Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.yu/mii
Matematika i informatika 1 (3) (2009), 25-46

Nejednakosti izmedju brojnih sredina

Jelena V. Manojlović

Prvi pojam o aritmetičkoj sredini dva pozitivna broja potiče verovatno još od Pitagorejaca. Pretpostavlja se da su oni najverovatnije znali i za dobro poznatu nejednakost između aritmetičke i geometriske sredine dva pozitivna broja

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \quad a, b > 0, \tag{1}$$

ali se pouzdano zna da je ovu nejednakost dokazao EUKLID. Ona se pokazuje elementarno, korišćenjem svojstva da za proizvoljna dva pozitivna broja važi

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0.$$

Naime, kvadriranjem leve strane prethodne nejednakosti dobija se,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0,$$

odakle, očigledno sledi (1). Nejednakost se često koristi i u sledećem ekvivalentnom obliku

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}, \quad a, b > 0. \tag{2}$$

Ako levoj i desnoj strani nejednakosti $2\,a\,b \le a^2 + b^2$ dodamo $a^2 + b^2$, dobijamo takođe često korišćenu nejednakost

$$(a+b)^2 \le 2\,a^2 + 2\,b^2, \quad a, b > 0. \tag{3}$$

Kako se u mnogim matematičkim problemima javljaju nejednakosti sa više od dva različita broja, postavio se problem uopštenja nejednakosti (1). U tu svrhu uvodi se pojam aritmetičke i geometrijske sredine za n pozitivnih brojeva. Sem toga, uvode se još dva pojma brojnih sredina, odnosno pojmovi kvadratne i harmonijske sredine za n pozitivnih brojeva.

Definicija 1. Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je **harmonijska sredina** $H_n(a)$ brojeva $a_1, a_2 \ldots, a_n$ definisana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}};$$

njihova **geometrijska sredina** $G_n(a)$ je definisana sa

$$G_n(a) = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}};$$

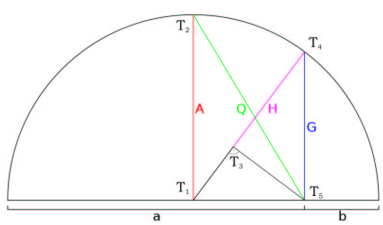
njihova **aritmetička sredina** $A_n(a)$ je definisana sa

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

i njihova **kvadratna sredina** $K_n(a)$ je definisana sa

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Geometrijska reprezentacija brojnih sredina dva broja a i b data je na sledećoj slici:



H= harmonijska sredina duži a i b
G= geometrijska sredina duži a i b
A= aritmetička sredina duži a i b
Q= kvadratna sredina duži a i b

gde je H = $|T_3T_4|$, G = $|T_4T_5|$, A = $|T_1T_2|$, Q = $|T_1T_5|$. Na osnovu slike se može pretpostaviti da važi H $\leq$ G $\leq$ A $\leq$ Q. U narednim teoremama biće pokazano da zaista važi ovakav odnos između brojnih sredina proizvoljnih n pozitivnih brojeva.

Teorema 1. (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \geq G_n(a) \tag{4}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Dokazaćemo teoremu matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ nejednakost (4) postaje (1), tj.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1\, a_2}\,.$$

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k - 1 \geq 2$, tj. da važi

$$A_{k-1}(a) \geq G_{k-1}(a) \tag{5}$$

i pokažimo da važi za $n = k$. Možemo pretpostaviti, bez gubitka opštosti, da je $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$. Tada je

$$a_1 = \frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{k}}{k} \leq A_k(a) \leq \frac{\overbrace{a_k + a_k + \ldots + a_k}^{k}}{k} = a_k\,. \tag{6}$$

Primetimo da je iz (6) $a_k - A_k(a) \geq 0$, tj. $a_1 + a_k - A_k(a) \geq a_1 > 0$.

Posmatrajmo $k - 1$ pozitivnih brojeva

$$a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_1 + a_k - A_k(a)\,,$$

za koje možemo primeniti indukcijsku pretpostavku (5), odnosno važi

$$\begin{aligned} &\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_1 + a_k - A_k(a)}{k-1} \\ &\qquad \geq \sqrt[k-1]{a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\, (a_1 + a_k - A_k(a))}\,. \end{aligned}$$

Kako je $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = k\, A_k(a)$, prethodna nejednakost postaje

$$\frac{k\, A_k(a) - A_k(a)}{k-1} = A_k(a) \geq \sqrt[k-1]{a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\, (a_1 + a_k - A_k(a))}\,.$$

Odavde sledi, da je

$$\begin{aligned} &A_k^{k-1}(a) \geq a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\, (a_1 + a_k - A_k(a)), \quad \text{tj.} \\ &A_k^k(a) \geq A_k(a)\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\, (a_1 + a_k - A_k(a)). \end{aligned} \tag{7}$$

Pokažimo sada da je

$$\begin{aligned} &A_k(a)\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{k-1}\, (a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k = G_k^k(a) \\ &\qquad \iff \quad A_k(a)\, (a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1\, a_k\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Zaista, imamo

$$\begin{aligned} & A_k(a)\,(a_1 + a_k - A_k(a)) \ge a_1\,a_k \\ & \qquad \iff A_k(a)\,a_1 - a_1\,a_k + A_k(a)\,(a_k - A_k(a)) \ge 0 \\ & \qquad \iff -a_1(a_k - A_k(a)) + A_k(a)\,(a_k - A_k(a)) \ge 0 \\ & \qquad \iff (A_k(a) - a_1)\,(a_k - A_k(a)) \ge 0\,. \end{aligned}$$

Na osnovu (6) su $A_k(a) - a_1$ i $a_k - A_k(a)$ pozitivni brojevi, pa je i njihov proizvod pozitivan broj. Dakle, pethodna nejednakost je tačna, odnosno važi (8). Sada, iz (7) i (8) sledi da je $A_k^k(a) \ge G_k^k(a)$, tj. $A_k(a) \ge G_k(a)$.

Dokažimo da jednakost u (4) važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, očigledno imamo jednakost u (4). S druge strane, pretpostavimo da su bar dva broja iz niza brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različita međusobom, na primer $a_1 \ne a_2$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 \ldots + a_n}{n} \\ &\ge \left(\Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big)^2 a_3 \ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}} > (a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n)^{\frac{1}{n}}\,, \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1\,a_2} \quad \text{za } a_1 \ne a_2.$$

Ovim je dokaz završen. □

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine zvaćemo kratko kao (GA) nejednakost, dok ćemo u primenama koristiti oznake

$$\text{(9)} \qquad A_n(a) \overset{(\mathrm{A_n - G_n})}{\ge} G_n(a) \qquad \text{odnosno} \quad G_n(a) \overset{(\mathrm{G_n - A_n})}{\le} A_n(a)$$

Teorema 2. (Nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$\text{(10)} \qquad G_n(a) \ge H_n(a)$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Nejednakost (GA) za brojeve $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$ glasi

$$(11) \qquad \left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{(\mathrm{G_n - A_n})}{\leq} \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Prema Teoremi 1. jednakost važi ako i samo ako je $\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} = \ldots = \dfrac{1}{a_n}$, tj. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Iz (11) sledi

$$G_n(a) = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots + \frac{1}{a_n}} = H_n(a),$$

tj. nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine. $\square$

Teorema 3. (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine) *Neka je a data n-torka pozitivnih brojeva. Tada je*

$$(12) \qquad K_n(a) \geq A_n(a)$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Ako se u identitetu

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \\ &+2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \ldots + a_2a_n + \ldots + a_{n-1}a_n), \end{aligned}$$

na desnoj strani jednakosti iskoristi nejednakost (2) za $a_i,\ a_k,\ 1 \leq i,\ k \leq n$, tj. da je $2a_ia_k \leq a_i^2 + a_k^2$, dobijamo nejednakost

$$(13) \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Kako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni, iz (13) sledi da je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{n}\,\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

tj.

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = K_n(A)\,.$$

Ostaje još da se pokaže da jednakost u (12) važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, očigledno imamo jednakost u (12). S druge strane, ako pretpostavimo da su bar dva broja iz niza brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različita međusobom, na primer $a_1 \neq a_2$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \\
&\leq \sqrt{\frac{2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \\
&< \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}},
\end{aligned}$$

jer je za $a_1 \neq a_2$

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{2} < a_1^2 + a_2^2\,.$$

Ovim je dokaz završen. $\square$

Nejednakosti (10) i (12) nazivamo kraće (HG) nejednakost i (AK) nejednakost respektivno, dok ćemo u primenama koristiti analogne oznake kao kod nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, tj. analogne oznakama (9).

Teoreme 1., 2. i 3. konačno daju da je

$$\boxed{H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a)}$$

Imamo i sledeća dva rezultata:

Teorema 4. *Ako je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ proizvoljna n-torka pozitivnih brojeva, tada je*

(14) $$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq H_n(a).$$

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je

(15) $$0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n\,.$$

Tada je $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_1$. Na osnovu nejednakosti (15) je

$$\frac{a_1}{a_2} \leq 1,\ \frac{a_1}{a_3} \leq 1,\ \ldots\ ,\frac{a_1}{a_n} \leq 1,$$

tako da je

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \leq \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n,$$

odakle sledi

$$a_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \leq n \quad \Longrightarrow \quad a_1 \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = H_n(a)$$

čime je dokaz završen. $\square$

Teorema 5. *Ako je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ proizvoljna n-torka pozitivnih brojeva, tada je*

(16) $$K_n(a) \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da važi (15). Tada je $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_n$, a prema (15) imamo da je

$$a_1^2 \leq a_n^2,\ a_2^2 \leq a_n^2,\ \ldots\ , a_{n-1}^2 \leq a_n^2,\ a_n^2 \leq a_n^2,$$

tako da je

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 \leq n\, a_n^2,$$

odakle sledi

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leq a_n. \qquad \square$$

Dakle, konačno imamo da važi

$$\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\}$$

Pokazane nejednakosti imaju veoma važnu ulogu i nalaze veoma široku primenu u svim oblastima matematike.

Primena nejednakosti između brojnih sredina

Nejednakosti između brojnih sredina mogu se koristiti da bi se pokazale mnoge druge nejednakosti, između ostalih i mnoge geometrijske nejednakosti. Štaviše, nejednakosti između sredina nalaze svoju primenu i u rešavanju jednačina, nejednačina, kao i u rešavanju tkz. problema ekstremnih vrednosti odnosno određivanja minimalnih i maksimalnih vrednosti određenih veličina.

1. Nejednakosti

Zadatak 1. *Dokazati da za proizvoljne n-torke realnih brojeva $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ važi nejednakost:*

$$G_n(a) + G_n(b) \le G_n(a+b), \quad \text{tj.}$$
$$\sqrt[n]{a_1\, a_2\, \dots\, a_n} + \sqrt[n]{b_1\, b_2\, \dots\, b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)\,(a_2+b_2)\, \dots\, (a_n+b_n)}$$

Rešenje: Treba zapravo pokazati da je

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \dots\, x_n} + \sqrt[n]{y_1\, y_2\, \dots\, y_n} \le 1, \tag{17}$$

gde su $x_k = \dfrac{a_k}{a_k+b_k}$, $y_k = \dfrac{b_k}{a_k+b_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Iz (GA) nejednakosti je

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \dots\, x_n} \overset{(\mathrm{G_n-A_n})}{\le} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n};$$
$$\sqrt[n]{y_1\, y_2\, \dots\, y_n} \overset{(\mathrm{G_n-A_n})}{\le} \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n},$$

tako da sabiranjem ovih nejednakosti, uzevši u obzir da je $x_k + y_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, dobijamo

$$\sqrt[n]{x_1\, x_2\, \dots\, x_n} + \sqrt[n]{y_1\, y_2\, \dots\, y_n}$$
$$\le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = 1,$$

tj. važi (17). $\triangle$

Zadatak 2. (**[1]Bernulijeva nejednakost**) $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\,\alpha$, $\alpha \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje: Kako je $1+\alpha \geq 0$, to je $1+n\alpha \geq 0$. Koristeće (GA) nejednakost imamo

$$\Big((1+n\alpha)\cdot \underbrace{1\ldots 1}_{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}} \overset{(\mathrm{G_n-A_n})}{\leq} \frac{1+n\alpha+1+\ldots+1}{n} = 1+\alpha\,, \quad n>1\,.$$

Dakle, $1+n\,\alpha \leq (1+\alpha)^n$. $\triangle$

Zadatak 3. *Dokazati nejednakost* $\sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Rešenje: Prema (GA) nejednakosti je

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \;&<\; \frac{1+2+\ldots+n}{n}\\ &=\; \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}\,, \quad n\geq 2\,. \quad \triangle\end{aligned}$$

Zadatak 4. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokazati da važe nejednakosti*

(i) $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a+b}{c}} + \sqrt{\dfrac{b+c}{a}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}\,.$

Rešenje: **(i)** Prema nejednakosti (1) je

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a+c \geq 2\sqrt{ac}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}\,,$$

odakle množenjem direktno sledi prva nejednakost.

(ii) Primenom (GA) nejednakosti, imamo da je

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}}\\ &\quad \overset{(\mathrm{A_3-G_3})}{\geq} 3\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right)^{1/3}\\ &\quad = 3\left(\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{a\,b\,c}\right)^{1/6}.\end{aligned}$$

[1]J. Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar

Korišćenjem prve nejednakosti sada se dobija da je

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[6]{8} = 3\,(2^3)^{\frac{1}{6}} = 3\sqrt{2}\,. \quad \triangle$$

Zadatak 5. *Ako su* a, b, c *pozitivni realni brojevi, dokazati da važe nejednakosti*

$$6\,abc \leq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \leq 2(a^3+b^3+c^3)\,.$$

Rešenje: Kako su a, b, c pozitivni realni brojevi, deljenjem leve nejednakosti sa abc dobija se ekvivalentna nejednakost

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} \geq 6\,. \tag{18}$$

Primenom nejednakosti $A_3 \geq G_3$, a zatim nejednakosti (i) iz prethodnog zadatka, dobija se nejednakost (18)

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6\,.$$

Desna nejednakost se pokazuje korišćenjem elementarne nejednakosti

$$x^3+y^3 \geq \ xy\,(x+y), \qquad x>0, y>0 \tag{19}$$

koja se često koristi u primenama. Da bi pokazali ovu nejednakost pokažimo najpre da je da je aritmetička sredina dva broja uvek manja ili jednaka od tkz. kubne sredine dva pozitivna broja

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\,,$$

(tvrđenje važi i za proizvoljnih n pozitivnih brojeva). Zaista,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2} &\Leftrightarrow x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \leq 4(x^3+y^3)\\ &\Leftrightarrow 0 \leq 3x^3-3x^2y-3xy^2+3y^3 = 3(x-y)(x^2-y^2)\\ &\Leftrightarrow 0 \leq 3(x-y)^2(x+y)\,.\end{aligned}$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je $x + y > 0$. Dakle,

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}. \tag{20}$$

Primenom (GA) nejednakosti je $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, odnosno $(x+y)^2 \geq 4xy$, odakle množenjem sa $x + y > 0$ je

$$\frac{(x+y)^3}{4} \geq xy(x+y) \tag{21}$$

Iz (20) i (21) sledi (19).

Primenom nejednakosti (19) na brojeve a, b, c sledi desna nejednakost

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \leq a^3+b^3+b^3+c^3+a^3+c^3 = 2(a^3+b^3+c^3)\,. \quad \triangle$$

Zadatak 6. *Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati da*

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

Rešenje: Izraz $(a + b + c)^2$ možemo razložiti na sledeći način:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ &= (a^2 + bc) + (b^2 + ac) + (c^2 + ab) + ab + bc + ac \end{aligned} \tag{22}$$

Primenom nejednakosti $A_3 \leq G_3$ na parove brojeva a^2 i bc, b^2 i ac, c^2 i ab dobija se

$$(a^2 + bc) + (b^2 + ac) + (c^2 + ab) \geq 2a\sqrt{bc} + 2b\sqrt{ac} + 2c\sqrt{ab}\,. \tag{23}$$

Još jednom primenom nejednakosti $A_3 \leq G_3$ sada na parove brojeva ab i bc, bc i ac, ac i ab, dobija se

$$\begin{aligned} ab + bc + ac &= \frac{ab+bc}{2} + \frac{bc+ac}{2} + \frac{ac+ab}{2} \\ &\geq \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + \sqrt{a^2bc} = a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Sada iz (22), (23) i (24) sledi

$$(a+b+c)^2 \geq 3\left(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}\right). \qquad \triangle$$

Zadatak 7. *Dokazati da za svaka tri prirodna broja a, b, c važi nejednakost*

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{a}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}\,.$$

Rešenje: Iz (HG) nejednakosti, imamo da je

$$G(\underbrace{a,\ldots,a}_{a},\underbrace{b,\ldots,b}_{b},\underbrace{c,\ldots,c}_{c}) \geq H(\underbrace{a,\ldots,a}_{a},\underbrace{b,\ldots,b}_{b},\underbrace{c,\ldots,c}_{c}),$$

odnosno

$$\begin{aligned}\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \quad &\geq \quad \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}}_{a}+\underbrace{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}_{b}+\underbrace{\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}}_{c}} \\ &= \quad \frac{a+b+c}{3}\,. \quad \triangle\end{aligned}$$

Zadatak 8. *Pokazati da za proizvoljne pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $x\,y\,z = 1$ važi nejednakost*

$$x + y + z \leq x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Rešenje: Primenom nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine imamo da je

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \overset{(\mathrm{K}_3-\mathrm{A}_3)}{\geq} \frac{x+y+z}{3}$$

odnosno

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \quad &= \quad (x+y+z)\cdot\frac{x+y+z}{3} \\ &\overset{(\mathrm{A}_3-\mathrm{G}_3)}{\geq} \quad (x+y+z)\sqrt[3]{x\,y\,z} = x+y+z\,.\end{aligned}$$

Zadatak 9. *Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati da* je

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Rešenje: Kako je $A_3 \geq G_3 \geq H_3$, primenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine na brojeve $a+b$, $b+c$ i $a+c$ dobija se

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}}$$

odnosno

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq 9\,. \qquad \triangle$$

Zadatak 10. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi pokazati da važi nejednakost*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Rešenje: Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}, \\ S_1 &= \frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}, \\ S_2 &= \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}\,. \end{aligned}$$

Primetimo najpre da je $S_1+S_2=3$. Pored toga, imamo da je

$$S+S_1+S_2=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right).$$

Primenom nejednakosti iz prethodnog zadatka je $S+S_1+S_2 \geq \dfrac{9}{2}$. Dakle, $S \geq \dfrac{9}{2}-(S_1+S_2)=\dfrac{3}{2}$, što je i trebalo pokazati. $\triangle$

Zadatak 11. *Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost*

$$a^4+b^4+c^4 \geq a\,b\,c\,(a+b+c)\,.$$

Rešenje: Na osnovu (AK) nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \overset{(\mathrm{K}_3-\mathrm{A}_3)}{\geq} \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \iff a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}\,,$$

i

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{(\mathrm{K}_3-\mathrm{A}_3)}{\geq} \frac{a+b+c}{3} \iff a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$
$$\iff (a^2+b^2+c^2)^2 \geq \frac{(a+b+c)^4}{9}.$$

Sada, iz prethodne dve nejdnakosti se dobija da je

$$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a+b+c)^4}{27}. \tag{25}$$

Prema (GA) nejednakosti je

$$\frac{a+b+c}{3} \overset{(\mathrm{A}_3-\mathrm{G}_3)}{\geq} \sqrt[3]{a\,b\,c} \iff (a+b+c)^3 \geq 27\,a\,b\,c.$$

Množenjem poslednje nejednakosti sa $a+b+c>0$ dobija se

$$(a+b+c)^4 \geq 27\,a\,b\,c(a+b+c),$$

što zajedno sa (25) daje

$$a^4+b^4+c^4 \geq a\,b\,c\,(a+b+c). \quad \triangle$$

Zadatak 12. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokazati da važe nejednakosti*

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Rešenje: Da bi smo dokazali levu nejednakosti, primenimo najpre (GA) nejednakost na brojeve $\frac{ab^2}{a+b}$, $\frac{bc^2}{b+c}$, $\frac{ca^2}{c+a}$, čime se dobija da je

$$\begin{aligned}\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} &\overset{(\mathrm{A}_3-\mathrm{G}_3)}{\geq} \left(\frac{ab^2\,bc^2\,ca^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{1/3} \\ &= \frac{3\,a\,b\,c}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.\end{aligned} \tag{26}$$

S druge strane, iz (GA) nejednakost za brojeve $a+b, a+c, b+c$, imamo da je

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \overset{(\mathrm{G}_3-\mathrm{A}_3)}{\leq} \frac{a+b+b+c+c+a}{3} = \frac{2}{3}\,(a+b+c),$$

odnosno

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{3}{2\,(a+b+c)},$$

što zajedno sa (26) daje levu nejednakost:

$$\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \geq \frac{9abc}{2(a+b+c)}.$$

Pokažimo sada desnu nejednakost. Najpre, primenom nejednakosti (HA), imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}} &\overset{(\mathrm{H}_2-\mathrm{A}_2)}{\leq} \frac{b^2+ab}{2},\\
\frac{2}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}} &\overset{(\mathrm{H}_2-\mathrm{A}_2)}{\leq} \frac{c^2+bc}{2},\\
\frac{2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}} &\overset{(\mathrm{H}_2-\mathrm{A}_2)}{\leq} \frac{a^2+ac}{2}.
\end{aligned}$$

Sabiranjem prethodnih nejednakosti se dobija

$$\begin{aligned}
\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} &= \frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}} + \frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}} + \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}}\\
&\leq \frac{b^2+ab}{4} + \frac{c^2+bc}{4} + \frac{a^2+ac}{4}\\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{ab+bc+ac}{4},
\end{aligned}$$

a korišćenjem nejednakosti (2), prethodna nejednakost postaje

$$\begin{aligned}
&\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a}\\
&\qquad \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2}\right)\\
&\qquad = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ovim je pokazana i desna strana nejednakosti. $\triangle$

Zadatak 13. *Pokazati da važi nejednakost*

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geq 2^n,$$

gde su $a_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$ *takvi da je* $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$.

Rešenje: Iz (HG) nejednakosti je

$$\begin{aligned}&\left[\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{1/n}\\ &\qquad=\left[\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_2}{a_2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_n+1}\right]^{1/n}\\ &\qquad\stackrel{(\mathrm{G_n-H_n})}{\geq}\frac{n}{\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+1}}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{a_k}{a_k+1}=\frac{a_k+1-1}{a_k+1}=1-\frac{1}{a_k+1},\quad k=1,2,\ldots,n$$

prethodna nejednakost postaje

$$\begin{aligned}&\left[\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{1/n}\\ &\qquad\geq\frac{n}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)}.\end{aligned}\tag{27}$$

S druge strane, iz nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine, uz korišćenje uslova $a_1+\ldots+a_n=n$, imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}}{n}&\stackrel{(\mathrm{A_n-H_n})}{\geq}\frac{n}{a_1+1+a_2+1+\ldots+a_n+1}\\ &=\frac{n}{n+a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\geq\frac{n}{2}\quad\Longleftrightarrow$$

$$n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)\leq n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\iff$$

(28) $$n\cdot\frac{1}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)}\geq n\cdot\frac{2}{n}=2.$$

Sada iz (27) i (28) zaključujemo da je

$$\left[\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{1/n}\geq 2,$$

odakle stepenovanjem dobijamo traženu nejednakost. △

2. Rešavanje jednačina i nejednačina

Zadatak 14. *Rešiti jednačinu* $2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}$.

Rešenje: Pre svega primetimo da za $x<0$ je $16^{x^3}<1$, pa je

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4>256^4\,,\qquad 3\cdot 16^{x^3}<3\,,$$

što znači da data jednačina nema rešenja u skupu $\mathbb{R}^-$. Pored toga, očigledno ni $x=0$ nije rešenje date jednačine. Dakle, ostaje da nađemo rešenje u skupu $\mathbb{R}^+$. Primenom (GA) nejednakosti imamo

(29) $$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4\overset{(\mathrm{A}_3-\mathrm{G}_3)}{\geq}3\cdot\sqrt[3]{2^{x^5}\cdot 4^{x^4}\cdot 256^4}=3\cdot\sqrt[3]{2^{x^5+2x^4+32}}\,.$$

Takođe,

$$x^5+2x^4+32\overset{(\mathrm{A}_3-\mathrm{G}_3)}{\geq}3\cdot\sqrt[3]{x^5\cdot 2x^4\cdot 32}=12x^3$$

što povlači da je

(30) $$2^{x^5+2x^4+32}\geq 2^{12x^3}\,.$$

Iz (29) i (30) sada je

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4\geq 3\cdot\sqrt[3]{2^{12x^3}}=3\cdot 2^{4x^3}=3\cdot 16^{x^3}\,.$$

U nejednakostima (29) i (30), jednakost važi ako i samo ako je $x^5=2x^4=32$, tj. ako je $x=2$, što dakle, predstavlja rešenje date jednačine. △

Zadatak 15. *Rešiti nejednačinu* $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} > 2^{1+\sqrt[6]{x}}$.

Rešenje: Oblast definisanosti date nejednačine je $D = [0, +\infty)$. Ako uvedemo smenu $a = \sqrt[12]{x} \geq 0$, dobija se nejednačina

$$2^a + 2^{a^3} > 2^{1+a^2}. \tag{31}$$

Primenom (GA) nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} 2^a + 2^{a^3} &\overset{(\mathrm{A}_2-\mathrm{G}_2)}{\geq} 2 \cdot \sqrt{2^a \cdot 2^{a^3}} = 2 \cdot \sqrt{2^{a+a^3}}\,, \\ a^3 + a &\overset{(\mathrm{A}_2-\mathrm{G}_2)}{\geq} 2\sqrt{a \cdot a^3} = 2a^2 \end{aligned}$$

Onda je

$$2^a + 2^{a^3} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{2a^2}} = 2^{1+a^2}. \tag{32}$$

Dakle, pokazali smo da za svako $a \geq 0$, važi nejednakost (32), pri čemu jednakost važi akko je $a = a^3$, tj. akko je $a = 0$ ili $a = 1$. Kako je $a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ i $a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$, rešenje nejednačine (31) je $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$. $\triangle$

Zadatak 16. *Rešiti jednačinu* $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

Rešenje: Primenom (GA) nejednakost je

$$x^4 + y^4 + 1 + 1 \overset{(\mathrm{A}_4-\mathrm{G}_4)}{\geq} \sqrt[4]{x^4 y^4} = 4\,|x| \cdot |y| \geq 4\,x\,y\,,$$

pri čemu jednakost važi kada je $x^4 = y^4 = 1$. Dakle, rešenja jednačine su $(x, y) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$. $\triangle$

Zadatak 17. *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu* $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{xz}{y} = 3$.

Rešenje: Pre svega, $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Onda, imamo jednačinu oblika $(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 = 3xyz$, odakle sledi da je $xyz > 0$. Kako je $xyz \in \mathbb{Z}$, to je $xyz \geq 1$. Sada primenimo (GA) nejednakost na brojeve $(xy)^2$, $(yz)^2$, $(xz)^2$ dobijamo da je

$$3xyz = (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \overset{(\mathrm{A}_3-\mathrm{G}_3)}{\geq} \sqrt[3]{(xy)^2 \cdot (yz)^2 \cdot (xz)^2} = 3xyz\sqrt[3]{xyz}\,,$$

odakle je $xyz \leq 1$. Dakle, $xyz = 1$. Prema tome, rešenja jednačine u skupu celih brojeva su

$$(x, y, z) \in \{(1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)\}. \qquad \triangle$$

3. Razni problemi

Zadatak 18. *Za koje vrednosti parametra a postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da su brojevi*

$$A = 5^{1+x} + 5^{1-x}, \quad B = \frac{a}{2}, \quad C = 25^x + 15^{-x}$$

tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Rešenje: Kako je $A, B > 0$, imamo

$$A = 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) \geq 5 \cdot 2 = 10 \qquad C = 25^x + \frac{1}{25^x} \geq 2\,.$$

Brojevi A, B, C su tri uzastopna člana aritmetičkog niza ako je $A+C = 2B$, pa je

$$a = A + C \geq 10 + 2 = 12\,.$$

Dakle, za $a \geq 12$ postoji traženo x. $\triangle$

Zadatak 19. *Koji broj je veći* $\log_3 4$ *ili* $\log_4 5$?

Rešenje: Kako je

$$\begin{aligned} \frac{\log_4 5}{\log_3 4} = \log_4 5 \cdot \log_4 3 &\overset{(\mathrm{G}_2-\mathrm{A}_2)}{\leq} \left(\frac{\log_4 5 + \log_4 3}{2}\right)^2 \frac{(\log_4 15)^2}{4} \\ &< \frac{(\log_4 16)^2}{4} = \frac{(2\log_4 4)^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

veći broj je $\log_3 4$. $\triangle$

4. Problemi ekstremnih vrednosti

Zadatak 20. *Ako su x, y, z pozitivni brojevi takvi da je $x + y + z = 1$, odrediti minimalnu vrednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$.*

Rešenje: Primenom nejednakosti $K_3 \geq A_3$ i korišćenjem uslova $x + y + z = 1$ dobija se nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 \overset{(\mathrm{K}_3-\mathrm{A}_3)}{\geq} \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

u kojoj jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$. Kako je $x+y+z = 1$, biće $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. Dakle, minimalna vrednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$ je jednaka $1/3$. $\triangle$

Zadatak 21. *Ako su x, y, z pozitivni brojevi takvi da je $x+y+z=1$, odrediti minimalnu vrednost izraza*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right).$$

Rešenje: Koristeći uslov $x+y+z=1$ i nejednakost $A_4 \geq G_4$ dobija se nejednakost

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) &= \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz}\\ &= \frac{(x+x+y+z)(y+x+y+z)(z+x+y+z)}{xyz}\\ &\geq \frac{\left(4\sqrt[4]{x^2yz}\right)\cdot\left(4\sqrt[4]{xy^2z}\right)\cdot\left(4\sqrt[4]{xyz^2}\right)}{xyz} = 64\end{aligned}$$

u kojoj jednakost važi ako i samo ako je $x=y=z=1/3$. Dakle, minimalna vrednost datog izraza je 64. $\triangle$

Zadatak 22. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=1$, odrediti minimalnu vrednost izraza*

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}.$$

Rešenje: U zadatku 8. je pokazano da za proizvoljne pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $x\,y\,z=1$ važi nejednakost

$$x+y+z \leq x^2+y^2+z^2.$$

Uzevši da je

$$x=\frac{ab}{c}, \qquad y=\frac{bc}{a}, \qquad z=\frac{ac}{b}$$

kako je $xyz=1$, važi

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2} \geq \frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}+\frac{ac}{b}\cdot\frac{ab}{c}=b^2+c^2+a^2=1$$

Onda je

$$\begin{aligned}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)^2 &= \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+2(b^2+c^2+a^2)\\ &= \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+2 \geq 3,\end{aligned}$$

odakle sledi nejednakost

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq\sqrt{3}$$

u kojoj jednakost važi ako je $\frac{ab}{c}=\frac{bc}{a}=\frac{ac}{b}$, tj. $a=b=c$. Kako je $a^2+b^2+c^2=1$, to je $a=b=c=1/\sqrt{3}$, pa je minimalna vrednost datog izraza jednaka $\sqrt{3}$. $\triangle$

Zadaci za samostalni rad:

Zadatak 1. Ako je proizvod pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n$ jednak 1, dokazati da je

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n.$$

Zadatak 2. Dokazati da za pozitivne realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ važi nejednakost

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+...+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}\geq n\sqrt{2}.$$

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi čiji je zbir jednak 1. Dokazati da za svaki pozitivan broj a važi nejednakost

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\geq\frac{n^2}{2}.$$

Zadatak 4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati da važi nejednakost je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

Zadatak 5. Pokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$(a+1)(b+1)(c+1)\geq(\sqrt[3]{abc}+1)^3.$$

Zadatak 6. Za pozitivne realne brojeve važi $a^2+b^2\leq 1$ i $c^2+d^2\leq 1$. Dokazati da važi nejednakost

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\leq 2\sqrt{2}.$$

ZADATAK 7. Zbir pozitivnih brojeva a, b i c jednak je 1. Dokazati da je

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

ZADATAK 8. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y+z=1$, odrediti minimalnu vrednost izraza

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

ZADATAK 9. Koji broj je veći $\log_{100} 99$ ili $\log_{101} 100$?

ZADATAK 10. Ako je $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ ili $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$ dokazati

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Literatura

[1] Z. KALDELBURG, D. DJOKIĆ, M. LUKIĆ, I. MATIĆ, *Nejednakosti*, Društo matematičara Srbije, Beograd 2003.

[2] D.S.MITRINOVIĆ, *Geometrijske nejednakosti* II - Prirucnik za takmičenja srednjoškolaca u matematici, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1966.

[3] V. STOJANOVIĆ, *Matematiskop* 3, Matematiskop, Beograd 2004.

Adresa autora:

Prirodno-matematički fakultet u Nišu