je relacija $\varphi\backslash\beta \in \mathcal{BR}(A,B)$ definisana sa

$$(\varphi\backslash\beta)(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall b' \in B)\beta(b,b') \leqslant \varphi(a,b'), \tag{5.7}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$.

Lema 5.2. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\alpha \in S^{A\times A}$, $\beta \in S^{B\times B}$ i $\varphi \in \mathcal{BR}(A,B)$.*

(a) *Skup svih rešenja nejednačine $\alpha \circ \chi \leqslant \varphi$, gde je χ nepoznata relacija između A i B, jeste glavni ideal od $\mathcal{BR}(A,B)$ generisan desnim rezidualom φ/α od φ sa α.*

(b) *Skup svih rešenja nejednačine $\chi \circ \beta \leqslant \varphi$, gde je χ nepoznata relacija između A i B, jeste glavni ideal od $\mathcal{BR}(A,B)$ generisan levim rezidualom $\varphi\backslash\beta$ od φ sa β.*

Dokaz. Neka je ψ proizvoljno rešenje nejednačine $\alpha \circ \chi \leqslant \varphi$, i neka je $\psi(a,b) = 1$ za neke $a \in A$ i $b \in B$. Tada za svaki $a' \in A$ imamo da je $\alpha(a',a) = \alpha(a',a)\psi(a,b) \leqslant (\alpha \circ \varphi)(a',b)$. Odatle je $(\varphi/\alpha)(a',b) = 1$. Dakle, $\psi \leqslant \varphi/\alpha$.

Sa druge strane, ako je $\psi \leqslant \varphi/\alpha$, onda za proizvolne $a \in A$ i $b \in B$ imamo da je $\alpha \circ \psi(a,b) \leqslant (\alpha \circ (\varphi/\alpha))(a,b) \leqslant \varphi(a,b)$.

Analogno se dokazuje tvrđenje (b). □

Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati. Relacije $\psi^w \in \mathcal{BR}(A,B)$, za $w \in \{fs, bs, fb, bb, fbb, bfb\}$, definišemo na sledeći način:

$$\psi^{fs} = \tau^A \to \tau^B, \tag{5.8}$$

$$\psi^{bs} = \sigma^A \to \sigma^B, \tag{5.9}$$

$$\psi^{fb} = (\tau^A \to \tau^B) \wedge (\tau^A \leftarrow \tau^B) = \tau^A \leftrightarrow \tau^B, \tag{5.10}$$

$$\psi^{bb} = (\sigma^A \to \sigma^B) \wedge (\sigma^A \leftarrow \sigma^B) = \sigma^A \leftrightarrow \sigma^B, \tag{5.11}$$

$$\psi^{fbb} = (\tau^A \to \tau^B) \wedge (\sigma^A \leftarrow \sigma^B), \tag{5.12}$$

$$\psi^{bfb} = (\sigma^A \to \sigma^B) \wedge (\tau^A \leftarrow \tau^B). \tag{5.13}$$

Dalje, funkcije $\phi^w : \mathcal{BR}(A,B) \to \mathcal{BR}(A,B)$, za $w \in \{fs, bs, fb, bb, fbb, bfb\}$, definišemo sa:

$$\phi^{fs}(\alpha) = \bigwedge_{x\in X} [(\delta_x^B \circ \alpha^t)\backslash \delta_x^A]^t, \tag{5.14}$$

$$\phi^{bs}(\alpha) = \bigwedge_{x\in X} (\alpha \circ \delta_x^B)/\delta_x^A, \tag{5.15}$$

$$\phi^{fb}(\alpha) = \bigwedge_{x\in X} [(\delta_x^B \circ \alpha^t)\backslash \delta_x^A]^t \wedge [(\delta_x^A \circ \alpha)\backslash \delta_x^B] = \phi^{fs}(\alpha) \wedge [\phi^{fs}(\alpha^t)]^t, \tag{5.16}$$

$$\phi^{bb}(\alpha) = \bigwedge_{x\in X} [(\alpha \circ \delta_x^B)/\delta_x^A] \wedge [(\alpha^t \circ \delta_x^A)/\delta_x^B]^t = \phi^{bs}(\alpha) \wedge [\phi^{bs}(\alpha^t)]^t, \tag{5.17}$$

$$\phi^{fbb}(\alpha) = \bigwedge_{x\in X} [(\delta_x^B \circ \alpha^t)\backslash \delta_x^A]^t \wedge [(\alpha^t \circ \delta_x^A)/\delta_x^B]^t = \phi^{fs}(\alpha) \wedge [\phi^{bs}(\alpha^t)]^t, \tag{5.18}$$

$$\phi^{bfb}(\alpha) = \bigwedge_{x\in X} [(\alpha \circ \delta_x^B)/\delta_x^A] \wedge [(\delta_x^A \circ \alpha)\backslash \delta_x^B] = \phi^{bs}(\alpha) \wedge [\phi^{fs}(\alpha^t)]^t, \tag{5.19}$$

za svako $\alpha \in \mathcal{BR}(A,B)$. U izrazu "$\phi^w(\alpha^t)$" ($w \in \{fs, bs\}$) sa ϕ^w označena je funkcija iz $\mathcal{BR}(B,A)$ u sebe.

Sledeća teorema daje ekvivalentnu formu drugog i trećeg uslova u definiciji simulacija i bisimulacija.

Teorema 5.4. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati i neka je $w \in \{fs, bs, fb, bb, fbb, bfb\}$. Relacija $\varphi \in \mathcal{BR}(A,B)$ zadovoljava uslove (w-2) i (w-3) ako i samo ako je*

$$\varphi \leqslant \phi^w(\varphi), \qquad \varphi \leqslant \psi^w. \tag{5.20}$$

Dokaz. Dokazaćemo slučaj $w = fs$. Tvrđenje koje tretira slučaj $w = bs$ se dobija dualno, a prema (5.10)–(5.13) i (5.16)–(5.19), sva ostala tvrđenja se dobijaju iz prethodna dva.

Neka je φ proizvoljna relacija između A i B. Na osnovu Leme 5.1(b), φ zadovoljava uslov (fs-3) ako i samo ako je $\varphi^t \leqslant \tau^B \leftarrow \tau^A = (\tau^A \to \tau^B)^t$, što je ekvivalentno sa $\varphi \leqslant \tau^A \to \tau^B = \psi^{fs}$. Dakle, φ zadovoljava uslov (fs-3) ako i samo ako je $\varphi \leqslant \psi^{fs}$.

Sa druge strane, φ zadovoljava uslov (fs-2) ako i samo ako je φ^t rešenje nejednačine

$$\chi \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^t, \quad \text{za svako } x \in X.$$

Na osnovu Leme 5.2 (b), ovo je ekvivalentno sa

$$\varphi^t \leqslant (\delta_x^B \circ \varphi^t) \backslash \delta_x^A, \quad \text{za svako } x \in X,$$

odnosno, ekvivalentno je sa

$$\varphi \leqslant \bigwedge_{x \in X} \left[(\delta_x^B \circ \varphi^t) \backslash \delta_x^A \right]^t = \phi^{fs}(\varphi)$$

Dakle, φ zadovoljava uslov (fs-2) ako i samo ako je $\varphi \leqslant \phi^{fs}(\varphi)$. Stoga, možemo zaključiti da relacija φ zadovoljava uslove (fs-2) i (fs-3) ako i samo ako zadovoljava (5.20) (za $w = fs$), što je i trebalo pokazati. □

Teorema 5.5. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati, neka je $w \in \{fs, bs, fb, bb, fbb, bfb\}$ i neka je $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ niz relacija iz $\varphi \in \mathcal{BR}(A, B)$ definisan sa*

$$\varphi_1 = \psi^w, \qquad \varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \phi^w(\varphi_k), \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{5.21}$$

Tada važi sledeće.

(a) *Niz $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je konačan i opadajući, i postoji najmanji prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_k = \varphi_{k+1}$;*

(b) *φ_k je najveća relacija u $\mathcal{BR}(A, B)$ koja zadovoljava (w-2) i (w-3);*

(c) *Ako φ_k zadovoljava uslov (w-1), onda je to najveća relacija u $\mathcal{BR}(A, B)$ koja zadovoljava (w-1), (w-2) i (w-3);*

(d) *Ako φ_k ne zadovoljava uslov (w-1), onda ne postoji nijedna relacija u $\mathcal{BR}(A, B)$ koja zadovoljava (w-1), (w-2) i (w-3);*

Dokaz. (a) Jasno je da je niz $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ opadajući. Kako su skupovi A i B konačni, to postoji konačan broj relacija između A i B, pa je i niz $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ takođe konačan. Otuda, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_k = \varphi_{k+1}$, pa postoji i najmanji prirodan broj sa ovim svojstvom.

(b) Dokazaćemo slučaj $w = fs$. Iz $\varphi_k = \varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \phi^{fs}(\varphi_k)$ dobijamo da je $\varphi_k \leqslant \phi^{fs}(\varphi_k)$, i takođe $\varphi_k \leqslant \varphi_1 = \psi^{fs}$.

Neka je $\varphi \in \mathcal{BR}(A, B)$ proizvoljna relacija koja zadovoljava uslove (fs-2) i (fs-3). Kao što smo prethodno rekli, φ zadovoljava uslov (fs-3) ako i samo ako je $\varphi \leqslant \psi^{fs} = \varphi_1$. Dalje, neka je $\varphi \leqslant \varphi_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada, za svaki $x \in X$ imamo da je $\varphi^t \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^t \leqslant \delta_x^B \circ \varphi_n^t$, i prema Lemi 5.2 (b), $\varphi^t \leqslant (\delta_x^B \circ \varphi_n^t)\backslash\delta_x^A$, odnosno $\varphi \leqslant \left[(\delta_x^B \circ \varphi_n^t)\backslash\delta_x^A\right]^t = \phi^{fs}(\varphi_n)$. Dakle, $\varphi \leqslant \varphi_n \wedge \phi^{fs}(\varphi_n) = \varphi_{n+1}$. Sada, na osnovu principa matematičke indukcije možemo zaključiti da je $\varphi \leqslant \varphi_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\varphi \leqslant \varphi_k$. Dakle, φ_k je najveća relacija između A i B koja zadovoljava uslove (fs-2) i (fs-3).

(c) Ovo sledi direktno iz tvrđenja (b).

(d) Pretpostavimo da φ_k ne zadovoljava uslov (fs-1). Neka je $\varphi \in \mathcal{BR}(A, B)$ proizvoljna relacija koja zadovoljava uslove (fs-1), (fs-2) i (fs-3). Prema tvrđenju (b) ove teoreme, $\varphi \leqslant \varphi_k$, pa je $\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^t \leqslant \sigma^B \circ \varphi_k^t$. Ali ovo je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da φ_k ne zadovoljava uslov (fs-1). Dakle, možemo zaključiti da ne postoji nijedna relacija između A i B koja zadovoljava uslove (fs-1), (fs-2) i (fs-3). □

5.3 Bisimulacione ekvivalencije

Prethodno smo definisali koncept simulacija i bisimulacija između težinskih automata koji su u opštem slučaju različiti. U ovom poglavlju razmotrićemo slučaj kada su ta dva automata ista, tj. razmatraćemo bisimulacije između težinskog automata i njega samog.

Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljan težinski automat. Ako je relacija $\varphi \in \mathcal{BR}(A, B)$ direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i sebe, onda ćemo za φ reći da je *direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ (analogno se definiše *povratna bisimulacija na* $\mathcal{A}$). Direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ koja je relacija ekvivalencije biće nazvana *direktna bisimulaciona ekvivalencija na* $\mathcal{A}$.

Teorema 5.6. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ težinski automat. Tada postoji najveća direktna (odnosno povratna) bisimulaciona ekvivalencija na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Familija svih direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ je neprazna (jer sadrži bar relaciju jednakosti), pa na osnovu Teoreme 5.3 možemo zaključiti da postoji najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$, koja se može izračunati na osnovu algoritma datog u Teoremi 5.5 za $w = fb$. Da bi pokazali da najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ jeste relacija ekvivalencije na A, dovoljno je pokazati da svaki član niza $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definisanog sa (5.21) jeste ekvivalencija na A. Jednostavno se proverava da je φ_1 relacija ekvivalencije na A. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$, relacija φ_k jeste ekvivalencija na A, i dokažimo da je to i φ_{k+1}.

Neka je $a \in A$ i $x \in X$. Tada, za svaki $a' \in A$, iz refleksivnosti relacije φ_k imamo da je

$$\delta_x^A(a, a') \leqslant (\delta_x^A \circ \varphi_k)(a, a'),$$

a kako je φ_k i simetrična relacija, to važi i

$$\delta_x^A(a, a') \leqslant (\delta_x^A \circ \varphi_k^t)(a, a').$$

Odavde dobijamo da za proizvoljne $a \in A$ i $x \in X$ važi

$$\left[(\delta_x^A \circ \varphi_k)\backslash\delta_x^A\right](a, a) = 1 \quad \text{i} \quad \left[(\delta_x^A \circ \varphi_k)\backslash\delta_x^A\right]^t (a, a) = 1.$$

Dakle, $\phi^{fb}(\varphi_k)(a, a) = 1$, pa je $\varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \phi^{fb}(\varphi_k)$ refleksivna relacija.

Po konstrukciji je $\phi^{fb}(\varphi_k)$ simetična relacija, pa je to i φ_{k+1}.

Da bi pokazali da je φ_{k+1} tranzitivna relacija, dovoljno je pokazati da za proizvoljan $x \in X$, relacija $(\delta_x^A \circ \varphi_k)\backslash\delta_x^A$ jeste tranzitivna.

Neka je $x \in X$, i neka su $a_1, a_2, a_3 \in A$ takvi da je

$$\left[(\delta_x^A \circ \varphi_k)\backslash\delta_x^A\right](a_1, a_2) = 1 \quad \text{i} \quad \left[(\delta_x^A \circ \varphi_k)\backslash\delta_x^A\right](a_2, a_3) = 1.$$

Tada za proizvoljne $a', a'' \in A$ važi

$$\delta_x^A(a_1, a') \leqslant (\delta_x^A \circ \varphi_k)(a_2, a') \quad \text{i} \quad \delta_x^A(a_2, a'') \leqslant (\delta_x^A \circ \varphi_k)(a_3, a'').$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
\delta_x^A(a_1, a') \leqslant (\delta_x^A \circ \varphi_k)(a_2, a') &= \sum_{a'' \in A} \delta_x^A(a_2, a'')\varphi(a'', a') \\
&\leqslant \sum_{a'' \in A} (\delta_x^A \circ \varphi_k)(a_3, a'')\varphi(a'', a') \\
&= (\delta_x^A \circ \varphi_k \circ \varphi_k)(a_3, a') = (\delta_x^A \circ \varphi_k)(a_3, a'),
\end{aligned}$$

odakle sledi da je $[(\delta_x^A \circ \varphi_k)\backslash\delta_x^A](a_1, a_3) = 1$, što je i trebalo dokazati.

Sada, na osnovu principa matematičke indukcije, možemo zaključiti da φ_k, $k \in \mathbb{N}$, jeste relacija ekvivalencije na A, pa na osnovu Teoreme 5.5 imamo da je najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ takođe relacija ekvivalencije na A. $\square$

Teorema 5.7. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ težinski automat i neka je E relacija ekvivalencije na A. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *E je direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$,*

(ii) *$E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E$, za svaki $x \in X$, i $E \circ \tau^A \leqslant \tau^A$,*

(iii) *$E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$, za svaki $x \in X$, i $E \circ \tau^A = \tau^A$.*

Dokaz. Jasno je da (i)$\Rightarrow$(ii). Ako važi (ii), onda za proizvoljan $x \in X$, $E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E$ povlači $E \circ \delta_x^A \circ E \leqslant \delta_x^A \circ E \circ E = \delta_x^A \circ E$. Kako svaka relacija ekvivalencije zadovoljava uslov $\delta_x^A \circ E \leqslant E \circ \delta_x^A \circ E$, to važi $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$. Takođe na osnovu istih argumenata imamo da je $\tau^A \leqslant E \circ \tau^A$, pa je $\tau^A = E \circ \tau^A$, odakle dobijamo da (ii)$\Rightarrow$(iii). Ako važi (iii), onda uslovi (fs-1) i (fs-3) važe. Za proizvoljan $x \in X$ imamo da je $E \circ \delta_x^A \leqslant E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$, odnosno uslov ($fs$-2) takođe važi. Dakle, E je direktna bisimulacija na A, tj. (iii)$\Rightarrow$(i). □

Dualno se dokazuje tvrđenje za povratne bisimulacije.

Teorema 5.8. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ težinski automat i neka je E relacija ekvivalencije na A. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *E je povratna bisimulacija na $\mathcal{A}$,*

(ii) *$\delta_x^A \circ E \leqslant E \circ \delta_x^A$, za svaki $x \in X$, i $\sigma^A \circ E \leqslant \sigma^A$;*

(iii) *$\delta_x^A \circ E = E \circ \delta_x^A$, za svaki $x \in X$, i $\sigma^A \circ E = \sigma^A$.*

Kao što je slučaj sa nedeterminističkim i fazi automatima, i težinski faktor automat u odnosu na datu relaciju ekvivalencije, raspoznaje isti jezik kao i oridinalni automat ako i samo ako ova ekvivalencija jeste rešenje opšteg sistema. Na osnovu Teorema 5.7 i 5.8 imamo da direktne i povratne bisimulacione relacije ekvivalencije predstavljaju rešenja specijalnih varijanti opšteg sistema, pa važi sledeća teorema.

Teorema 5.9. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ težinski automat, E direktna (odnosno povratna) bisimulaciona relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ težinski faktor automat od $\mathcal{A}$ po E. Tada $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$ raspoznaju isti jezik, tj. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}/E)$.*

5.4 Uniformne relacije i direktne bisimulacije

Teorema 5.10. *Neka je $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ težinski automat, E relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ težinski faktor automat od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.*

(A) *Relacija $\varphi \in \mathcal{BR}(A, A/E)$ definisana sa*

$$\varphi(a_1, E_{a_2}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E(a_1, a_2) = 1, \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{5.22}$$

je uniformna relacija takva da je $E^{\varphi}_{A} = E$ i $E^{\varphi}_{A/E} = \Delta_{A/E}$, i pri tom je φ istovremeno i direktna i povratna simulacija.

(B) *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *E je direktna bisimulaciona ekvivalencija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *relacija φ je direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$;*

(iii) *relacija φ je povratno-direktna bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/E$.*

Dokaz. (A) Za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi)(a_1, E_{a_2}) &= \sum_{a_3, a_4 \in A} \varphi(a_1, E_{a_3})\varphi(a_4, E_{a_3})\varphi(a_4, E_{a_2}) \\ &= \sum_{a_3, a_4 \in A} E(a_1, a_3)E(a_4, a_3)E(a_4, a_2) \\ &= (E \circ E \circ E)(a_1, a_2) = E(a_1, a_2) = \varphi(a_1, E_{a_2}),\end{aligned}$$

pa φ jeste parcijalna uniformna relacija. Jasno je da je kompletna i sirjektivna, pa možemo zaključiti da je φ uniformna relacija. Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned}E^{\varphi}_{A}(a_1, a_2) = (\varphi \circ \varphi^t)(a_1, a_2) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_1, E_{a_3})\varphi(a_2, E_{a_3}) \\ &= \sum_{a_3 \in A} E(a_1, a_3)E(a_3, a_2) = (E \circ E)(a_1, a_2) = E(a_1, a_2), \\ E^{\varphi}_{A/E}(E_{a_1}, E_{a_2}) = (\varphi^t \circ \varphi)(E_{a_1}, E_{a_2}) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_3, E_{a_1})\varphi(a_3, E_{a_2}) \\ &= \sum_{a_3 \in A} E(a_1, a_3)E(a_3, a_2) = (E \circ E)(a_1, a_2) \\ &= E(a_1, a_2) = (E/E)(E_{a_1}, E_{a_2}) = \Delta_{A/E}(E_{a_1}, E_{a_2}).\end{aligned}$$

Za proizvoljne $x \in X$ i $a, a_1, a_2 \in A$ važi

$$\begin{aligned}\sigma^A(a) &\leqslant (\sigma^A \circ E \circ E)(a) = \sum_{a_3 \in A} (\sigma^A \circ E)(a_3) E(a_3, a) \\ &= \sum_{a_3 \in A} \sigma^{A/E}(E_{a_3}) \varphi^t(E_{a_3}, a) = (\sigma^{A/E} \circ \varphi^t)(a),\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}(\varphi^t \circ \delta_x^A)(E_{a_1}, a_2) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi^t(E_{a_1}, a_3) \delta_x^A(a_3, a_2) = \sum_{a_3 \in A} E(a_1, a_3) \delta_x^A(a_3, a_2) \\ &= (E \circ \delta_x^A)(a_1, a_2) \leqslant (E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) = (E \circ \delta_x^A \circ E \circ E)(a_1, a_2) \\ &= \sum_{a_3 \in A} (E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_3) E(a_3, a_2) = \sum_{a_3 \in A} \delta_x^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_3}) \varphi^t(E_{a_3}, a_2) \\ &= (\delta_x^{A/E} \circ \varphi^t)(E_{a_1}, a_2),\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}(\varphi^t \circ \tau^A)(E_a) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi^t(E_a, a_3) \tau^A(a_3) = E(a, a_3) \tau^A(a_3) \\ &= (E \circ \tau^A)(a) = \tau^{A/E}(E_a),\end{aligned} \tag{5.25}$$

i takođe važi

$$\begin{aligned}(\sigma^A \circ \varphi)(E_a) &= \sum_{a_1 \in A} \sigma^A(a_3) \varphi(a_1, E_a) = \sum_{a_3 \in A} \sigma^A(a_1) E(a_1, a) \\ &= (\sigma^A \circ E)(a) = \sigma^{A/E}(E_a),\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}(\delta_x^A \circ \varphi)(a_1, E_{a_2}) &= \sum_{a_3 \in A} \delta_x^A(a_1, a_3) \varphi(a_3, E_{a_2}) = \sum_{a_3 \in A} \delta_x^A(a_1, a_3) E(a_3, a_2) \\ &= (\delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) \leqslant (E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) = (E \circ E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) \\ &= \sum_{a_3 \in A} E(a_1, a_3)(E \circ \delta_x^A \circ E)(a_3, a_2) = \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_1, E_{a_3}) \delta_x^{A/E}(E_{a_3}, E_{a_2}) \\ &= (\varphi \circ \delta_x^{A/E})(a_1, E_{a_2}),\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\tau^A(a) &\leqslant (E \circ E \circ \tau^A)(a) = \sum_{a_3 \in A} E(a, a_3) E \circ \tau^A(a_3) \\ &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a, E_{a_3}) \tau^{A/E}(E_{a_3}) = (\varphi \circ \tau^{A/E})(a).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Dakle, φ je i direktna i povratna simulacija.

(B) Obratne nejednakosti u (5.27) i (5.28) važe ako i samo ako je E direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$, pa su u tom slučaju uslovi (i), (ii) i (iii) ekvivalentni. $\square$

Teorema 5.11. *Neka je* $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *težinski automat, neka su* E *i* G *relacije ekvivalencije na* $\mathcal{A}$ *takve da je* $E \leqslant G$, *i neka je* $\mathcal{A}/E = (A/E, \delta^{A/E}, \sigma^{A/E}, \tau^{A/E})$ *težinski faktor automat od* $\mathcal{A}$ *u odnosu na* E.

(A) *Relacija* G/E *na* $\mathcal{A}/E$ *definisana sa*

$$G/E(E_{a_1}, E_{a_2}) = G(a_1, a_2), \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{5.29}$$

jeste ekvivalencija na $\mathcal{A}/E$, *i težinski faktor automati* $(\mathcal{A}/E)/(G/E)$ *i* $\mathcal{A}/G$ *su izomorfni.*

(B) *Relacija* $\varphi \in \mathcal{BF}(A, A/E)$ *definisana sa*

$$\varphi(a_1, E_{a_2}) = G(a_1, a_2), \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A, \tag{5.30}$$

jeste uniformna relacija za koju je $E_A^\varphi = G$ *i* $E_{A/E}^\varphi = G/E$.

Štaviše, ako je E *direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$, *onda važi sledeće:*

(C) G *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako* G/E *jeste direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}/E$.

(D) G *je najveća direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako* G/E *jeste najveća direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}/E$.

(E) G *je direktna bisimulacija na* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako* φ *jeste direktna bisimulacija između* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{A}/E$.

Dokaz. (A) Jednostavno se proverava da je sa (5.29) dobro definisana relacija na A/E i da ta relacija jeste ekvivalencija. Dokažimo da su težinski faktor automati izomorfni. Radi jednostavnijeg označavanja, neka je $G/E = P$. Funkciju $\phi : A/G \to (A/E)/P$ definišeno na sledeći način

$$\phi(G_a) = P_{E_a}, \qquad \text{za svako } a \in A.$$

Za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned} G_{a_1} = G_{a_2} \quad &\Leftrightarrow \quad G(a_1, a_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(E_{a_1}, E_{a_2}) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad P_{E_{a_1}} = P_{E_{a_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(E_{a_1}) = \phi(E_{a_2}), \end{aligned}$$

pa je ϕ dobro definisana i injektivna funkcija. Jasno je da je ϕ i sirjektivna funkcija, pa možemo zaključiti da je ϕ bijekcija od A/G i $(A/E)/P$. Kako je $E \leqslant G$ ekvivalentno sa $E \circ G = G \circ E = G$, to za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$ važi

$$\begin{aligned}
\delta_x^{(A/E)/P}(\phi(G_{a_1}), \phi(G_{a_2})) &= \delta_x^{(A/E)/P}(P_{E_{a_1}}, P_{E_{a_2}}) = (P \circ \delta_x^{A/E} \circ P)(E_{a_1}, E_{a_2}) \\
&= \sum_{a_3, a_4 \in A} P(E_{a_1}, E_{a_3}) \delta_x^{A/E}(E_{a_3}, E_{a_4}) P(E_{a_4}, E_{a_2}) \\
&= \sum_{a_3, a_4 \in A} P(E_{a_1}, E_{a_3}) (E \circ \delta_x^{A} \circ E)(a_3, a_4) P(E_{a_4}, E_{a_2}) \\
&= \sum_{a_3, a_4 \in A} G(a_1, a_3) (E \circ \delta_x^{A} \circ E)(a_3, a_4) G(a_4, a_2) \\
&= (G \circ E \circ \delta_x^A \circ E \circ G)(a_1, a_2) \\
&= (G \circ \delta_x^A \circ G)(a_1, a_2) = \delta_x^{A/G}(G_{a_1}, G_{a_2}).
\end{aligned}$$

Dalje, za proizvoljan $a \in A$ važi

$$\begin{aligned}
\sigma^{(A/E)/P}(\phi(G_a)) &= \sigma^{(A/E)/P}(P_{E_a}) = (\sigma^{A/E}/ \circ P)(E_a) \\
&= \sum_{a_1 \in A} \sigma^{A/E}(a_1) P(E_{a_1}, E_a) = \sum_{a_1 \in A} (\sigma^A \circ E)(a_1) G(a_1, a) \\
&= (\sigma^A \circ E \circ G)(a) = (\sigma^A \circ G)(a) = \sigma^{A/G}(G_a),
\end{aligned}$$

i slično se pokazuje da je $\tau^{(A/E)/P}(\phi(G_a)) = \tau^{A/G}(G_a)$. Dakle, ϕ je izomorfizam težinskih automata $(\mathcal{A}/E)/(G/E)$ i $\mathcal{A}/G$.

(B) Za proizvoljne $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ važi

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1, E_{a_2}) \varphi(a_3, E_{a_2}) \varphi(a_3, E_{a_4}) &= G(a_1, a_2) G(a_2, a_3) G(a_3, a_4) \\
&\leqslant G(a_1, a_4) = \varphi(a_1, E_{a_4}),
\end{aligned}$$

pa φ jeste parcijalna uniformna relacija. Jasno je da je φ kompletna i sirjektivna relacija, pa φ jeste uniformna relacija. Štaviše, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \varphi^t)(a_1, a_2) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_1, E_{a_3}) \varphi(a_2, E_{a_3}) \\
&= \sum_{a_3 \in A} G(a_1, a_3) G(a_3, a_2) = G(a_1, a_2), \\
(\varphi^t \circ \varphi)(E_{a_1}, E_{a_2}) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_3, E_{a_1}) \varphi(a_3, E_{a_2}) = \sum_{a_3 \in A} G(a_1, a_3) G(a_3, a_2) \\
&= G(a_1, a_2) = (G/E)(E_{a_1}, E_{a_2}),
\end{aligned}$$

pa je $E_A^\varphi = \varphi \circ \varphi^t = G$ i $E_{A/E}^\varphi = \varphi^t \circ \varphi = G/E$.

Dalje, neka je E direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$.

(C) Neka su $a, a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$, i neka je $P = G/E$. Tada

$$\begin{aligned}
(\delta_x^{A/E} \circ P)(E_{a_1}, E_{a_2}) &= \sum_{a_3 \in A} \delta_x^{A/E}((E_{a_1}, E_{a_3})P(E_{a_3}, E_{a_2}) \\
&= \sum_{a_3 \in A} (E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_3)G(a_3, a_2) \\
&= (E \circ \delta_x^A \circ E \circ G)(a_1, a_2) \\
&= (\delta_x^A \circ E \circ G)(a_1, a_2) = (\delta_x^A \circ G)(a_1, a_2),
\end{aligned}$$

pa na osnovu Teoreme 5.7 važi tvrđenje (C).

(D) Neka je G najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$. Prema tvrđenju (C) ove teoreme imamo da je G/E direktna bisimulacija na $\mathcal{A}/E$. Neka je Q najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}/E$. Definišimo relaciju T na $\mathcal{A}$ sa

$$T(a_1, a_2) = Q(E_{a_1}, E_{a_2}), \qquad \text{za sve } a_1, a_2 \in A.$$

Jednostavno se proverava da je T relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$. Dalje, ako je $E(a_1, a_2) = 1$, za neke $a_1, a_2 \in A$, tj. ako je $E_{a_1} = E_{a_2}$, onda je $T(a_1, a_2) = Q(E_{a_1}, E_{a_2}) = 1$, pa je $E \leqslant T$. Dakle, $Q = T/E$ i prema (C) sledi da je T direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$, pa mora biti $T \leqslant G$. U tom slučaju za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi

$$T/E(E_{a_1}, E_{a_2}) = T(a_1, a_2) \leqslant Q(a_1, a_2) = Q/E(E_{a_1}, E_{a_2}),$$

odnosno $Q = T/E \leqslant G/E$, što povlači $G/E = Q$, tj., G/E je najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}/E$.

Obratno, Neka je G/E najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}/E$. Prema tvrđenju (C) ove teoreme, G je direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$. Neka je T najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$. Tada je $E \leqslant G \leqslant T$, i ponovo prema (C) sledi da je T/E direktna bisimulacija na $\mathcal{A}/E$, što daje da je $T/E \leqslant G/E$. Sada, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ je

$$T(a_1, a_2) = T/E(E_{a_1}, E_{a_2}) \leqslant G/E(E_{a_1}, E_{a_2}) = G(a_1, a_2),$$

tj., važi $T \leqslant G$, pa je $T = G$, odnosno G je najveća direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$.

(E) Na osnovu Teoreme 5.7, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi

$$\begin{aligned}
(\varphi^t \circ \delta_x^A)(E_{a_1}, a_2) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_3, E_{a_1})\delta_x^A(a_3, a_2) = \sum_{a_3 \in A} G(a_1, a_3)\delta_x^A(a_3, a_2) \\
&= (G \circ \delta_x^A)(a_1, a_2), \\
(\delta_x^{A/E} \circ \varphi^t)(E_{a_1}, a_2) &= \sum_{a_3 \in A} \delta_x^{A/E}(E_{a_1}, E_{a_3})\varphi^t(E_{a_3}, a_2) \\
&= \sum_{a_3 \in A} (E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_3)G(a_3, a_2) \\
&= (E \circ \delta_x^A \circ E \circ G)(a_1, a_2) \\
&= (\delta_x^A \circ E \circ G)(a_1, a_2) = (\delta_x^A \circ G)(a_1, a_2), \\
(\varphi \circ \delta_x^{A/E})(a_1, E_{a_2}) &= \sum_{a_3 \in A} \varphi(a_1, E_{a_3})\delta_x^{A/E}(E_{a_3}, E_{a_2}) \\
&= \sum_{a_3 \in A} G(a_1, a_3)(E \circ \delta_x^A \circ E)(a_3, a_2) \\
&= (G \circ E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) = (G \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) \\
(\delta_x^A \circ \varphi)(a_1, E_{a_2}) &= \sum_{a_3 \in A} \delta_x^A(a_1, a_3)\varphi(a_3, E_{a_2}) \\
&= \sum_{a_3 \in A} \delta_x^A(a_1, a_3)G(a_3, a_2) = (\delta_x^A \circ G)(a_1, a_2).
\end{aligned}$$

Sada, ako je G direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$, onda je $G \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ G$ i $G \circ \delta_x^A \circ E \leqslant G \circ \delta_x^A \circ G = \delta_x^A \circ G$, pa je $\varphi^t \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^{A/E} \circ \varphi^t$ i $\varphi \circ \delta_x^{A/E} \leqslant \delta_x^A \circ \varphi$, tj., φ je direktna bisimulacija. Obratno, ako je φ direktna bisimulacija, onda $G \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ G$, tj., G je direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$. □

Teorema 5.12. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati i neka je $\varphi \in \mathcal{BR}(A, B)$ uniformna relacija. Tada φ je direktna bisimulacija ako i samo ako važi:*

(i) *E_A^φ je direktna bisimulaciona ekvivalencija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *E_B^φ je direktna bisimulaciona ekvivalencija na $\mathcal{B}$;*

(iii) *$\widetilde{\varphi}$ je izomorfizam težinskih faktor automata $\mathcal{A}/E_A^\varphi$ i $\mathcal{B}/E_B^\varphi$.*

Dokaz. Neka je $E = E_A^\varphi$ i $F = E_B^\varphi$. Pretpostavimo da je φ direktna bisimulacija. Iz Teoreme 1.10 slede tvrđenja (i) i (ii), a na osnovu Leme 1.5 $\widetilde{\varphi}$ je bijekcija od A/E na B/F.

Za proizvoljne $a, a_1, a_2 \in A$, $x \in X$ i $\psi \in CR(\varphi)$ važi

$$\begin{aligned}
\sigma^{A/E}(E_a) &= (\sigma^A \circ E)(a) = (\sigma^B \circ \varphi^t)(a) = \sum_{b\in B} \sigma^B(b)\varphi(a,b) \\
&= \sum_{b\in B} \sigma^B(b)F(\psi(a),b) = \sum_{b\in B} \sigma^B(b)F(b,\psi(a)) \\
&= (\sigma^B \circ F)(\psi(a)) = \sigma^{B/F}(F_{\psi(a)}) = \sigma^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a)), \\
\tau^{A/E}(E_a) &= (\tau^A \circ E)(a) = \tau^A(a) = (\varphi \circ \tau^B)(a) \\
&= \sum_{b\in B} \varphi(a,b)\tau^B(b) = \sum_{b\in B} F(\psi(a),b)\tau^B(b) \\
&= (F \circ \tau^B)(\psi(a)) = \tau^{B/F}(F_{\psi(a)}) = \tau^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a))
\end{aligned}$$

Dalje, na osnovu (i) i Teoreme 1.10 dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta_x^A \circ E &= E \circ \delta_x^A \circ E = \varphi \circ \varphi^t \circ \delta_x^A \circ \varphi \circ \varphi^t \\
&\leqslant \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^t \circ \varphi \circ \varphi^t = \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^t \leqslant \delta_x^A \circ E,
\end{aligned}$$

pa je $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E = \varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^t$, i

$$\begin{aligned}
\delta^{A/E}(E_{a_1}, x, E_{a_2}) &= (E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1,a_2) \\
&= (\varphi \circ \delta_x^B \circ \varphi^t)(a_1,a_2) \\
&= \sum_{b_1,b_2\in B} \varphi(a_1,b_1)\delta_x^B(b_1,b_2)\varphi(a_2,b_2) \\
&= \sum_{b_1,b_2\in B} F(\psi(a_1),b_1)\delta_x^B(b_1,b_2)F(\psi(a_2),b_2) \\
&= (F \circ \delta_x^B \circ F)(\psi(a_1),\psi(a_2)) \\
&= \delta^{B/F}(F_{\psi(a_1)}, x, F_{\psi(a_2)}) \\
&= \delta^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_{a_1}), x, \widetilde{\varphi}(E_{a_2})),
\end{aligned}$$

Dakle, $\widetilde{\varphi}$ je izomorfizam između težinskih faktor automata $\mathcal{A}/E$ and $\mathcal{B}/F$.

Obratno, ako pretpostavimo da važi (i), (ii) i (iii), onda za $\psi \in CR(\varphi)$, $\xi \in CR(\varphi^t)$, $a, a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ i $x \in X$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\sigma^A(a) &\leqslant (\sigma^A \circ E)(a) = \sigma^{A/E}(E_a) = \sigma^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a)) = \sigma^{B/F}(F_{\psi(a)}) \\
&= (\sigma^B \circ F)(\psi(a)) = \sum_{b\in B} \sigma^B(b)F(b,\psi(a)) = \sum_{b\in B} \sigma^B(b)F(\psi(a),b) \\
&= \sum_{b\in B} \sigma^B(b)\varphi(a,b) = \sum_{b\in B} \sigma^B(b)\varphi^t(b,a) = (\sigma^B \circ \varphi^t)(a),
\end{aligned}$$

pa je $\sigma^A \leqslant \sigma^B \circ \varphi^t$, i slično je $\sigma^B \leqslant \sigma^A \circ \varphi$. Dalje,

$$\begin{aligned}(E \circ \delta_x^A \circ E)(a_1, a_2) &= \delta^{A/E}(E_{a_1}, x, E_{a_2}) = \delta^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_{a_1}), x, \widetilde{\varphi}(E_{a_2})) \\ &= \delta^{B/F}(F_{\psi(a_1)}, x, F_{\psi(a_2)}) = (F \circ \delta_x^B \circ F)(\psi(a_1), \psi(a_2)),\end{aligned}$$

i slično je

$$(F \circ \delta_x^B \circ F)(b_1, b_2) = (E \circ \delta_x^A \circ E)(\xi(b_1), \xi(b_2)).$$

Na osnovu (i) i (ii) je $\varphi^t \circ \delta_x^A = \varphi^t \circ E \circ \delta_x^A \leqslant \varphi^t \circ \delta_x^A \circ E$, pa na osnovu Teoreme 1.10, za sve $a \in A$ i $b \in B$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}(\varphi^t \circ \delta_x^A)(b, a) &\leqslant (\varphi^t \circ \delta_x^A \circ E)(b, a) = \sum_{a_1 \in A} \varphi^t(b, a_1)(\delta_x^A \circ E)(a_1, a) \\ &= \sum_{a_1 \in A} E(\xi(b), a_1)(\delta_x^A \circ E)(a_1, a) = (E \circ \delta_x^A \circ E)(\xi(b), a) \\ &= (F \circ \delta_x^B \circ F)(\psi((\xi(b)), \psi(a)) = \sum_{b_1 \in B} F(\psi(\xi(b)), b_1)(\delta_x^B \circ F)(b_1, \psi(a)) \\ &= \sum_{b_1 \in B} F(b, b_1)(\delta_x^B \circ F)(b_1, \psi(a)) \\ &= (F \circ \delta_x^B \circ F)(b, \psi(a)) = (\delta_x^B \circ F)(b, \psi(a)) \\ &= \sum_{b_2 \in B} \delta_x^B(b, b_2) F(b_2, \psi(a)) = \sum_{b_2 \in B} \delta_x^B(b, b_2)\varphi(a, b_2) = (\delta_x^B \circ \varphi^t)(b, a),\end{aligned}$$

pa važi $\varphi^t \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^B \circ \varphi^t$. ovde smo koristili činjenicu da je $F(\psi(\xi(b)), b) = \varphi(\xi(b), b) = \varphi^t(b, \xi(b)) = 1$, gde je $F_{\psi(\xi(b))} = F_b$ i

$$F(\psi(\xi(b)), b_1) = F_{\psi(\xi(b))}(b_1) = F_b(b_1) = F(b, b_1).$$

Slično se dokazuje da je $\varphi \circ \delta_x^B \leqslant \delta_x^A \circ \varphi$. Dalje,

$$\begin{aligned}\tau^A(a) &= (E \circ \tau^A)(a) = \tau^{A/E}(E_a) = \tau^{B/F}(\widetilde{\varphi}(E_a)) = \tau^{B/F}(F_{\psi(a)}) \\ &= \sum_{b \in B} F(\psi(a), b)\tau^B(b) = \sum_{b \in B} \varphi(a, b)\tau^B(b) = (\varphi \circ \tau^B)(a),\end{aligned}$$

pa $\tau^A = \varphi \circ \tau^B$, i slično dobijamo $\varphi^t \circ \tau^A \leqslant \tau^B$. Dakle, φ je uniformna direktna bisimulacija između težinskih automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. $\square$

Teorema 5.13. *Neka su $\mathcal{A} = (A, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ težinski automati, neka je E direktna bisimulacija na $\mathcal{A}$ i F direktna bisimulacija na $\mathcal{B}$. Tada postoji uniformna direktna bisimulacija $\varphi \in \mathcal{BR}(A, B)$ takva da je*

$$E_A^\varphi = E \quad i \quad E_B^\varphi = F, \tag{5.31}$$

ako i samo ako težinski faktor automati $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$ jesu izomorfni.

Dokaz. Ako postoji uniformna direktna bisimulacija takva da je $E_A^\varphi = E$ i $E_B^\varphi = F$, onda na osnovu Teoreme 5.12, imamo da su težinski faktor automati $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$ izomorfni.

Obratno, neka je $\phi : A/E \to B/F$ izomorfizam težinskih faktor automata $\mathcal{A}/E$ i $\mathcal{B}/F$. Neka je relacija $\varphi \in \mathcal{BR}(A,B)$ definisana na sledeći način: za sve $a \in A$ i $b \in B$ je

$$\varphi(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(E_a) = F_b.$$

Jasno da je relacija φ kompletna i sirjektivna. Ako za neke $a \in A$ i $b \in B$ važi $(\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi)(a,b) = 1$, onda postoje $a' \in A$ i $b' \in B$ takvi da je $\varphi(a,b')\varphi^t(b',a')\varphi(a',b) = 1$, tj., postoje $a' \in A$ i $b' \in B$ takvi da je $\varphi(a,b') = \varphi(a',b') = \varphi(a',b) = 1$. odavde je $\phi(E_a) = F_{b'} = \phi(E_{a'}) = F_b$, pa je $\varphi(a,b) = 1$. Dakle, $\varphi \circ \varphi^t \circ \varphi \leqslant \varphi$, pa možemo zaključiti da je φ uniformna relacija.

Dalje, za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi

$$\begin{aligned} E_A^\varphi(a_1,a_2) = 1 \; &\Leftrightarrow \; (\forall b \in B)\varphi(a_1,b) = \varphi(a_2,b) \; \Leftrightarrow \; \phi(E_{a_1}, E_{a_2}) \\ &\Leftrightarrow \; E_{a_1} = E_{a_2} \; \Leftrightarrow \; E(a_1,a_2) = 1, \end{aligned}$$

pa je $E_A^\varphi = E$. Slično se dokazuje da je $E_B^\varphi = F$. $\square$

Indeks

Literatura

[1] L. Aceto, A. Ingolfsdottir, K. G. Larsen, J. Srba, Reactive Systems: Modelling, Specification and Verification, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] M. Akian, S. Gaubert and V. Kolokoltsov. Set coverings and invertibility of functional Galois connections, In: Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, G.L. Litvinov and V.P. Maslov, Eds, vol. 377 of Contemporary Mathematics, (2005) 19–51.

[3] E. Altman, B. Gaujal, A. Hordijk, Discrete-Event Control of Stochastic Networks: Multimodularity and Regularity, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1829. Springer, Berlin, 2003.

[4] A. Aminu, P. Butkovic, Non-linear programs with max-linear constraints: A heuristic approach, IMA Journal of Management Mathematics 2011; doi: 10.1093/imaman/dpq020.

[5] F. L. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.P. Quadrat, Synchronization and linearity, Chichester: Wiley, 1992.

[6] W. Bandler, L. J. Kohout, On the general theory of relational morphisms, International Joutnal of General Systems 13 (1986) 47–66.

[7] J. S. Baras, G. Theodorakopoulos, Path Problems in Networks, Morgan & Claypool Publishers, 2010.

[8] N. C. Basak, A. Gupta, On quotient machines of a fuzzy automaton and the minimal machine, Fuzzy Sets and Systems 125 (2002) 223–229.

[9] M. P. Béal, S. Lombardy, J. Sakarovitch, On the equivalence of $\mathbb{Z}$-automata, In: L. Caires et al. (eds.), ICALP 2005, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 3580 (2005) 397–409.

[10] M. P. Béal, S. Lombardy, J. Sakarovitch, Conjugacy and equivalence of weighted automata and functional transducers. In: D. Grigoriev,

J. Harrison, and E. A. Hirsch (eds.), CSR 2006, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 3967 (2006) 58–69.

[11] M. P. Béal, D. Perrin, On the generating sequences of regular languages on k symbols, Journal of the ACM 50 (2003) 955–980.

[12] R. Bělohlávek, Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles, Kluwer, New York, 2002.

[13] R. Bělohlávek, Determinism and fuzzy automata, Information Sciences 143 (2002) 205–209.

[14] R. Bělohlávek, V. Vychodil, Fuzzy Equational Logic, Springer, Berlin/Heidelberg, 2005.

[15] J. van Benthem, Modal correspodence theory, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, Institut for logica en Grondslagenonderyoek van Exstracte Wetenschappen, 1976.

[16] J. Berstel, Ch. Reutenauer, Rational Series and Their Languages, volume 12 of EATCS Monographs in Theoretical Computer Science, Springer Verlag, 1988.

[17] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq., New York, 1979.

[18] G. Birkhoff and T. Barti, Modern applied algebra, Mc Graw-Hill, inc, 1970.

[19] S. L. Bloom, Z. Ésik, Iteration Theories: The Equational Logic of Iterative Processes, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer, Berlin-Heilderberg, 1993.

[20] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Semigroups*, Prosveta, Niš, 1993, IV + 287 pp. (in Serbian).

[21] U. Brandes, T. Erlebach (eds.), Network Analysis: Methodological Foundations, (Lecture Notes in Computer Science, vol. 3418), Springer, 2005.

[22] T. Brihaye, Words and bisimulations of dynamical systems, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 9 (2) (2007) 11–32.

[23] P. Buchholz, Bisimulation relations for weighted automata, Theoretical Computer Science 393 (2008) 109–123.

[24] S. Burris, H. P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, New York, 1981.

[25] P. Butković, G.Hegedus, An Elimination Method for Finding All Solutions of the System of Linear Equations over an Extremal Algebra, Eko- nomicko-matematicky obzor 20 (1984) 203-215.

[26] P.Butković, Max-algebra: The linear algebra of combinatorics? Linear Algebra and Its Applications 367 (2003) 313–335.

[27] P. Butkovič, Max-linear Systems: Theory and Algorithms, Springer, New York, 2010.

[28] P. Butkovič, A. Aminu, Max-linear programming, IMA Journal of Management Mathematics 20 (3) (2009) 1–17.

[29] C. S. Calude, E. Calude, B. Khoussainov, Finite nondeterministic automata: Simulation and minimality, Theoretical Computer Science 242 (2000) 219–235.

[30] Y. Cao, G. Chen, E. Kerre, Bisimulations for fuzzy transition systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 19 (2011) 540-552.

[31] B. A. Carré, An algebra for network routing problems, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications 7 (1971) 273.

[32] I. Chajda, H. Länger, Quotients and homomorphisms of relational systems, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 49 (2010) 37–47.

[33] J.-M. Champarnaud, F. Coulon, NFA reduction algorithms by means of regular inequalities, Theoretical Computer Science 327 (2004) 241–253.

[34] W. Cheng, Z. Mo, Minimization algorithm of fuzzy finite automata, Fuzzy Sets and Systems 141 (2004) 439–448.

[35] S. J. Cho, J. G. Kim, W. S. Lee, Decompositions of T-generalized transformation semigroups, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 527–537.

[36] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadra, M. Viot, A linear-system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing, IEEE Transactions on Automatic Control, (1985) AC-30(3).

[37] M. Ćirić, *N. Damljanović*, M. Droste, J. Ignjatović, H. Vogler, Bisimulations for weighted automata over an additively idempotent semiring, (to appear).

[38] M. Ćirić, M. Droste, J. Ignjatović, H. Vogler, Determinization of weighted finite automata over strong bimonoids, Information Sciences 180 (2010) 3497–3520.

[39] M. Ćirić, J. Ignjatovic, M. Bašić, I. Jančić, Nondeterministic automata: Simulation, bisimulation and structural equivalence, submitted to Computers & Mathematics with Applications.

[40] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Fuzzy equivalence relations and their equivalence classes, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1295–1313.

[41] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Uniform fuzzy relations and fuzzy functions, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1054–1081.

[42] M. Ćirić, J. Ignjatović, *N. Damljanović*, M. Bašić, Bisimulations for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 186 (2012) 100-139.

[43] M. Ćirić, T. Petković and S. Bogdanović, *Languages and automata*, Prosveta, Niš, 2000.

[44] M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, Factorization of fuzzy automata, In: Csuhaj-Varju, E., Ésik, Z. (eds.), FCT 2007, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 4639 (2007) 213–225.

[45] M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, Fuzzy relation equations and reduction of fuzzy automata, Journal of Computer and System Sciences 76 (2010) 609–633.

[46] R. A. Cuninghame-Green, Process synchronisation in a steelworks-a problem of feasibility. London: English University Press 1960.

[47] R. A. Cuninghame-Green, Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour, Operations Research Quarterly 13 (1962) 95–100.

[48] R. A. Cuninghame-Green, Projections in minimax algebra, Mathematical Programming, 10(1)R. (1976) 111–123.

[49] R. A. Cuninghame-Green, Lecture notes in economics and math systems: Vol. 166. Minimax algebra, Springer, Berlin (1979). (Downloadable from http://web.mat.bham.ac.uk/P.Butkovic/).

[50] R. A. Cuninghame-Green, Minimax algebra and applications, Fuzzy Sets and Systems, 41 (1991) 251–267.

[51] R. A. Cuninghame-Green, Minimax algebra and applications, In Advances in imaging and electron physics 90 (1995) 1–121.

[52] R.A.Cuninghame-Green, P.Butković, The Equation $Ax = By$ over $(max, +)$, Theoretical Computer Science 293 (1991) 3-12.

[53] R.A.Cuninghame-Green and K.Zimmermann, Equation with Residual Functions, Comment. Math. Univ. Carolinae 42 (2001) 729-740.

[54] *N. Damljanović*, Heterogeneous two-sided linear systems of matrix inequalities over a max-plus algebra, (to appear).

[55] *N. Damljanović*, M. Ćirić, S. Bogdanović, Congruence openings of additive Green's relations on a semiring, Semigroup Forum 82 (3) (2011) 437–454.

[56] *N. Damljanović*, M. Ćirić, J. Ignjatović, Multivalued relations over lattices and semirings and their applications, LINZ 2011 - 32nd Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz, Austria, 2011.

[57] *N. Damljanović*, M. Ćirić, J. Ignjatović, Fazzy automata: equivalence and bisimulation, International Workshop on Weighted Automata: Theory and Applications, WATA 2010, Leipzig, Germany, May 3-7, 2010.

[58] *N. Damljanović*, M. Ćirić, J. Ignjatović, Weighted and fuzzy automata: Bisimulation and structural equivalence, Workshop on Automata and Logic, Dresden, Germany, 30. August - 6. September, 2009.

[59] *N. Damljanović*, M. Ćirić, J. Ignjatović, Fuzzy and weighted automata: Bisimulation and structural equivalence, The 3rd Novi Sad Algebraic Conference - NSAC09, Novi Sad, Serbia, August 17-21, 2009.

[60] M. Demirci, Fuzzy functions and their applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 252 (2000) 495–517.

[61] M. Demirci, Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part I: Fuzzy functions and their applications, International Journal of general Systems 32 (2) (2003) 123–155.

[62] M. Demirci, A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations – I: general representation results, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 437–472.

[63] B. De Baets, Analytical solution methods for fuzzy relational equations, in: D. Dubois, H. Prade (eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets,

The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 291–340.

[64] W. De Nooy, A. Mrvar, V. Batagelj, Exploratory Network Analysis with Pajek, Cambridge University Press, 2005.

[65] A. Di Nola, E. Sanchez, W. Pedrycz, S. Sessa, Fuzzy Relation Equations and Their Application to Knowledge Engineering, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1989.

[66] P. Doreian, V. Batagelj, A. Ferligoj, Generalized Blockmodeling, Cambridge University Press, 2005.

[67] A. Dovier, C. Piazza, A. Policriti, An efficient algorithm for computing bisimulation equivalence, Theoretical Computer Science 311 (2004) 221–256.

[68] M. Droste, W. Kuich, H. Vogler eds., Handbook of Weighted Automata, Springer, Berlin, 2009.

[69] M. Droste, T. Stüber, H. Vogler, Weighted finite automata over strong bimonoids, Information Sciences 180 (2010) 156–166.

[70] M. Droste, H. Vogler, Kleene and Büchi results for weighted automata and multi-valued logics over arbitrary bounded lattices, in: Y. Gao et al. (Eds.),560 DLT 2010, Lecture Notes in Computer Science, 6224, 2010, pp. 160–172.

[71] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[72] D. Dubois, H. Prade (eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[73] S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines, Vol. B, Academic Press, New York, 1976.

[74] L. Elsner, P. van den Driessche, On the power method in max-algebra, Linear Algebra and Its Applications 302/303 (1999) 17–32.

[75] G. M. Engel, H. Schneider, Cyclic and diagonal products on a matrix, Linear Algebra and Its Applications 7 (1973) 301Ű335.

[76] Z. Ésik, W. Kuich, A generalization of Kozen's axiomatization of the equational theory of the regular sets, in: Words, semigroups, and transductions, World Scientific, River Edge, NJ, 2001, pp. 99–114.

[77] Z. Ésik, A. Maletti, Simulation vs. Equivalence, CoRR abs/1004.2426 (2010).

[78] M. Forti, F. Honsell, Set theory with free construction principle, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc., IV(10) 1983, 493-522.

[79] Gaubert, S. et al., Algebres max–plus et applications en informatique et automatique, 26eme ecole de printemps d'informatique theorique Noirmoutier, 1998.

[80] R. Gentilini, C. Piazza, A. Policriti, From bisimulation to simulation: coarsest partition problems, Journal of Automated Reasoning 31 (2003) 73–103.

[81] B. Giffler, Scheduling general production systems using schedule algebra, Naval Research Logistics Quarterly 10 (1963) 237–255.

[82] B. Giffler, Schedule algebra: a progress report, Naval Research Logistics Quarterly, 15 (1968) 255–280.

[83] K. Glazek, A Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Science, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[84] J. A. Goguen, L-fuzzy sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications 18 (1967) 145–174.

[85] S. Golan, Semirings and their Applications, Kluwer Academic Publisher, 1999.

[86] M. Gondran, M. Minoux, Valeurs propres et vecteur propres dans les dioides et leur interpretation en theorie des graphes, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches Serie C Mathematiques et Informatiques 2 (1977) 25–41.

[87] M. Gondran, M. Minoux, Graphs, Dioids and Semirings, Springer, New York, 2008.

[88] M. Gondran, M. Minoux, Dioids and semirings: Links to fuzzy sets and other applications, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1273–1294.

[89] G. Grätzer, Universal Algebra, D. Van Nostrand Comp., Princeton, 1968.

[90] G. Grätzer, General lattice theory, Akademie-Verlag, Berlin,1978.

[91] J. Gunawardena, Idempotency, Cambridge University Press 1998.

[92] M. M. Gupta, G. N. Saridis, B. R. Gaines, Fuzzy Automata and Decision Processes, North-Holland, New York, 1977.

[93] P. Hájek, Mathematics of fuzzy logic, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[94] R. A. Hanneman, M. Riddle, Introduction to Social Network Methods, University of California, Riverside, 2005.

[95] U. Hebish, H. J. Weinert, Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science, World Scientific, Singapore, 1998.

[96] B. Heidergott, Max Plus Stochastic Systems and Perturbation Analysis, Springer, New York 2006.

[97] B. Heidergott, G.J. Olsder, J. van der Woude, Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems, Princeton University Press, Princeton 2006.

[98] T. A. Henzinger, P. W. Kopke, A. Puri, P. Varaiya, What's decidable about hybrid automata? Journal of Computer and System Sciences 57 (1998) 94–124.

[99] J. Högberg, A. Maletti, J. May, Backward and forward bisimulation minimisation of tree automata, in: J. Holub, J. Žďárek (eds.), IAA07, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 4783 (2007) 109–121.

[100] J. Högberg, A. Maletti, J. May, Backward and forward bisimulation minimisation of tree automata, Theoretical Computer Science 410 (2009) 3539–3552.

[101] U. Höhle, Commutative, residuated ℓ-monoids, in: U. Höhle and E. P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, 1995, pp. 53–106.

[102] J. Ignjatović, Fazi relacije, automati i jezici, Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2007.

[103] J. Ignjatović, M. Ćirić, Formal power series and regular operations on fuzzy languages, Information Sciences 180 (2010) 1104–1120.

[104] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices, Information Sciences 178 (2008) 164–180.

[105] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, Fuzzy homomorphisms of algebras, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 2345–2365.

[106] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, On the greatest solutions to certain systems of fuzzy relation inequalities and equations, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 3081–3113.

[107] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, T. Petković, Myhill-Nerode type theory for fuzzy languages and automata, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1288-1324.

[108] J. Ignjatović, M. Ćirić, *N. Damljanović*, I. Jančić, Weakly linear systems of fuzzy relation inequalities: The heterogeneous case, Fuzzy Sets and Systems, In Press, doi:10.1016/j.fss.2011.11.011.

[109] J. Ignjatović, M. Ćirić, N. Damljanović, Weakly linear systems of fuzzy relation inequalities and equations LINZ 2011 - 32nd Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz, Austria, 2011.

[110] L. Ilie, S. Yu, Algorithms for computing small NFAs, in: K. Diks et al. (eds): MFCS 2002, Lecture Notes in Computer Science 2420 (2002) 328–340.

[111] L. Ilie, S. Yu, Reducing NFAs by invariant equivalences, Theoretical Computer Science 306 (2003) 373–390.

[112] L. Ilie, G. Navarro, S. Yu, On NFA reductions, in: J. Karhumäki et al. (eds): Theory is Forever, Lecture Notes in Computer Science 3113 (2004) 112–124.

[113] L. Ilie, R. Solis-Oba, S. Yu, Reducing the size of NFAs by using equivalences and preorders, in: A. Apostolico, M. Crochemore, and K. Park (Eds): CPM 2005, Lecture Notes in Computer Science 3537 (2005) 310–321.

[114] I. Itenberg, I. Mikhalkin, E. Shustin, Tropical algebraic geometry, Springer, Berlin 2009.

[115] Z. Jančić, J. Ignjatović, M. Ćirić, An improved algorithm for determinization of weighted and fuzzy automata, Information Sciences 181 (2011) 1358–1368.

[116] P. C. Kannellakis, S. A. Smolka, CCS expressions, finite state processes, and three problems of equivalence, Information and Computation 86 (1990) 43–68.

[117] E. Kim, L. J. Kohout, Generalized morphisms, a new tool for comparative evaluation of performance of fuzzy implications, t-norms and co-norms in relational knowledge elicitation, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 297–315.

[118] Y. H. Kim, J. G. Kim, S. J. Cho, Products of T-generalized state machines and T-generalized transformation semigroups, Fuzzy Sets and Systems 93 (1998) 87–97.

[119] F. Klawonn, Fuzzy points, fuzzy relations and fuzzy functions, in: V. Novâk and I. Perfilieva (Eds.), Discovering World with Fuzzy Logic, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000, pp. 431–453.

[120] S.C. Kleene, Representation of events in nerve sets and finite automa, Automata Studies, Annals of Mathematical Studies 34 (1956) 3-41.

[121] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application, Prentice-Hall, Englevood Cliffs, NJ, 1995.

[122] V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, Idempotent analysis and its applications, Kluwer Academic Publishers 1997.

[123] S. Konstantinidis, N. Santean, S. Yu, Fuzzification of rational and recognizable sets, Fundamenta Informaticae 76 (2007) 413–447.

[124] D. C. Kozen, Automata and Computability, Springer, 1997.

[125] W. Kuich, A. Salomaa, Semirings, Automata, Languages, volume 6 of EATCS Monographs in Theoretical Computer Science, Springer Verlag, 1986.

[126] H. V. Kumbhojkar, S. R. Chaudhari, On covering of products of fuzzy finite state machines, Fuzzy Sets and Systems 125 (2002) 215–222.

[127] O. Kupferman, Y. Lustig, Lattice automata, in: Proceedings of VWCAI2007, Lecture Notes in Computer Science 4349 (2007) pp. 199–213.

[128] V. Lazarević, M. Žižović, *N. Damljanović*, Root product of lattices, Filomat (to appear).

[129] E. T. Lee, L. A. Zadeh, Note on fuzzy languages, Information Sciences 1 (1969) 421–434.

[130] H. Lei, Y. M. Li, Minimization of states in automata theory based on finite lattice-ordered monoids, Information Sciences 177 (2007) 1413–1421.

[131] P. Li, Y. M. Li, Algebraic properties of LA-languages, Information Sciences 176 (2006) 3232–3255.

[132] Y. M. Li, Finite automata theory with membership values in lattices, Information Sciences 181 (2011) 1003–1017.

[133] Y. M. Li, W. Pedrycz, Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice ordered monoids, Fuzzy Sets and Systems 156 (2005) 68–92.

[134] Y. M. Li, W. Pedrycz, Minimization of lattice finite automata and its application to the decomposition of lattice languages, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1423–1436.

[135] Z. Li, P. Li, Y. M. Li, The relationships among several types of fuzzy automata, Information Sciences 176 (2006) 2208–2226.

[136] F. Lin, H. Ying, Modeling and control of fuzzy discrete event systems, IEEE Transactions on Man, Systems and Cybernetics – Part B 32 (2002) 408–415.

[137] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, (2005). Idempotent analysis and mathematical physics. In Contemporary mathematics 377, American Mathematical Society 2005.

[138] S. Lombardy, On the construction of reversible automata for reversible languages, In: P. Widmayer et al. (eds.), ICALP 2002, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 2380 (2002) 170–182.

[139] S. Lombardy, J. Sakarovitch, Derivatives of rational expressions with multiplicity, Theoretical Computer Science 332 (2005) 141–177.

[140] F. Lorrain, H. C. White, Structural equivalence of individuals in social networks, Journal of Mathematical Sociology 1 (1971) 49–80.

[141] N. Lynch, F. Vaandrager, Forward and backward simulations: Part I. Untimed systems, Information and Computation 121 (1995), 214–233.

[142] P. Mika, Social Networks and the Semantic Web, Springer, 2007.

[143] D. S. Malik, J. N. Mordeson, M. K. Sen, Products of fuzzy finite state machines, Fuzzy Sets and Systems 92 (1997) 95–102.

[144] D. S. Malik, J. N. Mordeson, M. K. Sen, Minimization of fuzzy finite automata, Information Sciences 113 (1999) 323–330.

[145] R. Milner, A calculus of communicating systems, in G. Goos and J. Hartmanis (eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 92, Springer, 1980.

[146] R. Milner, Communication and Concurrency, Prentice-Hall International, 1989.

[147] R. Milner, Communicating and Mobile Systems: the π-Calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[148] J. N. Mordeson, D. S. Malik, Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, 2002.

[149] R. Paige, R. E. Tarjan, Three partition refinement algorithms, SIAM Journal of Computing 16 (1987) 973–989.

[150] D. Park, Concurrency and automata on infinite sequences, in: P. Deussen (ed.), Proc. 5th GI Conf., Karlsruhe, Germany, Lecture Notes in Computer Science 104 (1981), Springer-Verlag, pp. 167–183.

[151] W. Pedrycz, F. Gomide, Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing, Wiley-IEEE Press, 2007.

[152] K. Peeva, Finite L-fuzzy acceptors, regular L-fuzzy grammars and syntactic pattern recognition, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12 (2004) 89–104.

[153] K. Peeva, Finite L-fuzzy machines, Fuzzy Sets and Systems 141 (2004) 415–437.

[154] K. Peeva, Y. Kyosev, Fuzzy Relational Calculus: Theory, Applications, and Software (with CD-ROM), in Series “Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory”, Vol 22, World Scientific, 2004.

[155] K. Peeva, Y. Kyosev, Algorithm for solving max-product fuzzy relational equations, Soft Computing 11 (2007) 593–605.

[156] K. Peeva, Z. Zahariev, Computing behavior of finite fuzzy machines – Algorithm and its application to reduction and minimization, Information Sciences 178 (2008) 4152–4165.

[157] I. Perfilieva, Fuzzy function as an approximate solution to a system of fuzzy relation equations, Fuzzy Sets and Systems 147 (2004) 363–383.

[158] I. Perfilieva, S. Gottwald, Fuzzy function as a solution to a system of fuzzy relation equations, International Journal of General Systems 32 (2003) 361–372.

[159] I. Perfilieva, V. Novák, System of fuzzy relation equations as a continuous model of IF-THEN rules, Information Sciences 177 (2007) 3218–3227.

[160] T. Petković, Congruences and homomorphisms of fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 444–458.

[161] J. E. Pin, Syntactic semigroups, In: G. Rozenberg, A. Salomaa (eds.), Handbook of Formal Languages, Vol. 1, Springer, Berlin-Heidelberg, 1997, pp. 679–746.

[162] J. E. Pin, Tropical semirings, In: J. Gunawardena, ed., Idempotency, Cambridge (1998) 50–60.

[163] D. W. Qiu, Automata theory based on completed residuated lattice-valued logic (I), Science in China, Ser. F, 44 (6) (2001) 419–429.

[164] D. W. Qiu, Automata theory based on completed residuated lattice-valued logic (II), Science in China, Ser. F, 45 (6) (2002) 442–452.

[165] D. W. Qiu, Characterizations of fuzzy finite automata, Fuzzy Sets and Systems 141 (2004) 391–414.

[166] D. W. Qiu, Supervisory control of fuzzy discrete event systems: a formal approach, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B 35 (2005) 72–88.

[167] D. W. Qiu, Pumping lemma in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: A note, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 2128–2138.

[168] D. W. Qiu, A note on Trillas' CHC models, Artificial Intelligence 171 (2007) 239–254.

[169] D. W. Qiu, F. C. Liu, Fuzzy discrete-event systems under fuzzy observability and a test algorithm, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 17 (3) (2009) 578–589.

[170] F. Ranzato, F. Tapparo, Generalizing the Paige-Tarjan algorithm by abstract interpretation, Information and Computation 206 (2008) 620–651.

[171] M. Roggenbach, M. Majster-Cederbaum, Towards a unified view of bisimulation: a comparative study, Theoretical Computer Science 238 (2000) 81-130.

[172] S. Roman, Lattices and Ordered Sets, Springer, New York, 2008.

[173] G. Rozenberg, A. Salomaa (Eds.), Handbook of Formal Languages, Vol 1.-Word, Language, Grammar, Springer, 1997.

[174] J. J. M. M. Rutten, Automata and coinduction (an exercise in coalgebra), In: Sangiorgi, D., de Simone, R. (eds.), CONCUR'98, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 1466 (1998) 193–217.

[175] J. Sakarovitch, Elements of Automata Theory, Cambridge University Press, 2009.

[176] A. Salomaa, M. Soittola, Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series, Text and Monographs in Computer Science, Springer Verlag, 1979.

[177] E. Sanchez, Equations de relations floues, Thèse de Doctorat, Faculté de Médecine de Marseille, 1974.

[178] E. Sanchez, Resolution of composite fuzzy relation equations, Information and Control 30 (1976) 38–48.

[179] E. Sanchez, Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in Brouwerian logic, in: M. M. Gupta, G. N. Saridis, B. R. Gaines (Eds.), Fuzzy Automata and Decision Processes, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 221–234.

[180] E. Sanchez, Resolution of eigen fuzzy sets equations, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 69–74.

[181] D. Sangiorgi, On the origins of bisimulation and coinduction, ACM Transactions on Programming Languages and Systems 31 (4) (2009) 111–151.

[182] E. S. Santos, Maximin automata, Information and Control 12 (1968) 367–377.

[183] E. S. Santos, On reduction of max–min machines, Journal of Mathematical Analysis and Applications 37 (1972) 677–686.

[184] E. S. Santos, Fuzzy automata and languages, Information Sciences 10 (1976) 193–197.

[185] G. Schmidt, Homomorphism and isomorphism theorems generalized from a relational perspective, In: R. A. Schmidt (ed.), RelMiCS / AKA 2006, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 4136 (2006) 328–342.

[186] M. P. Schutzenberger, On the definition of a family of automata, Information and Control 4 (1961) 254–270.

[187] S. S. Skiena, The Algorithm Design Manual, Springer, London, 2008.

[188] A. Stamenković, Certan matrix inequalities over the max-plus algebra, (to appear).

[189] A. Stamenković, M. Ćirić, J. Ignjatović, Reduction of fuzzy automata by means of fuzzy quasi-orders, submitted to Information Sciences.

[190] A. Stamenković, M. Ćirić, Construction of fuzzy automata from fuzzy regular expressions, Fuzzy Sets and Systems (to apper).

[191] H. S. Vandiver, Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold, Bulletin of the American Mathematical Society 40 (1934) 914–920.

[192] N. N. Vorobyov, Extremal algebra of positive matrices, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 3 (1967) 39–71 (in Russian).

[193] N. N. Vorobyov, (1970). Extremal algebra of nonnegative matrices, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 6 (1970) 303–311 (in Russian).

[194] M. Walicki, M. Białasik, Categories of relational structures, In: F. P. Presicce (ed.), Recent Trends in Algebraic Developments Techniques, WADT'97, Springer, Berlin-Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 1376 (1998) 418–433.

[195] E.A. Walkup and G.Boriello, A General Linear Max-plus Solution Tech- nique, In: J. Gunawardena, ed., Idempotency, Cambridge (1988) 406–415.

[196] W. Wechler, The Concept of Fuzziness in Automata and Language Theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

[197] W. G. Wee, On generalizations of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification, Ph.D. Thesis, Purdue University, June 1967.

[198] W. G. Wee, K. S. Fu, A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 5 (1969) 215–223.

[199] D. R. White, K. P. Reitz, Graph and semigroup homomorphisms on networks and relations, Social Networks 5 (1983) 143–234.

[200] L. H. Wu, D. W. Qiu, Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: Reduction and minimization, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1635–1656.

[201] H. Xing, D. W. Qiu, Pumping lemma in context-free grammar theory based on complete residuated lattice-valued logic, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1141–1151.

[202] H. Xing, D. W. Qiu, Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: A categorical approach, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 2416–2428.

[203] H. Xing, D. W. Qiu, F. C. Liu, Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: Pushdown automata, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1125–1140.

[204] H. Xing, D. W. Qiu, F. C. Liu, Z. J. Fan, Equivalence in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1407–1422.

[205] R. T. Yeh, On relational homomorphisms of automata, Information and Control 12 (1968) 140–155.

[206] R. T. Yeh, Toward an algebraic theory of fuzzy relational systems, Technical Report: CS-TR-73-25, University of Texas at Austin, 1973.

[207] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control 8 (3) (1965), 338–353.

[208] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences 3 (1971) 177–200.

[209] M. Žižović, *N. Damljanović*, V. Lazarević, N. Deretić, New method for multicriteria analysis, U.P.B. Sci. Bull. Series A 73 (2) (2011) 13–22.

[210] K. Zimmermann, Extremali Algebra, Vydani Publibace 1976.

[211] U. Zimmermann, Annals of discrete mathematics: Vol. 10, Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures, Amsterdam: North-Holland 1981.

	ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ **НИШ**
	КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:		
Идентификациони број, ИБР:		
Тип документације, ТД:	монографска	
Тип записа, ТЗ:	текстуални / графички	
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација	
Аутор, АУ:	Нада Ж. Дамљановић	
Ментор, МН:	Мирослав Д. Ћирић	
Наслов рада, НР:	**Вишевредносне релације над мрежама и полупрстенима: Теорија и примене**	
Језик публикације, ЈП:	српски	
Језик извода, ЈИ:	енглески	
Земља публиковања, ЗП:	Србија	
Уже географско подручје, УГП:	Србија	
Година, ГО:	2012.	
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт	
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33	
Физички опис рада, ФО: (поглавqа/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 по.; vi, 160стр.; 211 реф.; граф. прикази	
Научна област, НО:	математика	
Научна дисциплина, НД:	алгебра, математичка логика	
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	резидуиране мреже, адитивно идемпотентни полупрстени, вишевредносне релације, релацијске неједначине, бисимулације	
УДК	510.22, 512.55, 512.56, 512.64, 519.713	
Чува се, ЧУ:	библиотека	
Важна напомена, ВН:		
Извод, ИЗ:	Ова дисертација се бави оним својствима двовредносних релација које се могу пренети и на вишевредносне релације. Највише изучаван тип вишевредносних релација су фази релације. Концепт фази релације увео је L. A. Zadeh, који је предложио да се истинитосне вредности узимају из реалног јединичног интервала [0,1], а нешто касније, J. A. Goguen је предложио изучавање фази скупова и релација са истинитосним вредностима у произвољној мрежи. Други важан тип вишевредносних релација су вишевредносне релације између коначних скупова са вредностима у пољу, прстену или полупрстену. Такве вишевредносне релације познате су као матрице. У дисертацији је развијена теорија вишевредносних релација над мрежама и адитивно идемпотентним полупрстенима. Посебно, изучавају се слабо линеарни системи неједначина и једначина које укључују вишевредносне релације, као и примене тих система.	
Датум прихватања теме, ДП:	23.02.2011	
Датум одбране, ДО:		
Чланови комисије, КО: Председник:		
Члан:		
Члан:		
Члан:		
Члан, ментор:		

	PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET **NIŠ**
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO:		
Identification number, INO:		
Document type, DT:		monograph
Type of record, TR:		textual / graphic
Contents code, CC:		doctoral dissertation
Author, AU:		Nada Ž. Damljanović
Mentor, MN:		Miroslav D. Ćirić
Title, TI:		**Multivalued relations over lattices and semirings: Theory and applications**
Language of text, LT:		Serbian
Language of abstract, LA:		English
Country of publication, CP:		Serbia
Locality of publication, LP:		Serbia
Publication year, PY:		2012
Publisher, PB:		author’s reprint
Publication place, PP:		Niš, Višegradska 33
Physical description, PD: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)		5 ch.; vi, 160 p.; 211 ref.; graphic representations
Scientific field, SF:		mathematics
Scientific discipline, SD:		algebra, mathematical logic
Subject/Key words, S/KW:		residuated lattices, additively idempotent semirings, multivalued relations, relation inequalities, bisimulations
UC		510.22, 512.55, 512.56, 512.64, 519.713
Holding data, HD:		library
Note, N:		
Abstract, AB:		This thesis deals with those properties of twovalued relations that can be transferred to multivalued relations. The most studied type of multivalued relations are fuzzy relations. In Zadeh’s original definition of a fuzzy relation values were taken from the real unit interval [0,1], whereas Goguen proposed the study of fuzzy sets and relations with values in an arbitrary lattice. Another important type of multivalued relations are multivalued relations among finite sets with values in a field, ring, or a semiring. They are well known as matrices. The thesis develops the theory of multivalued relations over lattices and additively idempotent semirings. In particular, we study weakly linear systems of inequalities and equations which involve multivalued relations, as well as applications of these systems.
Accepted by the Scientific Board on, ASB:		23.02.2011
Defended on, DE:		
Defended Board, DB:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	