Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.yu/mii
Matematika i informatika 1 (1-2) (2008), 15-28

Diferencne jednačine

Gospava B. Đorđević i Snežana S. Đorđević

U matematici je sve veća potreba za primenom diferencnih jednačina. Naime, diferencne jednačine se koriste u rešavanju različitih matematičkih zadataka i problema, kao što su: nalaženje opšteg člana numeričkog niza; određivanje vrednosti determinanata (višeg reda); određivanje n–tog ($n \in N$) stepena matrice; izračunavanje integrala.

Neka je $(a_n)_{n\in N}$ niz realnih (kompleksnih) brojeva, i neka je F funkcija $k+2$ arugmenta, gde je k prirodan broj. Jednačina

$$F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = 0 \tag{1}$$

je diferencna jednačina reda k.

Rešenje diferencne jednačine (1) je svaki niz (a_n) čijom zamenom u (1) ova postaje identitet.

Opšte rešenje jednačine (1) je ono rešenje koje sadrži sva njena rešenja.

Naglasimo da se samo neke diferencne jednačine mogu rešiti. Neke od takvih diferencnih jednačina navodimo u nastavku ovog izlaganja. Naš je cilj da pokažemo primenu diferencnih jednačina na određivanje: opšteg člana niza, vrednosti determinanata, n–tog stepena matrica.

1. Linearna diferencijalna jednačina reda k

Jednačina oblika

$$f_k(n)a_{n+k} + f_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \cdots + f_1(n)a_{n+1} + f_0 a_n = F(n), \tag{1.1}$$

je linearna diferencna jednačina reda k, pri čemu su koeficijenti $f_i(n)$, $i = 0, \dots, k$, funkcije od n, a $F(n)$ je slobodni član, takođe, funkcija od n. Ako je $F(n) = 0$, tada (1.1) postaje homogena linearna diferencna jednačina reda k.

Teorema 1. *Opšte rešenje jednačine (1.1) sadrži k konstanti.*

Dokaz. Pretpostavimo da se jednačina (1.1) može napisati u obliku

$$a_{n+k} = f(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}). \tag{1.2}$$

Za $n = 1, 2, \ldots$, redom, prema (1.2), sledi:

$$a_{k+1} = f(1, a_1, \ldots, a_k) = \varphi_0(a_1, \ldots, a_k),$$

gde su $a_1, \ldots, a_k$ proizvoljne konstante;

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= f(2, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}) \\ &= f(2, a_2, \ldots, a_k, f(1, a_1, \ldots, a_k)) \\ &= \varphi_1(a_1, \ldots, a_k). \end{aligned}$$

Zatim, za $n = 3$, sledi

$$\begin{aligned} a_{k+3} &= f(3, a_3, \ldots, a_{k+1}, a_{k+2}) \\ &= f(3, a_3, \ldots, \varphi_0(a_1, \ldots, a_k), \varphi_1(a_1, \ldots, a_k)) \\ &= \varphi_2(a_1, \ldots, a_k). \end{aligned}$$

Na taj način nalazimo da je

$$a_{k+m} = \varphi_{m-1}(a_1, \ldots, a_k).$$

Možemo reći da je upravo a_{k+m} opšte rešenje jednačine (1.2), gde su $a_1, \ldots, a_k$ prozvoljne konstante. $\square$

2. Linearna diferencna jednačina prvog reda

Jednačina oblika

$$a_{n+1} + f(n)a_n = g(n), \tag{2.1}$$

je diferencna jednačina prvog reda, pri čemu su kofeicijenti $f(n)$ i $g(n)$ funkcije od n, dok je a_n nepoznata.

Najpre rešavamo jednačine

$$(i) \quad a_{n+1} - a_n = g(n),$$

i

$$(ii) \quad a_{n+1} + f(n)a_n = 0.$$

Za $n = 1, 2, \ldots$, tim redom, u (i), slede jednakosti

$$\begin{aligned} &a_2 - a_1 = g(1) \\ &a_3 - a_2 = g(2) \\ &\vdots \\ &a_n - a_{n-1} = g(n-1). \end{aligned}$$

Sumiranjem ovih jednakosti nalazimo da je

$$a_n = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} g(j), \quad a_1 \text{ je prizvoljna konstanta,}$$

i a_n je opšte rešenje jednačine (i).

Ako je $a_1 \equiv C$, onda je

$$a_n = C + \sum_{j=1}^{n-1} g(j) \tag{2.2}$$

opšte rešenje jednačine (i).

Na isti način, za $n = 1, 2, \ldots$, tim redom, prema (ii), nalazimo:

$$\begin{aligned} &a_2 + f(1)a_1 = 0, \quad a_2 = -f(1)a_1, \\ &a_3 + f(2)a_2 = 0, \quad a_3 = (-1)^2 f(1)f(2)a_1, \\ &\vdots \\ &a_n + f(n-1)a_{n-1} = 0, \quad a_n = (-1)^{n-1} f(1)f(2)\ldots f(n-1)a_1. \end{aligned}$$

Dakle, opšte rešenje jednačine (ii) je

$$a_n = (-1)^{n-1} a_1 \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu),$$

odnosno

$$a_n = (-1)^{n-1} C \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu). \tag{2.3}$$

Neka je $a_n = u_n \cdot v_n$ rešenje diferencne jednačine (2.1), tada je

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}v_{n+1} + f(n)u_n v_n = g(n),\\
&u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_{n+1} + u_n v_{n+1} + f(n)u_n v_n = g(n),\\
&v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + u_n(v_{n+1} + f(n)v_n) = g(n).
\end{aligned}$$

Poslednja jednačina je neodređena, jer sadrži dve nepoznate, u_n i v_n. Jedno rešenje se može uzeti proizvoljno, recimo $v_{n+1} + f(n)v_n = 0$. Tada se ista jednačina razlaže na sistem diferencnih jednačina

$$\begin{aligned}
&v_{n+1} + f(n)v_n = 0\\
&v_{n+1}(u_{n+1} - u_n) = g(n).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Prva jednačina sistema (2.4) je upravo jednačina (ii), čije je rešenje (2.3)

$$v_n = (-1)^{n-1} C \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu).$$

Druga jednačina sistema (2.4) se može napisati u obliku

$$u_{n+1} - u_n = \frac{g(n)}{v_{n+1}},$$

odakle sledi

$$u_n = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g(i)}{v_{i+1}},$$

odnosno

$$u_n = D + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g(i)}{(-1)^i C \prod_{\nu=1}^{i} f(\nu)}.$$

Opšte rešenje diferencne jednačine (2.1) je

$$a_n = u_n \cdot v_n = (-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} f(\nu) \left(C_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g(i)}{(-1)^i \prod_{\nu=1}^{i} f(\nu)} \right),$$

gde je $(C_1 = C \cdot D)$.

Slede primeri diferencnih jednačina prvog reda.

1. Naći opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - a_n = d$, (d je proizvoljna konstanta).

Rešenje. Sumiranjem jednakosti

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= d \\
a_3 - a_2 &= d \\
&\vdots \\
a_n - a_1 &= d
\end{aligned}$$

nalazimo da je $a_n = C + (n-1)d$ opšte rešenje date jednačine.

Primetimo da je (a_n) aritmetički niz sa diferencijom d.

2. Naći rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - a_n = n$ ako je $a_1 = 1$.

Rešenje. Za $n = 1, 2, \ldots$, tim redom, slede jednakosti

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= 1 \\
a_3 - a_2 &= 2 \\
a_4 - a_3 &= 3 \\
&\vdots \\
a_n - a_{n-1} &= n - 1,
\end{aligned}$$

odakle, sumiranjem istih, dolazimo do rešenja $a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Rešiti diferencnu jednačinu $a_{n+1} - a_n = 2^n,$ ako je $a_1 = 2$.

Rešenje.

$$a_n - a_1 = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1},\ a_n = 2 + 2 \cdot \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 2^n.$$

4. Naći rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} - 2a_n = 0$ za $a_1 = 2$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1, \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 = 2^2 a_1, \\ a_4 &= 2 \cdot a_3 = 2^3 a_1, \\ &\vdots \\ a_n &= 2^{n-1} a_1 = 2^n. \end{aligned}$$

5. Rešiti diferencnu jednačinu $a_{n+1} + n a_n = 1$.

Rešenje. Ovo je potpuna diferencna jednačina prvog reda, data sa (2.1), gde je $f(n) = n$ i $g(n) = 1$. Opšte rešenje jednačine je

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \nu \left(C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^i \prod_{\nu=1}^{i} \nu} \right) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \left(C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(-1)^i \cdot i!} \right). \end{aligned}$$

3. Linearna diferencna jednačina reda k sa konstantnim koeficijentima

Ako su koeficijenti $f_k(n)$ u diferencnoj jednačini (1.1) konstante, onda je (1.1) linearna diferencna jednačina reda k sa konstantnim koeficijentima. Ako su koeficijenti označeni sa b_k, tada je

$$b_k a_{n+k} + b_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = F(n) \tag{3.1}$$

linearna diferencna jednačina reda k sa konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća homogena diferencna jednačina je

$$b_k a_{n+k} + b_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = 0. \tag{3.2}$$

Posebno razmatramo diferencnu jednačinu (3.1) za $k = 2$ i $k = 3$.

Neka je

$$b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = F(n) \tag{3.3}$$

diferencna jednačina reda dva sa konstantnim koeficijentima, a odgovarajuća homogena jednačina je

$$b_2 a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_0 a_n = 0. \tag{3.4}$$

Teorema 2. *Ako su a'_n i a''_n linearno nezavisna rešenja jednačine (3.4), tada je*

$$a_n = C_1 a'_n + C_2 a''_n \tag{3.5}$$

opšte rešenje jednačine (3.4).

Dokaz. Zamenom (3.5) u (3.4), sledi

$$\begin{aligned}
&b_2(C_1 a'_{n+2} + C_2 a''_{n+2}) + b_1(C_1 a'_{n+1} + C_2 a''_{n+1}) + b_0(C_1 a'_n + C_2 a''_n) = 0,\\
&C_1(b_2 a'_{n+2} + b_1 a'_{n+1} + b_0 a'_n) + C_2(b_2 a''_{n+2} + b_1 a''_{n+1} + b_0 a''_n) = 0,\\
&C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Rešenje homogene jednačine (3.4) tražimo u obliku $a_n = \lambda^n$. Otuda je

$$b_2 \lambda^{n+2} + b_1 \lambda^{n+1} + b_0 \lambda^n = 0,$$

odakle je

$$b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0. \tag{3.6}$$

Jednačina (3.6) je karakteristična jednačina jednačine (3.4). Rešenja jednačine (3.6) su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2b_0}}{2b_2}.$$

Razlikujemo tri slučaja.

1. Neka su rešenja jednačine (3.6) realna i različita. Tada je opšte rešenje jednačine (3.4), prema Teoremi 2:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

2. Neka su rešenje jednačine (3.6) realna i jednaka, tj., $\lambda_1 = \lambda_2$. Nije teško dokazati da je $\lambda_1 \cdot n$ rešenje jednačine (3.4) i to nezavisno od λ_1. Ponovo po Teoremi 2, sledi da je opšte rešenje jednačine (3.4) dato sa

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n = \lambda_1^n(C_1 + C_2n).$$

3. Neka su rešenja jednačine (3.6) kompleksna, tj.,

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi).$$

Tada je opšte rešenje jednačine (3.4) dato sa

$$\begin{aligned} a_n &= Cr^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + Dr^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) \\ &= (Cr^n + Dr^n)\cos n\varphi + (Cir^n - Dr^ni)\sin n\varphi \\ &= C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi,\ (C_1 = Cr^n + Dr^n,\ C_2 = Cir^n - Dir^n). \end{aligned}$$

Teorema 3. *Rešenje nehomogene diferencne jednačine (3.3) je zbir rešenja homogene jednačine (3.4) i proizvoljnog rešenja nehomogene jednačine (3.3).*

Dokaz. Neka je a_n' opšte rešenje homogene jednačine (3.4) a a_n'' rešeje jednačine (3.3). Tada je $a_n = a_n' + a_n''$ opšte rešenje jednačine (3.3), jer je:

$$\begin{aligned} &b_2(a_{n+2}' + a_{n+2}'') + b_1(a_{n+1}' + a_{n+1}'') + b_0(a_n' + a_n'') = F(n),\ \text{tj.,} \\ &(b_2a_{n+2}' + b_1a_{n+1}' + b_0a_n') + (b_2a_{n+2}'' + b_1a_{n+1}'' + b_0a_n'') = F(n),\ \text{tj.,} \\ &0 + F(n) = F(n),\ \text{t.j.,}\ F(n) = F(n). \quad \square \end{aligned}$$

Slede primeri diferencijalnih jednačina drugog reda.

1. Naći opšti član Fibonaccievog niza $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, za $a_1 = a_2 = 1$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čija su rešenja

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Opšte rešenje je

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

odakle, koristeći početne vrednosti $a_1 = a_2 = 1$, nalazimo da je $C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, pa je opšti član Fibonacci–evog niza dat formulom

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

2. Odrediti opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n + 2$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, njena rešenja su $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Opšte rešenje homogene jednačine $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$ je

$$a_n' = C_1(-1)^n + C_2 n(-1)^n.$$

Rešenje a_n'' polazne, nehomogene diferencne jednačine je oblika $a_n'' = An + B$. Tada je

$$A(n+2) + B + 2(A(n+1) + B) + An + B = n + 2,$$

odakle slede jednakosti $A = \dfrac{1}{4}$ i $B = \dfrac{1}{4}$. Dakle, $a_n'' = \dfrac{1}{4}(n+1)$, a opšte rešenje polazne jednačine je

$$a_n = C_1(-1)^n + C_2 n(-1)^n + \frac{1}{4}(n+1).$$

3. Odrediti a_n ako je $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Njena rešenja su $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, ili, u trigonometrijskom obliku,

$$\lambda_{1/2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Opšte rešenje jednačine je

$$a_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3}.$$

4. Odrediti rešenje diferencne jednačine $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, ako je

$$1^\circ \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1; \quad 2^\circ \quad a_0 = 2,\ a_1 = 1.$$

Rešenje. Rešenja karakteristične jednačine su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$. Opšte rešenje je $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n$. Koristeći početne vrednosti, nalazimo da je traženo rešenje ([1]):

$$1^\circ \quad a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) \ \text{(Jacobsthal–ov niz);}$$
$$2^\circ \quad a_n = 2^n + (-1)^n, \quad \text{(Jacobsthal–Lucas–ov niz).}$$

5. Naći vrednost determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Razvojem determinante po elementima prve kolone, zatim po elementima prve vrste, nalazimo da je

$$D_n = 5\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ ... & ... & ... & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}, \text{ t.j.}$$
$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

Naime, imamo diferencnu jednačinu drugog reda

$$D_{n+2} - 5D_{n+1} + 6D_n = 0$$

sa početnim vrednostima

$$D_1 = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19.$$

Karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, čija su rešenje $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, pa je opšte rešenje $D_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n$. Koristeći početne uslove $D_1 = 5$ i $D_2 = 19$, nalazimo da je vrednost determinante $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

6. Odrediti matricu A^n ako je

$$1^\circ \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad 2^\circ \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. 1° $A^0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_0' & b_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1' & b_1' \end{bmatrix} = A$. Elementi matrica A^n kao i A^{n+1} su nizovi, t.j.

$$A = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ a_n' & b_n' \end{bmatrix}, \quad A^{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ a_{n+1}' & b_{n+1}' \end{bmatrix}.$$

S druge strane, važi jednakost $A^{n+1} = A^n \cdot A$, odnosno,

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ a_{n+1}' & b_{n+1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 2a_n + b_n \\ a_n' & 2a_n' + b_n' \end{bmatrix},$$

odakle sledi sistem diferencnih jednačina:

$$a_{n+1} = a_n, \;\; b_{n+1} = 2a_n + b_n, \;\; a'_{n+1} = a'_n, \;\; b'_{n+1} = 2a'_n + b'_n.$$

Rešenje diferencne jednačine $a_{n+1} = a_n$ je $a_n = c$ (c je konstanta). Kako je $a_0 = c = 1$ to je $a_n = 1$. Diferencna jednačina $a'_{n+1} = a'_n$ ima rešenje $a'_n = c$, a kako je $a'_0 = 0$, to je $a'_n = 0$. Ostale diferencne jednačine postaju

$$b_{n+1} - b_n = 2, \quad b'_{n+1} = b'_n$$

Opšte rešenje prve jednačine je $b_n = b_1 + 2(n-1)$, a kako je $b_1 = 2$, to je $b_n = 2n$. Rešenje druge jednačine je $b'_n = c$, a kako je $b'_0 = 1$ to je $b'_n = 1$. Sledi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2° $\quad A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^1 = A, \quad A^{n+1} = A^n \cdot A$, pri čemu su matrice A^n i A^{n+1}:

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ a'_n & b'_n & c'_n \\ a''_n & b''_n & c''_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ a'_{n+1} & b'_{n+1} & c'_{n+1} \\ a''_{n+1} & b''_{n+1} & c''_{n+1} \end{bmatrix}$$

Iz jednakosti $A^{n+1} = A^n \cdot A$ sledi sistem linearnih diferencnih jednačina (1), (2) i (3):

(1) $\quad a_{n+1} = a_n, \;\; a'_{n+1} = a'_n, \;\; a''_{n+1} = a''_n;$

(2) $\quad b_{n+1} = 2a_n + b_n, \;\; b'_{n+1} = 2a'_n + b'_n, \;\; b''_{n+1} = 2a''_n + b''_n;$

(3) $\quad c_{n+1} = 2b_n + c_n, \;\; c'_{n+1} = 2b'_n + c'_n, \;\; c''_{n+1} = 2b''_n + c''_n.$

Rešenje sistema (1) je $a_n = 1, \quad a'_n = a''_n = 0$, jer su to konstantni nizovi a početne vrednosti su $a_0 = 1$, $a'_0 = 0$, $a''_0 = 0$.

Sada sistem (2) glasi

$$b_{n+1} - b_n = 2,\ \ b'_{n+1} = b'_n,\ \ b''_{n+1} = b''_n,$$

čija su rešenja: $b_n = 2n,\ \ b'_n = 1,\ \ b''_n = 0.$

Sistem (3) sada glasi

$$c_{n+1} - c_n = 4n,\ \ c'_{n+1} - c'_n = 2,\ \ c''_{n+1} = c''_n,$$

čija su rešenja: $c_n = 2n(n-1),\ \ c'_n = 2n,\ \ c''_n = 1$. Dakle, matrica A^n je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Odrediti opšte rešenje diferencne jednačine $a_{n+3} - a_{n+2} + 2a_n = 0$ ako je $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$, ([2]).

Rešenje. Karakteristična jednačina je $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0$. Rešenja ove jednačine su

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Opšte rešenje diferencne jednačine je

$$\begin{aligned} a_n = {} & C_1(-1)^n + C_2(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \\ & + C_3(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

odakle, koristeći početne uslove $a_0 = 0$ i $a_1 = a_2 = 1$, nalazimo da je

$$C_1 = -\frac{1}{5}, \quad C_2 = \frac{1-3i}{10}, \quad C_3 = \frac{1+3i}{10}.$$

Dakle, opšte rešenje jednačine je

$$\begin{aligned} a_n = {} & -\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{1-3i}{10}(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \\ & + \frac{1+3i}{10}(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Naime, opšte rešenje se može predstaviti i na sledeći način ([2]):

$$\begin{aligned}
a_{4n} &= \frac{1}{5}\left(-1+(-4)^n\right),\\
a_{4n+1} &= \frac{1}{5}\left(1+4(-4)^n\right),\\
a_{4n+2} &= \frac{1}{5}\left(-1+6(-4)^n\right),\\
a_{4n+3} &= -\frac{1}{5}\left(1+4(-4)^n\right).
\end{aligned}$$

Literatura

[1] G.B. Đorđević, *Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas numbers*, Math. and Computer Modelling, 42 (2005), 1049–1056.

[2] G. B. Đorđević, *Mixed convolutions of the Jacobsthal type*, Appl. Math. and Computation, 186 (2007), 646–651.

[3] J. Kečkić, *Linearna algebra, teorija i zadaci*, Naučna knjiga, Beograd, 1985.

Adresa autora:

Tehnološki fakultet u Leskovcu, Univerzitet u Nišu