

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Marija Stojanović Krasić

**Površinske lokalizovane mode u nelinearnim
optičkim rešetkama**

Doktorska disertacija

Niš, 2013.

Bibliografija

Radovi publikovani u časopisima vrhunskog međunarodnog značaja (M21):

1. M. Stepić, A. Maluckov, **M. Stojanović**, F. Chen, and D. Kip, “Modulational instability and solitary waves in one-dimensional lattices with intensity-resonant nonlinearity”, Phys. Rev. A 78 (2008) 043819.
2. **M. Stojanović**, A. Maluckov, LJ. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Surface solitons in trilete lattices“, Physica D 240 (2011) 1489-1496.

Rad prihvaćen u časopisu Physica Scripta (M22):

M. Stojanović, M. D. Petrović, G. Gligorić, A. Maluckov, Lj. Hadžievski and B. A. Malomed, “Vortex complexes in two linearly one-site linked 2D optical lattices”.

Radovi saopšteni na skupovima međunarodnog značaja štampani u izvodu (M34):

1. **M. Stojanović**, A. Maluckov, LJ. Hadžievski and B. A. Malomed, Surface solitons in trilete lattices, PHOTONICA2011, III International School and Conference on Photonics, August 29 – September 2. 2011, Belgrade, Serbia.

2. **M. Stojanović**, M. D. Petrović, G. Gligorić, A. Maluckov, Lj. Hadžievski and B. A. Malomed, Vortex complexes in two linearly one-site linked 2D optical lattices, ICOM2012, III International Conference of the Physics of Optical Materials and Devices, September 3th -6th 2012, Belgrade, Serbia.

OD SVIH DOBRIH STVARI ZNANJE JE
NAJBOLJE; ZATO ŠTO GA NIKO NE MOŽE
UKRASTI, ZATO ŠTO GA NIKO NE MOŽE
KUPITI, ZATO ŠTO JE NEUNIŠTIVO.

HITOPADEŠA

Želela bih da zahvalim svima koji su mi, na direktan ili indirektan način, pomogli u sticanju potrebnog znanja za pisanje ove teze.

Na prvom mestu želela bih da zahvalim prof. Aleksandri Maluckov koja me je svesrdno savetovala i pomagala u svim fazama izrade rada. Ovim putem joj izražavam najtopliju zahvalnost za svu pomoć, vreme, strpljenje, podršku, prijateljstvo i brojne korisne savete koji su mi bili i biće od velike pomoći u radu i životu.

Najtoplije zahvaljujem dr Goranu Gligoriću na nesebičnom angažovanju prilikom izrade ove disertacije, na savetima koji su doprineli kvalitetu ovog rada kao i na izuzetnoj saradnji i razumevanju.

Veliku zahvalnost za predlog ove interesantne teme dugujem dr Ljupču Hadžievskom, kao i na podršci i korisnim smernicama koje sam mogla čuti.

Veliku zahvalnost dugujem i dr Milutinu Stepiću na značajnim sugestijama koje mi je dao u toku izrade rada i same disertacije.

Zahvaljujem se na podršci i svojim kolegama i prijateljima; Nenadu Milojeviću, Dragani Milosavljević, dr Petri Beličev i Jeleni i Saši Kocić .

Na kraju jedno veliko hvala mojoj porodici, pre svega mami koja je bila moj stub, i Teodori koja je bila moja radost u toku izrade ove teze. Zahvaljujem se i svom suprugu na podršci. Veliku zahvalnost dugujem prof. dr Stevanu Iliću na pomoći koju mi je pružao u najtežim trenucima.

Marija Stojanović Krasić

Sadržaj

I Uvod.....	1
II O optičkim rešetkama.....	4
2.1 Periodičnost na primeru fotonskih rešetki	4
2.2 Osnovne jednačine	7
2.3 Linearna svojstva rešetki.....	10
2.4 Nelinearnost i diskretni sistemi.....	13
2.5 Kerova nelinearnost.....	15
III Nelinearne lokalizovane strukture.....	17
3.1 Matematički model.....	17
3.2 Vrste solitona	18
3.3 Stabilnost solitona.....	22

IV Prostiranje svetlosti u 1D i 2D rešetkama.....26

- 4.1 Dve serijski spregnute polubeskonačne 1D linearne rešetke 26
- 4.2 Dve serijski linearno spregnute nelinearne polubeskonačne 1D rešetke 29
- 4.3 Dve paralelne linearno spregnute na jednom sajtu 1D nelinearne rešetke 38
- 4.4 Tri polubeskonačne 1D nelinearne rešetke spregnute linearno na jednom sajtu..... 47
- 4.5 Dve 2D beskonačne nelinearne rešetke linearno spregnute na jednom sajtu 62
- 4.6 Kompleksi vrtloga formirani na spoju dve 2D beskonačne nelinearne rešetke 74

V Zaključak.....79

VI Dodatak.....82

VII Literatura.....88

I Uvod

Površinske talasne mode predstavljaju poseban tip talasa lokalizovanih na graničnoj površini dve sredine. Ovaj fenomen je prvi put istraživao u kontekstu lokalizovanih elektronskih Tamovih (Tamm) stanja formiranih na graničnoj površini periodične kristalne rešetke [1]. Optičke rešetke predstavljaju optički analogon kristalnih, u kojima su atomi i molekuli zamenjeni materijalima različitih dielektričnih konstanti. Na taj način se, umesto periodičnog Kulonovog (Coulomb) potencijala atoma i molekula, javlja periodična dielektrična konstanta, a time i periodična promena indeksa prelamanja. Ukoliko dielektrične konstante, materijala od kojih je napravljena rešetka, imaju različite vrednosti i ukoliko je apsorpcija svetlosti dovoljno mala onda odbijanje i prelamanje svetlosti unutar rešetke prouzrokuju iste fenomene za fotone kao što je atomski potencijal prouzrokovao za elektrone. Ti fenomeni su posledica zonske strukture tj. prisustva zabranjenih i dozvoljenih zona u energetskom (frekventnom) spektru rešetke, koje se javljaju usled periodičnosti sistema. U zavisnosti od strukture rešetke postoje jednodimenzionalne (1D), dvodimenzionalne (2D) i trodimenzionalne (3D) rešetke s tim što se sa povećanjem dimenzionalnosti uvećavaju mogućnosti manipulacije sa prostiranjem svetlosti.

U optici su teorijski opisane i eksperimentalno nađene površinske lokalizovane mode zahvaljujući samozarobljavanju svetlosti u okolini ivice niza talasovoda [2, 3]. Različiti tipovi površinskih solitona pronađeni su i u Boze-Ajnštajn (Bose-Einstein) kondenzatima [4-7]. Površinske mode se mogu posmatrati kao diskretni optički solitoni lokalizovani u blizini površine [8-11] ili kao solitoni unutar rešetke stvoreni na defektu [12-16]. Diskretne površinske mode u uniformnim rešetkama imaju osobinu da postoje jedino ukoliko im je vrednost snage iznad neke kritične vrednosti. Česta pojava u ovakvim sistemima je i bistabilnost tj. da različiti tipovi površinskih moda postoje istovremeno, kao posledica narušenja simetrije sistema [17]. Generalno govoreći, periodična sredina [18] implicira čitav niz fenomena kao što su Blohovi talasi, diskretna difrakcija, dok u kombinaciji sa nelinearnošću i/ili defektom može doći i do formiranja lokalizovanih moda.

Različita geometrija optičkih rešetki značajno utiče na tip i stabilnost lokalizovanih rešenja koja se javljaju u takvim strukturama. U rešetkama su često prisutni defekti bilo u vidu lokalne promene u periodičnosti rešetke (tzv. tačkasti defekti) bilo u vidu "dislokacija" koje nastaju uklanjanjem ili menjanjem elemenata strukture u konkretnom pravcu (prošireni defekti) a mogu se javiti i na površini kristala (površinski defekti). Defekti koji će u ovoj disertaciji biti od interesa nastaju usled spajanja rešetki čije se međusobno rastojanje može kontrolisati tokom proizvodnog procesa i time uticati na pojavu željenih moda u konkretnom sistemu. Površinske mode nastale usled postojanja defekta predviđene su teorijski [19-23] i dobijene eksperimentalno [15, 24-26] u različitim kontinualnim i diskretnim sredinama. Odlika površinski lokalizovanih moda je velika osetljivost na promenu vrednosti relevantnih parametara i kvalitativno menjanje

ponašanja sistema u zavisnosti od parametara tj. bifurkacije i narušenje simetrije sistema, a koja može biti kontrolisana uključivanjem odgovarajućeg defekta [22].

Predmet ove disertacije je istraživanje površinskih lokalizovanih struktura u nelinearnim diskretnim fotonskim sistemima i sistemima sa talasima materije. Usled nelinearnosti sistema, prolazak svetlosti kroz fotonsku rešetku dovodi do lokalne promene indeksa prelamanja sredine, pri čemu se omogućavaju uslovi za stvaranje lokalizovanih struktura. Takođe, odnos između linearnog člana koji opisuje sprezanje između rešetki i linearnog člana koji opisuje sprezanje između elemenata svake od komponentnih rešetki ponaosob je dominantan faktor koji utiče kako na oblast postojanja solitona, tako i na samu stabilnost solitona.

Cilj istraživanja u ovom radu je da se dobijeni rezultati iskoriste kao osnova na kojoj bi mogle biti zasnovane praktične realizacije prekidačkih, logičkih, umnožavačkih funkcija, odnosno načini manipulacije sa svetlošću u fotonskim sistemima kao delovima savremenih optoelektronskih uređaja ili računara baziranih na optičkim elementima i fenomenima. Štaviše, ova istraživanja mogu biti korisna i u kontekstu integrisanih fotonskih sistema sa talasima materije, kao na primer čipova sa Boze-Ajnštajn kondenzatima integrisanim sa fotonskim elementima [27-29].

Druga glava disertacije opisuje osnovna svojstva optičkih rešetki na primeru jednodimenzionalnih fotonskih kristala. Dat je kratak osvrt na istoriju procesa dobijanja fotonskih rešetki i na opis uticaja periodičnosti sistema na prostiranje svetlosnih talasa. Predstavljeni su i dvodimenzionalni i trodimenzionalni fotonski kristali i mogućnosti njihove primene u savremenim fotonskim uređajima. Prostiranje svetlosti u fotonskom kristalu opisano je Maksvelovim (Maxwell) jednačinama. Imajući u vidu periodičnost kristala i njome uslovljenu diskretnu translacionu simetriju sistema, objašnjen je način dobijanja disperzione jednačine. Analitički i numerički je rešena disperziona jednačina i dobijene dozvoljene i zabranjene zone (gepovi) u spektru frekvencija u kojima je redom moguće ili nije moguće očekivati prostiranje svetlosti date frekvencije. Opisana su linearna svojstva rešetki i osobine difrakcije koja se javlja u takvim okolnostima. Uveden je pojam nelinearnosti i njen uticaj na formiranje lokalizovanih struktura. Posebno je razmatrana Kerova (Kerr) nelinearnost.

Treća glava disertacije objašnjava način modelovanja sistema u kojima se mogu formirati lokalizovane mode. Uvedena je modelna 1D diskretna nelinearna Šredingerova (Schrödinger) jednačina (DNŠJ) čija stacionarna rešenja mogu biti lokalizovane mode. Pomenute su različite vrste lokalizovanih moda i to: svetli i tamni solitoni i strukture tipa vrtloga (vortex) uz objašnjenje njihovih osnovnih karakteristika. U okviru ove glave objašnjeni su načini određivanja stabilnosti solitona. U tu svrhu uveden je Vahitov-Kolokolov (Vakhitov-Kolokolov) kriterijum, u daljem tekstu VK kriterijum i spektralna analiza.

Četvrta glava disertacije posvećena je istraživanju formiranja i stabilnosti različitih tipova lokalizovanih površinskih moda (fundamentalni solitoni, solitonski kompleksi, strukture tipa vrtloga). Razmatrani su sistemi sa spregnutim jednodimenzionalnim i

dvodimenzionalnim optičkim rešetkama sa Kerovom tj. kubnom nelinearnošću. Detaljno su analizirane lokalizovane površinske mode koje se javljaju na spoju dve linearno serijski spregnute nelinearne polubeskonačne 1D rešetke. Takođe, posmatrane su i paralelno spregnute nelinearne 1D rešetke. Analizirane su lokalizovane površinske mode i u slučaju tri polubeskonačne 1D nelinearne rešetke spregnute linearno na jednom sajtu kao i dve 2D beskonačne nelinearne rešetke linearno spregnute na jednom sajtu. Predstavljene su zavisnosti oblasti postojanja lokalizovanih moda od parametra sistema, pre svega kroz odnos parametra sprežanja između rešetki i parametra sprežanja u komponentnim rešetkama. Oblasti egzistencije i stabilnost određivane su uz pomoć varijacionog računa (VR) i primenom VK kriterijuma. Ti rezultati su proveravani numerički, rešavanjem stacionarnih jednačina i primenom linearne analize stabilnosti, u cilju determinisanja spektralnog kriterijuma stabilnosti. Kao konačna potvrda rezultata varijacionog računa i numeričkih izračunavanja rađene su direktne simulacije dinamičkih jednačina za svaki od istraživanih sistema. Takođe, analizirana je i simetrija formiranih površinskih struktura i pojava narušenja simetrije pri promeni parametara u sistemu, kao i pojava bistabilnosti.

U petoj glavi sažeti su najbitniji zaključci rezultata iznesenih u disertaciji.

II O optičkim rešetkama

Čovek je još od perioda Kamenog i Gvođenog doba pokušavao da dostupne materijale iskoristi i prilagodi sopstvenim potrebama. Tokom vremena ljudsko saznanje o materijalima postaje sve potpunije. U prošlom veku akcenat je prebačen na karakterisanje i kontrolu električnih svojstava materijala. Sledeći korak je bio kako kontrolisati optička svojstva materijala, u smislu kako obezbediti ili zaustaviti propagaciju određenih svetlosnih moda. Time je omogućeno dobijanje materijala koji pod određenim okolnostima potpuno reflektuju svetlost u željenom intervalu frekvencija, materijala koji propuštaju svetlost samo u unapred izabranom pravcu ili omogućuju koncentraciju svetlosti u određenoj zapremini, što su preduslovi za novi tehnološki napredak. Materijali koji na ovakave načine mogu da manipulišu svetlošću mogu biti sačinjeni od optičkih rešetki različitih geometrija. U današnje vreme postoje optički kablovi koji su uspeli da naprave pravu revoluciju u telekomunikacionoj tehnologiji. Laserski inženjering, brzi računari, spektroskopija, mikroskopija, endoskopija, fotodinamička terapija raka su neke od oblasti koje imaju konkretne koristi od razvoja nelinearne optike.

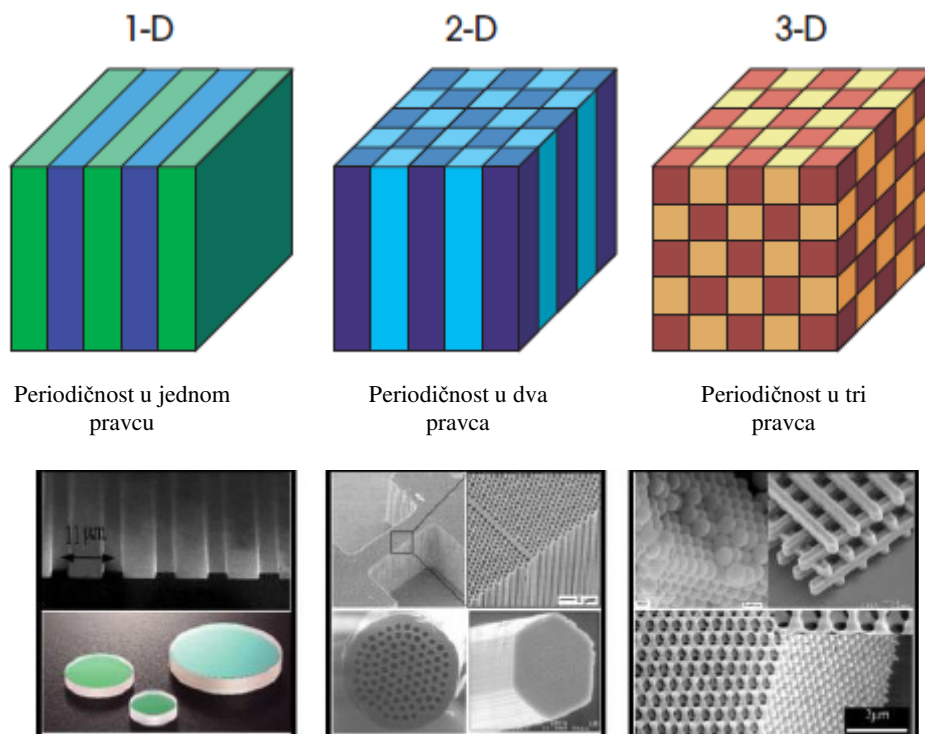
U ovoj glavi izneti su osnovni pojmovi u vezi s optičkim rešetkama, pre svega imajući u vidu njihovu periodičnost. Prikazan je uticaj rešetki na prostiranje svetlosnog talasa kroz periodičnu strukturu, kao i prostiranje svetlosti kroz linearne i rešetke s kubnim (Kerovim) tipom nelinearnosti.

2.1 Periodičnost na primeru fotonskih rešetki

Fotonske rešetke predstavljaju periodične rešetke koje se karakterišu periodičnom promenom dielektrične konstante ϵ_r u određenim pravcima. Njihovi strukturni elementi imaju različite dielektrične konstante a samim tim i indekse prelamanja. Fotonske rešetke mogu biti jednodimenzionalne (1D), dvodimenzionalne (2D) ili trodimenzionalne (3D) (slika 2.1) [33], u zavisnosti od toga da li se dielektrična konstanta menja u jednom, dva ili tri nezavisna pravca. S obzirom na činjenicu da elektroni i fotoni imaju talasno-čestičnu prirodu, optički analogon rešetke kristala je fotonska rešetka. Razlika je u tome što su atomi i molekuli koji čine strukturne elemente kristala zamenjeni makroskopskim elementima različitih dielektričnih permeabilnosti, dok je potencijal zamenjen periodičnom dielektričnom funkcijom, a time i periodičnom promenom indeksa prelamanja. Iz ovog razloga se, u frekventnom spektru fotonskih kristala, mogu videti procepi tako da se elektromagnetni talasi koji imaju frekvenciju iz oblasti procepa ne mogu prostirati kroz kristal.

Prva istraživanja prostiranja talasa u periodičnoj sredini vršio je Lord Rejli (Lord Rayleigh) 1887. godine [30]. Rejli je proučavao stare komade stakla, koji su imali

izmenjena optička svojstva usled stajanja, i primetio je da se manji deo svetlosti odbio od površine stakla nego što bi to bio slučaj da je upotrebljeno novo staklo. Pogodnom kombinacijom stakala uspeo je da dobije sistem uz čiju pomoć je mogao upravljati svetlošću. Na taj način je dobijena prva 1D fotonska rešetka. Kako je Rejli uspeo da objasni ponašanje svetlosti u višeslojnim ogledalima time je dao odgovor i kako se elektromagnetni talasi prostiru u 1D fotonskim kristalima.

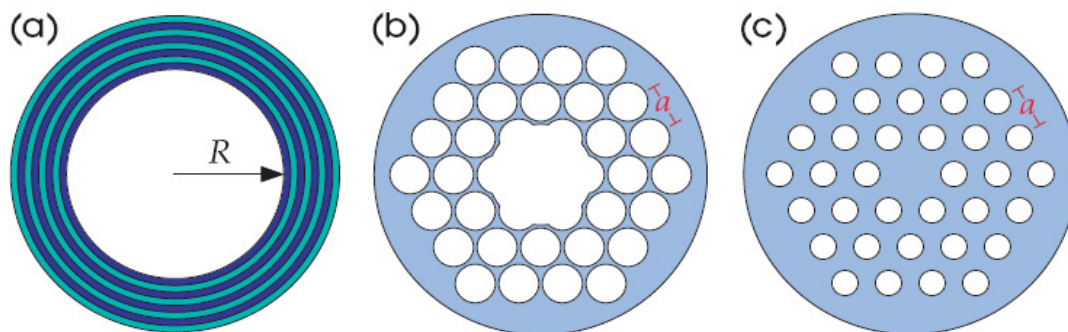


Slika 2.1 Šematski prikaz 1D, 2D i 3D rešetke i odgovarajuće mikrostrukture (red dole). Promena indeksa prelamanja u fotonskim kristalima šematski je predstavljena različitim bojama.

Primeri 1D optičkih rešetki su Bragovi (W.L. Bragg) reflektori, dielektrična ogledala, nizovi talasovoda itd. [18, 31, 32]. U slučaju višeslojnog dielektričnog ogledala, koje se sastoji od slojeva s različitim dielektričnim konstantama duž jednog pravca, kada svetlost određene frekvencije padne na ogledalo ona može biti potpuno reflektovana. Razlog tome je što se svetlost delimično reflektuje od svakog sloja i ukoliko se rastojanje između slojeva menja periodično, višestruko reflektovani upadni talas interferira destruktivno sa delom svetlosti koji dolazi iz suprotnog smera nakon što se odbio od površine slojeva. Na taj način je onemogućeno prostiranje upadnog talasa, odnosno formiran je procep (zabranjena zona) u spektru frekvencija. S povećanjem upadnog ugla svetlosti reflektivnost sistema opada a zonski procep se smanjuje. Na slici 2.2 (a) može se videti Bragovo vlakno s 1D periodičnim oblogama u vidu koncentričnih omotača.

Međutim, 1D optičku rešetku predstavlja i niz talasovoda u kojima se svetlost prostire duž kanala. Ovakva struktura omogućava prolazak pojedinih talasnih komponenti sa određenim vrednostima propagacione konstante dok se za ostale talase, sa drugim vrednostima propagacione konstante, formira zonski procep i time onemogućava njihovo dalje prostiranje [34].

Veće interesovanje za fenomene prostiranja svetlosti u fotoniskim rešetkama pojavilo se nakon objavljivanja publikacija Jablonoviča (Yablonovitch) [35] i Džona (John) [36], u kojima su pomoću metoda klasične elektrodinamike i fizike čvrstog stanja, teorijski opisali prostiranje svetlosti kroz 2D i 3D fotonske kristale, slike 2.1 i 2.2 [37].



Slika 2.2 Tri primera optičkih vlakana na bazi fotoniskih kristala. (a) Bragovo vlakno, sa 1D periodičnim oblogama u vidu koncentričnih omotača, (b) 2D periodična struktura koja ograničava svetlost u šuplje jezgro uz pomoć procepa i (c) rupičasto vlakno koje zarobljava svetlost u čvrstom jezgrou uz pomoć odgovarajućih promena indeksa prelamanja.

Kada se govori o strukturama koje omogućavaju manipulaciju sa svetlošću treba napomenuti i fotonska kristalna vlakna. Ona se sastoje od snopa šupljikavih kanalića načinjenih od nekog dielektrika unutar dielektrika drugog tipa. Konstrukcija ovog tipa se podešava tako da se svetlost prostire samo kroz centralni kanal. Kada se svetlost kreće samo duž ose gde nema promene ϵ_r , onda nema ni fotoniskih procepa. U slučaju da svetlost pada na zidove centralnog kanala javiće se fotonski procep usled periodične promene ϵ_r . Svetlost sa frekvencijom iz tog procepa biće totalno reflektovana i prostiraće se kroz dati kanal s najmanjim gubicima.

Fotonski kristali u tri dimenzije predstavljaju strukture kod kojih je moguća kontrola svetlosti u sva tri pravca. Fotonski kristali u dve i tri dimenzije mogu kontrolisati upadnu svetlost bilo koje polarizacije, pri bilo kom upadnom uglu i upravo je to glavni razlog njihove upotrebe za upravljanje signalima u optičkim mrežama.

2.2 Osnovne jednačine

Da bi se opisalo prostiranje svetlosti u fotonskom kristalu ili bilo kojoj periodičnoj sredini mora se krenuti od Maksvelovih jednačina i odrediti vektori jačine električnog i magnetnog polja $\vec{E}(\vec{r}, t)$ i $\vec{H}(\vec{r}, t)$, redom. Njih je moguće naći uz pomoć opšteg sistema Maksvelovih jednačina u supstancijalnoj sredini:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t), \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

gde je $\vec{D}(\vec{r}, t)$ električna indukcija, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ magnetna indukcija, $\rho(\vec{r}, t)$ gustina naelektrisanja i $\vec{j}(\vec{r}, t)$ gustina električne struje. Kako je u pitanju dielektrična sredina bez slobodnih naelektrisanja, veličine $\vec{j}(\vec{r}, t)$ i $\rho(\vec{r}, t)$ su jednake nuli. Pretpostavljeno je da je sredina nemagnetna tako da je $\mu_r(\vec{r}) = 1$. Pošto je reč o periodičnoj sredini ϵ_r je periodična funkcija položaja. Pretpostavljajući da su jačina električnog i magnetnog polja periodične funkcije vremena $\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{r})$ i $\vec{H}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \vec{H}(\vec{r})$ redom, dolazi se do takozvane glavne jednačine:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

ili u operatorskoj formi:

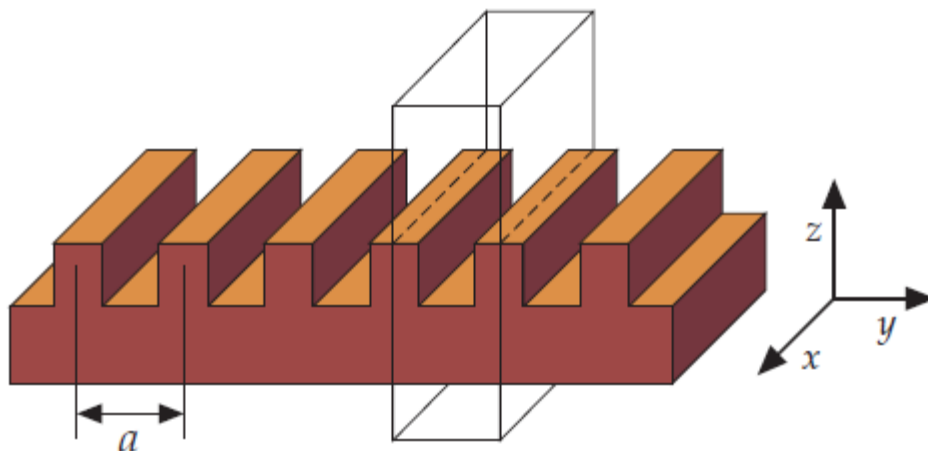
$$\Theta \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}), \quad (2.3)$$

gde je operator $\Theta = \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r(\vec{r})} \nabla \times \right)$, ω svojstvena frekvencija i c brzina svetlosti u vakuumu.

Rešavanje jednačine (2.2) predstavlja, u stvari, rešavanje svojstvenog problema operatora Θ , gde je $\vec{H}(\vec{r})$ svojstvena funkcija a $\frac{\omega^2}{c^2}$ svojstvena vrednost pomenutog operatora. Nakon dobijanja jačine magnetnog polja jačinu električnog polja moguće je dobiti uz

pomoć relacije: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r})$ gde je ϵ_0 dielektrična permeabilnost vakuuma.

Fotonski kristali se odlikuju diskretnom translacionom simetrijom, tj. nepromenljivost u osobinama strukture vidi se na rastojanjima koja predstavljaju celobrojni umnožak određenog koraka-perioda rešetke. Primer ovakvog 1D fotonskog kristala prikazan je na slici 2.3 [37].



Slika 2.3 Dielektrična konfiguracija sa diskretnom translacionom simetrijom. Kvadar označava jedan elemenat u strukturi čiji je period dužine a .

U x i z pravcu postoji kontinualna translaciona simetrija dok u y pravcu postoji diskretna translaciona simetrija. Period rešetke je označen slovom a . U ovom slučaju kristal ima diskretnu translacionu simetriju za vektor \vec{a} kao i za sve umnoške $l\vec{a}$ gde je l pozitivan ili negativan ceo broj. Kako je dielektrična permeabilnost ϵ_r periodična funkcija duž y ose sa periodom a to se matematički može zapisati kao $\epsilon_r(\vec{y} + \vec{a}) = \epsilon_r(\vec{y})$. Upravo je ova periodičnost sistema glavni razlog formiranja zonske strukture.

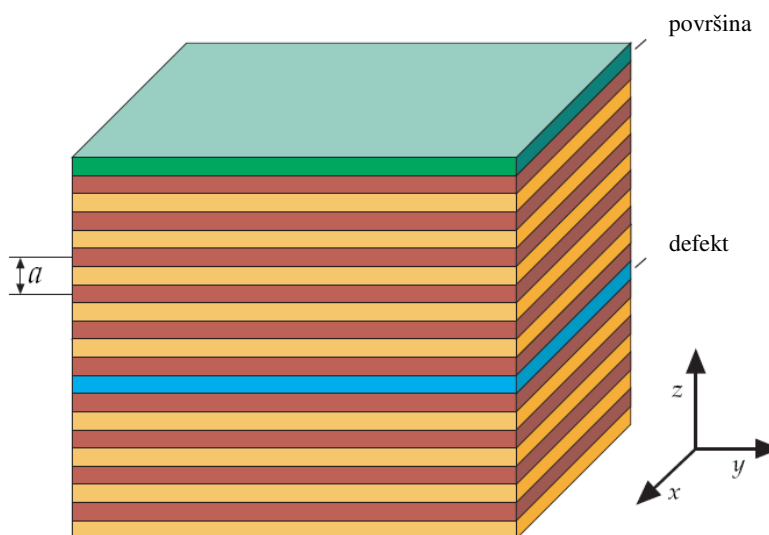
Na osnovu jednačine (2.3) i činjenice da je u pitanju periodična sredina moguće je napisati:

$$\vec{H}(\vec{r} + \vec{a}) = e^{ik_r a} \vec{H}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

$\vec{H}(\vec{y})$ može se napisati u obliku Blohovog (Bloch) talasa $\vec{H}(\vec{r}) = e^{ik_r a} \vec{u}_k(\vec{r})$, gde je:

$$\vec{u}_k(\vec{y}) = \vec{u}_k(\vec{y} + \vec{a}). \quad (2.5)$$

Ovo sve ukazuje da je dovoljno rešiti glavnu jednačinu u okviru prve Brillouinove (Brillouin) zone $-\frac{\pi}{a} \leq k_y \leq \frac{\pi}{a}$, i time dobiti opšte rešenje glavne jednačine. Uz pomoć glavne jednačine i jačine magnetnog polja u obliku Blohovih talasa, mogu se poznavanjem dielektrične permeabilnosti ϵ_r dobiti envelope \vec{u}_k kao i disperzione relacije $\omega_n(\vec{k})$ gde indeks n predstavlja broj frekventne mode. Numeričkim izračunavanjem pokazuje se da postoje zabranjene zone, tj. procepi u spektru svojstvenih vrednosti, kao posledica periodičnosti kristalne rešetke. U opsegu frekvencijskog procepa ne postoje mode koje imaju čisto realni talasni vektor, odnosno ne postoje mode u obliku Blohovih talasa koje bi mogle da se prostiru. Umesto toga talasni vektor je kompleksan i amplitude opadaju eksponencijalno, tzv. evanescentne mode. Posledica evanescentnosti moda je da opšta rešenja svojstvenog problema divergiraju kada $y = \pm\infty$. Ipak, defekt ili procep u kristalu mogu prekinuti ovo eksponencijalno opadanje i stoga podržati evanescentne mode. Na taj način se pobuđuju lokalizovane mode u procepu.



Slika 2.4 Šematski prikaz jednodimenzionalnog fotonskog kristala sa defektom.

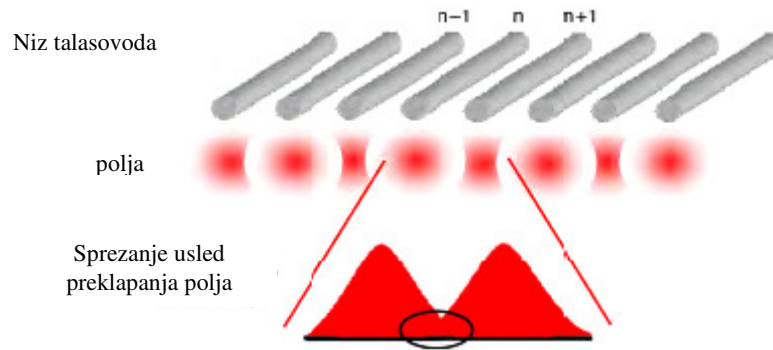
Pojavom defekta diskretna translaciona simetrija biva narušena. Šematski prikaz jednodimenzionalnog kristala sa defektom je prikazan na slici 2.4 [37]. Defekt može biti jedan sloj 1D fotonskog kristala koji ima različitu širinu od ostalih slojeva i može omogućiti postojanje lokalizovanih moda sa frekvencijama u okviru procepa. Ukoliko moda ima frekvenciju u okviru procepa onda ona mora eksponencijalno opadati. Višeslojni filmovi sa obe strane defekta ponašaju se kao frekventna ogledala. Ukoliko su takva dva filma orijentisana paralelno jedan drugome, svetlost biva zarobljena i propagira između njih. Usled lokalizovanja svetlosti unutar konačnog regiona mode su kvantovane.

Lokalizovane mode se mogu naći i na površini višeslojnog filma i tada se nazivaju površinskim modama. U tom slučaju svetlost je vezana za površinu ukoliko je njena

frekvencija ispod tačno određene vrednosti koja predstavlja prag (kritičnu vrednost parametra) za pojavu ovakvih moda [37].

2.3 Linearna svojstva rešetki

U ovom poglavlju analizirane su osobine niza talasovoda, u odsustvu nelinearnih efekata. Sistem od niza međusobno paralelnih talasovoda predstavlja 1D periodičnu rešetku. Standardni teoretski prilaz za proučavanje ovakvih struktura baziran je na analizi rešenja diskretne nelinearne Šredingerove jednačine (DNŠJ). Glavna pretpostavka, koju je potrebno uvesti, je da se evolucija sporo promenljivog polja može opisati sistemom spregnutih jednačina koji uračunava samo interakciju najbližih suseda (najbližih talasovoda) usled slabog preklapanja susednih moda (slika 2.5) [38].



Slika 2.5 Niz optičkih talasovoda. Optička polja u talasovodima su spreguta preklapanjem moda.

Matematički se prostiranje svetlosti kroz uniformni niz talasovoda može opisati sistemom međusobno spregnutih linearnih diferencijalnih jednačina, oblika [38, 39]:

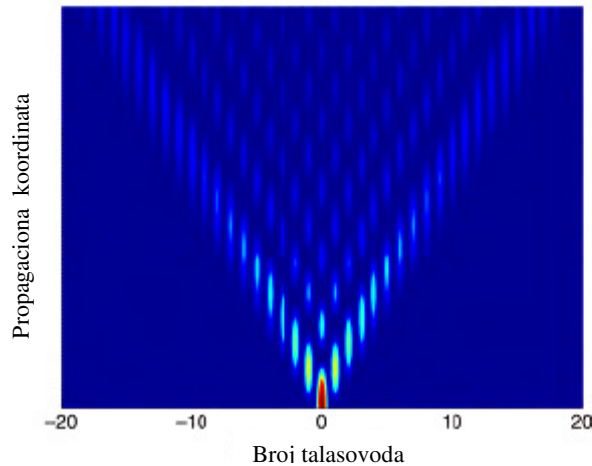
$$i \frac{dA_n}{dz} + \beta A_n + C(A_{n-1} + A_{n+1}) = 0, \quad (2.6)$$

gde je A_n amplituda mode u n -tom talasovodu, β je linearna propagaciona konstanta u z pravcu dok je C koeficijent sprežanja dva susedna talasovoda.

Ukoliko je u datom trenutku samo jedan talasovod pobuđen, tako da je $A_n = 0$ za $z = 0$, rešenje za sve $n \neq 0$ je sledećeg oblika:

$$A_n(z) = A_0(i)^n J_n(2C_z) \exp(i\beta z), \quad (2.7)$$

gde je J_n Beselova (Bessel) funkcija prve vrste n -tog reda. Fizički, kontinualni zrak propagira duž talasovoda i njegova energija se simetrično širi na sve obližnje talasovode udaljavajući se od centralnog talasovoda tako da svetlost biva sve više skoncentrisana duž spoljašnjih talasovoda, slika 2.6. Takvo ponašanje je suprotno kontinualnom slučaju gde je najveći deo energije bio koncentrisan u centralnom talasovodu. Ovakvo širenje svetlosti kod talasovoda poznato je kao diskretna difrakcija.



Slika 2.6 Diskretna difrakcija duž pravca prostiranja.

Pretpostavimo da se upadni snop može predstaviti kao beskonačni ravanski talas koji pobuđuje sve talasovode u rešetki. Tada se rešenje jednačine (2.6) može naći u obliku ravnog talasa $A_n = A_0 \exp(ink_x d + ik_z z)$, gde d predstavlja period rešetke, tj. rastojanje centara dva susedna talasovoda u x pravcu, transverzalni talasni vektor k_x opisuje fazu, a k_z predstavlja propagacionu konstantu u pojedinačnom talasovodu. Relativna fazna razlika envelope polja između susednih talasovoda je opisana proizvodom $k_x d$. Na taj način se dobija sledeća disperziona relacija, tj. veza između k_x i k_z :

$$k_z = \beta + 2C \cos(k_x d). \quad (2.8)$$

Konačni snop svetlosti predstavlja superpoziciju više ravnih talasa, pri čemu svaki od talasa ima drugačiju vrednost transveralnog vektora k_x . Tokom prostiranja faza svakog od ovih talasa se menja nezavisno u odnosu na druge komponente snopa tako da će nakon rastojanja z odgovarajuća prostorna frekvencijska komponenta k_x imati drugačiju relativnu promenu faze $\varphi(k_x, z) = k_z(k_x)z$, [40]. Ove različite promene faze svake od komponenti talasa usloviće pomeraj talasnog paketa centriranog na spektralnoj komponenti k_x u transverzalnom pravcu za $\Delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial k_x} = z \frac{\partial k_z}{\partial k_x}$.

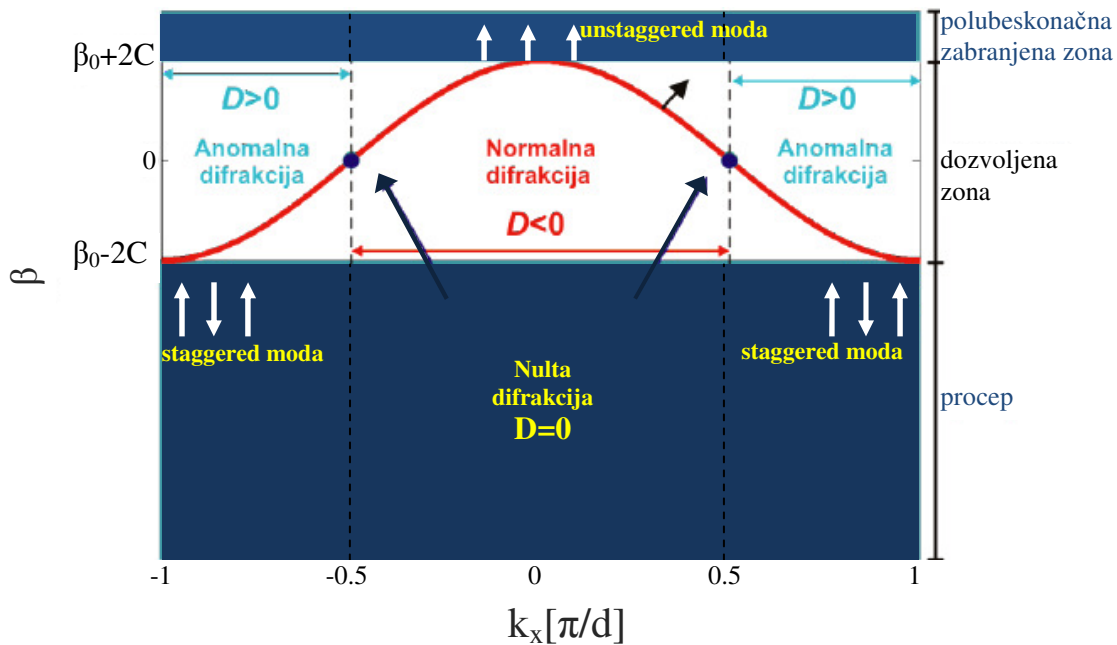
Kao rezultat postojanja divergencije transversalnih pomeraja između spektralnih komponenti talasa, početni profil snopa počeo da se širi tokom svog prostiranja. Veličina koja opisuje brzinu ovog širenja tj. difrakciju snopa naziva se difrakcioni koeficijent, i definisan je na sledeći način:

$$D = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_x^2} = \frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} . \quad (2.9)$$

Primenom relacije (2.9) na relaciju (2.8) dolazi se do vrednosti koeficijenta difrakcije za slučaj niza talasovoda:

$$D = -2Cd^2 \cos(k_x d) . \quad (2.10)$$

Na slici 2.7 predstavljena je difrakciona kriva u slučaju periodične sredine.



Slika 2.7 Difrakciona kriva u slučaju periodične sredine.

Važno svojstvo ove disperzione relacije je njena periodičnost po k_x . Ovde je pored oblasti sa normalnom difrakcijom ($|\pi/2 < k_x d < \pi$) u kojoj je koeficijent difrakcije pozitivan, prisutna i oblast sa anomalnom difrakcijom ($|\pi/2 > k_x d > \pi$) gde je ovaj parameter negativan. Štaviše, difrakcija potpuno nestaje za dve tačke $|k_x d| = \pi/2$ i tada ne dolazi do promene u profilu polja tokom prostiranja snopa kroz rešetku. Na osnovu

relacije (2.10) vidi se da oblik difrakcione krive zavisi od konstante sprezanja tj. od parametara rešetke i od ugla pod kojim upada svetlost. To znači da je znak difrakcije moguće menjati ubacivanjem svetlosti u strukturu pod pogodnim uglom ili promenom konstante sprezanja između talasovoda.

Envelopa Blohovih moda određena je transverzalnim vektorom k_x pa će na taj način Blohove mode pobuđene u centru Brillueneve zone ($k_x d = 0$) imati amplitude koje će od talasovoda do talasovoda biti u fazi formirajući na taj način tzv. *unstaggered* modu, dok će u slučaju Blohovih talasa sa kraja Brillueneve zone ($k_x d = \pm\pi$) faza amplitude menjati znak od talasovoda do talasovoda obrazujući tzv. *staggered* modu, što je prikazano na slici 2.7.

2.4 Nelinearnost i diskretni sistemi

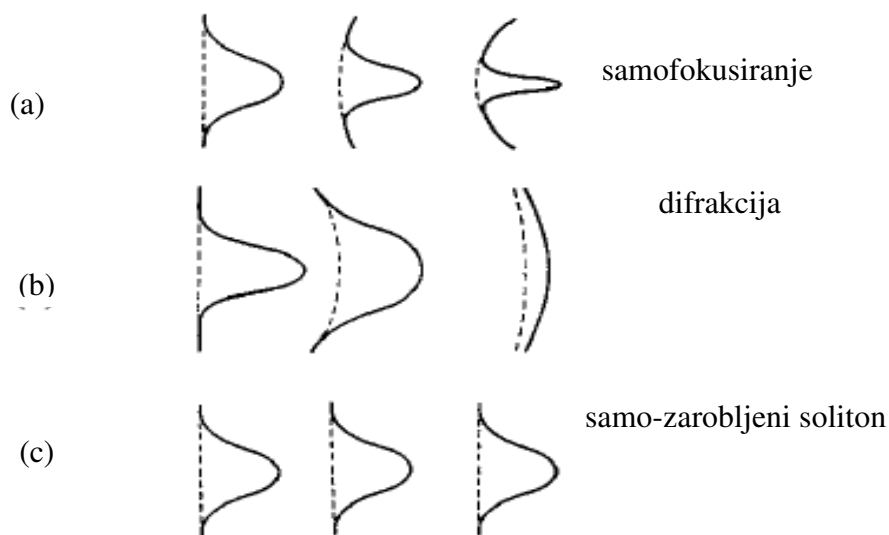
Leta 1953. Erniko Fermi (Enrico Fermi), Džon Pasta (John Pasta) i Stanislav Ulam (Stanislaw Ulam) rukovodili su serijom “numeričkih eksperimenata” na tek stvorenom kompjuteru MANIAC I u Los Alamosu. Cilj ovih numeričkih simulacija bio je da se bliže prouči dinamika talasa u diskretnom lancu koji se sastojao od čestica (atoma) a koji su bili pod uticajem nelinearne sile međusobnog sprezanja. Ova istraživanja su delimično bila motivisana Fermijevom pretpostavkom da će nelinearnost sama po sebi dovesti eventualno do ergodičnosti ili “termalizacije” sistema. Na iznenađenje svih, takva haotična ponašanja se nisu javila. Umesto očekivanog ponašanja diskretan dinamički model je pokazao kvazi-periodičnu evoluciju ili rekurentnost. Rezultat ove studije (danas poznatije kao FPU problem) bio je publikovan 1955. u tehničkom izveštaju Los Alamosa, ubrzo nakon Fermijeve smrti [41]. Neočekivani rezultati ovog eksperimenta bili su enigma do šezdesetih godina prošlog veka kada su Zabuski (Zabusky) i Kruskal (Kruskal) [42] došli do zaključka da se u kontinualanom limitu FPU lanac može opisati uz pomoć Kortevog-de Fris (Kortweg-de Vries) jednačina [43]. Znalo se da ove jednačine opisuju plitke talase vode u uskom kanalu (slične onima koje je posmatrao Džon Skot Rasel (John Scott Russell) 1834. i koje je nazvao talasima translacije [44]) i da poseduju “čestična” rešenja [45] zbog čega su nazvani solitonima. Ova otkrića su se kasnije proširila na proučavanje nelinearnih fenomena u ostalim diskretnim sistemima poput Boze-Ajnštajnovih kondenzata [46], slojevitih anti-feromagnetskih struktura [47], Džozefsonovih (Josephson) spojeva [48], lanaca bioloških molekula [49] i fotonskih kristala [37].

Optički zraci imaju prirodnu tendenciju da se šire (difraktuju) pri prolazu kroz bilo koji homogeni medijum. Ipak, ova difrakcija može biti kompenzovana uz pomoć refrakcije tj. ako je indeks prelamanja materijala povećan transverzalno u odnosu na pravac prostiranja talasa. Ovakva struktura postaje optički talasovod i odvaja svetlost od regiona visokog indeksa prelamanja omogućavajući na taj način balans između difrakcije i refrakcije. Prostiranje svetlosti u optičkom talasovodu može se opisati linearnom nehomogenom

talasnom jednačinom čije rešenje daje skup vođenih moda koje su prostorno lokalizovane svojstvene mode optičkog polja u talasovodu i zadržavaju svoj oblik zadovoljavajući pri tom sve granične uslove.

Poznato je da se poništavanje difrakcije uz pomoć lokalne promene indeksa prelamanja može postići jedino uz pomoć nelinearnih efekata koji dovode do promene indeksa prelamanja u medijumu na takav način da je indeks prelamanja veći u regionu gde je jačina zraka veća. U suštini, optički puls može kreirati svoj sopstveni talasovod i biti zarobljen u tom sopstvenom talasovodu. Ulazni impuls se difrakuje kada je njegova jačina mala. U slučaju da jačina impulsa postane dovoljno velika tako da je moguće stvaranje samo-indukovanog talasovoda, promenom indeksa prelamanja, dolazi do formiranja prostornog solitona. Ovakva promena indeksa prelamanja je veća u centru zraka i gradijentno se smanjuje do nule, blizu granice impulsa. Fundamentalna moda ovakvog talasovoda je prostorni soliton. Soliton je po definiciji lokalizovano rešenje nelinearne disperzivne talasne jednačine koje ostaje invarijantno pri prostiranju i predstavlja zapravo samolokalizovane talasne pakete koji svoju egzistenciju duguju ravnoteži između nelinearnosti i linearnih fenomena (disperzija, difrakcija, difuzija). U potpuno integrabilnim sistemima ovi talasi ostaju "netaknuti" nakon sudara i u osnovi se ponašaju kao čestični entiteti.

U cilju boljeg razumevanja uticaja nelinearnosti na formiranje prostornih solitona može se posmatrati njegova analogija sa sočivima. Naime, difrakcija kreira zakrivljeni talasni front slično onom koji stvaraju konkavna sočiva i na taj način širi zrak prilikom njegovog kretanja. Sa druge strane, gradijent u indeksu prelamanja koji se javio usled efekta samofokusiranja ima ulogu konveksnog sočiva koje pokušava da sakupi zrak, slika 2.8. Zrak može postati samo-zarobljen i propagirati bez promene sopstvenog oblika ukoliko efekti ovih sočiva poništavaju jedni druge. Naravno, zrak mora imati odgovarajući profil za koji će uspeti da se potpuno poništi konkavno-konveksni uticaj. Ovaj specifični profil zraka kod prostornih solitona je nelinearna analogija modama u linearnom talasovodu formiranih usled samo-indukovanog gradijenta indeksa prelamanja.



Slika 2.8 Ilustracija analogije između sočiva i prostornih solitona. Difrakcija ima ulogu konkavnih sočiva dok nelinearni medijum ima ulogu konveksnih sočiva. Soliton se formira kada se uticaj obe vrste sočiva poništi tako da fazni front (isprekidana linija) ostane nepromenjen.

2.5 Kerova nelinearnost

U cilju razumevanja Kerove nelinearnosti i njenog uticaja na prostiranje talasa biće posmatrani kontinualni talasi koji se prostiru unutar nelinearne optičke sredine Kerovog tj. kubnog tipa. Maksvelova jednačina za električno polje pridruženo optičkom talasu koji propagira kroz datu sredinu je:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

Pod dejstvom spoljašnjeg optičkog polja javlja se relativno pomeranje elektrona iz osnovnog položaja u kristalnoj rešetki dielektrika. Rezultat takvog procesa je indukovani dipolni moment koji se opisuje vektorom električne polarizacije \vec{P} . Vektor polarizacije se sastoji od dva dela: $\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$, gde su $\vec{P}_L(\vec{r}, t)$ i $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$ linearni i nelinearni deo polarizacije i imaju sledeće oblike:

$$\begin{aligned}\bar{P}_L(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \bar{E}(\vec{r}, t') dt', \\ \bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \bar{E}(\vec{r}, t_1) \bar{E}(\vec{r}, t_2) \bar{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3,\end{aligned}\tag{2.12}$$

gde su $\chi^{(1)}$ i $\chi^{(3)}$ tenzori susceptibilnosti prvog i trećeg reda. Ove relacije važe u električnoj dipolnoj aproksimaciji pod pretpostavkom da je reakcija sredine lokalna i da je materijal nemagnetski i izotropan. Takođe je zanemarena nelinearnost drugog reda, pretpostavljajući da sredina ima inverznu simetriju. Kada je mali intenzitet upadne svetlosti, relativni pomeraji elektrona u kristalnoj rešetki, a samim tim i vektor polarizacije $\bar{P}(\vec{r}, t)$, linearno zavise od električnog polja upadne svetlosti. Indeks prelamanja takođe zavisi od osobina upadne svetlosti koja prolazi kroz strukturu. Kod materijala koji poseduju inverznu simetriju kristalne strukture, članovi susceptibilnosti parnog reda jednaki su nuli, ostavljajući susceptibilnost trećeg reda kao glavni doprinos nelinearnosti materijala. Ova klasa materijala se naziva Kerovim materijalima. Materijali sa Kerovom nelinearnošću odlikuju se indeksom prelamanja čiji je nelinearni deo funkcija intenziteta upadne svetlosti I i može se napisati u obliku:

$$n_{ker} = n_0 + n_2 |E|^2 \propto n_0 + n_2 I, \tag{2.13}$$

gde je n_0 linearni deo indeksa prelamanja sredine, dok $n_2 |E|^2$ označava nelinearni deo indeksa prelamanja, a n_2 je Kerov koeficijent koji potiče od susceptibilnosti trećeg reda. Ova promena indeksa prelamanja, $\Delta n_{ker} \propto I$, srazmerna je intenzitetu upadne svetlosti, usled čega dolazi do promene optičkih svojstava sredine na mestu gde se prostire svetlost dovoljno jakog intenziteta, a time se utiče i na samo ponašanje snopa svetlosti. Osim intenziteta upadne svetlosti, bitna stavka je i znak promene indeksa prelamanja sredine koji je posledica raspodele naelektrisanja unutar strukture materijala, pa samim tim i tipa nelinearnosti. Ukoliko se pojavljuje lokalni rast indeksa prelamanja u pitanju je samofokusirajuća sredina ($\Delta n > 0$), dok se u slučaju lokalnog smanjenja indeksa prelamanja javlja samodefokusirajuća sredina ($\Delta n < 0$) [50]. Znači, ove sredine će za upadni snop predstavljati sabirno, odnosno rasipno sočivo, menjajući time oblik snopa prilikom prolaska, tj. sužavati ili širiti zrak.

III Nelinearne lokalizovane strukture

U okviru ove glave biće predstavljene jednačine čija stacionarna rešenja predstavljaju lokalizovane mode, a kojima se modeluju diskretni optički sistemi. Takođe, biće reči o vrstama lokalizovanih moda i njihovim osnovim karakteristikama kao i metodama za određivanje njihove stabilnosti.

3.1 Matematički model

Prostiranje talasnih moda kroz niz talasovoda obično se modeluje sistemom spregnutih diferencijalno-diferencnih jednačina od kojih svaka jednačina reprezentuje amplitudu propagirajuće talasne mode u konkretnom talasovodu koji je spregnut s najbližim susednim talasovodima. U idealnom slučaju za niz talasovoda beskonačne dužine, kada nema gubitaka i koji se odlikuju Kerovom nelinearnošću ovaj skup jednačina ima sledeći oblik:

$$i \frac{dA_n}{dz} + \beta A_n + C(A_{n-1} + A_{n+1}) + \gamma |A_n|^2 A_n = 0, \quad (3.1)$$

gde je A_n amplituda mode u n -tom talasovodu, β je linearna propagaciona konstanta, C je koeficijent sprezanja, $\gamma = (\omega_0 n_2) / (c A_{eff})$ je nelinearni parameter, ω_0 je optička frekvencija pridružena modama, n_2 je Kerov koeficijent i A_{eff} je efektivna oblast propagacije za mode u talasovodima. U jednačini nisu prisutni izvodi drugog reda jer su svi disperzivni i difrakcioni efekti zanemareni u svakom talasovodu. Ovaj skup beskonačnog broja jednačina je označen kao sistem diskretnih nelinearnih Šredingerovih jednačina (DNLŠJ). DNLŠJ opisuje fizičku situaciju koja prikazuje prostiranje kontinualnog impulsa u dugačkom nizu talasovoda u kojem svaki talasovod podržava jednu modu i ograničava je u obe transverzalne dimenzije (nema difrakcije). Za konačan broj talasovoda, indeks n varira u intervalu od 1 do N s periodičnim graničnim uslovima $A_{N+1} = A_1$ i $A_0 = A_N$. Kada je $N=2$, jednačina (3.1) je potpuno integrabilna ali već za $N=3$ ona nije integrabilna i poseduje sledeća dva integrala kretanja za sve vrednosti N :

$$P = \sum_{n=1}^N |A_n|^2, \quad H = \sum_{n=1}^N \left(\beta |A_n|^2 + C |A_n - A_{n-1}|^2 - \frac{\gamma}{2} |A_n|^4 \right), \quad (3.2)$$

gde je sa P označena ukupna snaga a sa H Hamiltonijan ili ukupna energija sistema. Jednačina (3.1) dobijena je diskretizacijom kontinualnog modela primenom aproksimacije jakog sprezanja [28].

Pored nelinearne optike, DNLSJ predstavlja neintegrabilni model koji je pogodan i za opisivanje problema u molekularnoj fizici i drugim oblastima [51].

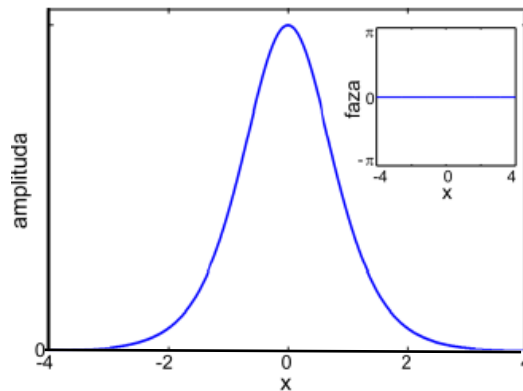
3.2 Vrste solitona

U kontekstu nelinearne optike, solitoni se mogu podeliti na:

- Prostorne solitone koji se formiraju usled ravnoteže između samofokusiranja optičkog impulsa i difrakcije,
- Vremenske solitone koji se formiraju usled ravnoteže vremenske samo-fazne modulacije i disperzije.

Solitoni se mogu podeliti i na osnovu izgleda profila amplitude, i to na svetle i tamne solitone.

- Svetli solitoni mogu nastati i u kontinualnim sredinama i u diskretnim sredinama. U kontinualnim se javljaju u samofokusirajućem medijumu usled poništavanja normalne difrakcije i samofokusirajuće nelinearnosti. Izgled svetlog solitona i njegove faze u kontinualnoj sredini prikazan je na slici 3.1.

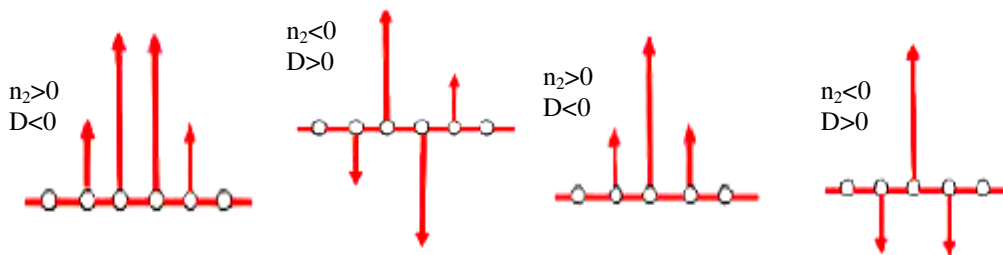


Slika 3.1 Izgled amplitude svetlog solitona u kontinualnoj sredini. U levom uglu slike je predstavljena faza solitona.

U slučaju periodičnih sredina svetle solitone je moguće naći i u slučaju samo-defokusirajuće nelinearnosti. Uslov za nastajanje svetlih solitona u periodičnoj sredini je $\gamma D < 0$, gde je D koeficijent difrakcije [39]. Ako se obrati pažnja na solitone koji se nalaze u okolini vrha ($k_x d = 0$) i dna ($|k_x d| = \pi$) disperziona krive (slika 2.9) može se videti da su u oba slučaja difrakcioni koeficijenti isti ali imaju različit znak. Solitoni koji se nalaze u okolini vrha disperziona krive zovu se *unstaggered* (nema promene faze između susednih elemenata rešetke) a oni koji se nalaze na dnu disperziona krive zovu se

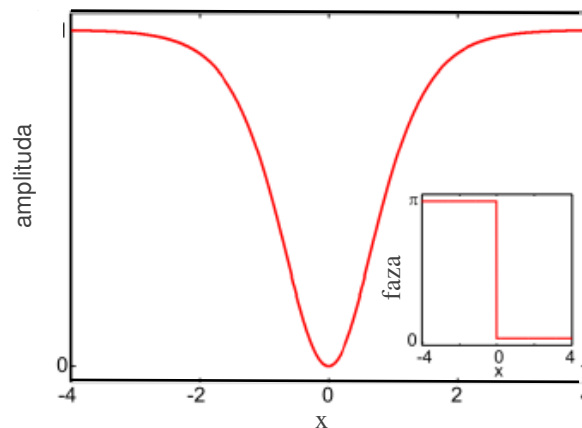
staggered (postoji promena u znaku faze između susednih elemenata). Na slici 3.2 predstavljeni su tipovi svetlih solitona. Svetli, *unstaggered* solitoni postoje ukoliko je $\gamma > 0$ i $D < 0$ (normalna difrakcija) tj. kada se nalaze iznad prve dozvoljene zone u polu-beskonačnoj zabranjenoj oblasti [52, 53]. Nasuprot njima *staggered* solitoni zahtevaju $\gamma < 0$ i $D > 0$ (anomalna difrakcija) i leže u procepu ispod prve dozvoljene zone [54, 55].

Takođe, treba pomenuti da diskretni solitoni [56] mogu imati maksimum envelope centriran na dva susedna sajta (npr. talasovoda, atoma itd.) i onda se nazivaju inter-site solitonima ili na jednom sajtu i tada se nazivaju on-site solitonima.



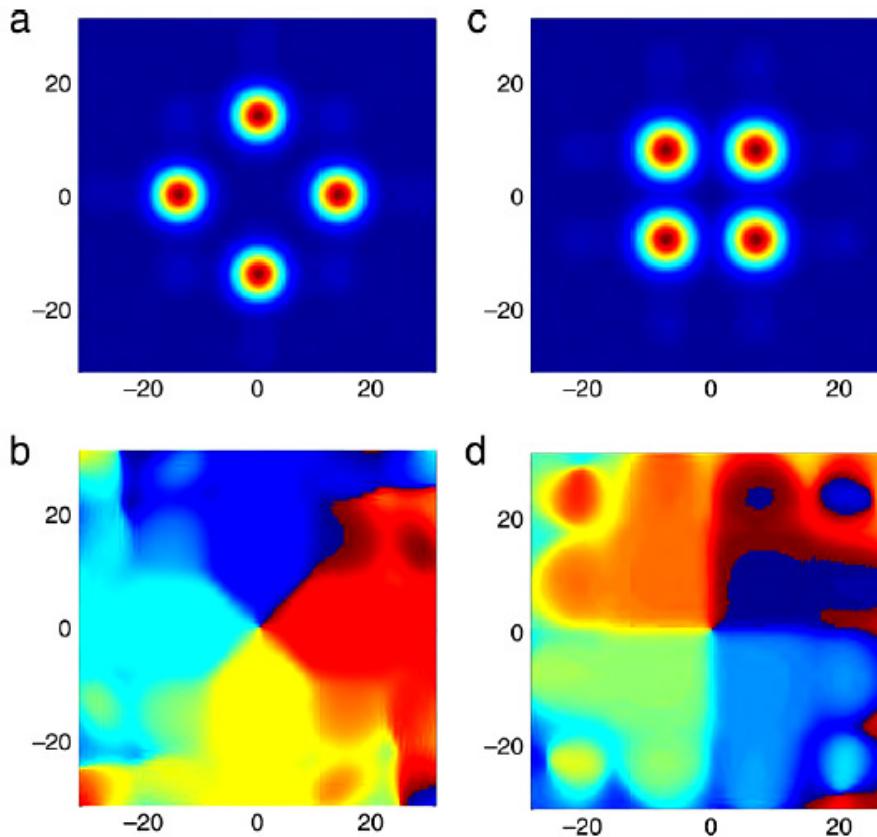
Slika 3.2 Tipovi svetlih solitona: a) inter-site *unstaggered* svetli soliton, b) inter-site *staggered* svetli soliton, c) on-site *unstaggered* svetli soliton i d) on-site *staggered* svetli soliton.

Tamne solitone, kao i svetle, moguće je naći i u kontinualnim i u diskretnim sredinama. U neperiodičnim sredinama javljaju se samo u samodefokusirajućem medijumu, dok u periodičnim sredinama moguće ih je naći i u samofokusirajućem medijumu ukoliko je zadovoljen uslov $\gamma D > 0$, gde je D koeficijent difrakcije. Izgled tamnog solitona dat je na slici 3.3 i predstavlja udubljenje na pozadini koja je različita od nule [57-59]. Kao i u slučaju svetlih solitona, i kod tamnih diskretnih solitona mogu se razlikovati inter-site i on-site tamni solitoni, koji mogu biti *staggered* ili *unstaggered* tipa.



Slika 3.3 Izgled amplitude tamnog solitona u kontinualnoj sredini. Na slici je prikazana i faza solitona.

U disertaciji su analizirane i lokalizovane mode tipa vrtloga, tako da će biti kratko pomenuta njihova osnovna svojstva. Optički vrtlozi predstavljaju rešenja 2D NLŠJ koja za integral kretanja ima orbitalni ugaoni moment [60, 61]. Eksperimentalno se mogu videti kao tamni regioni koji zadržavaju svoj oblik na difrakcionoj pozadini i pokazuju netrivialno dinamičko ponašanje. Postoje vrtlozi on i off-site: kod on-site vrtloga središnja tačka (singularitet) je centrirana na elementu rešetke dok se kod off-site središnja tačka nalazi između dva susedna elementa rešetke, slika 3.5. Postoji više različitih konfiguracija on i off-site vrtloga i pregled njihovih faza je dat u tabelama 1 i 2. Na primer, konfiguracije *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *i* i *j* predstavljaju on-site vrtloge i njihov singularitet se nalazi na jednom elementu rešetke, dok *b*, *h*, *k* i *l* predstavljaju off-site vrtloge i njihov singularitet je centriran između elemenata rešetke. Bitna karakteristika vrtloga je topološko naelektrisanje koje predstavlja ukupnu promenu faze oko središnje tačke vrtloga podeljene sa 2π . U disertaciji su proučavani vrtlozi sa topološkim naelektrisanjem $S=1$ i $S=2$. Strukture tipa vrtloga su osim u rešetkama nađene i u superfluidima [61] i Boze-Ajnštajn kondenzatima [62].



Slika 3.5 Izgled amplitude i faze za on i off – site vrtlog: a) amplitude on-site vrtloga, b) faza on-site vrtloga, c) amplitude off-site vrtloga i d) faza off-site vrtloga.

Tabela 1. Šematski prikaz mogućih tipova vrtloga sa topološkim naelektrisanjem $S=1$ i njihove fazne konfiguracije. Stabilnost vrtloga je notirana u zadnjoj koloni tabele. Vrednost π (ili 0) prikazuje fazu "ekscitovanog" elementa rešetke. Simbol x označava unutrašnje sajtove sa nultom amplitudom.

Tip	S	Fazna konfiguracija	Stabilnost
<i>a</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \\ \pi/2 \text{ x } 3\pi/2 \\ \pi \end{array}$	Da
<i>b</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \quad 3\pi/2 \\ \pi/2 \quad \pi \end{array}$	Da
<i>c</i>	1	$\begin{array}{c} \pi/4 \quad 0 \quad 7\pi/4 \\ \pi/2 \text{ x } 3\pi/2 \\ 3\pi/4 \quad \pi \quad 5\pi/4 \end{array}$	Ne
<i>d</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \\ \pi/4 \text{ x } 7\pi/4 \\ \pi/2 \text{ x } \text{ x } \text{ x } 3\pi/2 \\ 3\pi/4 \text{ x } 5\pi/4 \\ \pi \end{array}$	Ne
<i>e</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \\ \pi/4 \text{ x } 7\pi/4 \\ \pi/2 \text{ x } 0 \text{ x } 3\pi/2 \\ 3\pi/4 \text{ x } 5\pi/4 \\ \pi \end{array}$	Da
<i>f</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \\ \pi/4 \quad 0 \quad 7\pi/4 \\ \pi/2 \quad \pi/2 \quad \text{x} \quad 3\pi/2 \quad 3\pi/2 \\ 3\pi/4 \quad \pi \quad 5\pi/4 \\ \pi \end{array}$	Ne
<i>g</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \\ \pi/4 \quad \pi \quad 7\pi/4 \\ \pi/2 \quad 3\pi/2 \quad \text{x} \quad \pi/2 \quad 3\pi/2 \\ 3\pi/4 \quad 0 \quad 5\pi/4 \\ \pi \end{array}$	Da
<i>h</i>	1	$\begin{array}{c} 0 \quad 7\pi/4 \\ \pi/4 \quad 0 \quad 3\pi/2 \quad 3\pi/2 \\ \pi/2 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 5\pi/4 \\ 3\pi/4 \quad \pi \end{array}$	Ne

Tabela 2: Različiti tipovi vrtloga sa topološkim naelektrisanjem $S=2$ i njihove fazne konfiguracije. Komentarisana je i stabilnost vrtloga. Vrednost π (ili 0) prikazuje fazu pobudenog sajta rešetke. Simbol x označava unutrašnje sajtove s nultom amplitudom.

Tip	S	Fazna konfiguracija	Stabilnost
<i>i</i>	2	$\begin{array}{cccc} \pi/2 & 0 & 3\pi/2 & \\ & \pi & x & \pi \\ 3\pi/2 & 0 & \pi/2 & \end{array}$	Ne
<i>j</i>	2	$\begin{array}{cccccc} & & 0 & & & \\ & \pi/2 & x & 3\pi/2 & & \\ \pi & x & x & x & \pi & \\ & 3\pi/2 & x & \pi/2 & & \\ & & 0 & & & \end{array}$	Da
<i>k</i>	2	$\begin{array}{cc} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{array}$	Da
<i>l</i>	2	$\begin{array}{cccc} 0 & 3\pi/2 & & \\ \pi/2 & 0 & \pi & \pi \\ \pi & \pi & 0 & \pi/2 \\ 3\pi/2 & 0 & & \end{array}$	Ne

3.3 Stabilnost solitona

U cilju određivanja stabilnosti solitona posmatrana je 1D DNŠJ sa Kerovom nelinearnošću:

$$i \frac{d\psi_n}{dz} + C \left(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n \right) + \gamma |\psi_n|^2 \psi_n = 0, \quad (3.3)$$

gde je ψ_n normalizovana amplituda električnog polja n -tog elementa niza talasovoda ($n=1, \dots, N$), γ je normalizovani nelinearni koeficijent koji može biti +1 u samofokusirajućem medijumu ili -1 u samodefokusirajućem medijumu, $C=1$ i predstavlja normalizovanu konstantu sprezanja dok z predstavlja propagacionu koordinatu. Ulogu propagacione koordinate u sistemima koji evoluiraju u vremenu (na primer Boze-Ajnštajnovi kondenzati u optičkoj rešetki) igra vreme.

U cilju ispitivanja stabilnosti svetlih solitona neophodno je odrediti oblast njihovog postojanja. Dobijeno je da ona korelira s pojavom nestabilnosti uniformnog rešenja.

Uniformno rešenje ima oblik ravnog talasa, $\psi_n = ue^{ikn} e^{-i\alpha z}$, koji se prostorno (ili vremenski) destabilizuje usled razvoja modulacione nestabilnosti. Upravo je proces modulacione nestabilnosti odgovoran za lokalizaciju energije i formiranje solitona. Ukoliko je $k = 0$, posmatra se *unstaggered* uniformno rešenje dok se za $k = \pi$ posmatra *staggered* uniformno rešenje. Zamenom pretpostavljenog rešenja u jednačinu (3.3) dolazi se do stacionarne jednačine uz pomoć koje se može odrediti oblast postojanja uniformnog rešenja:

$$\omega - 2 + 2 \cos k + \gamma u^2 = 0, \quad (3.4)$$

gde je amplituda ravnog talasa:

$$u = \sqrt{-\frac{\omega}{\gamma}}, \quad \omega \in (-\gamma, 0].$$

Nakon utvrđivanja da postoji uniformno rešenje neophodno je odrediti njegovu stabilnost. Razlog tome je što se svetli solitoni mogu naći u oblasti gde je uniformno rešenje nestabilno, nasuprot tamnim solitonima koji se mogu naći u oblasti gde je uniformno rešenje stabilno. Stabilnost uniformnog rešenja se utvrđuje uz pomoć teorije malih perturbacija, gde je perturbovano rešenje oblika:

$$\psi_n = (ue^{ikn} + \delta u_n e^{i\alpha n}) e^{-i\alpha z}, \quad (3.5)$$

gde je δu_n mala perturbacija, $|\delta u_n| \ll u$, i kompleksna veličina $\delta u_n = \delta a_n + i \delta b_n$. Mala perturbacija može biti *staggered*, $\alpha = 0$, ili *unstaggered*, $\alpha = 1$, tipa. Smenom rešenja (3.5) u jednačinu (3.3) dobija se izraz u kojem se posle odvajanja realnog i imaginarnog dela po perturbacijama primenjuju Furije transformacije da bi se videlo ponašanje perturbacije tokom propagacije:

$$\begin{pmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{pmatrix} \sim \int d\Omega \begin{pmatrix} \delta a \cdot e^{iqn} e^{\Omega z} \\ \delta b \cdot e^{iqn} e^{\Omega z} \end{pmatrix}.$$

Na taj način se dolazi do disperzione jednačine:

$$\Omega^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right) \left[-2\omega - 4 \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Perturbovano rešenje eksponencijalno raste ukoliko je $\Omega^2 > 0$ (što se vidi na osnovu izraza za Furije transformacije) i time se dobijaju nestabilna rešenja. U oblasti postojanja nestabilnih rešenja $\omega < -2$ mogu se očekivati svetli solitoni, a u oblasti stabilnosti tamni solitoni. Nakon dobijanja svetlih solitona njihova stabilnost se može ispitivati uz pomoć dva kriterijuma [63].

1. Vahitov-Kolokolov kriterijum. Prema ovom kriterijumu potreban ali ne i dovoljan uslov za stabilnost solitona je $dP/d\omega < 0$, tj. da soliton može biti stabilan samo

ukoliko njegova snaga opada sa povećanjem vrednosti propagacione konstante ω . No ovo nije i dovoljan uslov za određivanje stabilnosti solitona. Ovaj uslov se naziva i uslov nagiba. Strogo govoreći VK kriterijum važi za utvrđivanje stabilnosti fundamentalnih svetlih solitona (solitona čiji profil ima samo jedan maksimum – rešenje sa jednim čvorom) i ne može se koristiti bez dodatnih aproksimacija kao potreban uslov za određivanje stabilnosti tamnih solitona.

2. Spektralni kriterijum. Ovaj kriterijum je zasnovan na linearnoj analizi stabilnosti. Postupak se sastoji u tome da se pretpostavljeno solitonsko rešenje perturbuje dodavanjem male perturbacije. Perturbovani soliton se uvrsti u odgovarajuću 1D DNLŠJ i dobijena jednačina po malim perturbacijama linearizuje, odnosno zadržavaju se samo članovi do prvog reda po perturbacijama s obzirom da su članovi višeg reda po perturbacijama zanemarljivi. Linearne jednačine koje opisuju evoluciju malih perturbacija se mogu interpretirati i rešavati kao svojstveni problem za male perturbacije. Iz odgovarajuće svojstvene matrice se izračunavaju svojstvene vrednosti, koje su zapravo koeficijenti rasta malih perturbacija u vremenu. U slučaju hamiltonijanskih sistema svojstvene vrednosti matrice malih perturbacija se javljaju u parovima čisto realnih vrednosti (+a, -a) ili kvartetima kompleksnih vrednosti (a+ib, a-ib, -a+ib, -a-ib). Tada prisustvo realnog dela različitog od nule označava eksponencijalni rast perturbacije i nestabilnost solitonskog rešenja. Ukoliko je imaginarni deo svojstvene vrednosti nula nestabilnost je eksponencijalna, a ukoliko je različit od nule nestabilnost je oscilatorna. Svojstveni problem matrice se retko može odrediti analitički, pa se pribegava numeričkom rešavanju. Ovaj kriterijum stabilnosti predstavlja i potreban i dovoljan uslov za stabilnost solitona.

Pretpostavljeno, perturbovano, solitonsko rešenje jednačine (3.3) je oblika:

$$\psi_n = (u_n e^{ikn} + \delta u_n e^{i\alpha n}) e^{-i\alpha z}, \quad (3.7)$$

gde je δu_n mala perturbacija koja može biti *staggered* tipa ukoliko je $\alpha = 0$ i *unstaggered* ukoliko je $\alpha = 1$, kao i soliton koji može biti *staggered* za $k=0$ i *unstaggered* za $k=1$.

Smenom (3.7) u (3.3) dobija se sledeća jednačina:

$$i \frac{d\delta u_n}{dz} = -(\omega - 2)\delta u_n - (\delta u_{n+1} e^{i\alpha} + \delta u_{n-1} e^{-i\alpha}) - \gamma(2u^2 \delta u_n + u^2 \delta u_n^*), \quad (3.8)$$

gde je u_n kompleksno, $u_n = \text{Re}(u_n) + i \text{Im}(u_n)$ i gde je $\delta u_n = \delta a_n + i \delta b_n$.

Razdvajanjem članova koji su realni od članova uz imaginarnu jedinicu u jednačini (3.8) dobija se sistem jednačina za male perturbacije.

Iz realnog dela jednačine (3.8) dobija se:

$$-\frac{d\delta b_n}{dz} = [-(\omega-2)-3\mu_n^2]\delta a_n - (\delta a_{n+1} + \delta a_{n-1})\cos\alpha. \quad (3.9)$$

Za članove koji idu uz imaginarnu jedinicu dobija se:

$$\frac{d\delta a_n}{dz} = [-(\omega-2)-\mu_n^2]\delta b_n - (\delta b_{n+1} + \delta b_{n-1})\cos\alpha. \quad (3.10)$$

Posmatrajući jednačine (3.9) i (3.10) uočava se da one zapravo predstavljaju jednačine svojstvenog problema matrice sistema M:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H^+ \\ -H^- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

gde su

$$H_{j,k}^+ = [-(\omega-2)-3\mu_n^2]\delta_{j,k} - \cos\alpha(\delta_{j,k+1} + \delta_{j,k-1}),$$

$$H_{j,k}^- = H_{j,k}^+ + 2\mu_n^2\delta_{j,k}.$$

Funkcije δa_n , δb_n su komponente svojstvenog vektora linearnog svojstvenog problema [16]:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Na osnovu jednačine (3.12) sledi da perturbacije po z zadovoljavaju:

$$\begin{bmatrix} \delta a_n \\ \delta b_n \end{bmatrix} = e^{\beta z} \begin{bmatrix} \delta a_n(z=0) \\ \delta b_n(z=0) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

gde su β svojstvene vrednosti matrice M.

Na osnovu relacije (3.13) se može odrediti da li perturbacija raste ili opada sa z i na osnovu toga doneti zaključak o stabilnosti solitona:

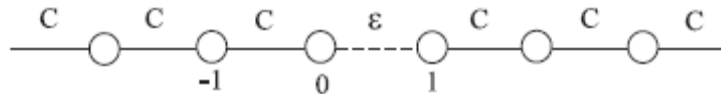
1. ukoliko su svojstvene vrednosti čisto realne veličine, u pitanju je eksponencijalna nestabilnost tj. perturbacija raste sa porastom propagacione koordinate, z ;
2. ukoliko su svojstvene vrednosti kompleksne veličine sa realnim delom većim od nule u pitanju je oscilatorna nestabilnost solitona i javlja se pored eksponencijalnog rasta i oscilovanje perturbacije sa porastom propagacione koordinate, z ;
3. ukoliko su svojstvene vrednosti čisto imaginarne u pitanju su stabilni solitoni i male perturbacije ne rastu već samo osciluju sa porastom propagacione koordinate, z .

IV Prostiranje svetlosti u 1D i 2D rešetkama

U ovoj glavi biće predstavljena analitička i numerička analiza svojstava i dinamike površinskih moda koje se mogu formirati u sistemima rešetki različite geometrije, kao što su: dve nelinearne polubeskonačne 1D rešetke linearno spregnute serijski i paralelno preko jednog svog sajta, tri polubeskonačne 1D nelinearne rešetke spregnute linearno na jednom sajtu i dve 2D beskonačne nelinearne linearno spregnute rešetke na jednom sajtu. Rezultat analize je određivanje oblasti postojanja površinskih moda tipa solitonskih talasa primenom varijacionog računa (VR) i numerički. Takođe je posmatrana i stabilnost pomenutih moda primenom VK kriterijuma i spektralne analize. Dobijeno je dobro slaganje analitičkih i numeričkih rezultata.

4.1 Dve serijski spregnute polubeskonačne 1D linearne rešetke

Sistem od dve serijski linearno vezane polubeskonačne rešetke je posmatran kao jedna ekvivalentna 1D diskretna rešetka sačinjena od dva niza talasovoda između kojih je, u proizvodnom procesu, moguće menjati rastojanje. Lokalna promena rastojanja se može interpretirati kao defekat u homogenoj rešetki od identičnih talasovoda, slika 4.1.



Slika 4.1 Serijski spregnute dve polubeskonačne rešetke.

Pomenuti sistem se modeluje sa tri DNŠJ-e koje opisuju prostiranje svetlosti kroz sistem talasovoda sa obe strane defekta i kroz defekat, tj. kroz elemente rešetke sa obe strane spoja i elemente koji su linearno spregnuti (nulti i prvi sajt), j-na (4.0):

$$\begin{aligned}
 i \frac{d\phi_n}{dt} + C\phi_{n+1} + C\phi_{n-1} &= 0, \quad \text{za } n \neq 0,1, \\
 i \frac{d\phi_0}{dt} + \varepsilon\phi_1 + C\phi_{-1} &= 0, \quad \text{za } n = 0, \\
 i \frac{d\phi_1}{dt} + \varepsilon\phi_0 + C\phi_2 &= 0, \quad \text{za } n = 1.
 \end{aligned} \tag{4.0}$$

Propagaciona koordinata ili vreme je t , ϕ_n predstavlja električno polje u n -tom talasovodu, a ϕ_0 i ϕ_1 u nultom i prvom talasovodu (slika 4.1) tj. električno polje u sajtovim rešetke na kojima je lokalizovan defekt. Jednačine (4.0) opisuju evoluciju pomenutih polja, C je konstanta sprezanja između talasovoda koji nisu na defektu, tj. konstanta sprezanja između bilo kojih sajtova osim između nultog i prvog, dok ε predstavlja konstantu sprezanja između nultog i prvog sajta. Nelinearnost je zanemarena.

Kako su rešenja, oblika ravanskih talasa, nestabilna pri dejstvu malih perturbacija, pretpostavljena stacionarna rešenja jednačina (4.0) su oblika $\phi_n = u_n \exp(i\mu t)$, gde je u_n realno polje propagacionog talasa, μ predstavlja propagacionu konstantu. Smenom pretpostavljenog stacionarnog rešenja u jednačine (4.0) dolazi se do stacionarnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} -\mu u_n + C u_{n+1} + C u_{n-1} &= 0, & \text{za } n \neq 0, 1, \\ -\mu u_0 + \varepsilon u_1 + C u_{-1} &= 0, & \text{za } n = 0, \\ -\mu u_1 + \varepsilon u_0 + C u_2 &= 0, & \text{za } n = 1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

U cilju proučavanja površinskih lokalizovanih moda posmatra se polje lokalizovano na defektu a koje eksponencijalno opada s leve i desne strane udaljavanjem od defekta:

$$\begin{aligned} u_n &= A \exp(an), & \text{za } n \leq 0, \\ u_n &= B \exp(-a(n-1)), & \text{za } n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gde su A i B vrednosti amplitude, dok bezdimenzioni parametar a predstavlja inverznu dužinu, dobijenu linearizovanjem stacionarnih jednačina (4.1) kada $|n| \rightarrow \infty$. Parametar $a = \ln\left(\mu/2 + \sqrt{\mu^2/4 - 1}\right)$, odakle sledi da propagaciona konstanta mora imati vrednosti $\mu > 2$.

Smenom pretpostavljenih rešenja (4.2) u stacionarne jednačine (4.1) dolazi se do sledećeg sistema jednačina:

$$\begin{aligned} \mu &= C e^{-a} + \frac{C}{e^{-a}}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{\varepsilon}{\mu - C e^{-a}}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{\mu - C e^{-a}}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Kombinacijom relacija (4.3) dobija se izraz:

$$e^{-a} = \pm \frac{C}{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

Ova relacija pokazuje da lokalizacija polja na defektu zavisi od odnosa konstante sprezanja između talasovoda i na defektu. Na osnovu vrednosti parametra a može se zaključiti da je $|e^{-a}| < 1$, tako da, kada je sprezanje na defektu jače od sprezanja u rešetki, doći će do lokalizacije polja na defektu. Nasuprot tome, za male vrednosti sprezanja na defektu (veliko rastojanje između rešetki), rešetke neće uticati značajno jedna na drugu tj. javiće se slučaj analogan slučaju dve nezavisne polubeskonačne rešetke.

4.2 Dve serijski linearno spregnute nelinearne polubeskonačne 1D rešetke

Posmatrana je 1D rešetka, predstavljena na slici 4.1 [64], u kojoj se pored defekta pojavljuje i Kerova nelinearnost. Pretpostavka je da konstanta sprezanja unutar komponentnih rešetki, C , i konstanta sprezanja koja predstavlja defekt, ε , imaju isti znak, t je vreme (propagaciona koordinata), normalizovani nelinearni koeficijent γ je konstantan u sistemu i izabran tako da je kao i C skaliran na jedinicu, $C = \gamma = 1$.

Jednačine kojima se modeluje ovaj sistem imaju oblik analogan jednačinama (4.0) sa dodatkom člana koji opisuje nelinearnost, Kerovog tipa, u svakoj od jednačina.

$$\begin{aligned}
 i \frac{d\phi_n}{dt} + \phi_{n+1} + \phi_{n-1} + |\phi_n|^2 \phi_n &= 0, \quad \text{za } n \neq 0,1, \\
 i \frac{d\phi_0}{dt} + \varepsilon \phi_1 + \phi_{-1} + |\phi_0|^2 \phi_0 &= 0, \quad \text{za } n = 0, \\
 i \frac{d\phi_1}{dt} + \varepsilon \phi_0 + \phi_2 + |\phi_1|^2 \phi_1 &= 0, \quad \text{za } n = 1.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Veličina ϕ_n predstavlja električno polje u n -tom talasovodu, a ϕ_0 i ϕ_1 u nultom i prvom (slika 4.1) tj. električno polje u sajtojima na kojima je lokalizovan defekt. Jednačine (4.5) opisuju evoluciju pomenutih polja.

Stacionarna rešenja, za solitone koji se formiraju na spoju dve rešetke, traže se na standardan način, u obliku $\phi_n = u_n \exp(i\mu t)$, gde μ predstavlja propagacionu konstantu. Smenom pretpostavljnog stacionarnog rešenja u jednačine (4.5), dobija se sledeći sistem stacionarnih jednačina:

$$\begin{aligned}
 -\mu u_n + u_{n+1} + u_{n-1} + u_n^3 &= 0, \quad \text{za } n \neq 0,1, \\
 -\mu u_0 + \varepsilon u_1 + u_{-1} + u_0^3 &= 0, \quad \text{za } n = 0, \\
 -\mu u_1 + \varepsilon u_0 + u_2 + u_1^3 &= 0, \quad \text{za } n = 1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Za analitičko rešavanje jednačina (4.6) može se primeniti VR i na taj način se mogu dobiti aproksimativna solitonska rešenja. Za posmatrani sistem formiran od dve polubeskonačne nelinearne rešetke spojene defektom, Lagranžijan se može predstaviti u vidu zbira Lagranžijana za svaku od polubeskonačnih komponentnih rešetki (L_1 i L_2) i člana koji potiče od defekta na spoju dve rešetke :

$$L = L_1 + L_2 + 2\varepsilon u_0 u_1. \tag{4.7}$$

Lagranžijani polubeskonačnih rešetki imaju sledeći oblik:

$$L_1 \equiv \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\mu u_n^2 + \frac{1}{2} u_n^4 + 2u_n u_{n+1} \right) + \left(-\mu u_0^2 + \frac{1}{2} u_0^4 \right),$$

$$L_2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\mu u_n^2 + \frac{1}{2} u_n^4 + 2u_n u_{n+1} \right).$$

Profil pretpostavljene površinski lokalizovane mode je centriran na defektu i eksponencijalno opada sa udaljavanjem, levo i desno, od defekta, tako da je oblik polja površinske mode:

$$u_n = A \exp(an), \quad \text{za } n \leq 0, \quad (4.8)$$

$$u_n = B \exp(-a(n-1)), \quad \text{za } n \geq 1,$$

gde bezdimenzioni parametar a predstavlja inverznu lokalizacionu dužinu koja se dobija linearizacijom stacionarnih jednačina (4.6) kada $|n| \rightarrow \infty$, $a = \ln(\mu/2 + \sqrt{\mu^2/4 - 1})$. Iz izraza za a se može zaključiti da propagaciona konstanta mora imati vrednosti $\mu > 2$. Inverzna dužina se može predstaviti uvođenjem parametra s , na sledeći način:

$$s \equiv e^{-a} = \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1},$$

$$\mu = s + s^{-1}.$$

Smenom pretpostavljenih rešenja (4.8) u jednačinu (4.7) dolazi se do izraza za efektivni Lagranžijan:

$$L_{eff} = (L_1)_{eff} + (L_2)_{eff} + 2\epsilon AB,$$

$$(L_1)_{eff} = -s^{-1} A^2 + \frac{1}{2(1-s^4)} A^4, \quad (4.9)$$

$$(L_2)_{eff} = -s^{-1} B^2 + \frac{1}{2(1-s^4)} B^4.$$

Iz ukupnog efektivnog Lagranžijana se lokalizovana rešenja dobijaju kao lokalni ekstremumi s obzirom na varijacione parametre, A i B , tačnije rešavanjem odgovarajućih Ojler-Lagranževih (Euler-Lagrange) jednačina:

$$\frac{\partial (L_1)_{eff}}{\partial A} + 2\epsilon B = 0,$$

$$\frac{\partial (L_2)_{eff}}{\partial B} + 2\epsilon A = 0. \quad (4.10)$$

Smenom izraza za efektivni Lagranžijan u jednačine (4.10), dobijaju se, nakon sređivanja, jednačine iz kojih se mogu naći amplitude lokalizovanih moda:

$$\begin{aligned} -s^{-1}A + \frac{1}{1-s^4}A^3 + \varepsilon B &= 0, \\ -s^{-1}B + \frac{1}{1-s^4}B^3 + \varepsilon A &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Na osnovu jednačina (4.11) može se zaključiti da postoje tri tipa lokalizovanih površinskih moda:

1. simetrični solitoni (SS), koji se karakterišu jednakošću amplituda sa obe strane defekta, $A=B$;
2. antisimetrični solitoni (AS), koji se karakterišu jednakim po apsolutnoj vrednosti ali suprotnog znaka amplitudama sa različitih strana defekta, $A = -B$;
3. nesimetrični solitoni (NS) koji su okarakterisani nejednakošću $A^2 \neq B^2$.

Smenom uslova za SS, $A=B$, u jednačine (4.11) dolazi se do izraza za kvadrat amplitude simetričnih moda:

$$A^2 = (1-s^4)(s^{-1} - \varepsilon). \quad (4.12)$$

Iz jednačine (4.12) može se zaključiti da za SS postoji gornja granica postojanja, tj. da pri fiksnoj vrednosti propagacione konstante μ , konstanta sprezanja između rešetki, ε , ima konkretnu vrednost iznad koje se simetrična rešenja ne mogu naći, tj. $\varepsilon < \varepsilon_c \equiv s^{-1}$, Amplitude simetričnih moda predstavljene su na slici 4.2.

Smenom uslova za AS, $A = -B$, u jednačinu (4.11) dolazi se do izraza za kvadrat amplitude antisimetričnih moda:

$$A^2 = (1-s^4)(s^{-1} + \varepsilon). \quad (4.13)$$

Na osnovu jednačine (4.13) može se zaključiti da varijacioni račun predviđa da AS postoje u celom parametarskom prostoru, slika 4.2.

Oblast postojanja NS, $A^2 \neq B^2$, može se dobiti oduzimanjem jednačina (4.11) i eliminisanjem zajedničkog člana $(A-B)$:

$$(s^{-1} + \varepsilon) = A^2 + B^2 + AB. \quad (4.14)$$

Kada $A - B \rightarrow 0$, jednačina (4.14) dovodi do relacije:

$$A^2 = (1/3)(1 - s^4)(s^{-1} + \varepsilon). \quad (4.15)$$

Izjednačavanjem (4.13) i (4.15) može se dobiti vrednost defekta za koji se javlja par nesimetričnih rešenja i spontano narušenje simetrije:

$$\varepsilon_c = (2s)^{-1}. \quad (4.16)$$

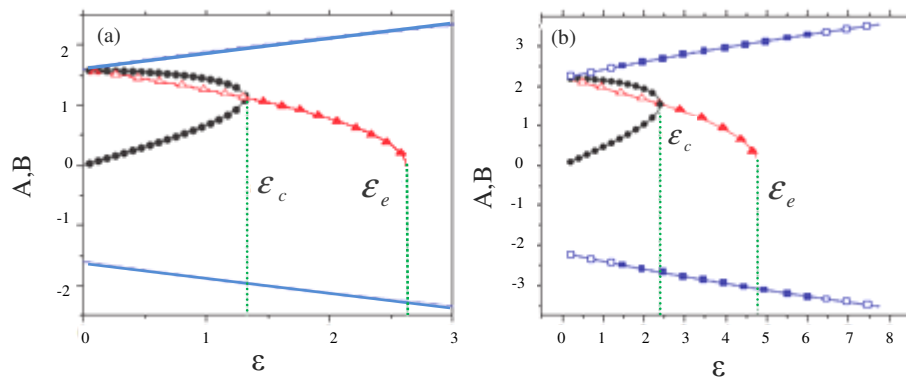
Nesimetrična rešenja se mogu dobiti uz pomoć jednačina (4.11), njihovim sabiranjem i oduzimanjem i rešavanjem jednačina za $A^2 + B^2$ i AB :

$$A = \frac{\varepsilon \sqrt{2s(1-s^4)}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4s^2\varepsilon^2}}}, \quad (4.17)$$

$$B = \sqrt{\frac{1-s^4}{2s}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4s^2\varepsilon^2}}.$$

Ovo rešenje postoji za $\varepsilon < \varepsilon_c$, gde je ε_c tačka spontanog narušenja simetrije ili bifurkaciona vrednost definisana relacijom (4.16).

Na slici 4.2 mogu se videti amplitude za sva tri tipa rešenja, dobijene uz pomoć VR i numerički. Numerički rezultati, koji će biti detaljno razmatrani u daljem tekstu, se dobro slažu sa rezultatima varijacionog prilaza.



Slika 4.2 Amplitude za sva tri tipa solitona u funkciji od konstante sprezanja između rešetki (defekta). Amplitude A i B dobijene varijacionim računom za NS su prikazane crnom linijom, SS crvenom linijom i AS plavom linijom za fiksne vrednosti propagacione konstante (a) $\mu=3$ i (b) $\mu=5$. Numerički dobijene vrednosti amplitude predstavljene su krugovima za NS, trouglovima za SS i kvadratima za AS. Tačkaste vertikalne linije označavaju granice regiona postojanja za NS (ε_c) i SS (ε_e). Za $\mu=3$ AS nisu nađeni u numeričkoj formi. Neobojeni simboli predstavljaju nestabilne a obojeni stabilne solitone, što je određeno numerički sprovedenom linearnom analizom stabilnosti.

Stabilnost sva tri tipa površinskih solitona proveravana je po VK kriterijumu. Ovaj kriterijum postavlja potreban uslov za stabilnost solitona u formi $dP/d\mu > 0$, gde je

$P \equiv \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n^2$ ukupna snaga solitona. U slučaju posmatranog modela u ovom delu, snaga ima oblik:

$$P = (1 - s^2)^{-1} (A^2 + B^2). \quad (4.18)$$

Kako je propagaciona konstanta, μ , funkcija parametra s i $\frac{\partial s}{\partial \mu} < 0$, VK kriterijum se s obzirom na parametar s svodi na izraz $\frac{\partial P}{\partial s} < 0$.

Snaga za SS rešenje se dobija smenom jednačine (4.12) u (4.18):

$$P = 2(1 + s^2)(s^{-1} - \varepsilon). \quad (4.19)$$

Jednačina (4.19) zadovoljava VK kriterijum i predviđa stabilnost simetričnog rešenja u celoj oblasti postojanja. Međutim, linearnom analizom stabilnosti je pokazano da SS postaju nestabilni u tački spontanog narušenja simetrije, tj. za $\varepsilon < \varepsilon_c$, iako je VK kriterijum zadovoljen.

Što se tiče NS rešenja, smenom jednačine (4.15) u jednačinu (4.18) dolazi se do izraza za snagu u kojem ne figuriše defekt:

$$P = (1 + s^2)/s. \quad (4.20)$$

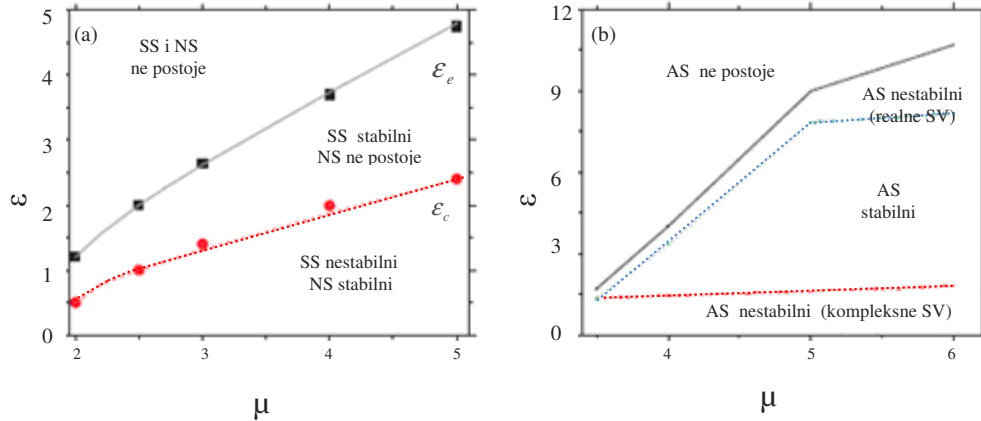
Jednačina (4.20), takođe, zadovoljava VK u celom regionu postojanja nesimetričnih površinskih moda, što znači da postoji uslov da su nesimetrična rešenja stabilna u celom regionu svog postojanja.

Na isti način, smenom (4.13) u (4.18) dolazi se do izraza za snagu AS:

$$P = 2(1 + s^2)(s^{-1} + \varepsilon). \quad (4.21)$$

Za ovakav oblik ukupne snage, VK kriterijum je zadovoljen samo u opsegu $\varepsilon > \varepsilon_s = (1 - s^2)s^{-3}$, što znači da u tom intervalu mogu postojati stabilni antisimetrični solitoni, dok za oblast $\varepsilon < \varepsilon_s$ VK kriterijum nije zadovoljen i solitoni su sigurno nestabilni.

Na slici 4.3 predstavljen je dijagram egzistencije i stabilnosti za fundamentalne simetrične, nesimetrične i antisimetrične solitone.



Slika 4.3 Dijagram oblasti postojanja i dijagram stabilnosti za fundamentalne simetrične i nesimetrične solitone (a) i oblast postojanja i granica stabilnosti za antisimetrične solitone (b), u parametarskom prostoru (ϵ, μ) . Radi preglednosti na dijagramima su simetrični solitoni označeni kao SS, nesimetrični kao NS a antisimetrični kao AS. Rezultati predstavljeni na slici (a) dobijeni su uz pomoć VR (prikazano krivama) i numeričkim izračunavanjima (prikazano simbolima). Rezultati dobijeni uz pomoć VR se podudaraju sa numeričkim rezultatima. Rezultati predstavljeni na slici (b) nađeni su samo numerički pošto VR ne daje granicu postojanja za antisimetrične solitone. Na istoj slici prikazan je i tip svojstvenih vrednosti unutar oblasti nestabilnosti.

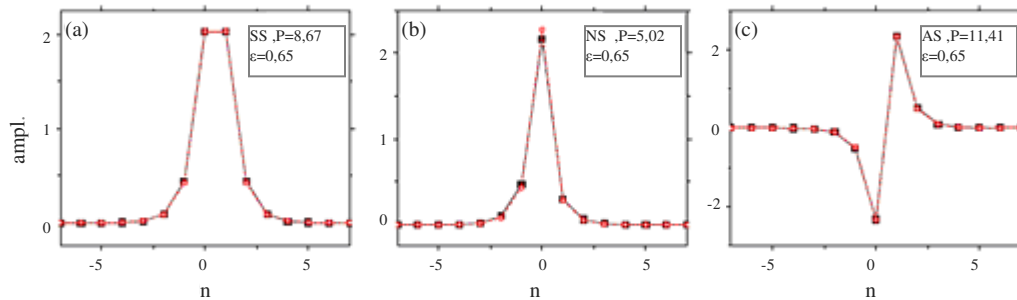
Ukratko, zaključci VR su da za simetrična rešenja postoji gornja granica postojanja u parametarskom prostoru, dok za antisimetrična takva granica nije nađena i predviđa se njihovo postojanje u celom parametarskom prostoru. U slučaju nesimetričnih rešenja nađena je vrednost konstante sprezanja, između rešetki, na kojoj se pojavljuje par nesimetričnih rešenja. Potreban, ali ne i dovoljan uslov za stabilnost, prema VK kriterijumu, ispunjen je za simetrična i nesimetrična rešenja u celoj oblasti postojanja, dok je za antisimetrična rešenja zadovoljen samo za $\epsilon > \epsilon_s$, a u ostalom delu parametarskog prostora ne.

Rezultati, dobijeni uz pomoć VR, proveravani su numerički. Stacionarne jednačine su rešavane numerički korišćenjem relaksacione metode i algoritma baziranog na modifikovanoj Pael (Powell) metodi minimizacije. Stabilnost stacionarnog rešenja je proveravana uz pomoć linearne analize stabilnosti tj. izračunavanjem svojstvenih vrednosti za mode sa malim perturbacijama. Kao definitivna provera svih rezultata rađene su direktne numeričke simulacije početnih jednačina modela. Pri tom je korišćena numerička metoda bazirana na Runge-Kuta (Runge-Kutta) algoritmu šestog reda. Simulacije su startovane uzimanjem stacionarnog solitonskog profila kao početnog uslova na koji je dodata perturbacija. Simulacije su rađene sa različitim tipovima perturbacije (regularna i slučajna perturbacija).

Početni uslov za numeričko dobijanje stacionarnih, solitonskih rešenja centriranih na defektu je da amplitude polja u susednim sajtovim na kojima je lokalizovan defekt imaju istu vrednost, $u_0 = u_1 = A > 0$ za simetrična rešenja. U slučaju nesimetričnih

rešenja amplitude polja u susjednim sajtozima, na kojima je lokalizovan defekt, su različite $u_0 = A > 0$ i $u_1 = B > 0$, a suprotnog znaka za antisimetrična rešenja, $u_0 = A > 0$ i $u_1 = -A$. U sva tri slučaja konkretne vrednosti za amplitude A i B su generisane VR, dok su početne vrednosti za polja u rešetki na svim ostalim sajtozima anulirane. Dobijeni rezultati se odnose na identične spregnute rešetke sa $N_1 = N_2 = 50$ sajta tj. sa ukupnim brojem sajtova $N = 100$. Uzeto je da se sprezanje između rešetki javlja između sajtova sa indeksima $n = 0$ i $n = 1$.

Na slici 4.4 mogu se videti numerički nađeni, tipični profili simetričnih, nesimetričnih i antisimetričnih solitona. Na istoj slici je, radi poređenja, predstavljen oblik rešenja dobijen primenom VR, pri čemu se vidi dobro slaganje ovih rezultata.



Slika 4.4 Profili fundamentalnih površinskih solitona za (a) simetrični, (b) nesimetrični i (c) antisimetrični tip solitona. Vrednosti parametra sprezanja između rešetki i ukupne snage prikazani su na slici. Crne, pune linije sa kvadratima označavaju numerički generisane solitone, dok crvene isprekidane linije sa krugovima označavaju solitone dobijene uz pomoć VR.

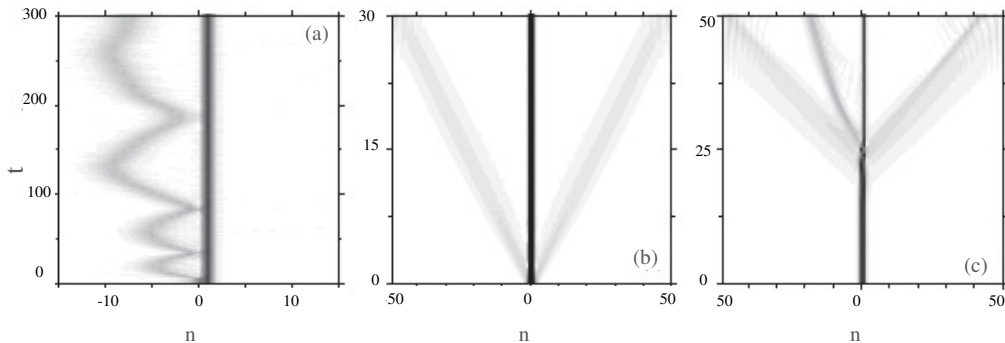
Zavisnost amplituda A i B, za sve tipove solitona, od parametra sprezanja između rešetki, dobijene numerički, prikazane su zajedno sa rezultatima dobijenim uz pomoć VR na slici 4.2.

Numerički rezultati pokazuju da je u parametarskom prostoru (ϵ, μ) region postojanja solitona svih tipova ograničen. Ti zaključci se slažu sa predviđanjima baziranim na VR kada je reč o SS i NS rešenjima. Pak, za AS numerički rezultati ukazuju na ograničenost regiona postojanja, dok VR predviđa postojanje istih u celom parametarskom prostoru. Razlog neslaganja je najverovatnije posledica postojanja jake interakcije na spoju dve rešetke usled razlike u znaku polja na spoju. To čini neadekvatnim pretpostavljeni oblik probnog solitonskog rešenja u varijacionom prilazu, a time i nerelevantnost dobijenih rezultata.

Linearna analiza stabilnosti predviđa da simetrično rešenje, koje je stabilno, postaje nestabilno u bifurkacionoj tački, ϵ_c , i da se za $\epsilon < \epsilon_c$ pojavljuju dve nove grane nesimetričnih rešenja koje su stabilne. Na slici 4.2 može se lako uočiti da pomenuta situacija odgovara viljuškastoj bifurkaciji superkritičnog tipa (videti Dodatak) gde se u

bifurkacionoj tački destabilizuje simetrično rešenje i simultano pojavljuju dve grane stabilnih nesimetričnih rešenja. VK kriterijum je predviđao da je simetrično rešenje stabilno u celom parametarskom prostoru, dok je linearna analiza stabilnosti pokazala da postoji bifurkaciona tačka na kojoj simetrični solitoni menjaju svoju stabilnost, tj. postaju nestabilni. Što se tiče stabilnosti nesimetričnih rešenja, linearna analiza stabilnosti i VK kriterijum su pokazali dobro slaganje dok u slučaju antisimetričnih rešenja VK kriterijum predviđa oblast stabilnosti rešenja za $\varepsilon < \varepsilon_s$, a linearna analiza stabilnosti predviđa dva puta izmenu stabilnosti antisimetričnih moda pri fiksnoj vrednosti parametra μ , što pokazuju i direktne simulacije. Prilikom opadanja vrednosti parametra ε za fiksnu vrednost parametra μ , nestabilna antisimetrična grana rešenja, koja se karakteriše parom čisto realnih svojstvenih vrednosti, postaje stabilna. Daljim opadanjem vrednosti parametra ε , antisimetrični soliton gubi svoju stabilnost i javljaju se dva para (kvartet) kompleksnih svojstvenih vrednosti sa dominantnim realnim delom.

Direktnim simulacijama dobijeno je da se nestabilno simetrično rešenje koje pod uticajem male perturbacije predaje deo svoje energije okolini transformiše u antisimetrični brider sa nižom energijom, slika 4.5 (a). Pokazano je i da su stacionarne nesimetrične mode stabilne u celom regionu postojanja, što je predviđeno VK kriterijumom i linearnom analizom stabilnosti. Direktna numerička simulacija koja je startovala od antisimetričnog solitona na koji je superponirana mala perturbacija, pokazala je kako se razvija nestabilnost. Na slici 4.5 (b) i (c) prikazane su evolucije nestabilnog antisimetričnog rešenja čiji spektar svojstvenih vrednosti sadrži par čisto realnih svojstvenih vrednosti i spektar svojstvenih vrednosti koji sadrži kvartet kompleksnih svojstvenih vrednosti, respektivno. Nestabilne antisimetrične mode emituju deo svoje energije i nastaje antisimetrični brider manje energije, slika 4.5 (b) ili nesimetrična površinska moda tipa bridera, slika 4.5 (c).

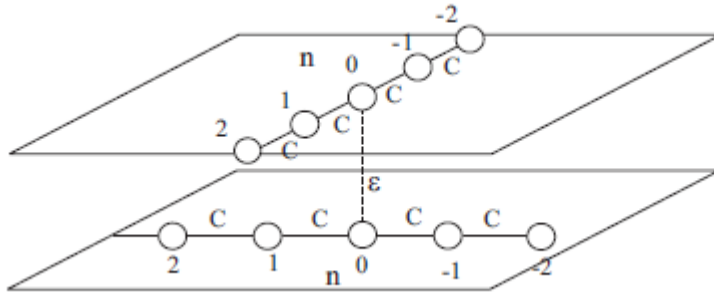


Slika 4.5 Evolucija perturbovanih solitona koji bi po linearnoj analizi stabilnosti trebalo da budu nestabilni: (a) simetrični soliton sa $\varepsilon=0.65$ i $\mu=6.425$, antisimetrični solitoni sa $\mu=6$, (b), $\varepsilon=9.1$ i (c) $\varepsilon=1.15$. Nestabilni simetrični soliton, nakon predaje dela svoje snage, postaje nesimetrični brider. Nestabilni antisimetrični solitoni se takođe transformišu u bridere.

Osnovna razlika 1D rešetke sa defektom i 1D rešetke bez defekta [65] je u tome da u prisustvu defekta simetrična rešenja postaju nestabilna dok su nesimetrična i antisimetrična rešenja stabilna. Simetrična rešenja u strukturi bez defekta predstavljaju inter-site centrirane diskretne solitone koji su uvek nestabilni u DNLŠJ [65]. Sa pojavom defekta omogućava se stabilizacija inter-site solitona. Nesimetrično rešenje, u slučaju bez defekta, odgovara on-site centriranom solitonu koji je tada stabilan, dok antisimetrični soliton, pod pomenutim okolnostima, predstavljaju lokalizovane 'uvrnutе' (twisted) mode [66-70] koje su stabilne kada imaju male amplitude i nestabilne kada su im amplitude veće. Poslednji slučaj je kvalitativno neizmenjen i kada je u rešetki prisutan defekt.

4.3 Dve paralelne linearno spregnute na jednom sajtu 1D nelinearne rešetke

Posmatran je sistem koji se sastoji od dve paralelne 1D beskonačne uniformne identične rešetke spregnute linearno preko jednog svog sajta, slika 4.6 [64]. Pretpostavka je da konstanta spreznaja unutar komponentnih rešetki, C , i konstanta transverznog spreznaja, ε , imaju isti znak. Parametar t je vreme (propagaciona koordinata) i γ je normalizovani nelinearni koeficijent, koji je konstantan u sistemu. Radi jednostavnosti uzeto je skaliranje $C = \gamma = 1$. U sistemu je prisutna Kerova nelinearnost.



Slika 4.6 Dve uniformne beskonačne identične rešetke povezane na jednom sajtu, $n=0$. Longitudinalna konstanta spreznaja je C a transverzalna ε .

Pomenuti sistem se modeluje uz pomoć četiri DNŠJ-e koje opisuju ponašanje propagacionog talasa kako na sajtovim na kojima se vrši spreznaje između rešetki (nulti sajtovi, slika 4.6) tako i na bilo kom drugom sajtu (n -ti sajt):

$$\begin{aligned}
 i \frac{d\phi_n}{dt} + \phi_{n+1} + \phi_{n-1} + |\phi_n|^2 \phi_n &= 0, \quad \text{za } n \neq 0, \\
 i \frac{d\phi_0}{dt} + \phi_1 + \phi_{-1} + \varepsilon \psi_0 + |\phi_0|^2 \phi_0 &= 0, \\
 i \frac{d\psi_n}{dt} + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + |\psi_n|^2 \psi_n &= 0, \quad \text{za } n \neq 0, \\
 i \frac{d\psi_0}{dt} + \psi_1 + \psi_{-1} + \varepsilon \phi_0 + |\psi_0|^2 \psi_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Veličina ϕ_n predstavlja električno polje u n -tom sajtu ($n \neq 0$), tj. dalje od spoja, u jednoj rešetki a ψ_n predstavlja električno polje u n -tom sajtu u drugoj rešetki dok, su ϕ_0 i ψ_0 električna polja u nultim sajtovim tj. sajtovim na kojima su rešetke spojene, slika 4.6. Jednačine (4.22) opisuju evoluciju pomenutih polja.

Stacionarna rešenja, formirana na spoju dve rešetke, traže se u obliku $\phi_n = u_n \exp(i\mu t)$ i $\psi_n = v_n \exp(i\mu t)$, gde je propagaciona konstanta μ , dok su u_n i v_n realna polja talasa. Smenom pretpostavljenih stacionarnih rešenja u jednačine (4.22) dolazi se do stacionarnih jednačina, sledećeg oblika:

$$\begin{aligned} -\mu u_n + u_{n+1} + u_{n-1} + |u_n|^2 u_n &= 0, & \text{za } n \neq 0, \\ -\mu u_0 + u_1 + u_{-1} + \varepsilon v_0 + |u_0|^2 u_0 &= 0, \\ -\mu v_n + v_{n+1} + v_{n-1} + |v_n|^2 v_n &= 0, & \text{za } n \neq 0, \\ -\mu v_0 + v_1 + v_{-1} + \varepsilon u_0 + |v_0|^2 v_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Za analitičku procenu rešenja korišćen je, i ovde, VR. Lagranžijan ovog sistema sastoji se od Lagranžijana jedne i druge rešetke kao i člana koji uračunava sprezanje između rešetki, analogno jednačini (4.7) u slučaju serijski spregnutih rešetki:

$$L = L_1 + L_2 + 2\varepsilon u_0 u_1, \quad (4.24)$$

gde su L_1 i L_2 odgovarajući Lagranžijani dve uniformne rešetke. Lagranžijani dve beskonačne rešetke imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\mu u_n^2 + \frac{1}{2} u_n^4 + 2u_n u_{n+1} \right), \\ L_2 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\mu v_n^2 + \frac{1}{2} v_n^4 + 2v_n v_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ovde su od interesa površinski lokalizovane mode centrirane na sajtozima preko kojih su rešetke transverzalno spregnute i njihovi profili amplituda eksponencijalno opadaju sa udaljavanjem, levo i desno od pomenutih sajtova:

$$\begin{aligned} u_n &= A \exp(-a|n|), \\ v_n &= B \exp(-a|n|), \end{aligned} \quad (4.26)$$

gde bezdimenzioni parametar a predstavlja inverznu dužinu, koja se dobija linearizovanjem stacionarnih jednačina (4.23) kada $|n| \rightarrow \infty$ i ima sledeći oblik $a = \ln\left(\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\right)$. Iz izraza za a sledi da propagaciona konstanta mora imati vrednosti $\mu > 2$. Inverzna dužina se može predstaviti uvođenjem parametra s , na sledeći način:

$$\begin{aligned} s &\equiv e^{-a} = \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}, \\ \mu &= s + s^{-1}. \end{aligned}$$

Smenom pretpostavljenih rešenja (4.26.) u jednačinu (4.24.) dolazi se do izraza za efektivni Lagranžijan:

$$L_{eff} = (L_1)_{eff} + (L_2)_{eff} + 2\epsilon AB,$$

$$L_{eff} = -\frac{1-s^2}{s}(A^2 + B^2) + \frac{1+s^4}{2(1-s^4)}(A^4 + B^4) + 2\epsilon AB. \quad (4.27)$$

Stacionarna lokalizovana rešenja se dobijaju rešavanjem odgovarajućih Ojler-Lagranževih jednačina (videti prethodni deo):

$$\frac{\partial(L_1)_{eff}}{\partial A} + 2\epsilon B = 0,$$

$$\frac{\partial(L_2)_{eff}}{\partial B} + 2\epsilon A = 0. \quad (4.28)$$

Smenom izraza za efektivni Lagranžijan u jednačine (4.28), dobijaju se, nakon matematičkog sređivanja, jednačine uz pomoć kojih je moguće dobiti amplitude lokalizovanih moda:

$$-\frac{1-s^2}{s}A + \frac{1+s^4}{1-s^4}A^3 + \epsilon B = 0,$$

$$-\frac{1-s^2}{s}B + \frac{1+s^4}{1-s^4}B^3 + \epsilon A = 0. \quad (4.29)$$

Na osnovu jednačina (4.29) može se zaključiti da postoje tri tipa lokalizovanih rešenja:

1. simetrična rešenja (SS), koja se dobijaju u slučaju kada su amplitude površinskih moda na obema rešetkama jednake, $A=B$;
2. antisimetrična rešenja (AS), koja se dobijaju u slučaju kada su amplitude površinskih moda na obema rešetkama jednake po intenzitetu ali suprotnog znaka $A = -B$;
3. nesimetrična rešenja (NS) koja se dobijaju ukoliko su kvadrati amplituda na dvema rešetkama različiti $A^2 \neq B^2$.

Smenom uslova za simetrična rešenja, $A=B$, u jednačine (4.29) dolazi se do kvadrata amplitude za simetrične mode:

$$A^2 = \frac{1-s^4}{1+s^4} \left(\frac{1-s^2}{s} - \epsilon \right). \quad (4.30)$$

Na osnovu relacije (4.30) može se zaključiti da za simetrična rešenja postoji gornja granica oblasti postojanja, odnosno, da pri fiksiranoj vrednosti propagacione konstante μ konstanta sprezanja između rešetki, ε , ima konkretnu vrednost iznad koje se simetrična rešenja ne mogu naći, $\varepsilon < \varepsilon_e = (1 - s^2)/s$, slika 4.7.

Nesimetrično rešenje se dobija smenom uslova $A^2 \neq B^2$ u jednačine (4.29), njihovim sabiranjem i oduzimanjem dobijaju se sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1-s^4}{2s(1+s^4)}} \sqrt{(1-s^2) + \sqrt{(1-s^2)^2 - 4s^2\varepsilon^2}}, \\ B &= \varepsilon \sqrt{\frac{2s(1-s^4)}{1+s^4}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2 + \sqrt{(1-s^2)^2 - 4s^2\varepsilon^2}}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

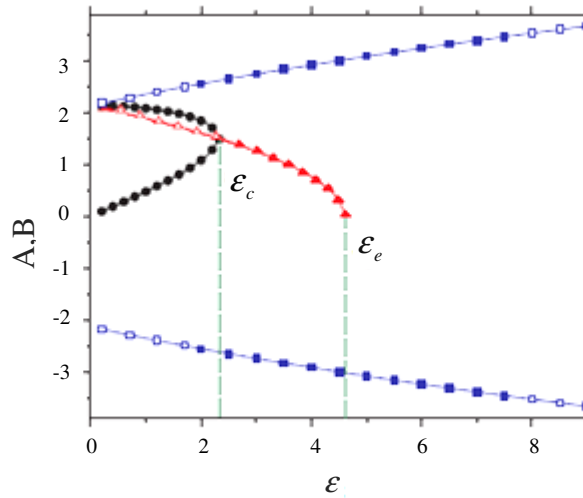
Na osnovu jednačina (4.31) može se zaključiti da i za nesimetrična rešenja postoji gornja granica oblasti postojanja: $\varepsilon = \varepsilon_c = (1 - s^2)/(2s)$, tako da je oblast postojanja nesimetričnih moda definisana za $\varepsilon < \varepsilon_c = (1 - s^2)/(2s)$, slika 4.7. Vrednost ε_c predstavljaće bifurkacionu tačku analogno modelu sa serijskim sprezanjem dve polubeskonačne rešetke.

Antisimetrično rešenje dobija se smenom uslova, $A = -B$ u jednačinu (4.29) odakle sledi:

$$A^2 = \frac{1-s^4}{1+s^4} \left(\frac{1-s^2}{s} + \varepsilon \right). \quad (4.32)$$

Iz jednačine (4.32) može se zaključiti da ovaj tip rešenja postoji u celom parametarskom prostoru, što je i prikazano na slici 4.7.

Na slici 4.7 mogu se videti amplitude za sva tri tipa rešenja, dobijene uz pomoć varijacionog računa i numerički. Numerički rezultati biće detaljno razmatrani u daljem tekstu. Može se videti da obe računice pokazuju dobro slaganje.



Slika 4.7 Amplitude A i B za simetrične (prikazano crnom bojom), nesimetrične (pikazano crvenom bojom) i antisimetrične solitone (prikazano plavom bojom) dobijene uz pomoć VR i numerički, za fiksnu vrednost propagacione konstante duž z ose, $\mu = 5$. Predviđanja VR su predstavljena linijama, a numerički dobijene vrednosti su predstavljene: krugovima za nesimetrična rešenja, trouglovima za simetrična i kvadratima za antisimetrična rešenja. Tačkaste vertikalne linije označavaju granične vrednosti parametra ε za nesimetrične i simetrične solitone. Neobojeni simboli predstavljaju nestabilne, a obojeni stabilne solitone, što je zaključeno na osnovu linearne analize stabilnosti tj. spektralnog kriterijuma.

Stabilnost sva tri tipa površinskih solitona proveravana je upotrebom VK kriterijuma. Prema ovom kriterijumu moda je stabilna ukoliko važi uslov $dP/d\mu > 0$, gde je

$P \equiv \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n^2 + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v_n^2$ ukupna snaga solitona. Snaga, za model koji se posmatra ima sledeći oblik:

$$P = \frac{1+s^2}{1-s^2} (A^2 + B^2). \quad (4.33)$$

Kako je propagaciona konstanta, μ , funkcija parametra s to VK kriterijum postavlja uslov $\frac{\partial P}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mu} > 0$, što s obzirom na to da je $\frac{\partial s}{\partial \mu} < 0$, znači stabilnost mode ukoliko je

$$\frac{\partial P}{\partial s} < 0.$$

Smenom dobijene amplitude za simetrično rešenje, jednačina (4.30.) u jednačinu za ukupnu snagu (4.33), dolazi se do izraza za snagu simetričnog rešenja:

$$P = \frac{2(1+s^2)^2}{1+s^4} \left(\frac{1-s^2}{s} - \varepsilon \right). \quad (4.34)$$

Jednačina (4.34) zadovoljava VK kriterijum u celoj oblasti postojanja simetričnog rešenja, čime je zadovoljen potreban uslov za stabilnost simetričnih solitona u celoj oblasti postojanja.

U slučaju nesimetričnog rešenja, smenom jednačine za amplitudu nesimetričnog rešenja (4.31) u jednačinu za ukupnu snagu (4.33) dolazi se do izraza za snagu nesimetričnog rešenja:

$$P = \frac{(1+s^2)(1-s^4)}{s(1+s^4)} . \quad (4.35)$$

Jednačina (4.35) zadovoljava VK kriterijum u celom regionu postojanja nesimetričnog rešenja.

U slučaju antisimetričnog rešenja, jednačina za snagu dobija se smenom dobijene jednačine za amplitudu antisimetričnog rešenja (4.32) u jednačinu za ukupnu snagu (4.33), odakle sledi:

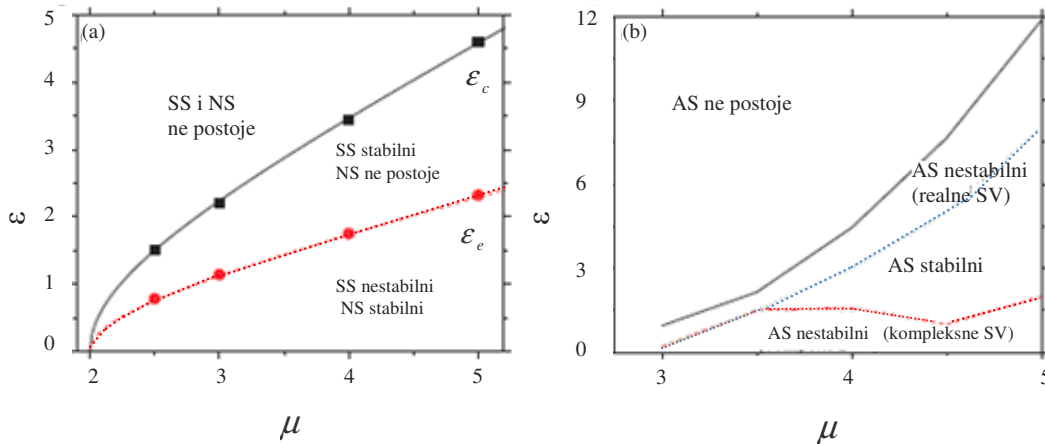
$$P = \frac{2(1+s^2)^2}{1+s^4} \left(\frac{1-s^2}{s} + \varepsilon \right) . \quad (4.36)$$

Iz jednačine (4.36) može se zaključiti da je VK kriterijum zadovoljen u sledećem regionu postojanja antisimetrične mode:

$$\varepsilon > \varepsilon_s = \frac{1+s^2}{4s^3(1-s^2)} - \frac{1-s^2}{s} . \quad (4.37)$$

Ukoliko je vrednost konstante sprezanja između rešetki $\varepsilon > \varepsilon_s$ antisimetrična rešenja su, prema VK kriterijumu, stabilna.

Na slici 4.8 može se videti dijagram oblasti postojanja i stabilnosti za sva tri tipa solitona generisan uz pomoć VR i numerički.



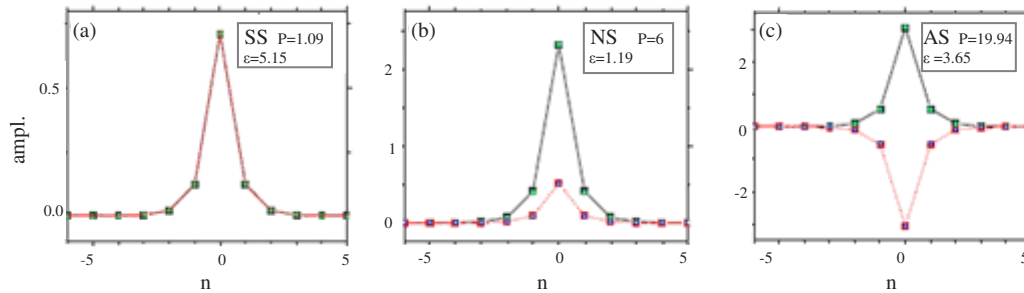
Slika 4.8 Dijagram oblasti postojanja i dijagram stabilnosti za fundamentalne simetrične (SS) i nesimetrične solitone (NS) (a) i oblast postojanja i granica stabilnosti za antisimetrične (AS) solitone (b), u parametarskom prostoru (ε, μ) . Rezultati predstavljeni na slici (a) dobijeni su uz pomoć VR (prikazano krivama) i numeričkim izračunavanjima (prikazano simbolima). Rezultati dobijeni uz pomoć VR se podudaraju sa numeričkim rezultatima. Rezultati predstavljeni na slici (b) nađeni su samo numerički pošto VR ne daje granicu postojanja za antisimetrične solitone. Na istoj slici prikazan je i tip svojstvenih vrednosti unutar oblasti nestabilnosti.

Zaključci VR su da za simetrična rešenja postoji gornja granica egzistencije u parametarskom prostoru i da su rešenja stabilna u celoj oblasti njihovog postojanja. U slučaju antisimetričnih rešenja VR predviđa njihovo postojanje u celom parametarskom prostoru, a VK kriterijum predviđa njihovu stabilnost u konkretnom delu parametarskog prostora, tj. za $\varepsilon > \varepsilon_s$. U slučaju nesimetričnih rešenja nađena je vrednost konstante sprezanja između rešetki na kojoj se pojavljuje par nesimetričnih rešenja za koja VK kriterijum predviđa da su stabilna.

Rezultati, dobijeni uz pomoć VR, proveravani su numerički. Stacionarne jednačine su rešavane korišćenjem numeričke relaksacione metode i algoritma baziranog na modifikovanoj Paelovoj metodi minimizacije. Stabilnost stacionarnog rešenja je proveravana uz pomoć linearne analize stabilnosti, tj. izračunavanjem svojstvenih vrednosti za mode sa malim perturbacijama. Kao definitivna provera svih rezultata rađene su direktne numeričke simulacije početnih jednačina modela, bazirane na numeričkom kodu koji koristi Runge-Kuta algoritam šestog reda. Simulacije su inicirane uzimanjem stacionarnog solitonskog profila na koji je dodata perturbacija.

Numerička metoda i postupak korišćen za rešavanje stacionarnih jednačina i dobijanje fundamentalnih solitona centriranih na spoju dve 1D beskonačne transverzalno spregnute rešetke analogni su numeričkoj proceduri korišćenoj u slučaju dve nelinearne polubeskonačne 1D rešetke serijski linearno spregnute.

Na slici 4.9 predstavljeni su, numerički nađeni, tipični oblici profila komponentnih simetričnih, nesimetričnih i antisimetričnih solitona površinskih solitonskih kompleksa u sistemu dve transversalno spregnute rešetke. Na istoj slici je, poredjenja radi, predstavljen oblik rešenja dobijen uz pomoć VR.



Slika 4.9 Profili fundamentalnih solitona dobijenih za $\mu = 6$. (a) Simetrični solitoni (SS), (b) nesimetrični solitoni (NS) i (c) antisimetrični solitoni (AS). Vrednosti parametra sprezanja između rešetki i ukupne snage predstavljeni su na slici. Crna puna i crvena isprekidana linija pokazuju profile solitona, u jednoj i drugoj rešetki, dobijene numerički dok plavi i zeleni kvadrati pokazuju profile solitona u jednoj i drugoj rešetki dobijene uz pomoć VR.

Numerički rezultati pokazali su da je za sve tipove solitona oblast postojanja ograničena što je suprotno predviđanju koje je dobijeno uz pomoć varijacionog računa kojim se predviđala granica postojanja za simetrične i nesimetrične solitone ali ne i za antisimetrične solitone. Razlog tome je kao i kod serijski spregnutih polubeskonačnih rešetki postojanje jake interakcije na spoju između rešetki, što s obzirom da su amplitude polja rešetki na susednim sajtozima suprotnog znaka ne opravdava korišćenje probne funkcije za solitonski profil tipa korišćenog u varijacionom prilazu.

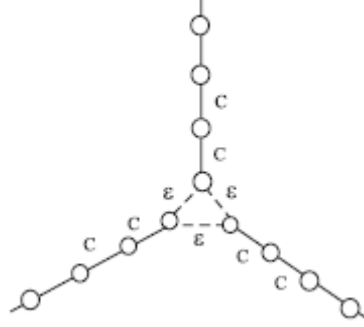
Numerički rezultati su jako slični rezultatima koji su dobijeni za 1D nelinearne rešetke sa serijskim sprezanjem. Linearna analiza stabilnosti predviđa da simetrično rešenje gubi stabilnost u bifurkacionoj tački ε_c kada se rađaju dve nove grane stabilnih nesimetričnih rešenja - viljuškasta superkritična bifurkacija (videti Dodatak), slika 4.7. Što se tiče stabilnosti nesimetričnih rešenja, linearna analiza stabilnosti i VR su pokazali dobro slaganje dok u slučaju antisimetričnih rešenja VR predviđa oblast stabilnosti rešenja za $\varepsilon > \varepsilon_s$ dok linearna analiza stabilnosti predviđa dva puta izmenu stabilnosti antisimetričnih moda pri promeni parametra ε i fiksnoj vrednosti parametra μ . Poslednje je potvrđeno direktnim numeričkim simulacijama. Prilikom opadanja vrednosti parametra ε za fiksnu vrednost parametra μ , nestabilna antisimetrična grana, koja se karakteriše parom čisto realnih svojstvenih vrednosti, postaje stabilna. Daljim opadanjem vrednosti parametra ε , antisimetrični soliton gubi svoju stabilnost i javljaju se dva para (kvartet) kompleksnih svojstvenih vrednosti sa dominantnim realnim delom.

Direktnim simulacijama potvrđeni su svi rezultati linearne analize stabilnosti. Nestabilno simetrično rešenje predaje deo svoje energije rešetki i transformiše se u antisimetrični

brider sa manjom energijom. Za razliku od antisimetričnih solitona u serijski spregnutim rešetkama, antisimetrični solitoni u rešetkama koje su paralelno spojene su jako robusni na male perturbacije iako linearna analiza stabilnosti predviđa razvoj eksponencijalne nestabilnosti. Moguć razlog za ovakvo ponašanje je jako velika amplituda antisimetričnih solitona u spoju dve rešetke i time koncentracija takoreći celokupne energije na samom spoju.

4.4 Tri polubeskonačne 1D nelinearne rešetke spregnute linearno na jednom sajtu

Trouglastu rešetku čine tri identične polubeskonačne rešetke linearno povezane na jednom sajtu. Konstanta sprezanja unutar komponentnih rešetki je C dok je konstanta sprezanja između rešetki ε , i pretpostavljeno je da ima isti znak kao C , slika 4.10 [71].



Slika 4.10 Tri 1D polubeskonačne identične rešetke linearno spojene preko jednog od svojih elemenata formirajući na taj način trouglastu rešetku. Konstanta sprezanja unutar komponentnih rešetki je C , a konstanta međusobnog sprezanja rešetki je ε .

Propagacija talasa kroz trouglastu rešetku se opisuje modelom od $3(N+1)$ DNŠJ:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d\phi_n}{dt} + (\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) - \delta_{n,0} \phi_{n-1} + \varepsilon \delta_{n,0} (\psi_n + \theta_n) + |\phi_n|^2 \phi_n &= 0, \\
 i \frac{d\psi_n}{dt} + (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) - \delta_{n,0} \psi_{n-1} + \varepsilon \delta_{n,0} (\phi_n + \theta_n) + |\psi_n|^2 \psi_n &= 0, \\
 i \frac{d\theta_n}{dt} + (\theta_{n+1} + \theta_{n-1}) - \delta_{n,0} \theta_{n-1} + \varepsilon \delta_{n,0} (\phi_n + \psi_n) + |\theta_n|^2 \theta_n &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

gde je t vreme (propagaciona koordinata), $n=0,1,\dots,N$ je diskretna koordinata u komponentnim rešetkama, $N+1$ je ukupan broj sajtova na svakoj rešetki koji je korišćen u numeričkoj simulaciji, ϕ_n , ψ_n i θ_n predstavljaju električna polja u komponentnim rešetkama, koja su u opštem slučaju kompleksne veličine. Sprezanje rešetki je ostvareno preko sajtova sa indeksom 0. Član $\delta_{n,0}$ je Kronekerova delta funkcija, uzeto je $C = \gamma = 1$ i posmatran je sistem sa kubnom nelinearnošću.

Stacionarna rešenja jednačina (4.38) se traže u obliku:

$$\phi_n = u_n \exp(i\mu t), \quad \psi_n = v_n \exp(i\mu t) \quad \text{i} \quad \theta_n = w_n \exp(i\mu t), \tag{4.39}$$

gde su u_n , v_n i w_n realne diskretne funkcije, a μ je propagaciona konstanta. Smenom pretpostavljenih stacionarnih rešenja u polazne jednačine modela (4.38) dolazi se do stacionarnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} -\mu u_n + u_{n+1} + u_{n-1} - \delta_{n,0} u_{n-1} + \varepsilon(v_n + w_n) \delta_{n,0} + u_n^3 &= 0, \\ -\mu v_n + v_{n+1} + v_{n-1} - \delta_{n,0} v_{n-1} + \varepsilon(u_n + w_n) \delta_{n,0} + v_n^3 &= 0, \\ -\mu w_n + w_{n+1} + w_{n-1} - \delta_{n,0} w_{n-1} + \varepsilon(u_n + v_n) \delta_{n,0} + w_n^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Analitička rešenja jednačina (4.40) se mogu se dobiti uz pomoć VR. Lagranžijan, ovog sistema, sastoji se od Lagranžijana koje čine Lagranžijani sve tri rešetke kao i člana koji uračunava sprezanje između njih:

$$L = L_u + L_v + L_w + 2\varepsilon(u_0 v_0 + v_0 w_0 + w_0 u_0). \quad (4.41)$$

Lagranžijani tri polubeskonačne rešetke su definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned} L_u &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\mu u_n^2 + \frac{1}{2} u_n^4 + 2u_n u_{n+1} \right), \\ L_v &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\mu v_n^2 + \frac{1}{2} v_n^4 + 2v_n v_{n+1} \right), \\ L_w &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\mu w_n^2 + \frac{1}{2} w_n^4 + 2w_n w_{n+1} \right), \end{aligned}$$

dok poslednji član u jednačini (4.41) uračunava lokalizaciju polja na spoju.

Pretpostavka pri varijacionom prilazu je da su površinski lokalizovane mode centrirane na spoju rešetki i da im amplituda eksponencijalno opada sa udaljavanjem od spoja:

$$\{u_n, v_n, w_n\} = \{A, B, C\} \exp(-an), \text{ za } n \geq 0, \quad (4.42)$$

gde bezdimenzioni parametar a predstavlja inverznu dužinu, i dobija se linearizovanjem stacionarnih jednačina (4.40) kada $|n| \rightarrow \infty$: $a = \ln\left(\mu/2 + \sqrt{\mu^2/4 - 1}\right)$. Iz prethodnog sledi da je $\mu > 2$.

Inverzna dužina se može predstaviti uvođenjem parametra s , na sledeći način:

$$\begin{aligned} s &\equiv e^{-a} = \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}, \\ \mu &= s + s^{-1}. \end{aligned}$$

Amplitude A , B i C biće tretirane kao varijacioni parametri. Smenom pretpostavljenih oblika lokalizovanih moda (4.42) u jednačinu (4.41) dolazi se do izraza za efektivni Lagranžijan:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + 2\mathcal{E}(AB + AC + BC), \quad (4.43)$$

$$L_1 = A^2 \frac{-\mu + 2s}{1 - s^2} + \frac{1}{2(1 - s^4)} A^4,$$

$$L_2 = B^2 \frac{-\mu + 2s}{1 - s^2} + \frac{1}{2(1 - s^4)} B^4,$$

$$L_3 = C^2 \frac{-\mu + 2s}{1 - s^2} + \frac{1}{2(1 - s^4)} C^4.$$

Amplitude stacionarnih lokalizovanih moda se dobijaju iz Ojler-Lagranževih jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial A} + 2\mathcal{E}(B + C) &= 0, \\ \frac{\partial L_2}{\partial B} + 2\mathcal{E}(A + C) &= 0, \\ \frac{\partial L_3}{\partial C} + 2\mathcal{E}(A + B) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Smenom izraza za efektivni Lagranžijan u jednačine (4.44) dobija se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s}A + \frac{1}{1 - s^4}A^3 + \mathcal{E}(B + C) &= 0, \\ -\frac{1}{s}B + \frac{1}{1 - s^4}B^3 + \mathcal{E}(A + C) &= 0, \\ -\frac{1}{s}C + \frac{1}{1 - s^4}C^3 + \mathcal{E}(A + B) &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Na osnovu jednačina (4.45) može se zaključiti da postoje tri tipa lokalizovanih rešenja:

1. simetrična rešenja (SS), koja se dobijaju u slučaju kada su amplitude površinskih moda u svim rešetkama jednake, $A=B=C$;
2. antisimetrična rešenja (AS), kod kojih je amplituda u jednoj rešetki jednaka nuli a druge dve amplitude su jednake ali suprotnog znaka tj. $A=0$ i $B = -C$;
3. nesimetrična rešenja (NS), kod kojih je $A = C \neq B$.

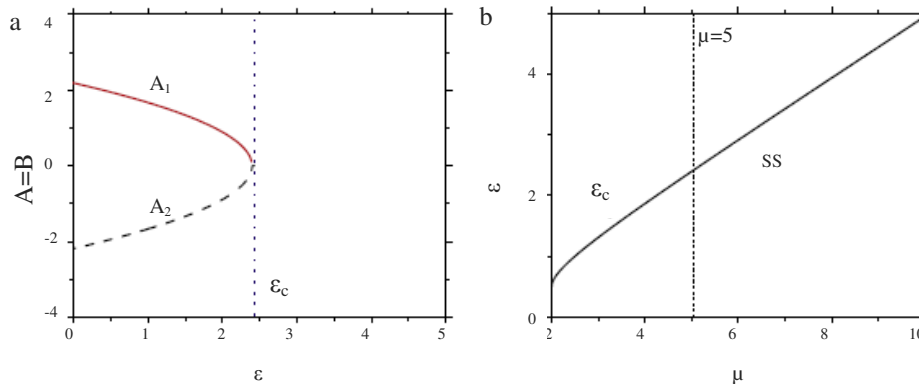
Smenom uslova za simetrična rešenja, $A=B=C$, u jednačine (4.45) dolazi se do amplitude za simetrične mode:

$$A = \pm \sqrt{(1-s^4)(s^{-1}-2\varepsilon)}. \quad (4.46)$$

Iz (4.46) sledi da se simetrično rešenje može realizovati kroz dve mode sa amplitudama suprotnog znaka $A_1 = |A|$ i $A_2 = -|A|$ (slika 4.11) koje postoje u oblasti:

$$\varepsilon < \varepsilon_c = (2s)^{-1} \equiv (\mu - \sqrt{\mu^2 - 4})^{-1}.$$

Na slici 4.11 prikazane su amplitude simetričnih solitona u funkciji od konstante sprezanja između rešetki ε , kao i njihova oblast postojanja u parametarskom prostoru (ε, μ) dobijene uz pomoć VR.



Slika 4.11 Rezultati VR za simetrične solitone (SS): a) amplituda simetričnih solitona u funkciji od konstante sprezanja između rešetki ε , za fiksnu propagacionu konstantu $\mu = 5$; b) oblast postojanja fundamentalnih simetričnih solitona u parametarskom prostoru, (μ, ε) .

U slučaju kada su komponentne rešetke linearne moguća je pojava samo simetričnih linearnih površinski lokalizovanih kompleksa sa proizvoljnom amplitudom. Ove linearne mode postoje za $\varepsilon_c = 1/(2s)$ što se poklapa sa kritičnom vrednošću parametra spoljašnjeg sprezanja između rešetki ε_c za čiju vrednost se pojavljuju simetrične nelinearne mode.

Nesimetrični solitoni se pojavljuju na vrednosti konstante sprezanja između rešetki, ε , čija se vrednost procenjuje iz jednačine (4.45) pod pretpostavkom da je: $B = A + \delta B$, $C = A + \delta C$. Na taj način dolazi se do vrednosti:

$$\varepsilon_b = 2/(7s),$$

koja predstavlja bifurkacionu tačku na kojoj se javlja spontano narušenje simetrije i na kojoj se pojavljuju nesimetrični solitoni, slika 4.12. Nesimetrična rešenja postoje ako je linearno sprezanje između rešetki manje od bifurkacione tačke, $\varepsilon < \varepsilon_b$.

Antisimetrične mode se javljaju u slučaju kada je amplituda solitona u jednoj od komponentnih rešetki jednaka nuli, a amplitude solitona u druge dve spregnute rešetke jednake i suprotnog znaka. Smenom uslova za antisimetrične mode, $A=0$ i $B=-C$, u jednačine (4.45) dolazi se do sledećeg izraza za amplitude površinskih solitona u komponentnim rešetkama:

$$A = 0 \text{ i } B = -C = \pm \sqrt{(1-s^4)(s^{-1} + \varepsilon)}. \quad (4.47)$$

Nasuprot simetričnom rešenju ovo rešenje postoji za sve vrednosti, ε tj. za antisimetrično rešenje ne postoji ograničenje oblasti postojanja.

Nesimetrično rešenje se dobija smenom uslova, $A = C \neq B \neq 0$, u jednačine (4.45). Na taj način dolazi se do sledećeg izraza za amplitudu solitona u jednoj od vezanih rešetki:

$$B_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-A \pm \sqrt{A^2 - 4(A^2 - (s^{-1} + \varepsilon)(1-s^4))} \right], \quad (4.48)$$

dok se amplitude $A = C$ mogu naći numerički iz izraza:

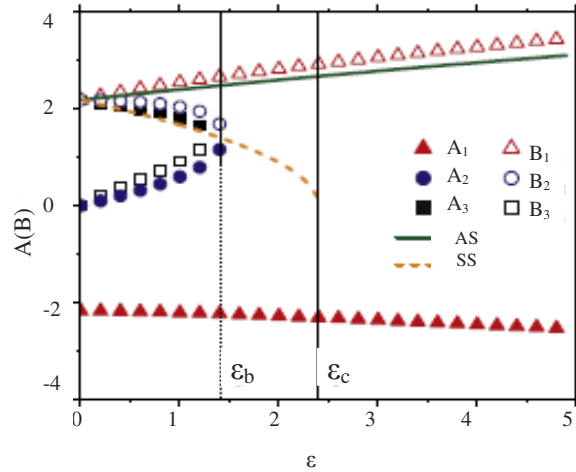
$$A^3 + (1-s^4) \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{s} \right) A = \pm \frac{\varepsilon}{2} (1-s^4) \sqrt{-3A^2 + 4(1-s^4)(s^{-1} + \varepsilon)}. \quad (4.49)$$

S obzirom na već dobijeni rezultat da $\varepsilon_b = 2/(7s)$ određuje tačku spontanog narušenja simetrije, sledi da postoji šest različitih rešenja jednačine (4.49) (tri sa pozitivnim i tri sa negativnim B) u oblasti $\varepsilon_b < 2/(7s)$ parametarskog prostora (ε, μ) , dok dve grane rešenja (jedna sa pozitivnim i druga sa negativnim B) postoje u oblasti $\varepsilon_b > 2/(7s)$, slika 4.12. za $\mu = 5$. U regionu, $0 < \varepsilon < \varepsilon_b$ (slika 4.12) sve nesimetrične grane koje su označene brojevima 1,2 i 3 postoje istovremeno sa simetričnom granom i jednom antisimetričnom; u regionu $\varepsilon_b < \varepsilon < \varepsilon_c$ postoji samo grana A_1 sa svojim parom, dok u regionu $\varepsilon_c < \varepsilon$ postoje samo grane A_1 i $A = 0$.

Rešenje jednačine (4.45) u kojem bi sve tri amplitude bile različite $A \neq B \neq C$ ne postoji, što je pokazano i numerički.

U slučaju kada $\varepsilon \rightarrow 0$, sistem se razdvaja u tri nespregnute polubeskonačne rešetke. U ovakvim okolnostima, za fiksnu propagacionu konstantu μ može se dobiti jedno-komponentni površinski soliton ili nula rešenja. U slučaju $\varepsilon \rightarrow \infty$ pomenuta analiza jednačina (4.45) dovodi do sledećeg eksplicitnog rešenja za nesimetrične mode:

$$A \approx \mp \alpha \sqrt{\varepsilon(1-s^4)}, \quad B \approx \pm \beta \sqrt{\varepsilon(1-s^4)}, \quad \text{gde je } \beta \approx 1.138 \text{ koren jednačine } (\beta^2)^3 - 2(\beta^2)^2 + 4\beta^2 - 4 = 0 \text{ i } \alpha = \beta^3 / 2 \approx 0.737.$$



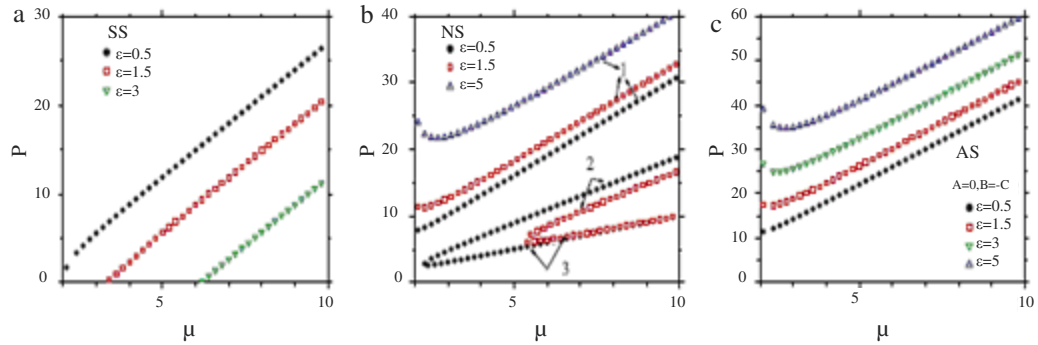
Slika 4.12 Amplitude $A=C$ i B različitih grana nesimetričnih rešenja (NS), predstavljene crnim, crvenim i plavim simbolima a koje su dobijene varijacionim računom i numerički. Numerički i analitički rezultati pokazuju dobro slaganje. Zelena puna linija predstavlja antisimetričnu granu (AS) sa $A = 0$ i $A \neq B \neq C$. Isprekidana narančasta linija predstavlja amplitude simetričnih solitona (SS). Na slici su predstavljena rešenja sa amplitudama većim od nule zbog preglednosti. Treba primetiti da svakom tipu rešenja odgovaraju dve grane sa različitim znakom amplitude. Kritične vrednosti konstanti spreznja označene su vertikalnim linijama.

Stabilnost sva tri tipa površinskih solitona proveravana je upotrebom VK kriterijuma. Po ovom kriterijumu potreban uslov za stabilnost lokalizovane mode je $dP/d\mu > 0$, gde je

$P \equiv \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n^2 + \sum_{n=0}^{n=+\infty} v_n^2 + \sum_{n=0}^{n=+\infty} w_n^2$, ukupna snaga solitona. Snaga za model koji se posmatra ima oblik:

$$P = \frac{1}{1-s^2} (A^2 + B^2 + C^2). \quad (4.50)$$

Kako je propagaciona konstanta, μ , funkcija parametra s to VK kriterijum s obzirom na to da je $\frac{\partial s}{\partial \mu} < 0$, se može zapisati u obliku $\frac{\partial P}{\partial s} < 0$.



Slika 4.13 Snaga solitona u funkciji od propagacione konstante, za simetrične solitone (SS) (a), nesimetrične solitone (NS) (b), i antisimetrične solitone (AS) (c). Odgovarajuće vrednosti konstante međusobnog spreznja između rešetki su ispisane na samoj slici. Krive označene brojevima 1,2 i 3 za fiksnu vrednost konstante spreznja odgovaraju rešenjima s istim oznakama na slici 4.12.

Za simetrično rešenje, $A = B = C$, zavisnost $P(\mu)$ predstavljena je na slici 4.13 (a) za fiksne vrednosti $\epsilon = 0.5, 1.5$ i 3 . Nagib $P(\mu)$ krive je pozitivan u celom regionu postojanja simetričnih rešenja, što prema VK kriterijumu znači da su simetrični solitoni uslovno stabilni.

Za nesimetrično rešenje, $A = C \neq B \neq 0$, zavisnost $P(\mu)$ predstavljena je na slici 4.13 (b) za tri različite vrednosti ϵ . Samo nesimetrična grana sa amplitudama $\{A_1, B_1\}$ je po VK kriterijumu nestabilna u uskom regionu svog postojanja na vrednosti $\mu \approx 2$. Ostala nesimetrična rešenja po VK kriterijumu su uslovno stabilna.

Za antisimetrična rešenja sa $A = 0$ i $B = -C \neq 0$ kriva snage je predstavljena na slici 4.13 (c). Ova rešenja takođe mogu biti stabilna prema VK kriterijumu u čitavom regionu postojanja za $\epsilon < 1$. Za veće vrednosti ϵ javlja se po VK kriterijumu oblast nestabilnosti u blizini vrednosti $\mu = 2$.

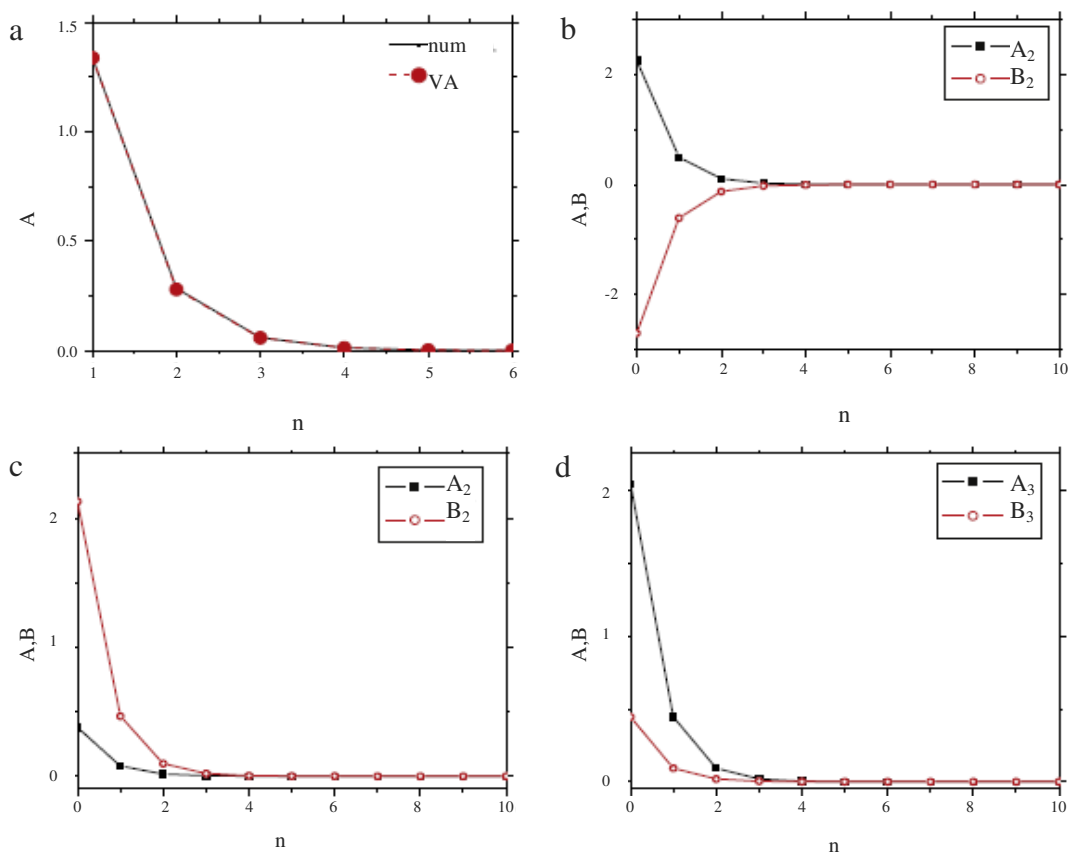
Zaključci VR su da simetrični solitoni imaju ograničenu oblast postojanja za $\epsilon < \epsilon_c$ i pri tom su stabilni po VK kriterijumu. Antisimetrični solitoni, prema VR, nemaju ograničenu oblast postojanja i prema VK kriterijumu stabilni su za male vrednosti konstante spreznja između rešetki $\epsilon < 1$, dok je za veće vrednosti moguća pojava nestabilnosti oko vrednosti $\mu = 2$. Što se tiče nesimetričnih rešenja postoji granica oblasti postojanja, i to postoji šest različitih grana rešenja za $\epsilon_b < 2/(7s)$ dok se dve grane nesimetričnog rešenja (jedna s pozitivnim a druga sa negativnim B) mogu naći i van tog regiona tj. za $\epsilon_b > 2/(7s)$. Stabilnost nesimetričnih solitona, prema VK kriterijumu, se očekuje za sve grane osim za granu $\{A_1, B_1\}$ u uskom intervalu parametara oko $\mu = 2$.

Rezultati koji su dobijeni uz pomoć VR proveravani su numerički. Rešavane su stacionarne jednačine uz korišćenje relaksacione metode i algoritma baziranog na modifikovanoj Paelovoj metodi minimizacije. Stabilnost stacionarnog rešenja je proveravana uz pomoć linearne analize stabilnosti. Kao definitivna provera svih rezultata

rađene su direktne numeričke simulacije jednačina modela, bazirane na numeričkom kodu koji koristi Runge-Kuta algoritam šestog reda. Simulacije su inicirane uzimanjem stacionarnog solitonskog profila na koji je dodata perturbacija.

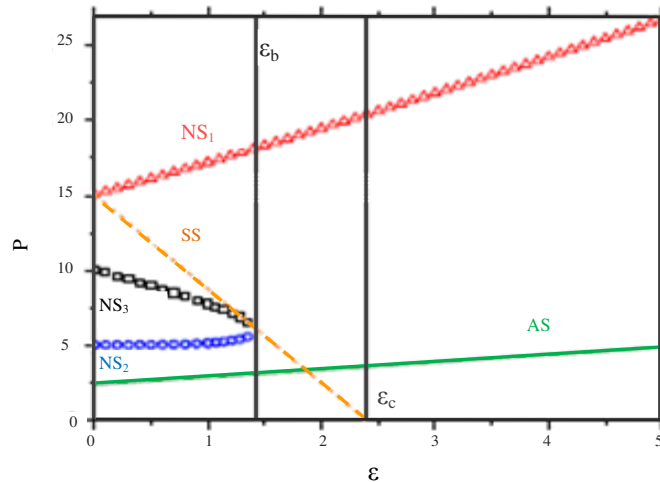
Pretpostavka koja je korišćena za numeričko rešavanje stacionarnih jednačina i dobijanje fundamentalnih solitona centriranih na spoju tri identične polubeskonačne rešetke, koje formiraju trouglastu rešetku, je da amplitude polja na sajtovima na kojima su spregnute rešetke imaju istu vrednost, $u_0 = u_1 = A > 0$ za simetrična rešenja. U slučaju asimetričnih rešenja amplitude polja na sajtovima na kojima su spregnute rešetke, su $u_0 = A$, $v_0 = B$ i $w_0 = C$, a za nesimetrično rešenje je uzeto da je $u_0 = 0$, $v_0 = B$ i $w_0 = -B$. Uzeto je da sve tri rešetke imaju po $N=51$ elemenata.

Na slici 4.14 prikazani su profili amplitude simetričnih i nesimetričnih solitona generisani numerički i odgovarajući profili dobijeni varijacionom procedurom. Može se zaključiti da oba prilaza daju slične rezultate.



Slika 4.14 Numerički dobijeni profili fundamentalnih površinskih solitona: simetrični solitoni za $\epsilon = 1.5$ (a), nesimetrični solitoni tipa (1) za $\epsilon = 1.5$ (b), nesimetrični solitoni tipa 2 za $\epsilon = 0.7$ (c), nesimetrični solitoni tipa 3 za $\epsilon = 0.5$ (d). Na slici (a) prikazan je numerički nađen profil simetričnog rešenja (neprekidna linija sa simbolima), zajedno sa rešenjem dobijenim varijacionim računom (isprekidana linija sa simbolom), dok su na slikama (b)–(d) numerički nađeni profili prikazani simbolima a profili nađeni uz pomoć VR punim linijama.

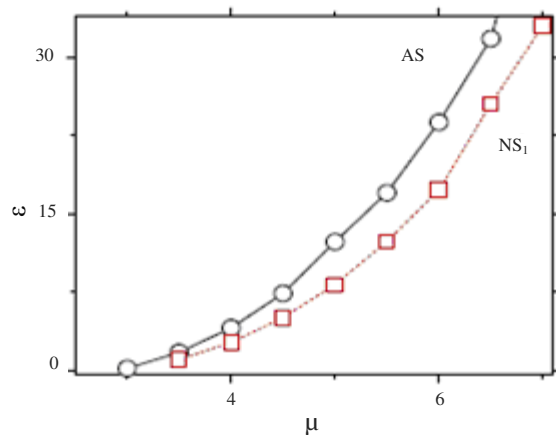
Numerički su dobijene vrednosti snage za sve tipove solitona tj. za simetrični, nesimetrični tipa 1, 2 i 3 i antisimetrični tip, slika 4.15.



Slika 4.15 Numerički generisana snaga za sve tipove solitona i to za simetrične (SS) solitone (narandžasta isprekidana linija), nesimetrične (NS) grane 1, 2 i 3, redom, crveni trouglovi, plavi krugovi i crni kvadrati. Puna zelena linija označava antisimetričnu granu (AS) sa $A = 0$ i $B = -C \neq 0$. Tačkaste linije označavaju kritične vrednosti ε_b i ε_c , dobijene numerički.

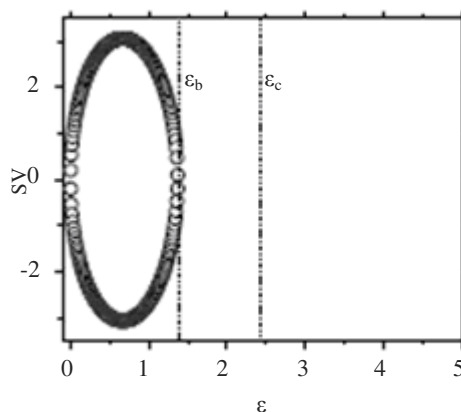
Numerički rezultati pokazuju da simetrična i tri nesimetrične grane rešenja postoje istovremeno u istim delovima parametarskog prostora. Poređenjem numeričkih i varijacionih rezultata možemo zaključiti da se predviđanja VR za region postojanja simetričnih i nesimetričnih solitona tipa 2 i 3 prilično dobro poklapaju sa numeričkim rezultatima. S druge strane, numerički nađen region postojanja za nesimetrične solitone tipa 3 je ograničen što je u suprotnosti sa predviđanjima VR. Na primer, VR predviđa da nesimetrični kompleksi mogu postojati za proizvoljno ε i $\mu > 2$ dok numerička izračunavanja pokazuju postojanje gornje granice ε za fiksno μ , slika 4.16. Gornja granica regiona postojanja za antisimetrična rešenja pronađena je na izuzetno velikim vrednostima konstante sprezanja između rešetki, $\varepsilon \sim 100$.

Na slici 4.16 su predstavljene, numerički dobijene gornje granice oblasti postojanja antisimetričnih solitonskih kompleksa i nesimetričnih kompleksa tipa 1.



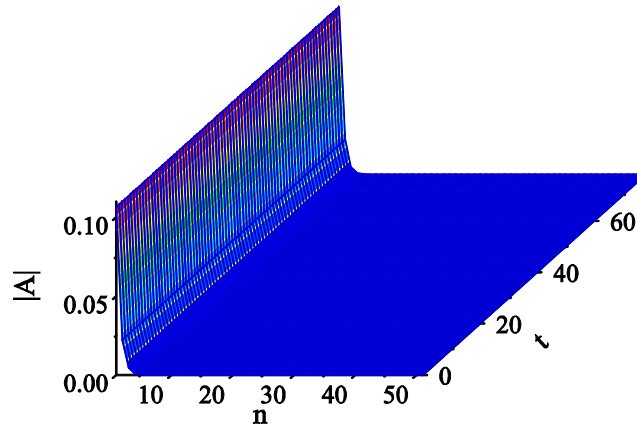
Slika 4.16 Gornje granice oblasti postojanja za antisimetrične solitonske komplekse (AS) (crna linija sa krugovima) i nesimetrične komplekse (NS) tipa 1 (crvena isprekidana linija sa kvadratima). Odgovarajući solitonski kompleksi postoje u oblastima ispod graničnih krivih.

Linearna analiza stabilnosti pokazuje da postoji prozor stabilnosti za simetrične solitonske komplekse u regionu između ε_b i ε_c , slika 4.17, što je u suprotnosti sa predviđanjima VR da su simetrični solitoni stabilni u celoj oblasti svog postojanja. Slično kao i u slučaju rešetki sa serijskim i paralelnim sprežanjem i ovde u bifurkacionoj tački, ε_b , stabilno simetrično rešenje gubi svoju stabilnost i postaje nestabilno.



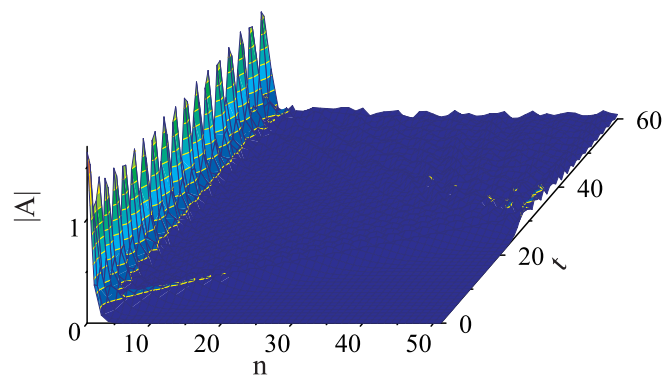
Slika 4.17 Čisto realne svojstvene vrednosti (SV) u funkciji parametra sprežanja između rešetki, ε za simetrične komplekse i fiksiranu vrednost $\mu = 5$. Vidi se da postoji prozor stabilnosti u intervalu $\varepsilon_b < \varepsilon < \varepsilon_c$.

Direktnim numeričkim simulacijama dobijeno je dinamičko ponašanje pomenutih simetričnih kompleksa. Tipičan primer evolucije komponentata simetričnog kompleksa predstavljen je na slici 4.18.



Slika 4.18 Tipičan primer evolucije komponenata perturbovanog tro-solitonskog kompleksa za slučaj stabilnog simetričnog solitona sa $\varepsilon = 1.69$ i $\mu = 5$.

U ostalom delu regiona postojanja simetrični kompleksi su nestabilni (okarakterisani su čisto realnim parovima svojstvenih vrednosti). Pod uticajem male perturbacije nestabilni simetrični kompleks predaje deo svoje energije i relaksira se u zarobljeni površinski briderski kompleks manje snage. Dinamika komponenata nestabilnog simetričnog kompleksa, dobijena direktnim numeričkim simulacijama, prikazana je na slici 4.19.

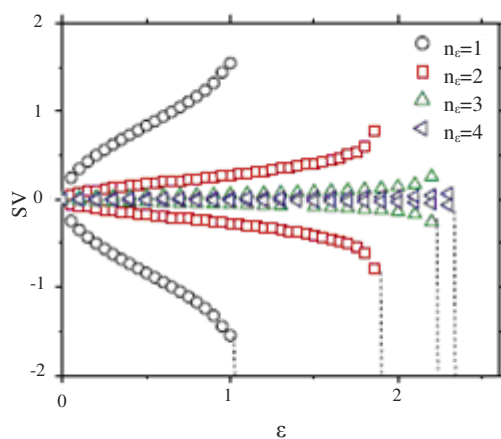


Slika 4.19 Tipičan primer evolucije komponenata perturbovanog tro-solitonskog kompleksa za slučaj nestabilnog simetričnog kompleksa $\varepsilon = 1.09$ i $\mu = 5$.

U trivijalnom slučaju kada je sprezanje između rešetki $\varepsilon = 0$, zapravo kada su rešetke rasprengute (nezavisne jedna od druge) simetrični solitonski kompleksi su formirani od

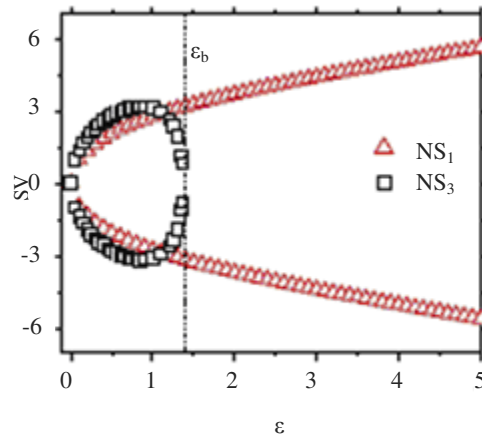
standardnih površinskih solitona unutar svake od komponentnih rešetke. Poznato je da su takve površinske mode stabilne u skoro celom regionu postojanja [2]. Tada je lokalizovana moda na površini rezultat ravnoteže između potencijala ostatka rešetke i površinskog potencijala. Nestabilnost simetričnih kompleksa, koja se javlja u sistemu sa spregnutim rešetkama, uzrokovana je narušenjem pomenute ravnoteže. Nestabilni solitonski kompleks se oslobađanjem energije stabilizuje formirajući stabilan nesimetrični briderski kompleks.

Efekat sprezanja, odnosno, uticaj površinskog i unutrašnjeg potencijala na stabilnost simetričnih kompleksa može se jasno videti analizom stabilnosti simetričnih kompleksa koji su centrirani dalje od sajta na kome se vrši sprezanje između rešetki. Dijagram stabilnosti dobijen linearnom analizom stabilnosti, odnosno spektar svojstvenih vrednosti u funkciji od konstante sprezanja između rešetki, za simetrične solitonske komplekse čije su komponente centrirane na sajtovim $n_c = 1, 2, 3, 4$ računato od sajta na kojem se vrši sprezanje rešetki prikazan je na slici 4.20. Zaključak je da su samo simetrični kompleksi koji su centrirani na $n_c > 4$ stabilni u čitavom regionu svog postojanja što znači da su na tom rastojanju potencijal na površini (na mestu sprezanja) i unutrašnji potencijal izjednačeni. Pomerajući centre solitona dalje od mesta sprezanja između rešetki mogu se naći samo solitonski kompleksi simetričnog tipa.



Slika 4.20 Realne svojstvene vrednosti u funkciji konstante sprezanja između rešetki, za fiksirano $\mu = 5$. Fundamentalni solitoni su centrirani na $n_c = 1, 2, 3, 4$ u svakoj od komponentnih rešetke. Tačkaste linije označavaju granice regiona postojanja odgovarajućeg kompleksa. Očigledno je da sa udaljavanjem solitona od mesta sprezanja između rešetki region stabilnosti solitonskih kompleksa postaje širi.

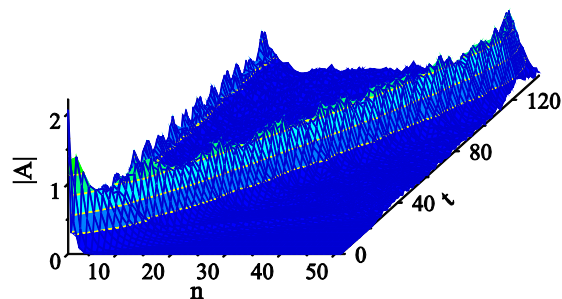
Linearna analiza stabilnosti rađena je i za nesimetrične solitone. Spektar svojstvenih vrednosti za nesimetrične solitone tipa 1 i 3 pokazuje eksponencijalnu nestabilnost u celom regionu postojanja, slika 4.21. To je u suprotnosti sa predviđanjima VK kriterijuma kojim je dobijeno da je samo nesimetrično rešenje tipa 1 nestabilno u uskom regionu parametarskog prostora, a da je nesimetrično rešenje tipa 3 stabilno.



Slika 4.21 Realne svojstvene vrednosti u funkciji parametra spreznja između rešetki, \mathcal{E} , za nesimetrične komplekse tipa 1 i 3 za fiksno $\mu = 5$.

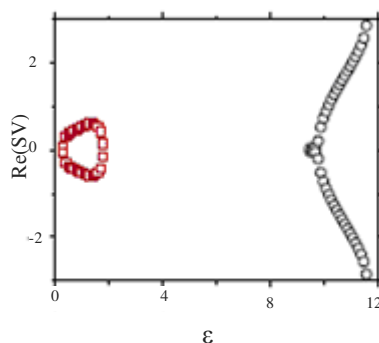
Direktnim simulacijama potvrđeni su zaključci linearne analize stabilnosti za nesimetrične solitone tipa 1 i 3. Naime, perturbovani nesimetrični kompleksi predaju značajan deo svoje energije rešetki što za posledicu ima formiranje briderskog kompleksa koji se kreće kroz rešetku.

Nestabilnost nesimetričnih solitona (slika 4.22) može se objasniti težnjom sistema da pređe u stanje sa manjom energijom u prisustvu dva gore pomenuta potencijala: potencijala koji se javlja na mestu spreznja između rešetki i potencijala koji potiče od ostalih elemenata komponentnih rešetki [72, 73].



Slika 4.22 Tipičan primer evolucije komponenta perturbovanog tro-solitonskog kompleksa nesimetričnog tipa 1 za $\mathcal{E} = 1.69$ i $\mu = 5$.

Linearna analiza stabilnosti za antisimetrične solitone, $A=0$ i $B=-C$, pokazuje da su oscilatorno nestabilni u regionu $\varepsilon < \varepsilon_b$. U blizini gornje granice oblasti postojanja razvija se eksponencijalna nestabilnost što je u saglasnosti sa predviđanjima VK kriterijuma, kojim je dobijeno da se za veće vrednosti ε javlja oblast nestabilnosti blizu gornje granice postojanja. Spektar realnih delova kompleksnih svojstvenih vrednosti i čisto realnih svojstvenih vrednosti prikazan je na slici 4.23. Dinamičke simulacije potvrđuju zaključke linearne analize stabilnosti.



Slika 4.23 Realni delovi kompleksnih svojstvenih vrednosti (crveni kvadrati) i čisto realne svojstvene vrednosti (crni krugovi) u funkciji parametra sprežanja između rešetki, ε , za antisimetrične solitone za fiksnu vrednost, $\mu = 5$.

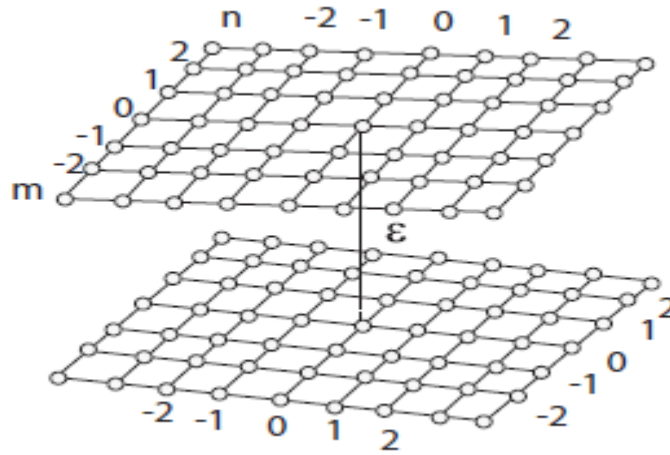
Nesimetrična grana označena indeksom 2 je stabilna u celoj oblasti postojanja što su pokazale linearna analiza stabilnosti, numeričke simulacije i što je u saglasnosti sa VK kriterijumom.

Može se zaključiti da je narušenje simetrije na $\varepsilon = \varepsilon_b$ uslovljeno promenom stabilnosti između simetričnog kompleksa, koji postaje nestabilan, i dva nesimetrična kompleksa koji se u toj tački pojavljuju. Jedan od novoformiranih kompleksa je stabilan a drugi eksponencijalno nestabilan. Takođe, i antisimetrični kompleks menja svoju stabilnost u blizini bifurkacione tačke (od oscilatorne nestabilnosti na $\varepsilon < \varepsilon_b$ do stabilnosti na $\varepsilon > \varepsilon_b$). Analizom grafika oblasti postojanja, primećuje se da su prisutne dve oblasti u parametarskom prostoru u kojima postoje istovremeno simetrični, nesimetrični i antisimetrični solitoni. Jedna je oblast u kojoj su stabilni simetrični, nestabilni nesimetrični i stabilni antisimetrični kompleksi, a druga oblast u kojoj su simetrični, antisimetrični i dva nesimetrična kompleksa nestabilni i jedna nesimetrična grana koja je stabilna.

Ukoliko je sprežanje između rešetki slabo tada su površinski kompleksi formirani od simetričnih i nesimetričnih komponentnih fundamentalnih solitona, nestabilni. Izuzetak je samo nesimetrični kompleks tipa 2 koji je stabilan u celom regionu egzistencije. S povećanjem vrednosti konstante sprežanja između rešetki smanjuje se razlika između potencijala na mestu sprežanja i potencijala u unutrašnjosti rešetke i postoji mogućnost za pojavu stabilnih lokalizovanih površinskih simetričnih i antisimetričnih kompleksa. S daljim povećanjem vrednosti konstante sprežanja u odnosu na konstantu sprežanja unutar rešetke, tačnije za $\varepsilon > 2$ i fiksno μ , javljaju se jedino jako nestabilan nesimetričan kompleks i stabilan antisimetričan kompleks.

4.5 Dve 2D beskonačne nelinearne rešetke linearno spregnute na jednom sajtu

Posmatran je sistem od dve 2D beskonačne uniformne i identične rešetke spregnute linearno na jednom sajtu, slika 4.24 [74]. Pretpostavka je da je konstanta spreznjanja unutar komponentnih rešetki C , i konstanta spreznjanja između rešetki (defekt), ε . Pretpostavljeno je da sistem ima on-site samofokusirajuću kubnu (Kerr) nelinearnost.



Slika 4.24 Dve 2D paralelne identične rešetke linearno spregnute na jednom sajtu označenom indeksima $n = m = 0$. Konstanta spreznjanja između rešetki je ε .

Konstanta unutrašnjeg spreznjanja u rešetkama je $C > 0$ i konstanta spreznjanja između rešetki je $\varepsilon > 0$.

Propagacija svetlosti kroz sistem od dve spregnute 2D rešetke se modeluje sistemom od $2(N+1)^2$ DNŠJ-a:

$$i \frac{d\phi_{n,m}}{dt} + \frac{C}{2} (\phi_{n+1,m} + \phi_{n-1,m} + \phi_{n,m+1} + \phi_{n,m-1} - 4\phi_{n,m}) + \varepsilon \psi_{n,m} \delta_{n,0} \delta_{m,0} + \gamma |\phi_{n,m}|^2 \phi_{n,m} = 0, \quad (4.51.)$$

$$i \frac{d\psi_{n,m}}{dt} + \frac{C}{2} (\psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}) + \varepsilon \phi_{n,m} \delta_{n,0} \delta_{m,0} + \gamma |\psi_{n,m}|^2 \psi_{n,m} = 0,$$

gde je t vreme i $\delta_{n,m}$ je Kronekerova delta funkcija. Pretpostavljeno je da je $\frac{C}{2} = \gamma = 1$.

Kompleksne u opštem slučaju veličine, $\phi_{n,m}$ i $\psi_{n,m}$ predstavljaju električne komponente

elektromagnetnog talasa koji propagira kroz rešetke spojene na sajtozima sa indeksima $n = m = 0$. Stacionarna rešenja jednačina (4.51) se traže u obliku:

$$\phi_{n,m} = u_{n,m} \exp(-i\mu z) \text{ i } \psi_{n,m} = v_{n,m} \exp(-i\mu z), \quad (4.52)$$

gde su $u_{n,m}$ i $v_{n,m}$ realne diskretne funkcije, a μ je propagaciona konstanta. Smenom pretpostavljenih stacionarnih rešenja (4.52) u polazne jednačine (4.51) dolazi se do stacionarnih jednačina oblika:

$$\mu u_{n,m} + (u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} - 4u_{n,m}) + \epsilon v_{n,m} \delta_{n,0} \delta_{m,0} + |u_{n,m}|^2 u_{n,m} = 0, \quad (4.53)$$

$$\mu v_{n,m} + (v_{n+1,m} + v_{n-1,m} + v_{n,m+1} + v_{n,m-1} - 4v_{n,m}) + \epsilon u_{n,m} \delta_{n,0} \delta_{m,0} + |v_{n,m}|^2 v_{n,m} = 0.$$

Analitička rešenja jednačina (4.53) mogu se dobiti uz pomoć VR. Lagranžijan ovog sistema se sastoji od Lagranžijana dve komponentne rešetke i člana koji uračunava sprezanje između njih:

$$L = L_u + L_v + 2\epsilon u_{0,0} v_{0,0}, \quad (4.54)$$

$$L_u \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left((\mu - 4) u_{n,m}^2 + \frac{1}{2} u_{n,m}^4 + 2u_{n,m} (u_{n+1,m} + u_{n,m+1}) \right),$$

$$L_v \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left((\mu - 4) v_{n,m}^2 + \frac{1}{2} v_{n,m}^4 + 2v_{n,m} (v_{n+1,m} + v_{n,m+1}) \right). \quad (4.55)$$

Pretpostavlja se da su amplitudni profili površinski lokalizovanih moda centrirani na sajtozima rešetke gde je spoj, a da eksponencijalno opadaju sa udaljavanjem od spoja. Oblik polja ovih lokalizovanih moda na svakoj od komponentnih rešetke je:

$$\{u_{n,m}, v_{n,m}\} = \{A, B\} \exp(-a|n|) \exp(-a|m|), \quad (4.56)$$

A i B , se tretiraju kao varijacioni parametri. Inverzna širina a , dobija se linearizovanjem stacionarnih jednačina za $|m|, |n| \rightarrow \infty$,

$$a = -\ln \left((4 - \mu) / 4 - \sqrt{16(4 - \mu)^2 - 1} \right), \quad (4.57)$$

$$s \equiv e^{-a} = \frac{4 - \mu}{4} - \sqrt{\frac{(4 - \mu)^2}{16} - 1},$$

$$\mu = 4 - 2(s + s^{-1}),$$

čime se dobija da je propagaciona konstanta negativna, $\mu < 0$.

Smenom relacije (4.56) u jednačine (4.54) i (4.55) i upotrebom (4.57) dobija se odgovarajući efektivni Lagranžijan:

$$L_{eff} = (L_u)_{eff} + (L_v)_{eff} + 2\epsilon AB, \quad (4.58)$$

$$(L_u)_{eff} = -2A^2 \frac{1+s^2}{s} + \frac{1}{2} A^4 \frac{(1+s^4)^2}{(1-s^4)^2}, \quad (4.59)$$

$$(L_v)_{eff} = -2B^2 \frac{1+s^2}{s} + \frac{1}{2} B^4 \frac{(1+s^4)^2}{(1-s^4)^2}.$$

Nalaženjem lokalnih ekstremuma Lagranžijana po varijacionim parametrima A i B dolazi se do Ojler-Lagranževih jednačina:

$$\frac{\partial(L_u)_{eff}}{\partial A} + 2\epsilon B = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial(L_v)_{eff}}{\partial B} + 2\epsilon A = 0. \quad (4.60)$$

Smenom jednačina (4.59) u Ojler-Lagranževe jednačine (4.60) dobijaju se izrazi:

$$\begin{aligned} -2 \frac{1+s^2}{s} A + \frac{(1+s^4)^2}{(1-s^4)^2} A^3 + \epsilon B &= 0, \\ -2 \frac{1+s^2}{s} B + \frac{(1+s^4)^2}{(1-s^4)^2} B^3 + \epsilon A &= 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Na osnovu jednačina (4.61) može se zaključiti da postoje tri tipa solitonskih kompleksa koje čine fundamentalne lokalizovane mode na spoju spregnutih rešetki:

1. Simetrični kompleksi (SS), koji se dobijaju u slučaju kada su maksimalne vrednosti amplitude površinskih moda na obema rešetkama jednake $A=B$;
2. Antisimetrični kompleksi (AS), koji se dobijaju u slučaju kada su vrednosti amplitude na spoju površinskih moda u spregnutim rešetkama jednake po intenzitetu ali suprotnog znaka $A = -B$;
3. Nesimetrični kompleksi (NS), koji se dobijaju ukoliko su kvadrati maksimalnih amplituda komponentnih solitona na dvema rešetkama različiti, $A^2 \neq B^2$.

Simetrična rešenja dobijaju se smenom uslova $A = B$ u jednačine (4.61), čime se dolazi do jednačine (4.62):

$$A^2 = \frac{(1-s^4)^2}{(1+s^4)^2} \left[\frac{2}{s} (1+s^2) - \epsilon \right]. \quad (4.62)$$

Iz jednačine (4.62) može se zaključiti da je oblast postojanja simetričnih rešenja ograničena uslovom $\varepsilon < \varepsilon_c \equiv 2(1+s^2)/s$. Na slici 4.25. su predstavljene vrednosti amplituda svih tipova solitona, dobijene varijacionim računom i numerički, dok su njihove oblasti postojanja prikazane na slici 4.26.

Vrednosti amplituda površinskih solitona u slučaju nesimetričnog solitonskog kompleksa dobijaju se nakon proste algebarske procedure iz sistema jednačina (4.61):

$$A = \pm \frac{(1-s^4)}{(1+s^4)\sqrt{s}} \sqrt{1+s^2 + \sqrt{(1+s^2)^2 - \varepsilon^2 s^2}}, \quad (4.63)$$

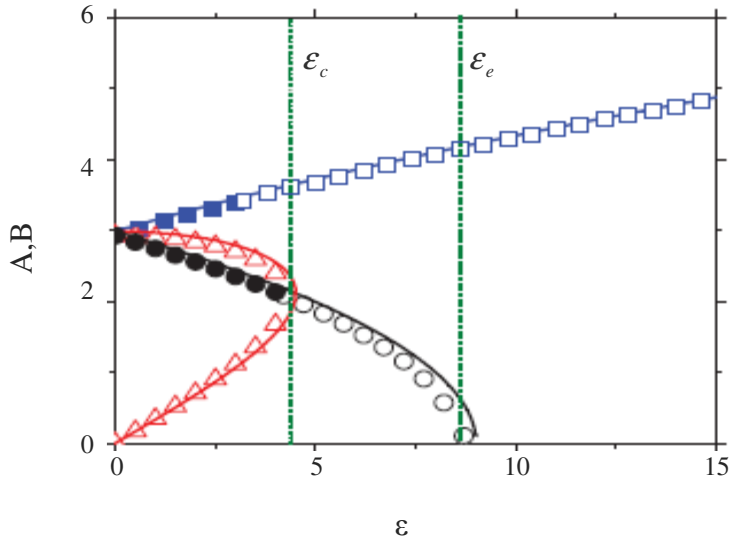
$$B = \frac{(1-s^4)^2}{(1+s^4)^2} \frac{\varepsilon}{A}.$$

Na osnovu jednačina (4.63) može se zaključiti da nesimetrični solitonski kompleksi postoje za $\varepsilon < \varepsilon_c \equiv 2(1+s^2)/s$. Nesimetrično rešenje sa $A \neq 0$ i $B = 0$ je moguće naći kada je $\varepsilon = 0$, što je analogno slučaju kada rešetke nisu kuplovane. Takođe, sa opadanjem vrednosti parametra ε , javlja se spontano narušenje simetrije u bifurkacionoj tački, $\varepsilon = \varepsilon_c$, u kojoj iz jedne simetrične grane nastaju dve nesimetrične, što je prikazano na slici 4.25.

Kvadrat amplituda površinskih solitona koji formiraju antisimetrični solitonski kompleks dobija se smenom uslova $A = -B$ u jednačinu (4.61):

$$A^2 = \frac{(1-s^4)^2}{(1+s^4)^2} \left[\frac{2}{s} (1+s^2) + \varepsilon \right]. \quad (4.64)$$

Na osnovu jednačine (4.64) može se zaključiti da antisimetrični solitoni postoje u celom parametarskom prostoru (ε, μ) .



Slika 4.25 Amplitude A i B nesimetričnih (crvene oznake), simetričnih (crne oznake) i antisimetričnih solitona (plave oznake) dobijene uz pomoć VR (linije) i numerički (trouglovi za nesimetrične mode, krugovi za simetrične, kvadrati za antisimetrične mode) u funkciji od konstante spreznja između rešetki. Propagaciona konstanta je $\mu = -5$. Tačkaste zelene vertikalne linije označavaju numerički nađene kritične vrednosti konstante spreznja između rešetki koje ograničavaju region postojanja za asimetrično (ε_c) i simetrično rešenje (ε_e). Prazni simboli predstavljaju stabilne, a puni simboli nestabilne solitone, što je dobijeno numeričkim putem.

Stabilnost sva tri tipa površinskih solitona proveravana je s obzirom na VK kriterijum. Prema ovom kriterijumu moda je uslovno stabilna ukoliko važi uslov $dP/d\mu > 0$, gde je

$P \equiv \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (u_{n,m}^2 + v_{n,m}^2)$, ukupna snaga solitona. Ukupna snaga posmatranog sistema ima sledeći oblik:

$$P = (A^2 + B^2) \left(\frac{1+s^2}{1-s^2} \right)^2. \quad (4.65)$$

Kako je propagaciona konstanta, μ , funkcija parametra s to se potreban uslov za stabilnost solitona po VK kriterijumu, s obzirom na to da je $\frac{\partial s}{\partial \mu} < 0$, može transformisati u uslov $\frac{\partial P}{\partial s} < 0$.

U slučaju simetričnog rešenja, $A = B$, zamenom (4.62) u (4.65) dolazi se do jednačine:

$$P = 2 \frac{(1+s^2)^4}{(1+s^4)^2} \left[\frac{2}{s} (1+s^2) - \varepsilon \right]. \quad (4.66)$$

Jednačina (4.66) pokazuje da je VK kriterijum ispunjen u regionu:

$$\varepsilon > \frac{2(1+s^2)}{s} - \frac{(1+s^2)(1+s^4)}{4s^3}. \quad (4.67)$$

Na slici 4.26. prikazana je oblast postojanja i stabilnosti za fundamentalne simetrične solitone. Može se zaključiti da stabilna simetrična grana postoji u velikom delu parametarskog prostora, osim u maloj oblasti ispod isprekidane narandžaste krive.

U cilju određivanja stabilnosti nesimetričnog rešenja, smenom jednačine (4.63) u jednačinu (4.65) dobija se izraz za snagu koji ne zavisi od vrednosti konstante spreznja između rešetki, ε :

$$P = 2 \frac{(1+s^2)^5}{s(1+s^4)^2}. \quad (4.68)$$

Izraz (4.68) zadovoljava VK kriterijum u celoj oblasti postojanja nesimetričnih solitonskih kompleksa.

Izraz za snagu antisimetričnih moda, $A = -B$, dobija se zamenom jednačine (4.64) u (4.65), čime se dolazi do:

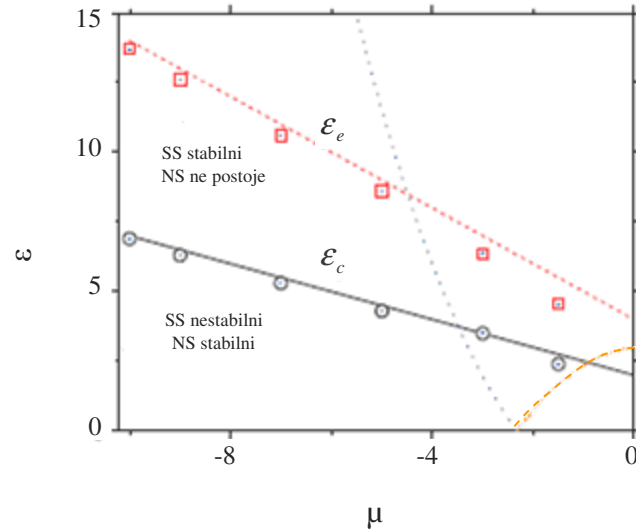
$$P = 2 \frac{(1+s^2)^4}{(1+s^4)^2} \left[\frac{2}{s} (1+s^2) + \varepsilon \right]. \quad (4.69)$$

Na osnovu jednačine (4.69) može se zaključiti da je VK kriterijum zadovoljen za:

$$\varepsilon < \frac{(1+s^2)(1+s^4)}{4s^3} - \frac{2(1+s^2)}{s}. \quad (4.70)$$

Na slici 4.26 su predstavljene oblasti postojanja u parametarskom prostoru (ε, μ) svih tipova solitonskih kompleksa generisanih varijacionom procedurom. Oblasti stabilnosti simetričnih i nesimetričnih moda predstavljeni na slici 4.26 dobijeni su numerički.

Varijacioni račun je doveo do zaključka da je oblast postojanja simetričnih rešenja ograničena, dok je po VK kriterijumu predviđeno da su simetrični kompleksi stabilni u širokoj oblasti tog regiona. U slučaju antisimetričnih rešenja oblast postojanja nije ograničena, a stabilnost je po VK očekivana u delu te oblasti. Konačno, u slučaju nesimetričnih rešenja nađena je vrednost konstante spreznja između rešetki gde se rađa par nesimetričnih kompleksa. Ta vrednost je bifurkaciona tačka. Nesimetrična rešenja zadovoljavaju potreban uslov za stabilnost po VK kriterijumu u celoj oblasti postojanja.

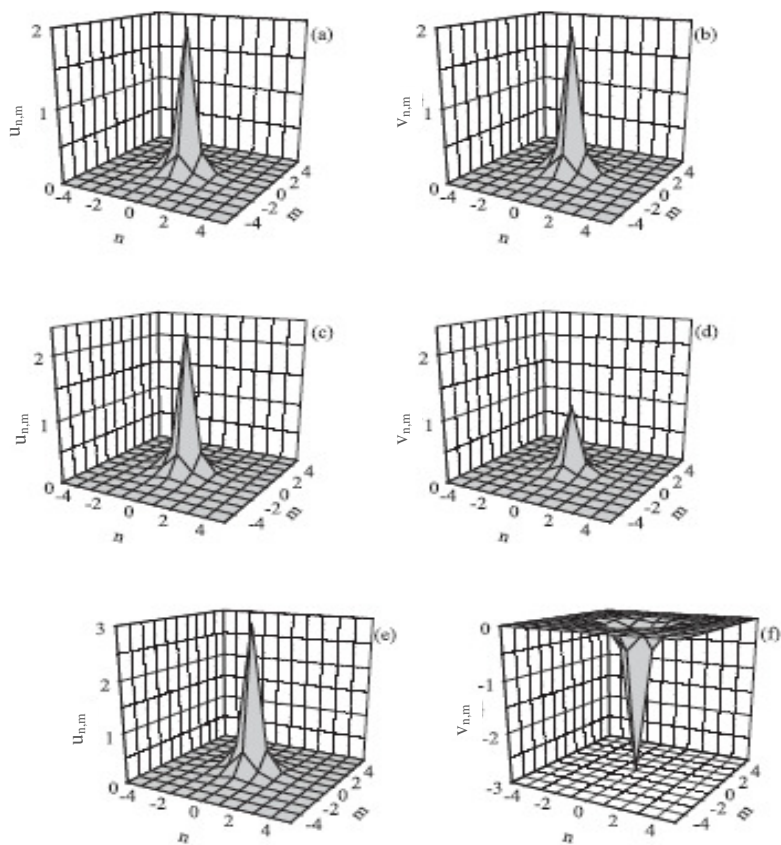


Slika 4.26 Regioni postojanja i stabilnosti za solitonske komplekse simetričnog (SS), nesimetričnog (NS) i antisimetričnog (AS) tipa formirane od fundamentalnih solitona u komponentnim rešetkama. Rezultati VA su predstavljeni linijama, dok su numerički rezultati predstavljeni simbolima u parametarskom prostoru (ε, μ) . Crni kružići i odgovarajuća linija odgovaraju granici postojanja nesimetričnih kompleksa. Crveni kvadrati i isprekidana linija označavaju granicu postojanja za simetrične komplekse. Numerička izračunavanja pokazuju da se spontano narušenje simetrije javlja duž krive $\varepsilon_c(\mu)$. Antisimetrične mode postoje u celom parametarskom prostoru. Predviđanja VK kriterijuma su da su nesimetrični kompleksi stabilni u čitavom regionu egzistencije, simetrični iznad narandžaste isprekidane linije i antisimetrični od početka dijagrama do plave isprekidane linije. Stabilnost simetričnih i nesimetričnih moda prikazana na dijagramu ustanovljena je numerički.

Rezultati, dobijeni varijacionim računom proveravani su numerički. Stacionarna rešenja su dobijena primenom relaksacionog metoda i algoritma baziranog na modifikovanoj Paelovoj metodi minimizacije, dok je dinamička jednačina rešavana numeričkim kodom baziranim na Runge-Kuta algoritmu šestog reda. U dinamičkim simulacijama polazni profil solitona je generisan rešavanjem stacionarne jednačine.

Polazna pretpostavka korišćena za numeričko rešavanje stacionarnih jednačina i dobijanje fundamentalnih solitona centriranih na spoju dve 2D beskonačne rešetke je da su samo na spoju amplitude polja nenulte i imaju istu vrednost, $u_0 = u_1 = A > 0$ za simetrična rešenja, $u_0 = A > 0$, $v_0 = B > 0$ za nesimetrična rešenja i $u_0 = A > 0$, $v_0 = -A$ za antisimetrične mode gde su A i B različiti.

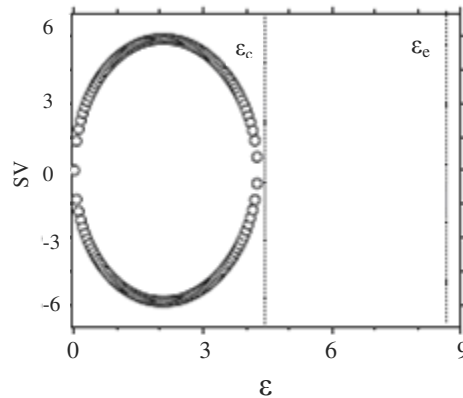
Na slici 4.27 predstavljeni su tipični profili amplitude komponentnih solitona za simetrične, nesimetrične i antisimetrične solitonske komplekse nađeni numerički.



Slika 4.27 Tipični izgled amplitudnih profila solitona u kompleksima različitog tipa: (a) i (b) simetrični, (c) i (d) nesimetrični i (e) i (f) antisimetrični. Snage prikazanih kompleksa su redom, za simetrični kompleks $P_{SS} = 8.63$, za nesimetrični kompleks $P_{AS} = 7.11$ i za antisimetrični kompleks $P_{NS} = 19.91$.

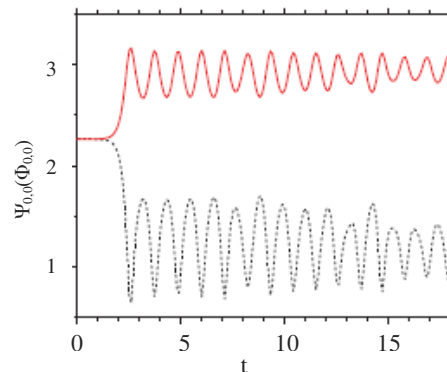
Numerički dobijena zavisnost amplituda, A i B , od konstante spreznja između rešetki, ε , kao i regioni postojanja predstavljeni su na slikama 4.25 i 4.26. Sa tih slika se vidi dobro slaganje numeričkih i analitičkih rezultata za sve tipove solitona. Na primer, granica oblasti postojanja simetričnog kompleksa dobijena uz pomoć VR je $\varepsilon_c \equiv 9$, a numerički proračunata $\varepsilon_c \equiv 8.63$. Takođe, rezultati dobijeni VR i numerički pokazuju da postoji narušenje simetrije u $\varepsilon_c(\mu)$ gde se događa viljuškasta superkritična bifurkacija u sistemu.

Linearna analiza stabilnosti pokazuje da se simetrični kompleksi pojavljuju kao stabilna rešenja na $\varepsilon = \varepsilon_c$ i menjaju svoju stabilnost u tački $\varepsilon = \varepsilon_c$, gde se javljaju nesimetrične solitonske grane. Nestabilna simetrična rešenja se karakterišu čisto realnim parovima svojstvenih vrednosti što je predstavljeno na slici 4.28.



Slika 4.28 Čisto realne svojstvene vrednosti u funkciji parametra spreznja između rešetki, ε , za simetrične solitonske komplekse pri fiksnoj vrednosti $\mu = -5$. Tačkasta linija, označena sa ε_c , predstavlja bifurkacionu tačku na kojoj se pojavljuju nesimetrični solitoni, dok druga tačkasta linija, ε_e , predstavlja gornju granicu regiona postojanja stabilnih simetričnih solitonskih kompleksa.

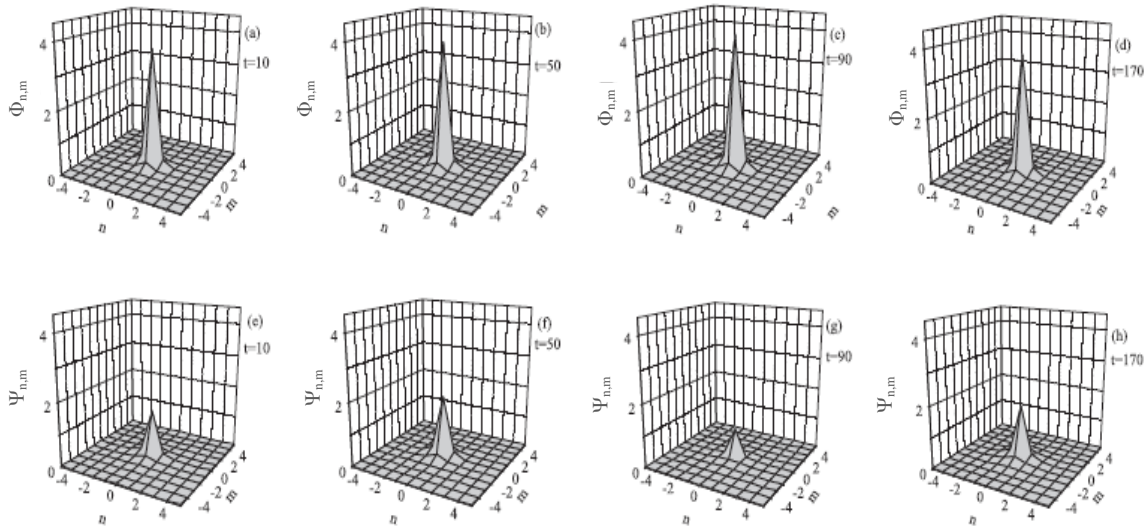
Ukoliko rešetke nisu spregnute postojaće u njima samo stabilni diskretni solitoni, odnosno, stabilan simetrični solitonski kompleks formiran od njih. Pojava spreznja između rešetki menja stabilnost simetričnog kompleksa formiranog od solitona u komponentnim rešetkama centriranih na spoju rešetki. Numerički rezultati se ne poklapaju sa predviđanjima VR u smislu da numerički dobijeni simetrični solitonski kompleksi menjaju stabilnost na vrednosti ε koja je određena jednačinom (4.67). Direktne simulacije potvrđuju stabilnost simetričnog kompleksa u intervalu $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_e$. S druge strane, simulacije evolucije nestabilnih simetričnih moda pokazuju da pod uticajem male perturbacije ove nestabilne mode prelaze u nesimetrične briderske komplekse koji se sastoje od dve lokalizovane oscilujuće komponente koje razmenjuju energiju u toku evolucije, slika 4.29.



Slika 4.29 Evolucija amplituda nestabilne simetrične mode ($\mu = -5$ i $\varepsilon = 3.4$) u odgovarajući nesimetrični kompleks. Amplitude komponentnih solitona pomenutog kompleksa su predstavljene različitim linijama.

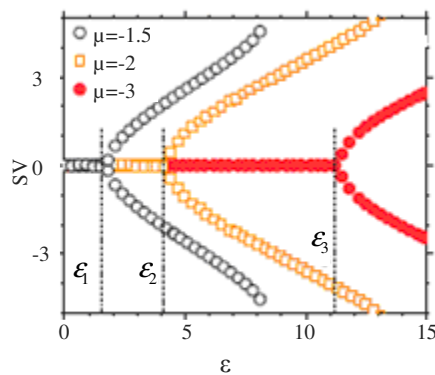
Dve grane nesimetričnih rešenja, koje se javljaju pri destabilizaciji simetrične grane, prema linearnoj analizi stabilnosti postaju stabilne i kao rezultat spektra svojstvenih vrednosti sadrži samo čisto imaginarne svojstvene vrednosti. Dinamička simulacija

pokazuje da je slabo perturbovani nesimetrični solitonski kompleks samo neznatno periodično modulisan pri propagaciji, odnosno, formiran je dinamički stabilan nesimetrični briderski kompleks, kao što je ilustrovano na slici 4.30.



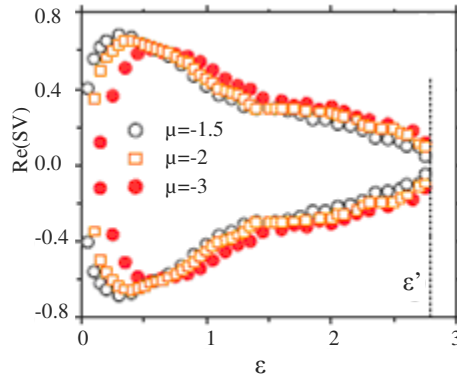
Slika 4.30 Evolucija perturbovanog nesimetričnog kompleksa za vrednosti $P=12.02$, $\varepsilon=5$ i $\mu=-8$. Evolucija profila obe solitonske komponente predstavljena je u dva reda na slikama specificiranim vremenskim trenucima. Formiran je dinamički stabilan briderski nesimetričan kompleks čije oscilujuće lokalizovane komponente međusobno razmenjuju energiju pri propagaciji.

U slučaju antisimetričnih moda, linearnom analizom stabilnosti dobijeni su parovi čisto realnih svojstvenih vrednosti koje postaju značajne iznad neke kritične vrednosti parametra spreznja između rešetki, ε , koji zavisi od μ . Te kritične vrednosti $\varepsilon_{1,2,3}$ za $\mu = -1.5, -2, -3$ su prikazane na slici 4.31.



Slika 4.31 Čisto realne svojstvene vrednosti u funkciji parametra spreznja između rešetki, ε za antisimetrične solitone. Crni (neobojeni krugovi), narandžasti (kvadrati) i crveni (obojeni krugovi) simboli odgovaraju respektivno, fiksiranim $\mu = -1.5, -2, -3$. Tačkaste linije označene sa $\varepsilon_{1,2,3}$ označavaju granice regiona gde čisto realne svojstvene vrednosti imaju značajne vrednosti.

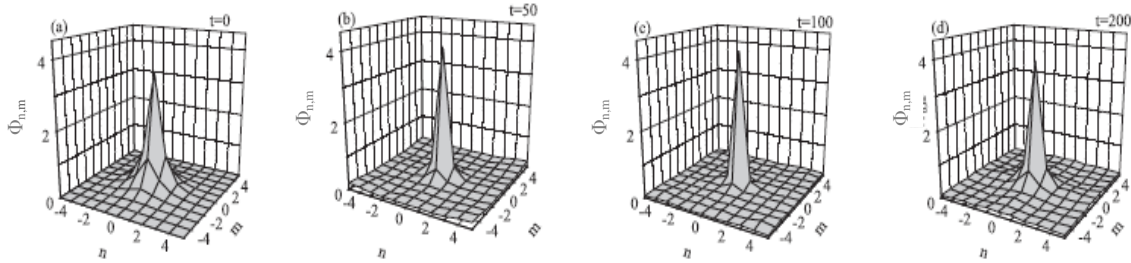
Linearna analiza stabilnosti pokazala je da u slučaju antisimetričnih moda postoji i oblast kompleksnih svojstvenih vrednosti za određene vrednosti konstante sprezanja između rešetki, $\varepsilon < \varepsilon'$ pri proizvoljnom μ , što je prikazano na slici 4.32.



Slika 4.32 Realni delovi kompleksnih svojstvenih vrednosti u funkciji parametra sprezanja između rešetki, ε , za antisimetrične solitone. Crni (prazni krugovi), narandžasti (kvadrati) i crveni (ispunjeni krugovi) simboli odgovaraju respektivno, fiksiranim $\mu = -1.5, -2, -3$. Tačkasta linija ε' označava granicu gde su realni delovi kompleksnih svojstvenih vrednosti $\text{Re}(SV) > 0.001$.

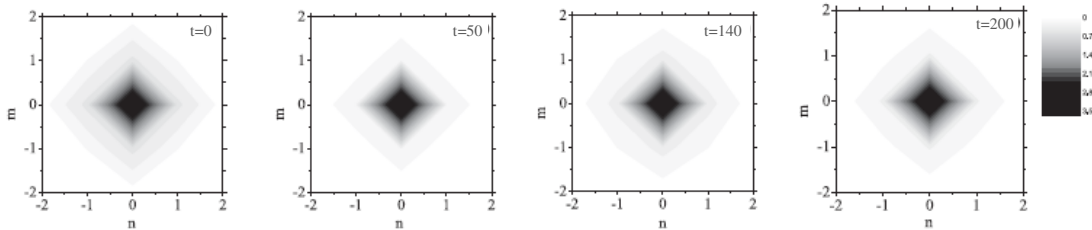
Za velike vrednosti konstante sprezanja, $\varepsilon > \varepsilon_{1,2,3}$, razvoj nestabilnosti je određen čisto realnim svojstvenim vrednostima, a u regionu $\varepsilon < \min(\varepsilon', \varepsilon_{1,2,3})$ realni deo kompleksnih svojstvenih vrednosti dominira. Dakle numerički rezultati za antisimetrične komplekse se ne slažu s analitičkim predviđanjima dobijenim uz pomoć VR.

Dinamičke simulacije su pokazale da su antisimetrični kompleksi robusni, iako su u spektrima svojstvenih vrednosti prisutne svojstvene vrednosti sa značajnim nenultim realnim delom. Izuzetak je oblast malih vrednosti konstante sprezanja između rešetki gde antisimetrični, simetrični i nesimetrični kompleksi s bliskim vrednostima energije koegzistiraju, $\varepsilon \ll \varepsilon_c$. U opštem slučaju, robusnost antisimetričnih kompleksa se ogleda u tome da tokom evolucije perturbovani antisimetrični kompleksi samo razmenjuju neznan deo energije sa sredinom, formirajući slabo 'dišući' briderski kompleks. Razlog za to je koncentracija skoro celokupne energije komponentnih solitona na spoju rešetki (snažno zarobljavanje) [75]. Opisana situacija važi u skoro čitavoj oblasti egzistencije antisimetričnih solitona. Dinamika eksponencijalno nestabilnih antisimetričnih kompleksa (sa značajnim čisto realnim svojstvenim vrednostima) prikazana je na slici 4.33. Pomenuta nesimetrična struktura ima dve komponente sa identičnim profilima amplituda $|\psi_{n,m}| = |\phi_{n,m}|$. Obe komponente ostaju sve vreme lokalizovane i razmenjuju mali deo svoje energije sa okolnom sredinom. Tako se formiraju lokalizovani brideri i pobuđuje se oscilovanje okolne sredine.



Slika 4.33 Evolucija antisimetričnog kompleksa sa $\mu = -1.5$, $\varepsilon = 7.2$ i $P = 33.48$. Četiri slike predstavljaju profile amplituda komponenta solitona $|\psi_{n,m}| = |\phi_{n,m}|$ za $t=0$, 50, 100 i 200. Maksimalna amplituda komponentnih solitona je velika i osciluje oko vrednosti 3.8, solitoni su jako uski. Proizvoljna perturbacija može dovesti do neznatnog oscilovanja vrednosti amplitude i formiranja jako lokalizovanog bridera.

Dinamičke simulacije su pokazale da antisimetrične mode okarakterisane malim realnim svojstvenim vrednostima prate isti scenario kao i antisimetrične mode sa kompleksnim svojstvenim vrednostima. Na slici 4.34. prikazana je evolucija antisimetričnog kompleksa s eksponencijalnom nestabilnošću.



Slika 4.34 Evolucija perturbovane antisimetrične mode koja je nestabilna prema oscilatornim perturbacijama sa $\mu = -3$, $\varepsilon = 1.5$ i $P = 17.46$. Amplitudni profili komponentnih solitona su jako 'oštri' i njihove amplitude blago osciluju, slično kao u slučaju na slici 4.33.

Analizom regiona postojanja svih moda, prikazanom na slici 4.25, može se zaključiti da postoje dve oblasti bistabilnosti. Jedna od njih je oblast u kojoj istovremeno postoje stabilni simetrični i kvazistabilni antisimetrični solitoni a druga je oblast, sa druge strane bifurkacione tačke, u kojoj istovremeno postoje stabilni nesimetrični i antisimetrični solitonski kompleksi (male vrednostima ε). Slični rezultati su nađeni i u drugim linearno spregnutim dvo-komponentnim sistemima sa samofokusirajućom nelinearnošću [76-78].

U slučaju dve nespregnute uniformne 2D rešetke, simetrični kompleksi su formirani od dva identična on-site solitona, koji su stabilni. Sa pojavom sprežanja između rešetki dolazi do pojave eksponencijalne nestabilnosti u kompleksima formiranim od dva identična on-site solitona. Simetrični kompleksi postaju opet stabilni za $\varepsilon \geq \varepsilon_c$. Tačka ε_c se može identifikovati kao tačka superkritične viljuškaste bifurkacije u kojoj stabilne nesimetrične grane nestaju i simetrična grana je opet stabilna.

4.6 Kompleksi vrtloga formirani na spoju dve 2D beskonačne nelinearne rešetke

U strukturi predstavljenoj na slici 4.24 [79], koju čine dve identične 2D beskonačne rešetke međusobno linearno spregnute na jednom sajtu, moguće je formiranje kompleksa vrtloga. Pod kompleksom vrtloga podrazumeva se kompleks koji se sastoji od dva identična vrtloga od kojih svaki pripada jednoj od komponentnih rešetki. Polazne jednačine su jednačine (4.51). Stacionarna rešenja, jednačina (4.51) se traže, na uobičajan način, u obliku:

$$\phi_{n,m} = u_{n,m} \exp(-i\mu t) \text{ i } \psi_{n,m} = v_{n,m} \exp(-i\mu t),$$

s tim što su $u_{n,m}$ i $v_{n,m}$ kompleksne funkcije, za razliku od slučaja kada se posmatraju kompleksi solitona a kada su ove funkcije realne, μ je propagaciona konstanta i t je vreme (propagaciona koordinata). Dobijene stacionarne jednačine imaju oblik analogan jednačinama (4.53) uz činjenicu da su polja $u_{n,m}$ i $v_{n,m}$ kompleksne veličine:

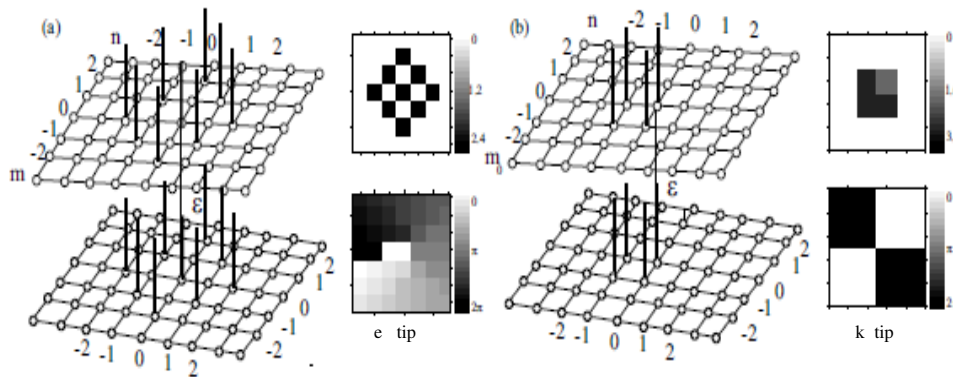
$$\begin{aligned} \mu u_{n,m} + (u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} - 4u_{n,m}) + \epsilon v_{n,m} \delta_{n,0} \delta_{m,0} + |u_{n,m}|^2 u_{n,m} &= 0, \\ \mu v_{n,m} + (v_{n+1,m} + v_{n-1,m} + v_{n,m+1} + v_{n,m-1} - 4v_{n,m}) + \epsilon u_{n,m} \delta_{n,0} \delta_{m,0} + |v_{n,m}|^2 v_{n,m} &= 0. \end{aligned}$$

Lokalizovana stacionarna rešenja tipa vrtloga, određivanje njihove stabilnosti i dinamička svojstva su dobijena numerički procedurama koje su pominjane u prethodnim delovima ove disertacije. Jednačine (4.51) imaju dva integrala kretanja: snagu i hamiltonijan tako da je kroz simulacije proveravano održavanje ove dve veličine. Numerički rezultati su dobijeni za kvadratnu rešetku koja se sastoji od 11x11 elemenata za on-site vrtloge i 10x10 za off-site vrtloge.

Jedna od karakteristika vrtložnih struktura je topološko naelektrisanje S . Topološko naelektrisanje predstavlja ukupnu promenu faze oko centra vrtloga podeljenu sa 2π , tj. broj obrtaja faze vrtloga pri jednom trigonometrijskom okretu oko centra vrtloga. Posmatrani su kompleksi vrtloga koje čine vrtlozi s topološkim naelektrisanjem $S=1$ i $S=2$. Proučavano je osam različitih tipova vrtloga koji se razlikuju po faznoj konfiguraciji, ali svi imaju topološko naelektrisanje $S=1$ i četiri tipa sa različitom faznom konfiguracijom i topološkim naelektrisanjem $S=2$ [80-84]. Različiti tipovi vrtloga zajedno sa svojim faznim konfiguracijama sa $S=1$ i $S=2$, prikazani su u tabelama 1 i 2.

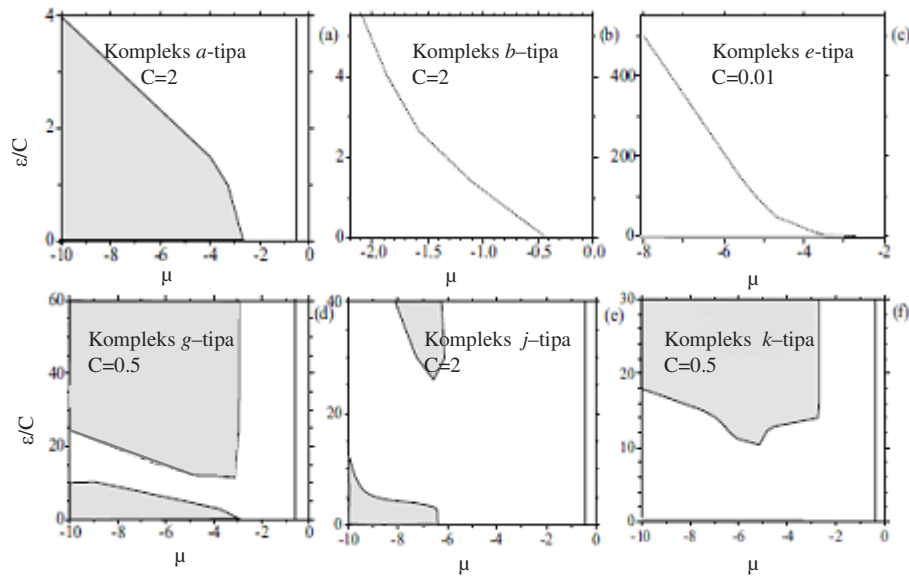
Tipovi vrtloga: a, c, d, e, f, g, i i j predstavljaju on-site vrtloge i njihova središnja tačka (gde je singularitet faze) nalazi se na jednom sajtu rešetke. Tipovi: b, h, k i l predstavljaju off-site vrtloge i njihova središnja tačka je centrirana između sajtova. On-site vrtlozi predstavljaju simetrične komplekse u odnosu na sajt na kome se vrši sprezanje između rešetki, dok off-site vrtlozi predstavljaju nesimetrične komplekse u odnosu na sajt

na kome se vrši sprezanje između rešetki. Za obe vrste kompleksa vrtloga, formiranih od bilo dva on ili dva off-site vrtloga, važi ogledalska simetrija u odnosu na ravan paralelnu ravnima komponentnih rešetki a koja bi razdvajala spregnute rešetke, slika 4.35.



Slika 4.35 Šematski prikaz kompleksa vrtloga u sistemu sa dve paralelne 2D identične rešetke, linearno spregnute na jednom sajtu $n=m=0$ konstantom sprezanja \mathcal{E} . Na slici (a) pored skice kompleksa vrtloga formiranog od dva on-site vrtloga, predstavljene su projekcije u ravni, amplitude i faze on-site komponentnog vrtloga tipa e , dok su na slici (b) prikazani kompleks dva off-site vrtloga i odgovarajuće projekcije off-site komponentnog vrtloga tipa k . Drugi komponentni vrtlog je, u oba slučaja, u oba slučajja, identičan prikazanim vrtlozima.

Numerička izračunavanja su pokazala da se oblast postojanja kod nekih tipova kompleksa sužava sa porastom \mathcal{E}/C . Koliko će to sužavanje biti zavisi od energije na spregnutim sajtozima. Za komplekse vrtloga koji se sastoje od dva vrtloga a , g , j ili k tipa, koji su povezani ne-pobuđenim centralnim sajtom, nema sužavanja oblasti postojanja u posmatranom parametarskom domenu ($C=2, \mathcal{E}/C < 200$). Oblast postojanja se značajno smanjuje u slučaju simetričnih kompleksa koji se sastoje od vrtloga e -tipa i b -tipa. Sa približavanjem granici postojanja, ovi kompleksi vrtloga se karakterišu postepenom deekscitacijom centralnog sajta komponentnih vrtloga, dok je centralna simetrija očuvana.



Slika 4.36 Oblasti postojanja (levo od tačkaste linije) i regioni stabilnosti (siva oblast) za različite komplekse vrtloga u parametarskom prostoru $(\varepsilon, \varepsilon/C)$. Tip kompleksa je naznačen na svakom od dijagrama. Konstanta spreznja unutar svake od komponentnih rešetki je ista i iznosi: (a) $C=2$ za a -tip, (b) $C=2$ za b tip, (c) $C=0.01$ za e tip, (d) $C=0.5$ za g tip, (e) $C=2$ za j tip i (f) $C=0.5$ za k tip.

Stabilnost kompleksa vrtloga je proveravana primenom linearne analize stabilnosti i direktnim numeričkim simulacijama. Obe procedure se zasnivaju na posmatranju evolucije malih perturbacija. Kod linearne analize stabilnosti perturbovano stacionarno rešenje se smenjuje u jednačinu (4.51), a zatim se nakon jednostavne algebarske procedure dobija jednačina koja opisuje evoluciju malih perturbacija. Linearizacijom te jednačine po malim perturbacijama dobija se jednačina koja je ekvivalent jednačine svojstvenog problema za perturbacije, odakle se može naći koeficijent rasta perturbacija, odnosno odrediti stabilnost stacionarnog rešenja. Iz studija koje su proučavale vrtloge u 2D uniformnoj rešetki sa kubnom nelinearnošću [84] poznato je da postoje regioni stabilnosti za a , b , tipove vrtloga (osnovna stanja vrtloga), e i g konfiguracije vrtloga sa topološkim naelektrisanjem $S=1$ i j i k tipove vrtloga sa topološkim naelektrisanjem $S=2$.

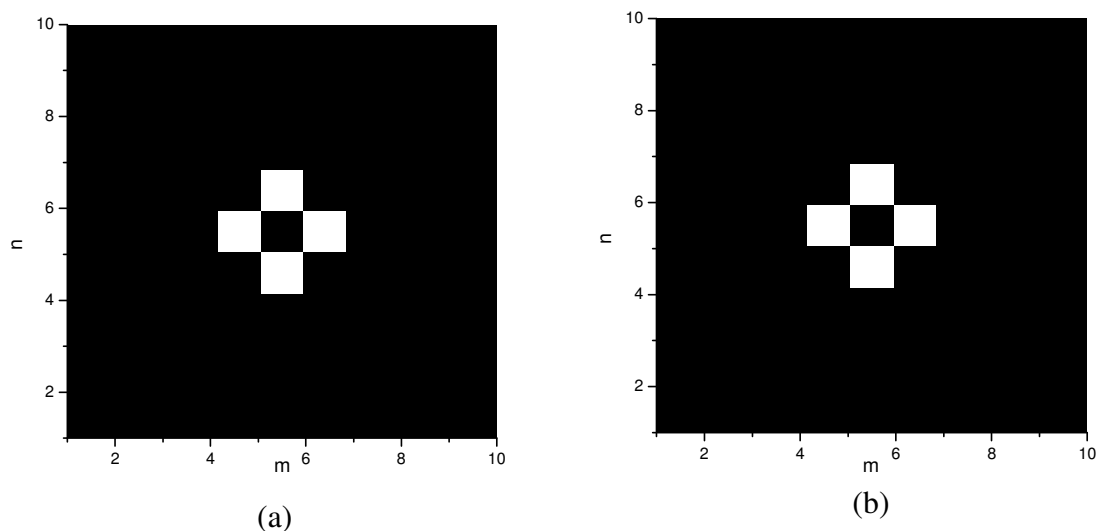
Numerički je pokazano da u sistemu od dve linearno spregnute u jednom sajtu 2D nelinearne rešetke nije moguće dobiti stabilni kompleks vrtloga sastavljen od dva identična nestabilna komponentna vrtloga. Zbog toga je težište istraživanja pomereno na komplekse vrtloga koji su formirani od stabilnih komponentnih vrtloga. Značajan faktor, koji utiče na stabilnost kompleksa vrtloga je relativna jačina spreznja između rešetki, tj. veličina ε/C . Za simetrični kompleks koji sačinjavaju dva vrtloga a tipa, oblast stabilnosti se lagano zatvara sa povećanjem vrednosti linearnog spreznja između rešetki, slika 4.36 (a). S druge strane nesimetrični kompleksi koji se sastoje od dva vrtloga b tipa (off-site vrtlozi) naglo gube stabilnost sa pojavom spreznja među rešetkama. Isti scenario je primećen i za kompleks vrtloga koji se sastoji od dva vrtloga e tipa ($S=1$) i u kompleksima gde su komponentne rešetke povezane preko ekscitovanih sajtova. Iz ovih

rezultata je zaključeno da u opštem slučaju zatvaranje prozora stabilnosti sa povećanjem linearnog sprezanja između rešetki je prisutno kod svih kompleksa, s tim što se brzina zatvaranja menja zavisno od toga da li je sajt preko koga je ostvarena veza rešetki bio prazan ili pobuđen, slika 4.36. (b)-(d).

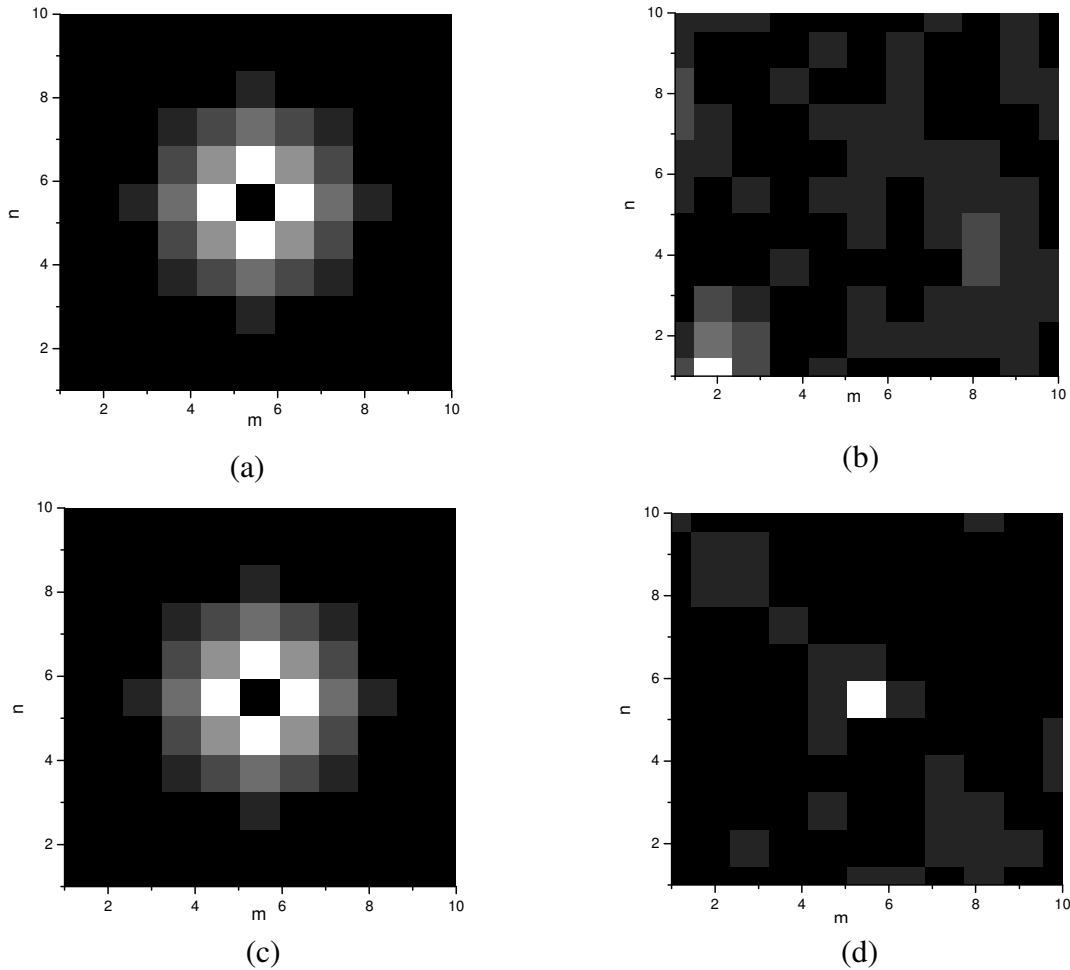
Otvaranje novog prozora stabilnosti primećeno je za vrtloge sa topološkim naelektrisanjem $S=2$ na vrlo visokim vrednostima jačine sprezanja između rešetki, ϵ/C . Kompleksi formirani od dva vrtloga g tipa su jedini sa topološkim naelektrisanjem $S=1$ koji se nakon naglog gubitka stabilnosti sa pojavom sprezanja između rešetki, karakterišu otvaranjem novog prozora stabilnosti u regionu sa velikom jačinom sprezanja između rešetki, ϵ/C , slika 4.36 (d). Uzrok tome je, pretpostavlja se, njihova fazna struktura koja dovodi do oscilacija između susednih sajtova koje nisu u fazi.

Dinamičke simulacije potvrđuju zaključke linearne analize stabilnosti. Generalno, svi posmatrani kompleksi se karakterišu ogledalskom simetrijom u odnosu na komponente vrtložne strukture. Narušenje simetrije je potvrđeno direktnim simulacijama u dugom vremenskom intervalu i javlja se zajedno s gubitkom stabilnosti.

Na slici 4.37 prikazana je evolucija amplituda komponentnih vrtloga koji čine kompleks a tipa. Kako su amplitude vrtloga na obema rešetkama jednake, prikazana je evolucija jednog od vrtloga u kompleksu. Može se videti da je ogledalska simetrija očuvana u slučaju stabilnog kompleksa vrtloga, dok je za slučaj nestabilnog kompleksa ona narušena, slika 4.38. Kako vrtlozi a konfiguracije pripadaju grupi on-site vrtloga to znači da su simetrični u odnosu na sajt na kome se vrši sprezanje među rešetkama. Ta simetrija ostaje očuvana u oblasti stabilnosti vrtloga, slika 4.37, dok se simetrija u odnosu na sajt na kome se vrši sprezanja gubi u oblasti nestabilnosti vrtloga, slika 4.38.



Slika 4.37 Evolucija amplitude komponentnog vrtloga za kompleks a tipa, koji čine dva identična vrtloga a konfiguracije. Na slici (a) prikazana je amplituda vrtloga u početnom trenutku $t=0$ dok je pod (b) prikazana amplituda vrtloga za $t=101$ za fiksirano $\mu = -9.05$, $C = 2$ i $\epsilon = 1$. Komponentni vrtlozi su stabilni i daju stabilan kompleks vrtloga. Očuvana je ogledalska simetrija. Postoji i simetrija u odnosu na sajt na kome se vrši sprezanje među rešetkama, a to je za slučaj vrtloga a konfiguracije središnji sajt.



Slika 4.38 Evolucija amplituda komponentnih vrtloga za kompleks a tipa, koji čine dva identična vrtloga a konfiguracije. Na slici (a) prikazana je amplituda vrtloga u početnom trenutku $t=0$ dok je na slici (b) prikazana amplituda vrtloga za $t=101$. Na slici (c) prikazana je amplituda drugog komponentnog vrtloga u početnom trenutku $t=0$, na slici (d) je prikazana njegova amplituda u $t=101$ za fiksirano $\mu = -0,5$ $C = 2$ i $\varepsilon = 1$. Komponentni vrtlozi su nestabilni. S pojavom nestabilnosti narušava se kako ogledalska simetrija tako i simetrija u odnosu na sajt na kome se vrši sprezanje među rešetkama.

Dinamičkim simulacijama pokazano je da u dugom vremenskom intervalu ogledalska simetrija kao i simetrija u odnosu na sajt na kome se vrši sprezanje bivaju narušene u slučaju gubitka stabilnosti. Numerička izračunavanja su pokazala zatvaranje oblasti postojanja sa povećanjem relativne jačine sprezanja između rešetki za komplekse vrtloga koji se sastoje od vrtloga povezanih ekscitovanim centralnim sajtom, kompleksi b i e tipa. Numerička izračunavanja su pokazala i zatvaranje prozora stabilnosti kod svih vrsta vrtložnih kompleksa s tim što se u slučaju b i e kompleksa zatvaranje prozora stabilnosti javlja naglo dok se u slučaju kompleksa g , j i k tipa, usled njihove fazne strukture, nakon zatvaranja prozora stabilnosti otvara novi prozor stabilnosti sa povećanjem relativne jačine sprezanja između rešetki.

V Zaključak

Interesovanje za proučavanje prostiranja svetlosti u fotonskim rešetkama pojavilo se 1987. nakon objavljivanja publikacija Jablonoviča i Džona. Važnost ovakvih istraživanja leži u činjenici da bi se na taj način ostvarila mogućnost manipulisanja svetlošću, u smislu potpunog reflektovanja svetlosti u konkretnom intervalu frekvencija, propuštanje svetlosti u željenom pravcu ili koncentracija svetlosti u određenoj zapremini. Razumevanje i objašnjenje pojava u vezi sa manipulacijom svetlosti omogućavaju razvoj efikasnijih sistema za prenos i upravljanje informacijama, razvoj senzora, kao i detaljnije istraživanje samih fizičkih fenomena koji se javljaju prilikom prostiranja talasa kroz različite sredine i sisteme. Upravo jedan od osnovnih ciljeva istraživanja predstavljenog u ovoj disertaciji bio je i proučavanje moda lokalizovanih na mestima sprezanja nelinearnih 1D i 2D nelinearnih rešetki, a koji bi, pored samog fundamentalnog razumevanja fenomena prostiranja svetlosti kroz različite sisteme fotonskih rešetki, mogao da posluži i kao potka na kojoj bi bile zasnovane praktične realizacije budućih prekidačkih, logičkih, umnožavačkih funkcija u delovima savremenih optoelektronskih uređaja ili računara baziranih na optičkim elementima i fenomenima.

U okviru disertacije, koristeći analitički i numerički pristup, proučavano je postojanje, stabilnost i dinamika površinskih lokalizovanih moda tipa solitona i vrtloga na spojevima rešetki različite strukture i dimenzionalnosti. Za analitičko opisivanje sistema korišćen je varijacioni račun u cilju predviđanja regiona postojanja površinskih moda u parametarskom prostoru, dok je potvrda njihovog postojanja i stabilnosti utvrđivana numerički, kako linearnom analizom stabilnosti tako i direktnim numeričkim simulacijama.

U slučaju dve nelinearne polubeskonačne 1D rešetke serijski linearno spregnute pokazano je da postoje tri tipa površinskih moda centriranih na defektu i to: simetrični solitoni, antisimetrični solitoni i nesimetrični solitoni. Variranjem koeficijenta sprezanja između dve polubeskonačne rešetke ε , utvrđeno je da za simetrične solitone postoji gornja granica njihove egzistencije, kao i tačka spontanog narušenja simetrije ($\varepsilon < \varepsilon_c$) nakon koje postaju nestabilni, a koje je praćeno pojavom para stabilnih nesimetričnih solitona, što predstavlja viljuškastu bifurkaciju superkritičnog tipa. Rezultati dobijeni za slučaj antisimetričnih rešenja pokazali su ograničenost oblasti postojanja ovih moda, dok su direktne numeričke simulacije pokazale da antisimetrične mode emituju deo svoje energije dovodeći do pojave antisimetričnog bridera manje energije ili nesimetričnog površinskog bridera.

Slični rezultati dobijeni su i za slučaj linearno spregnutih paralelnih 1D nelinearnih rešetki. Utvrđeno je da i ovde postoje tri tipa osnovnih rešenja centriranih na defektu i to simetrična, antisimetrična i nesimetrična rešenja. Pokazano je da variranjem koeficijenta sprezanja između rešetki i ovde dolazi do pojave superkritične viljuškaste bifurkacije, tj. da je prestanak stabilnosti simetričnih solitona praćen pojavom novih stabilnih nesimetričnih moda. Za antisimetrične mode utvrđeno je da postoji dvostruka izmena stabilnosti, ali i da su, za razliku od onih u serijski spregnutim rešetkama, jako robusne na

male perturbacije usled veoma velikih amplituda. U oba sistema pokazano je da postoje oblasti bistabilnosti u vidu zajedničke oblasti postojanja antisimetrične grane sa simetričnom ili nesimetričnom granom.

Dobijeni rezultati za sistem od tri polubeskonačne rešetke sa samofokusirajućom on-site Kerovom nelinearnšću, spregnute linearno na jednom sajtu rađeni su za slučaj površinskih moda centriranih na defektu i pokazuju da postoji tri tipa rešenja kao i u prethodna dva sistema, i to su simetrična, nesimetrična i asimetrična rešenja. Primenom varijacionog računa i numeričkih izračunavanja dobijena je kritična vrednost konstante sprezanja između rešetki koja ograničava oblast postojanja simetričnih površinskih solitonskih kompleksa. Numerička izračunavanja pokazuju da se simetrični solitonski kompleksi, koji se kreiraju kao stabilna solitonska grana na kritičnoj vrednosti konstante sprezanja između rešetki, destabilizuju u bifurkacionoj tački, na kojoj se javljaju dve antisimetrične solitonske grane. Jedna od njih je stabilna a druga eksponencijalno nestabilna. Bifurkacija koja se javlja je superkritičnog tipa. Treća grana nesimetričnog rešenja je stabilna u celom regionu svog postojanja. Takođe je pokazano, linearnom analizom stabilnosti i direktnim simulacijama, da se kod antisimetričnih kompleksa stabilnost menja dva puta i to na bifurkacionoj tački i blizu gornje granice njihovog regiona postojanja. Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da postoji oblast u parametarskom prostoru (nakon bifurkacione tačke) u kome istovremeno postoje simetrična solitonska grana, tri nesimetrične i jedna antisimetrična grana. Direktne simulacije su pokazale da se nestabilni simetrični kompleksi transformišu, predajući deo svoje energije, u oscilujuće mode oblika lokalizovanih površinskih briderskih kompleksa, dok nestabilni nesimetrični kompleksi formiraju bridere koji se kreću kroz rešetku. Objasnjeno je i razlog ovakvog ponašanja površinskih moda a čiji je uzrok ravnoteža između potencijala na spoju rešetke i potencijala unutar rešetke.

Dobijeni rezultati za sistem od dve 2D beskonačne nelinearne rešetke linearno spregnute na jednom sajtu rađeni su za simetrične, nesimetrične i antisimetrične solitonske komplekse i komplekse tipa vrtloga centrirane na sajtu na kome se vrši sprezanje. Varijacioni račun i numerička izračunavanja pokazali su da su regioni postojanja za simetrične i nesimetrične solitonske komplekse ograničeni. Uočeno je i spontano narušenje simetrije, uz pojavu viljuškaste superkritične bifurkacije. Pokazano je da se pri bifurkaciji destabilizuju simetrični i kreiraju stabilni nesimetrični solitonski kompleksi. Stabilnost antisimetričnih kompleksa se menja dva puta. Nađena je i oblast dvostruke stabilnosti između antisimetričnih moda i simetričnih ili nesimetričnih moda. Direktne simulacije su pokazale da nestabilne simetrične mode prelaze u dišuće nesimetrične komplekse, dok se antisimetrični kompleksi sa velikim amplitudama transformišu u jako lokalizovane bridere koji zadržavaju antisimetričnu strukturu. U okviru ovog sistema od interesa su bile i strukture tipa kompleksa vrtloga, koji se formiraju od dva identična vrtloga, sa topološkim naelektrisanjima $S=1$ i $S=2$. Pokazano je, linearnom analizom stabilnosti i direktnim simulacijama, da se sa povećanjem vrednosti parametra sprezanja između 2D komponentnih rešetki, region postojanja sužava za vrtloge koji su povezani međusobno ekscitovanim centralnim sajtom i da to sužavanje zavisi od energije sajta na kome se vrši sprezanje. U slučaju vrtlog kompleksa koji se sastoje od dva vrtloga međusobno povezana ne-ekscitovanim centralnim sajtom ne javlja se sužavanje oblasti

postojanja. Primenom linearne analize stabilnosti i direktnih numeričkih simulacija dobijeno je da na stabilnost kompleksa vrtloga utiče relativna jačina sprezanja između rešetki. Moglo se zaključiti da se kod svih kompleksa javlja zatvaranje prozora stabilnosti sa povećanjem linearnog sprezanja između rešetki a da će brzina zatvaranja zavistiti od toga da li je sajt preko koga je ostvarena veza između rešetki bio prazan ili ekscitovan. Kod tri tipa vrtložnih kompleksa primećeno je, nakon zatvaranja prozora stabilnosti, otvaranje novog prozora stabilnosti. Pretpostavlja se da je uzrok tome njihova fazna struktura koja dovodi do oscilacija između susednih sajtova koje nisu u fazi. Narušenje simetrije je potvrđeno direktnim simulacijama u dugom vremenskom intervalu i javlja se zajedno sa gubitkom stabilnosti.

Glavni rezultati izloženi u ovoj tezi daju doprinos boljem razumevanju osobina moda lokalizovanih na defektima ili mestima sprezanja dve ili više nelinearnih rešetki. Mogućnost eksperimentalne realizacije ovakvih sistema, kako sa svetlošću u spregnutim fotonskim rešetkama, tako i sa talasima materije u optičkim rešetkama, realizovanim u Boze-Ajnštajn kondenzatima, doprinosi atraktivnosti razmatranih problema. Potencijalna mogućnost praktične primene ovakvih sistema u delovima savremenih optoelektronskih uređaja ili računara baziranih na optičkim elementima čini ih zanimljivim i sa tehnološkog stanovišta. Originalan doprinos ove disertacije je dat kroz analizu površinskih solitonskih kompleksa u sistemu tri spregnute polubeskonačne identične rešetke i kompleksa vrtloga u sistemima dve spregnute dvodimenzione rešetke. Dobijeni rezultati su objavljeni u referencama [71] i [79].

Dodatak

Viljuškasta bifurkacija

U ovom poglavlju biće reči o fenomenu bifurkacija. U tu svrhu posmatrano je dinamičko ponašanje jednog sistema. Ovde se reč sistem koristi u dinamičkom smislu a ne u klasičnom, gde sistem predstavlja skup dva ili više tela. Iz tog razloga i jedna jednačina može predstavljati sistem. Ukoliko u nekom sistemu figuriše određen broj parametara i ukoliko se s promenom vrednosti tih parametara dešavaju i kvalitativne promene u sistemu te kvalitativne promene nazivaju se bifurkacijama a vrednosti parametara na kojima se one dešavaju bifurkacionim tačkama.

Postoji više tipova bifurkacija, neke od njih su sedlasta, transkrična i viljuškasta bifurkacija [85].

Posebna pažnja biće posvećena viljuškastim bifurkacijama s osvrtom na superkritičnu viljuškastu bifurkaciju i subkritičnu viljuškastu bifurkaciju.

Dinamičko ponašanje sistema predstavlja se diferencijalnim jednačinama i one opisuju evoluciju sistema tokom vremena:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

gde je $\dot{x}_i \equiv dx_i / dt$, dok varijable x_1, \dots, x_n , mogu predstavljati koncentracije nekih jedinjenja u reaktoru, populacije različitih vrsta u datom ekosistemu, položaj planeta u Sunčevom sistemu itd., dok su funkcije f_1, \dots, f_n određene konkretnim modelom sistema koji se posmatra. Na primer, u slučaju matematičkog klatna, kretanje klatna određeno je diferencijalnom jednačinom drugog reda, oblika

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (\text{D.2})$$

(gde je x ugao otklona klatna u odnosu na ravnotežni položaj, g je intenzitet ubrzanja Zemljine teže, a L je dužina klatna), ova diferencijalna jednačina se smenama, $x_1 = x$ i $x_2 = \dot{x}$ tj. $\dot{x}_1 = x_2$, može predstaviti kao sistem dve obične diferencijalne jednačine prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Ovakav prilaz omogućava opisivanje evolucije sistema bez rešavanja diferencijalnih jednačina kroz analizu odgovarajućih faznih trajektorija (linija i površi u 4D faznom prostoru $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$).

Postoji mnogo fizičkih problema s prostornim simetrijama. U tim slučajevima bifurkacione tačke teže da se pojave ili da nestanu istovremeno tj. u paru. Pomenuti sistemi se u slučaju promene parametara sistema obično karakterišu viljuškastim bifurkacijama.

- **Superkritična viljuškasta bifurkacija**

Ukoliko promenom parametra sistema, za jednu vrednost parametra dolazi do istovremene pojave (ili obrnuto, nestajanja) dveju stabilnih fiksnih tačaka, kao i promene stabilnosti jedne fiksne tačke iz stabilne u nestabilnu (ili obrnuto), tada u tom sistemu dolazi do pojave superkritične viljuškaste bifurkacije. Normalni oblik diferencijalne jednačine koja modeluje ponašanje sistema u okolini bifurkacione tačke je:

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (\text{D.4})$$

gde je r parametar sistema koji se može varirati.

Primećuje se da je jednačina invarijantna na promenu varijable $x \rightarrow -x$. Ova činjenica je posledica prostorne simetrije datog sistema.

Slike D.1-D.3 predstavljaju vektorsko polje za različite vrednosti parametara r . U cilju slikovitog pojašnjenja vektorskog polja, može se zamisliti fluid koji teče ravnomerno duž x ose brzinom koja se menja od mesta do mesta, prema jednačini (D.4). Parametar r u jednačini (D.4) može biti pozitivan, negativan ili nula. U zavisnosti od njegove vrednosti sistem će imati kvalitativno drugačije ponašanje, tj. fluid će imati drugačiji tok. Jednačina (D.4) ima tri nule (ravnoteže, fiksne tačke): $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{r}$. Ukoliko je parametar r pozitivan, funkcija $f(x) = \dot{x} = rx - x^3$ ima jedan maksimum i jedan minimum, i njen grafik zajedno sa tokom fluida je predstavljen na slici D.1. Tok fluida će ići na desno kada je $\dot{x} > 0$, a na levo kada je $\dot{x} < 0$. U tački $\dot{x} = 0$ nema toka, tačke $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{r}$ nazivaju se fiksne tačke i njihova stabilnost se određuje na osnovu toga da li tok uvire ili izvire iz fiksne tačke. U konkretnom slučaju, za pozitivne vrednosti parametra r , može se videti da postoje dve stabilne fiksne tačke, $x_{2,3} = \pm\sqrt{r}$ (tok ide ka njima), na slici D.1 označene crnom bojom i jedna nestabilna fiksna tačka $x_1 = 0$ (tok se udaljava od nje) koja je označena crvenom bojom. Na slici D.2 predstavljen je grafik funkcije zajedno s tokom fluida za negativne vrednosti parametara r . Može se videti da postoji samo jedna fiksna tačka i ona je stabilna. Na slici D.3 predstavljen je grafik funkcije zajedno s tokom vektorskog polja za vrednost parametra $r = 0$ na kome se vidi da postoji samo jedna stabilna fiksna tačka.

Za određivanje stabilnosti fiksnih tačaka primenjuje se linearna analiza stabilnosti. Neka je x_0 fiksna tačka čiju stabilnost treba odrediti, u tu svrhu potrebno je fiksnoj tački

(ravnotežnom rešenju posmatranog sistema) dodati malu perturbaciju i posmatrati kako se sistem ponaša tokom vremena u okolini fiksne tačke. Ukoliko perturbacija raste u vremenu ravnoteža (fiksna tačka) je nestabilna u suprotnom je stabilna.

Rešenje kome je dodata perturbacija ima oblik:

$$x = x_0 + \delta x, \quad (\text{D.5})$$

gde je δx mala perturbacija. Smenom rešenja (D.5) u jednačinu (D.4) dobija se, nakon linearizacije po malim perturbacijama (zadržavaju se samo članovi linearni po perturbacijama), sledeća diferencijalna jednačina:

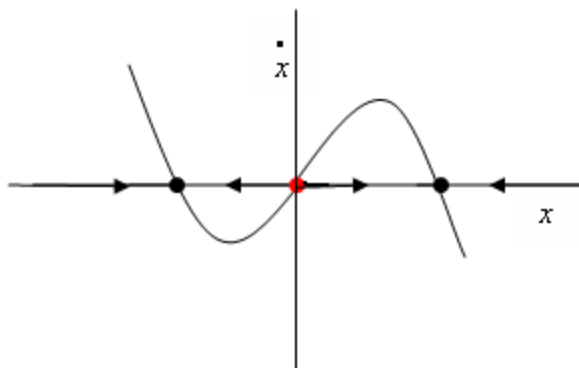
$$\delta \dot{x} = (r - 3x_0^2) \delta x. \quad (\text{D.6})$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (D.6) dolazi se do sledećeg izraza za ponašanje perturbacije u vremenu:

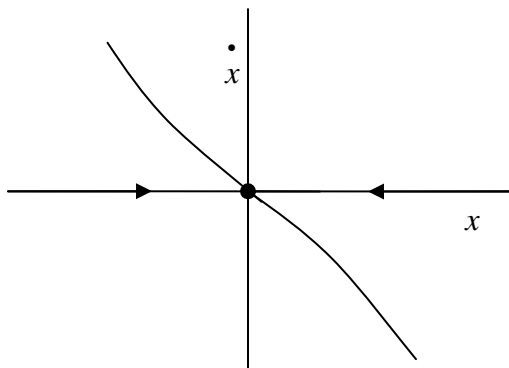
$$\delta x = \delta x_0 e^{(r-3x_0^2)t}, \quad (\text{D.7})$$

gde je δx_0 početna vrednost perturbacije (mala konstantna vrednost).

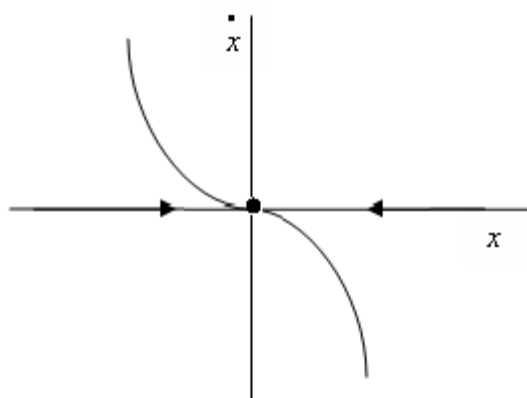
Na osnovu relacije (D.7) može se zaključiti da je jedina fiksna tačka, $x_0 = 0$, za vrednosti parametara $r = 0$, stabilna (pošto perturbacija ne raste u vremenu). Fiksna tačka, $x_0 = 0$, za vrednosti parametra $r > 0$ je nestabilna (perturbacija raste u vremenu), dok su fiksne tačke $x_0 = \pm\sqrt{r}$ stabilne. Jedina fiksna tačka, $x_0 = 0$, za vrednosti parametra $r < 0$ je stabilna, slike D.1-D.3.



Slika D.1 Vektorsko polje za vrednosti parametra $r > 0$.

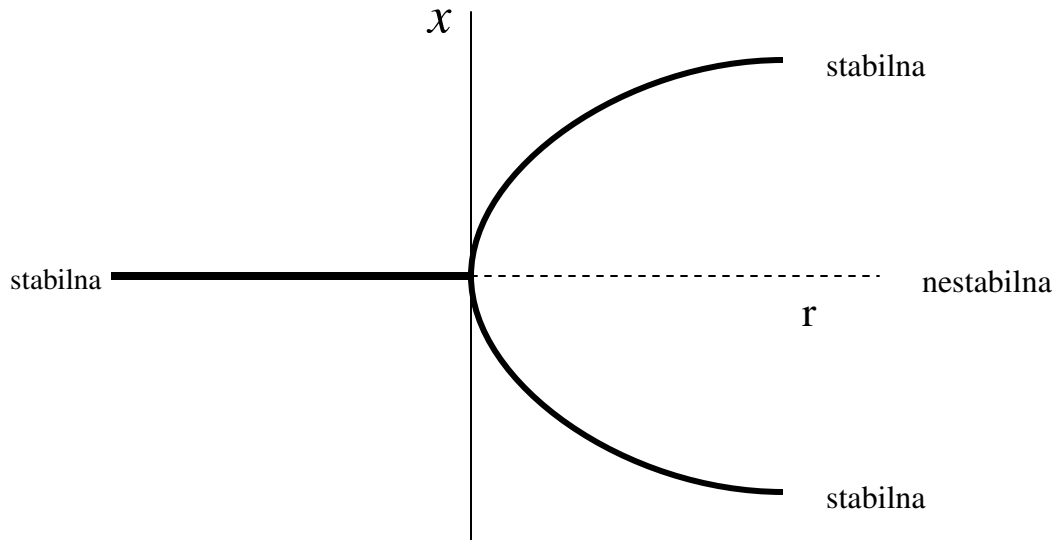


Slika D.2 Vektorsko polje za vrednosti parametra $r < 0$.



Slika D.3 Vektorsko polje za vrednosti parametra $r = 0$.

Rezultati dobijeni na osnovu predhodne analize sumirani su i predstavljeni u parametarskom prostoru (x, r) na slici D.4. Sa slike se može videti da jedna stabilna grana fiksnih tačaka na određenoj vrednosti parametra r (bifurkaciona tačka) menja svoju stabilnost i nastaju dve stabilne grane i jedna nestabilna grana.



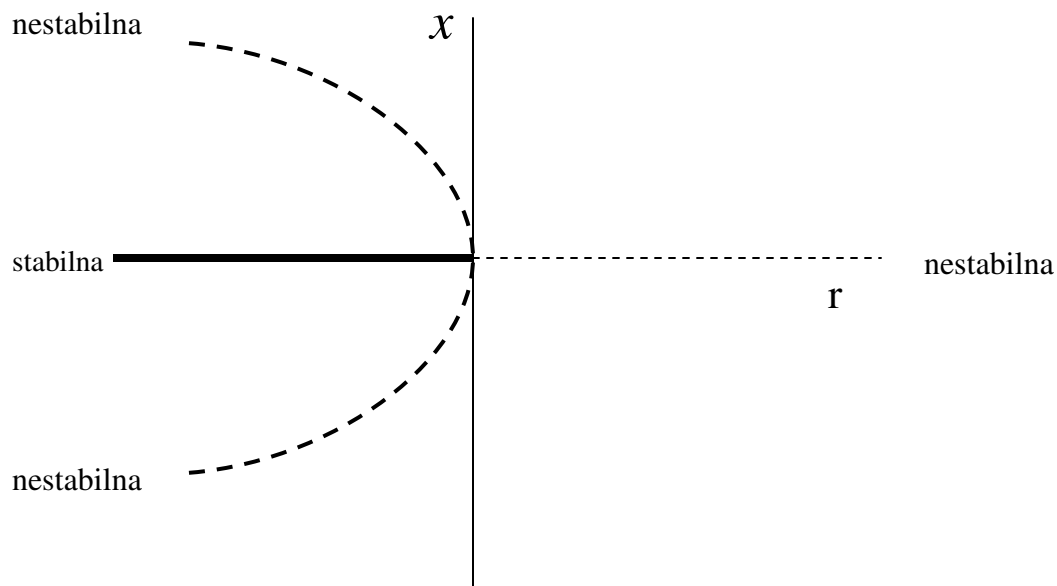
Slika D.4 Bifurkacioni dijagram – superkritična viljuškasta bifurkacija.

- **Subkritična viljuškasta bifurkacija**

Ukoliko promenom parametra sistema, dolazi do istovremene pojave (ili nestajanja) grana nestabilnih fiksnih tačaka kao i menjanje stabilnosti jedne fiksne tačke iz nestabilne u stabilnu, tada u tom sistemu dolazi do pojave superkritične viljuškaste bifurkacije. Normalni oblik diferencijalne jednačine koja modeluje pomenuti sistem u okolini fiksne tačke je:

$$\dot{x} = rx + x^3. \quad (\text{D.8})$$

U poređenju sa slikom D.4 u slučaju superkritične bifurkacije, slika D.5, koja se odnosi na subkritičnu viljuškastu bifurkaciju je obrnuta.



Slika D.5 Bifurkacioni dijagram – subkritična viljuškasta bifurkacija.

Nenulte fiksne tačke $x = \pm\sqrt{-r}$ su nestabilne i postoje tek ispod bifurkacione tačke $r < 0$ što i implicira naziv "subkritična" bifurkacija. Takođe, postoji grana koja je stabilna za $r < 0$ i nestabilna za $r > 0$.

VI Literatura

- [1] I. E. Tamm, “Possible type of electron binding on crystal surface”, *Z. Phys.* 76 (1932) 849.
- [2] K. G. Makris, S. Suntsov, D. N. Cristodoulides, G. I. Stegeman, and A. Hache, “Discrete surface solitons”, *Opt. Lett.* 30 (2005) 2466.
- [3] S. Suntsov, K. G. Markis, D. N. Cristodoulides, G. I. Stegeman, A. Hache, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, and M. Soral, “Observation of Discrete Surface Solitons”, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 063901.
- [4] F. W. Ye, Y. V. Kartashov, and L. Torner, “Asymmetric matter-wave solitons at nonlinear interfaces”, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 063616.
- [5] F. K. Abdullaev, R. M. Galimzyanov, M. Brtko, and L. Tomio, “Soliton dynamics at an interface between a uniform medium and a nonlinear optical lattice”, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 056220.
- [6] S. L. Cornish, N. G. Parker, A. M. Martin, T. E. Judd, R. G. Scott, T. M. Fromhold, and C. S. Adams, “Quantum reflection of bright matter-wave solitons”, *Physica D* 238 (2009) 1299.
- [7] Y. V. Bludov, Z. Y. Yan, and V. V. Konotop, “Dynamics of inhomogeneous condensates in contact with a surface”, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 063610.
- [8] M. Molina, R. Vicencio, and Yu. S. Kivshar, “Discrete solitons and nonlinear surface modes in semi-infinite waveguide arrays”, *Opt. Lett.* 31 (2006) 1693.
- [9] Y. V. Kartashov, and L. Torner, “Multipole-mode surface solitons”, *Opt. Lett.* 31 (2006) 2172.
- [10] I. L. Garanovich, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, and M. Molina, “Surface multi-gap vector solitons”, *Opt. Express* 14 (2006) 4780.
- [11] X. D. Cao, and B. A. Malomed, “Soliton-defect collisions in the nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Lett. A* 206 (1995) 177.
- [12] W. Królikowski, and Yu. S. Kivshar, “Soliton-based optical switching in waveguide arrays”, *J. Opt. Soc. Amer. B* 13 (1996) 876.
- [13] Q. E. Hoq, R. Carretero-González, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, D. J. Frantzeskakis, Yu. V. Bludov, and V. V. Konotop, “Surface solitons in three dimensions”, *Phys. Rev. E* 78 (2008) 036605.

- [14] U. Peschel, R. Morandotti, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, “Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays”, *Appl. Phys. Lett.* 75 (1999) 1348.
- [15] R. Morandotti, H. S. Eisenberg, D. Mandelik, Y. Silberberg, D. Modotto, M. Sorel, C. R. Stonley, and J. S. Aitchinson, “Interactions of discrete solitons with structural defect”, *Opt. Lett.* 28 (2003) 834.
- [16] J. C. Eilbeck, D. S. Lomdahl, and A. C. Scott, “The discrete self-trapping equation”, *Physica D* 16 (1985) 318.
- [17] E. M. Wright, G. I. Stegeman, and S. Wabnitz, “Solitary-wave decay and symmetry breaking instabilities in two-mode fibers”, *Phys. Rev. A* 40 (1989) 4455.
- [18] C. Elachi, and C. Yeh, “Periodic structures in integrated optics”, *J. Appl. Phys.* 44 (1973) 3146.
- [19] R. H. Goodman, R. E. Slusher, and M. I. Weinstein, “Stopping light on a defect”, *J. Opt. Soc. Amer. B* 19 (2002) 1635.
- [20] W. C. K. Mak, B. A. Malomed, and P. L. Chu, “Interaction of a soliton with a local defect in a fiber Bragg grating”, *Opt. Lett.* 28 (2003) 725.
- [21] H. Susanto, G. Kevrekidis, B. A. Malomed, R. Corretero-González, and D. J. Frantzeskakis, “Discrete surface solitons in two dimensions”, *Phys. Rev. E* 75 (2007) 056605.
- [22] Yu. S. Kivshar, and M. I. Molina, “Nonlinear surface modes and Tamm states in periodic photonic structures”, *Wave motion* 45 (2007) 59.
- [23] M. I. Molina, and Yu. S. Kivshar, “Spatially localized modes in two-dimensional chirped photonic lattices”, *Opt. Lett.* 33 (2008) 917.
- [24] F. Fedele, J. K. Yang, and Z. G. Chen, “Defect modes in one-dimensional photonic lattices”, *Opt. Lett.* 30 (2005) 1506.
- [25] I. Makasyuk, Z. G. Chen, and J. K. Yang, “Band-Gap Guidance in Optically Induced Photonic Lattices with a Negative Defect”, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 223903.
- [26] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, “Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices”, *Nature* 446 (2007) 52.
- [27] D. N. Christodoulides, F. Lederer, and Y. Silberberg, “Discretizing light behavior in linear and nonlinear waveguide lattices”, *Nature* 424 (2003) 817.

- [28] A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, "Spatial optical solitons in waveguide arrays", *IEEE J. Quantum Electron* 39 (2003) 31.
- [29] G. I. A. Stegeman, D. N. Christodoulides, and M. Segev, "Optical spatial solitons: historical perspectives", *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron* 6 (2000) 1419.
- [30] http://www.thelivingmoon.com/41pegasus/02files/Photonic_crystals_01.html.
- [31] P. Yeh, and A. Yariv, "Bragg reflection waveguides", *Opt. Commun* 19 (1976) 427.
- [32] Y. Fink, J. N. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. D. Joannopoulos, and E. L. Thomas, "A dielectric omnidirectional reflector", *Science* 282 (1998) 1679.
- [33] D. N. Neshev, A. A. Sukhorukov, W. Królikowski, and Yu. S. Kivshar, "Nonlinear optics and light localization in periodic photonic lattices", *J. Nonlinear Opt. Phys.* 16 (2007) 1.
- [34] J. A. Kong, "Theory of electromagnetic waves", New York, John Wiley&Sons Inc 1975.
- [35] E. Yablonovich, "Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics", *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 2059.
- [36] S. John, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices", *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 2486.
- [37] D. Joannopoulos, S. G. Johnson, and J. N. Winn, "Photonics Crystals", Princeton University Press, 2008.
- [38] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, "Discrete solitons in optics", *Physics Report* 463 (2008) 1-126.
- [39] Yu. S. Kivshar, and G. P. Agrawal, "Optical Solitons – From Fibers to Photonic Crystals", San Diego, Academic Press 2003.
- [40] F. Lederer, and Y. Silberberg, "Discrete Solitons", *Optics & Photonics News* (2002) 49-53.
- [41] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, "Studies in nonlinear problems", I, Los Alamos report 1940 (1955).
- [42] N. J. Zabusky, and M. Kruskal, "Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma the recurrence of initial states", *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240.

- [43] D. J. Korteweg, and J DeVries, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of stationary waves", *Phil. Mag.* 39 (1895) 422.
- [44] J. S. Russell, "On waves. Report of the committee on waves", *British Assoc. for the Adv. of Science, Seventh Report* (1837) 417-496.
- [45] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, "Method for solving the Korteweg-deVries equation", *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1095.
- [46] A. Trombettoni, and A. Smerzi, "Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 2353.
- [47] U. T. Schwartz, L. Q. English, and A. J. Sievers, "Experimental generation and observation of intrinsic localized modes in an antiferromagnet", *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 223.
- [48] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, "Discrete Breathers in Nonlinear Lattices: Experimental Detection in a Josephson Array", *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 741.
- [49] A. S. Davydov, "The theory of contraction of proteins under their excitation", *J. Theor. Biol.* 38 (1973) 559.
- [50] R. Morandotti, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, M. Sorel, and J. S. Aitchinson, "Self-Focusing and Defocusing in Waveguide Arrays", *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 3296.
- [51] W. Laedke, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, "Stability of Discrete Solitons and Quasicollapse to Intrinsically Localized Modes", *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 1055.
- [52] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays", *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3383.
- [53] D. N. Christodoulides, and R. I. Joseph, "Discrete self-focusing in nonlinear arrays of couple waveguides", *Opt. Lett.* 13 (1988) 794.
- [54] F. Chen, M. Stepić, C. E. Ruter, D. Runde, D. Kip, V. Shandarov, O. Manela, and M. Segev, "Discrete diffraction and spatial gap solitons in photovoltaic $LiNbO_3$ waveguide arrays", *Opt. Express*, 13 (2005) 4314.
- [55] A. Maluckov, M. Stepić, D. Kip, and Lj. Hadžievski, "Dynamics of bright discrete staggered solitons in photovoltaic photorefractive media", *Eur. Phys. J. B* 45 (2005) 539.

- [56] M. Stepić, A. Maluckov, M. Stojanović, F. Chen, and D. Kip, “Modulational instability and solitary waves in one dimensional lattices with intensity – resonant nonlinearity”, *Phys. Rev. A* 78 (2008) 043819.
- [57] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, “Self-trapping of optical beams”, *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964) 479.
- [58] Yu. S. Kivshar, and B. Luther-Davies, “Dark optical solitons: physics and applications”, *Phys. Rep.* 298 (1998) 81.
- [59] G. C. Valley, M. Segev, B. Crosignani, A. Yariv, M. M. Fejer, and M. C. Bashaw, “Dark and bright photovoltaic spatial solitons”, *Phys. Rev. A* 50 (1994) R4457.
- [60] G. A. Swartzlander, and C. T. Law, “Optical vortex solitons observed in Kerr nonlinear media”, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 2503.
- [61] L. P. Pitaevskii, “Vortex lines in an imperfect Bose gas”, *J. Exp. Theor. Phys.* 13 (1961) 451.
- [62] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Vortices in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 2498.
- [63] Y. Sivan, G. Fibich, B. Ilan, and M. I. Weinstein, “Qualitative and quantitative analysis of stability and instability dynamics of positive lattice solitons”, *Phys. Rev. E* 78 (2008) 046602.
- [64] Lj. Hadžievski, G. Gligorić, A. Maluckov, and B. A. Malomed, “Interface solitons in one – dimensional locally coupled lattice systems”, *Phys. Rev. A* 82 (2010) 033806.
- [65] P. G. Kevrekidis, “The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives”, Springer; Berlin and Heidelberg 2009.
- [66] E. W. Leadke, O. Kluth, and K. H. Spatschek, “Existence of solitary solutions in nonlinear chains”, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 4299.
- [67] M. Johansson, and S. Aubry, “Existence and stability of quasiperiodic breathers in the discrete nonlinear Schrödinger equation”, *Nonlinearity* 10 (1997) 1151.
- [68] S. Darmanyan and A. Kobayakov, and F. Lederer, “Stability of strongly localized excitations in discrete media with cubic nonlinearity”, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 113 (1998) 1253.

- [69] P. G. Kevrekidis, A. R. Bishop, and K. Ø. Rasmussen, “Twisted localized modes”, *Phys. Rev. E* 63 (2001) 036603.
- [70] A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar, “Spatial optical solitons in nonlinear photonic crystals”, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 036609.
- [71] M. Stojanović, A. Maluckov, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Surface solitons in trilete lattices“, *Physica D* 240 (2011) 1489.
- [72] G. Gligorić, A. Maluckov, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Soliton stability and collapse in the discrete nonpolynomial Schrödinger equation with dipole-dipole interactions“, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 053609.
- [73] G. Gligorić, A. Maluckov, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Bright solitons in the one – dimensional discrete Gross – Pitaevskii equation with dipole – dipole interactions“, *Phys. Rev. A* 78 (2008) 063615.
- [74] M. D. Petrović, G. Gligorić, A. Maluckov, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Interface solutions in locally linked two – dimensional lattices“, *Phys. Rev. E* 84 (2011) 026602.
- [75] Yu. S. Kivshar, and D. K. Campbell, “Peierls –Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes“, *Phys. Rev. E* 48 (1993) 3077.
- [76] A. Gubeskys, and B. A. Malomed, “Symmetric and asymmetric solitons in linearly coupled Bose – Einstein condensates trapped in optical lattices“, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 063602.
- [77] M. Matuszewski, B. A. Malomed, and M. Trippenbach, “Spontaneous symmetry breaking of solitons trapped in a double-channel potential“, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 063621.
- [78] A. Gubeskys, and B. A. Malomed, “Spontaneous soliton symmetry breaking in two-dimensional coupled Bose-Einstein condensates supported by optical lattices“, *Phys. Rev. A* 76 (2007) 043623.
- [79] M. Stojanović, M. D. Petrović, G. Gligorić, A. Maluckov, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Vortex complexes in 2D optical lattices linearly coupled at the single site”, will be published at *Physica Scripta*.
- [80] G. Gligorić, A. Maluckov, M. Stepić, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Two-dimensional discrete solitons in dipolar Bose-Einstein condensates“, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 013633.

- [81] P. G. Kevrekidis, K. Ø. Rasmussen, and A. R. Bishop, “Two – dimensional discrete breathers: Construction, stability and bifurcations“, Phys. Rev. E 61 (2000) 2006.
- [82] P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, Z. Chen, and D. J. Frantzeskakis, “Stable higher-order vortices and quasivortices in the discrete nonlinear Schrödinger equation“, Phys. Rev. E 70 (2004) 056612.
- [83] M. Öster, and M. Johansson, “Stable stationary and quasiperiodic discrete vortex breathers with topological charge $S=2$ “, Phys. Rev. E 73 (2006) 066608.
- [84] G. Gligorić, A. Maluckov, M. Stepić, Lj. Hadžievski, and B. A. Malomed, “Discrete vortex solitons in dipolar Bose-Einstein condensates“, Phys B: At. Mol. Opt. Phys. 43 (2010) 055303.
- [85] S. H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos”, With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering, Perseus Books Publishing, 2000.

