

Правила за спровођење пријемног испита за упис докторских академских студија из математике

Кандидати који нису завршили мастер академске студије из математике, а желе да упишу докторске академске студије из математике, у обавези су да положе пријемни испит из математике.

Полагање пријемног испита из математике састоји се у изради два теста са задацима из математике. Сваки тест садржи четири задатка. Кандидати на пријемном испиту имају на располагању четири сата за рад на сваком тесту. Предвиђено је да пријемни испит траје два дана.

Први тест садржи обавезне области из математике (четири задатка).

Други тест садржи изборне области математике (четири задатка). Кандидат је у обавези да изабере две од понуђених области за полагање пријемног испита. Кандидат наводи које области бира за полагање пријемног испита у писаној форми, и то у моменту пријављивања на конкурс за упис докторских студија.

Обавезне области:

Математичка анализа (2 задатка)

Низови реалних бројева
Граничне вредности функција
Непрекидност функција
Извод функције
Испитивање функција

Неодређени интеграли
Одређени интеграли
Редови

Граничне вредности и непрекидност функција више променљивих
Диференцијабилност функција
Екстремне вредности функција више променљивих

Вишеструки интеграли
Вишеструки несвојствени интеграли
Криволинијски и површински интеграли првог и другог реда
Формуле Грина, Гауса-Остроградског и Стокса
Интегрални зависни од параметра

Алгебра (2 задатка)

Векторски простори: базе, хомоморфизми, количнички простори
Матрице и детерминанте. Системи линеарних једначина
Еуклидски и унитарни простори: ортонормиране базе, углови између потпростора
Структура линеарних оператора: сопствене вредности, карактеристични полином, теорема Кели-Хамилтона

Групоиди и плугрупе, хомоморфизми, директни производи, конгруенције.

Групе: подгрупе, ред елемента, хомоморфизми, нормалне подгрупе, конгруенције, цикличне групе. Групе пермутација, Теореме Силова. Дејство групе на скуп. Теорема Кошија. $n!$ Теорема. p -групе. Теореме Силова.

Унутрашњи директни производи подгрупа. Независне нормалне подгрупе једне групе. Унутрашњи директни производи. Неразложиве групе. Директни зборови. Коначно генерисане комутативне групе.

Директни зборови цикличних подгрупа. Коначно генерисане комутативне групе. Коначне комутативне p -групе. Коначне комутативне групе. Конгруенције на групи и количничке групе. Коначне групе малог реда.

Решиве и nilпотентне групе. Нормални низови. Комутатори. Решиве групе. Централни низови и nilпотентне групе. S_n и A_n .

Прстени: Основне дефиниције и особине. Потпрстени. Хомоморфизми и конгруенције. Идеали. Количнички прстени. Једноставни прстени. Идеали, конгруенције. Максимални идеали. Теореме о изоморфизму.

Карактеристика прстена. Поље количика интегралног домена. Еуклидски прстени и прстени главних идеала. Прстени полинома.

Поља: Алгебарска проширења. Алгебарски елементи. Алгебарска проширења. Поља разлагања полинома.

Поља комплетног разлагања полинома. Алгебарски затворена поља. Коначна поља. Егзистенција и једнозначност. Мултипликативна група коначног поља. Полиноми над коначним пољима. Неки типови алгебарских проширења. Вишеструки корени полинома. Перфектна поља. Сепарабилна проширења. Проста проширења. Нормална проширења. Проширења Галуа. Елементи теорије Галуа. Основна теорема теорије Галуа. Основна теорема алгебре. Решавање једнаћина кореновањем.

Изборне области:

Геометрија (2 задатка)

Конструкције троуглова у равни

Изометријске трансформације

Криве и површи другог реда

Аксиоме еуклидске геометрије, Аксиоме геометрије Лобачевског

Криве у простору E_3 : природни триедар, флексија и торзија, Френеове формуле, додири двеју кривих, оскулаторна кружница просторне криве, тангентана површ, инволута и еволута криве

Површи у простору: Тангентна раван и нормала површи, прва и друга квадратна форма површи, кривина криве на површи, Менијева теорема, Дипенова индикатриса, главни правци, Ојлерова формула, Гаусова кривина

Праволинијске и развојне површи: стрикциона тачка, стрикциона линија, асимптотска раван, развојна површ као површ нулте Гаусове кривине.

Унутрашња геометрија површи: Гаусова једначина за површ, Деривационе формуле прве и друге врсте, Петерсон-Кодацијеве једначине, Егзистенција и једниственост површи са датом првом и другом квадратном формом. Геодезијска кривина криве на површи, геодезијске линије, Лиувилова теорема, интегрална кривина, Гаус-Бонеова теорема, површи констатне Гаусове кривине.

Функционална анализа (2 задатка)

Банахови простори: ограничени линеарни оператори, кооличнички простори, сепарабилни простори, компактни оператори

Хилбертови простори: ортогоналност, теорема о елементу са најмањом нормом, теорема о ортогоналној декомпозицији, Рисова теорема о репрезентацији функционала, Хилберт адјунговани оператор, Хилбертова база.

Теореме Хана-Банаха, Банаха-Штајнхауса, о отвореном пресликаваљу, о затвореном графику, и примене.

Хермитски, нормални, унитарни и позитивни оператори. Квадратни корен позитивног оператора. Пројектори и ортогонални пројектори. Парцијална изометрија. Поларна декомпозиција оператора. Хермитски оператор као разлика два позитивна оператора.

Адјунговани оператор на Банаховом простору. Оператори са затвореном сликом

Вероватноћа и стохастички процеси (2 задатка)

Елементарна теорија вероватноће: Алгебра догађаја, вероватноћа, условна вероватноћа, независност догађаја. Случајне променљиве, математичко очекивање, дисперзија и коефицијент корелације. Независност случајних променљивих. Бернулијева схема, Пуасонова и Муавр-Лапласова теорема.

Математичке основе теорије вероватноће: Аксиоме теорије вероватноће. Дискретне расподеле (униформна, биномна, мултиномна, Пуасонова, геометријска, хипергеометријска, негативна биномна). Апсолутно непрекидне расподеле (униформна, нормална, Кошијева, експоненцијална, гама, бета). Функција расподеле и густина. Вишедимензионе случајне променљиве. Низови независних случајних променљивих: Борел-Кантелијеве леме. Закон 0-1. Конвергенција редова. Закони великих бројева. Централна гранична теорема.

Дефиниција стохастичког процеса. Простор трајекторија и простор коначно-димензионалних функција расподела, теорема Колмогорова. Стохастичка еквивалентност, сепарабилност, мерљивост. Врсте непрекодности стохастичког процеса.

Основне класе стохастичких процеса. Гаусови процеси. Процеси са независним прираштајима. Процеси са коначним моментима другог реда. Стационарни процеси и низови, строга и слаба стационарност. Спектрална репрезентација корелационе функције, теорема Бохнера-Хинчина, теорема Херглоца.

Процеси Маркова . Ланци Маркова. Једначине Чепмен-Колмогорова. Повратна и неповратна стања. Ергодичност ланаца Маркова. Еквивалентне дефиниције процеса Маркова. Хомогени процеси Маркова са

пребројиво много стања. Расподела времена задржавања у одређеном стању. Ергодичност. Директне и обрнуте диференцијалне једначине Колмогорова. Пуасонов процес као процес Маркова.

Процес Брауновог кретања. Дефиниција и веза са стохастичким лутањем. Особине трајекторија. Мартингалност и стохастички експонент. Брауново кретање и Гаусов бели шум. Визуелизација на рачунару трајекторија Брауновог кретања.

Математичка статистика (2 задатка)

Теорија узорка

Основни појмови. Појам случајног броја. Случајни избори без и са враћањем. Неки специјални планови узорка. Емпиријска функција расподеле. Сређивање и приказивање реализованих узорка. Моделирање расподела методом Монте Карло.

Оцењивање параметара

Тачкасто оцењивање. Одређивање обима узорка. Довољне статистике. Регуларна фамилија густина расподеле. Методи тачкастог оцењивања параметара (метод максималне веродостојности, метод момената). Такасте оцене за математичко очекивање и дисперзију. Статистике поретка. Тачкасте оцена за квантиле. Тачкасте оцене мода, коефицијента асиметрије, коефицијента спљоштености, коефицијента ексцеса (ексцесне спљоштености). Тачкаста оцена коефицијента корелације – Пирсонов коефицијент корелације. Области поверења. Интервали поверења за параметре нормалне расподеле. Непараметарски интервали поверења за квантиле.

Тестирање статистичких хипотеза

Основни појмови. Теорема Нејман - Пирсона, униформно најмоћнији тест, тест количника веродостојности. Параметарски тестови за параметре нормалне расподеле. Непараметарски тестови (тест Колмогоров-Смирнова, χ^2 тест, тест знакова, тест корака, тест рангова).

Диференцијалне једначине (2 задатка)

Диференцијалне једначине првог реда. Основни појмови (решење, опште решење, партикуларно и сингуларно решење, Кошијев проблем, интеграл ДЈ и општи интеграл ДЈ); Геометријска интерпретација решења; Интеграбилне диференцијалне једначине у нормалном облику - хомогена ДЈ, ДЈ која раздваја приоменљиве, линеарна ДЈ, Бернулијева ДЈ, ДЈ са тоталним диференцијалом и интеграциони фактор; Егзистенција и јединственост решења – Пикарова теорема; Диференцијалне једначине у имплицитном облику; Сингуларно решење; Интеграбилне диференцијалне једначине у имплицитном облику

Диференцијалне једначине вишег реда. Неки интеграбилни типови нелинеарних ДЈ; Фундаментални систем решења линеарних диференцијалних једначина; Линеарне диференцијалне једначине са констанним коефицијентима; Снижавање реда линеарних диференцијалних једначина; Нехомогена линеарна диференцијална једначина; Линеарна диференцијална једначина другог реда.

Нормални системи ДЈ. Егзистенција и јединственост решења. Интеграл нормалног система диференцијалних једначина. Системи диференцијалних једначина у симетричном облику

Линеарни системи ДЈ. Фундамантални систем решења. Матрично решавање линеарних система диференцијалних једначина. Експонент матрице линеарних система диференцијалних једначина. Линеарни систем дј са константним коефицијентима - Ојлеров метод, матрично решавање

Динамички системи ДЈ и стабилност решења. Фазни портрет линеарних система диференцијалних једначина у равни. Линеаризација и Хартманова теорема. Гранични цикл динамичког система у равни. Основне дефиниције теорије стабилности по Љапунову. Теорија Љапунова

ПДЈ ПРВОГ РЕДА: Уводни појмови. Хомогена линеарна ПДЈ првог реда. Квазилинеарна ПДЈ првог реда. Пфафова диференцијална једначина. Општа ПДЈ првог реда. Лагранжова класификација интеграла.

Топологија (2 задатка)

Тополошки простор. Тополошки простори и примери. Начини топологизирања скупова. Метрички простори. Тежина и карактер простора. Операције над скуповима у тополошком простору (затворење, унутрашњост, граница). Густина и тесноћа. Непрекидна пресликавања. Отворена, затворена и факторна пресликавања. Хомеоморфизми.

Конвергенција. Конвергенција уопштених низова. Секвенцијални (и сродни) простори. Комплетност метричких простора. Теорема о фиксној тачки. Комплетирање метричких простора. Операције над тополошким просторима. Подпростор. Производ простора и пресликавања. Производ метричких простора. Мултипликативна својства. Густина производа. Количник простор. Хиперпростори. Простори функција.

Аксиоме сепарације. T_0 , T_1 , T_2 простори. Псеудокарактер T_1 простора. Регуларни простори. Метризација регуларних простора. Потпуно регуларни простори. Нормални простори. Велика Урисонова лема и Тиетзова теорема екстензије. Савршено нормални простори.

Компактност. Дефиниција компактности и карактеризације. Нормалност и друга својста компакта. Кардиналност првих пребројивих компаката. Пребројива, секвенцијална и локална компактност. Компактност у метричким просторима. Компактификација. Особине Стоне-Чецовске компактификације. Савршена пресликавања. Особине сличне компактности.

Повезаност и димензија. Повезаност простора. Компоненте и квазикомпоненте. Локална и путна повезаност. Разни типови повезаности производа. Монотона пресликавања. Нулдимензионални простори. Разне врсте димензионих функција. Димензија еуклидских простора.

Униформни простори. Појам униформног простора и топологизирање. Униформна непрекидност. Метризабилност униформног простора. Тополошке групе као униформни простори.

Простори функција. Топологизирање простора функција. Основне особине простора $C_p(X)$.

Тежина, карактер и мрежна тежина простора $C_p(X)$. Тесноћа простора $C_p(X)$. Лепезаста и јака лепезаста тесноћа простора $C_p(X)$.

Реална и комплексна анализа (2 задатка)

Мера: Лебегова и Лебег-Стилтјесова мера

Интеграл: теореме о монотonoј и доминантној конвергенцији, Фатуова лема, Лебегов интеграл

Холоморфне функције: Интеграција по кривој, Кошијева теорема и формула, теорема Морере, Тејлоров ред

Иzolовани сингуларитети: Лоранов ред, теорема о остацима

Геометријска својства: принцип аргумента, Рушеова теорема, принцип очувања области, принцип максимума модула, лема Шварца

Конформна пресликавања

Аналитичка продружења

Хармонијске функције