

Стари Вавилонци и њихова математика

Предраг В. Кртолица

Вавилонска цивилизација цветала је у долинама река Тигар и Еуфрат у Месопотамији (што и значи *међуречје*). Данас се ова територија налази у Ираку (види слику 1).



Сл. 1. Подручје месопотамије.

На том простору заснована је најпре, око 3500 година п.н.е., сумерска цивилизација. Њих су после 1000 година освојили Акађани. Сумери су имали сложен систем за наводњавање, систем државне администрације и фискални систем. Такође су развили и поштански систем. Акађани су им донели средство за рачунање – *абакус*.

Отприлике 2000 година п.н.е. Вавилонци су освојили Месопотамију и своју престоницу сместили у град Вавилон. Сумери су већ имали развијено *клинасто писмо*. Наиме, симболи у облику клинова су се помоћу тршчаног пера утискивали на таблице од влажне глине које су потом печене на сунцу.

Многе од тих таблица су се очувале до данашњих дана (тако и знамо за све ово о чему је реч). Стари Вавилонци су наследили клинасто писмо па су и они оставили многе глинене плочице које су сачуване до данас.

Појава првих математичких знања може се сместити у трећи миленијум п.н.е. Једна од најпознатијих вавилонских таблица је тзв. Плимптон 322 (види слику 2). Ради се о табlici сачињеној око 1800 година п.н.е. а име носи по томе што ју је извесни Плимптон донирао универзитету Колумбија током тридесетих година XX века. Аутор саме таблице није познат.

Са слике 2 можемо уочити да се запис састоји од три колоне. Као што ћемо касније видети, ради се о запису низа бројева који представљају Питагорине бројеве, тј. тројке бројева (a, b, c) за које важи $a^2 + b^2 = c^2$!

Постоје два преовлађујућа тумачења ове таблице. По једном, ради се о најстаријем сачуваном научном раду из теорије бројева, док се по другом тумачењу ради о бележници која је коришћена за учење тројки Питагориних бројева.



Сл. 2. Таблица са тројкама Питагориних бројева.

Али, да би могли да прочитамо ову таблицу, рецимо нешто о бројном систему и начину записивања бројева код старих Вавилонца.

Сумери и Вавилонци су први народи који су развили писани бројни систем. Сумери су први записивали бројеве још пре 5000 година. Основа њиховог бројног система била је 60, тј. ради се о *сексагезималном* бројном систему. Међутим, ни Сумери ни Акађани нису развили *позициони* бројни систем. То су урадили тек Вавилонци, наслеђујући базу бројног система. Тај допринос старих Вавилонца је немерљив, јер се сматра да је проналазак позиционог бројног система можда и највеће достигнуће у математици уопште!

Вавилонци су иначе били напреднији у математици и астрономији од старих Египћана. Текстови сачувани из тог доба говоре да су Вавилонци делили круг на 360 степени, дан на 24 сата, сат на 60 минута и минуте на 60 секунди. Уствари, тај начин мерења су модерно друштво и наука преузели баш од њих!

Колико су Вавилонци били напредни говори и податак да су били у стању да предвиђају помрачења Сунца и Месеца а разумевали су и појмове као што су разломци, квадрати и квадратни корени.

Бројни систем Вавилонца почео је са знаком за јединицу, као што је то случај са већином античких бројних система. Обзиром на основу система 60, треба очекивати 60 различитих симбола за цифре, као што је то случај са нашим декадним системом који има основу 10 и 10 различитих цифара. Заиста, постоји 60 различитих симбола, али су сви они, уствари, састављени од само два симбола.

Било који број мањи од 10 био је састављен од симбола за јединицу који је имао облик клина усмереног на доле. Број 10 је симболизовао клин усмерен улево. Бројеви мањи од 60 били су комбинација ова два симбола.



Симболи за 1 и 10.

Примера ради, запис броја 18 имао би следећи облик



Није постојао симбол за нулу али је идеја броја нула постојала. Када би хтели да је изразе, Вавилонци би једноставно оставили празно место у запису броја. На слици 4 видимо свих 59 комбинација записа бројева 1-59.

1	↓	11	←↓	21	←←↓	31	←←←↓	41	←←←↓	51	←←←↓
2	↓↓	12	←↓↓	22	←←↓↓	32	←←←↓↓	42	←←←↓↓	52	←←←↓↓
3	↓↓↓	13	←↓↓↓	23	←←↓↓↓	33	←←←↓↓↓	43	←←←↓↓↓	53	←←←↓↓↓
4	▽	14	←▽	24	←←▽	34	←←←▽	44	←←←▽	54	←←←▽
5	▽↓	15	←▽↓	25	←←▽↓	35	←←←▽↓	45	←←←▽↓	55	←←←▽↓
6	▽↓	16	←▽↓	26	←←▽↓	36	←←←▽↓	46	←←←▽↓	56	←←←▽↓
7	▽↓	17	←▽↓	27	←←▽↓	37	←←←▽↓	47	←←←▽↓	57	←←←▽↓
8	▽↓	18	←▽↓	28	←←▽↓	38	←←←▽↓	48	←←←▽↓	58	←←←▽↓
9	▽↓	19	←▽↓	29	←←▽↓	39	←←←▽↓	49	←←←▽↓	59	←←←▽↓
10	←	20	←←	30	←←←	40	←←←	50	←←←		

Сл. 4. Запис свих вавилонских симбола за бројеве 1-59.

Како су записивани бројеви већи од 59? Као што смо већ рекли, коришћен је позициони бројни систем. Наш декадни систем је такође позициони што значи да од позиције цифре у оквиру записа броја зависи њена *тежина*. Тако је у декадном бројном систему

$$3726 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

Можда ће неко приметити да читање бројева слева надесно није баш практично, јер не можемо знати које тежине имају цифре са леве стране док не прочитамо читав број (или бар не пребројимо колико цифара има). Али, и ово је део вавилонског наслеђа – Вавилонци су бројеве записивали тако да је крајња десна позиција била позиција јединица.

Са основом 60 на уму и чињеницом да је

$$424000 = 1 \times 60^3 + 57 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40,$$

долазимо до тога да је вавилонски запис броја чија је вредност 424000 управо 1, 57, 46, 40 (зарези су употребљени да одвоје "вавилонска"



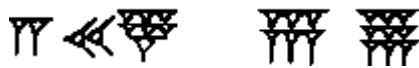
цифрарска места), односно

Размотримо неке могуће проблеме код оваквог начина записивања бројева као и њихова решења. Пре свега, да ли се разликују записи за број 2 и број 61 (1, 1 у вавилонском бројном систему)? Иако се у оба случаја ради од два симбола за јединицу, код броја 2 ови симболи ће се додиривати док ће код броја 61 они бити јасно размакнути.

Међутим, озбиљнији проблем је како разликовати бројеве 1 и 60 (1,0), обзиром да празан простор који представља нулу сада не може бити уочљив. У одређеном контексту разлика између ових бројева била би јаснија, али то у општем случају није тако. Ипак, Вавилонци су се некако сналазили у томе а доста касније су и увели посебан симбол за празан простор као решење овог проблема.

Празан простор унутар самог броја такође је представљао проблем, без обзира на то што се нула, тј. празнина јављала ређе него у нашем декадном систему (вероватноће су 1/60 и 1/10). На који се начин решавао проблем видимо из примера једне таблице која се чува у музеју Лувр у Паризу.

Ради се од израчунавању квадрата броја 147. У сексагезималном систему $147 = 2, 27$ а квадрат је $21609 = 6, 0, 9$.



Може се уочити да је писац оставио нешто више простора између симбола за 6 и 9 него што би то био случај у запису броја 6,9.

Проблем празнине код целих бројева је још израженији у случају разломака. Вавилонци су користили разломке у сексагезималном систему аналогно начину на који ми то чинимо у декадном систему. Рецимо, у декадном систему је

$$0.125 = 1/10 + 2/100 + 5/1000 = 1/8$$

Приметимо такође да разломак не можете приказати у облику децималног броја са коначним бројем децимала ако именилац има просте чиниоце осим 2 и 5 (тако је $1/3$ рационалан број али у децималном облику са бесконачно много децимала).

Слично овоме, Вавилонски сексагезимални разломак $0;7,30$ представља

$$7/60 + 30/3600$$

што такође има вредност $1/8$. Како 60 има за просте чиниоце 2, 3 и 5 то значи да већи број разломака може бити представљен коначним бројем цифара (сви којима именилац за просте чиниоце има само 2, 3, и 5). Неки историчари сматрају да је то један од разлога за увођење сексагезималног уместо децималног система.

Приметимо да смо употребили знак ';' уместо тачке основе. Тако, $10,12,5;1,52,30$ представља број

$$10 \times 60^2 + 12 \times 60 + 5 + 1/60 + 52/60^2 + 30/60^3$$

што је декадни број $36752 \frac{1}{32}$. Међутим, Вавилонци нису имали знак за тачку основе којим би назначили да престаје целобројни део броја а почиње његов разломљени део. То је знатно отежавало разликовање бројева са истим цифрама али различитом позицијом тачке основе.

На крају, запитајмо се зашто су Вавилонци користили систем са основом 60 уместо декадног система који се нама чини логичнијим и на који смо навикнути. Очигледан разлог је тај што су такав систем наследили од Сумера али се онда исто питање може поставити и за Сумере. Штавише, ово питање нису постављали само модерни математичари већ се тиме бавио и Теон из Александрије у IV веку.

Теон сматра да разлог лежи у томе што је 60 најмањи број дељив са 1, 2, 3, 4 и 5 те му је број делилаца максималан. Међутим, и 12 би могао да буде добар кандидат из сличних разлога али није уочена цивилизација која је развила бројни систем са основом 12. Додуше, у англосаксонском мерном систему 12 је чест број (једна стопа садржи 12 палаца и сл.).

Један од историчара математике, Нојгбауер, сматра да разлог лежи у тежинама и мерама које су Сумери користили и где су се трећине јављале као основни разломци. Иако то има основе, логичније би било да коришћени бројни систем има утицаја на мере а не обрнуто.

Постоји више теорија заснованих на астрономским догађајима. Једна је да је 60 број месеци у години помножен са бројем познатих планета у оно доба (Меркур, Венера, Марс, Јупитер и Сатурн). Неки сматрају да је

360 дана у години разлог за основу 60, мада су Вавилонци морали да знају да је година ипак нешто дужа. Опет, једна друга теорија каже да Сунце током дана пређе 720 својих пречника што уз трајање дана од 12 сати може да води ка броју 60.

Постоје и геометријске теорије. Наиме, једнакостранични троугао је код Сумера био основни геометријски градивни облик а код њега је сваки угао 60° . Када се тај угао подели са 10 добија се угао од 6° као основна угаона јединица. У кругу има 60 таквих угаоних јединица. Ови аргументи су помало контрадикторни, јер предвиђају дељење са 10 што је карактеристично за декадни систем.

Е. Робертсон сматра да се не може говорити о избору броја 60 за основу бројног система као о некој административној одлуци. То, уосталом, није случај ни код других система. Тако нешто постаје временом опште прихваћено. Основа 10 се у многим цивилизацијама природно намтенула обзиром на 10 прстију који су људима служили за рачунање. Тако Робертсон сматра да су Сумери могли да броје до 60 користећи две руке на основу тога што сваки од прстију (осим палца) има три чланка. Четири прста садрже 12 чланака. На сваки од 12 чланака може се показати једним од пет прстију друге руке што даје 60 комбинација.

Многи аутори прихватају могућност да је сумерска цивилизација настала стапањем два народа. Један народ је имао 12 за основу бројног система а други 5. Ради лакше комуникације и разумевања у трговини 60 се наметнуо као основа бројног система обзиром да је $НЗС(12,5)=60$ а што је олакшавало конверзију.

Има и сличних теорија које претпостављају мешавину народа који су користили системе са бројним основама 10 и 6. Ова теорија има доста основа, јер у Вавилонском бројном систему постоји јединична ознака за број 10 што се може сматрати заоставштином првобитног декадног система.

Али, тек неко будуће откриће писане потврде за неку од ових теорија може да да коначан одговор на дилему о пореклу сексагезималног система.

Адреса аутора:

Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу