Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 4 (1) (2017), 24-43

Matematički ocenjeni medicinski rezultati

Nenad O. Vesić,
Prirodno-matematički fakultet Niš,
Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, projekat 174012
e-mails: vesic.specijalac@gmail.com, vesko1985@pmf.ni.ac.rs
Mihailo A. Krstić,
Prirodno-matematički fakultet Niš,
e-mails: mihailo1994@yahoo.com,

Sažetak

U radu je primenjen algoritam koji, na osnovu rezultata testova krvi, ocenjuje celokupno stanje tog tkiva. Pokazano je da postoji analogija između nekih matematičkih pojmova i ocena medicinskih stanja.

Da bi se ustanovilo da je taj metod primenljiv u proizvoljnom takvom slučaju, dokazano je da rezultati primene tog metoda imaju karakteristiku mere (σ-aditivne ili pseudo-aditivne). Pored toga, dokazana je i tenzorska karakteristika tih rezultata što ima značajnu ulogu u poređenjima medicinskih rezultata. Te karakteristike, iako značajne u detaljnim medicinskim ispitivanjima, nisu neophodne za primene u osnovnoj analizi rezultata prikazanoj u ovom radu.

Ključne reči: ocena, mera, tenzor, algoritamska složenost, stanje, grupa testova, krvna slika, biohemija

1 Uvod

Postoje dve vrste analogija: jaka i slaba. Analogijom je nemoguće bilo šta dokazati ali je, zahvaljujući njoj, moguće doći do dokaza. Srinivasa Ramanudžan, jedan od najpoznatijih indijskih matematičara, dao je veliki doprinos matematici vodeći se analogijom. Njegovi radovi nisu bili masovno prihvatani ali postoje teoreme koje su još uvek nedokazane.

Dobro je poznata Banahova izreka koja kaže da je dobar matematičar onaj koji nalazi analogije među tvrđenjima, bolji onaj koji nalazi analogije među dokazima a najbolji onaj koji nalazi analogije među analogijama. Cilj ovog članka je da, prateći ideju proširenja razlomaka - tj. pretvaranja različitih razlomaka u srodne - prikaže kako je moguće dati ocenu poremećaja rezultata izvesnih medicinskih testova.

Ovaj članak namenjen je običnom čoveku koji, dalje od računa, matematiku da upotrebi ne ume. U svakom slučaju, ovaj rad ima za cilj da prikaže da je matematika duboko utkana u život i da, zdravorazumskim razmišljanjem, može izmeriti naizgled neizmerivo, oceniti naizgled neocenjivo i uporediti naizgled neuporedivo. Teorije će biti ali vladanje njom neće biti ni od kakve važnosti da bi se metod, prikazan i korišćen u ovom radu, primenio. Što se primene dela tog metoda tiče, dovoljan će biti digitron i to će biti glavni doprinos ovog rada. Ta primena će, jasnim jezikom brojeva, objasniti šta se i koliko promenilo.

Ovo je, na neki način, pregledni članak koji ima za cilj proširivanje shvatanja matematike. Biće analizirani rezultati testova krvi realizovanih 2015. godine kao primer. Sam metod, koji će se koristiti, primenjen je u radovima [8, 9, 12]. Pored podsećanja, utvrdićemo algoritamsku složenost tog metoda i tenzorsku karakteristiku, kao i svojstvo mere, dobijenih rezultata.

1.1 O teoriji mera

Jedan od ciljeva matematike je da izmeri veličinu posmatranih objekata. Teorija mera i integrala [3, 6] bavi se ostvarenjem tog cilja matematike. Navedimo najpre neophodne definicije za dalji rad.

DEFINICIJA 1 [3] *Neka je X neprazan skup i 2^X njegov partitivni skup. Tada je skup $\Sigma, \Sigma \subseteq 2^X$, σ-algebra nad skupom X ako važi*

1. $X \in \Sigma$,

2. *Ukoliko je $A \in \Sigma$ onda je i $A^c = X \backslash A \in \Sigma$,*

3. *Ukoliko je $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ onda je i $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \Sigma$.*

DEFINICIJA 2 [3] *Neka je X neprazan skup i Σ σ-algebra nad tim skupom. Funkcija $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ naziva se mera (σ-aditivna mera) ukoliko važi*

1. $(\forall E \in \Sigma)\, \mu(E) \geq 0$,
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. *Ukoliko je $E_k, k = 1, 2, \ldots$ prebrojiva familija disjunktnih skupova koji su elementi σ-algebre Σ onda je $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k)$.*

Preslikavanje $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$ koje zadovoljava osobine 2 i 3 naziva se kompleksna (σ-aditivna) mera.

DEFINICIJA 3 [6] *Neka je X neprazan skup, Σ σ-algebra nad tim skupom i neka je $\hat{+}$ binarna operacija definisana na skupu $[0, +\infty]$. Funkcija $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ naziva se pseudo-aditivna mera ako je*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. *Ako su A i B disjunktni skupovi koji pripadaju familiji Σ onda je $\mu(A \cup B) = \mu(A) \hat{+} \mu(B)$,*
3. *Ukoliko prebrojiva familija $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ monotono teži skupu $E \in \Sigma$ onda i familija $\{\mu(E_k)\}$ monotono teži ka $\mu(E)$.*

1.2 O tenzorima

Neka je $\mathbb{V}$ vektorski prostor i $\overset{*}{\mathbb{V}}$ njemu dualan prostor (prostor svih automorfizama prostora $\mathbb{V}$). Po analogiji sa definicijom u [5], funkcija

$$F : \underbrace{\overset{*}{\mathbb{V}} \times \ldots \times \overset{*}{\mathbb{V}}}_{m \text{ puta}} \times \underbrace{\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V}}_{n \text{ puta}} \to \mathbb{C}, \tag{1}$$

jeste tenzor tipa (m, n).

PRIMEDBA 1 *Tenzori su značajni zbog toga što predstavljaju veličine koje ostaju očuvane pri promeni referentnog sistema.*

PRIMEDBA 2 *Jednačinom (1) tenzori su definisani kao kompleksne funkcije a ne nužno realne kako se definišu u knjizi [5].*

1.3 Teorijom sakrivene tajne medicine

PLT, WBC, MCHC, ALP, ALS, ... samo su neke od skraćenica koje se mogu susresti pri pregledu rezultata krvi. Pored njih, postoje i različita imena koja se daju pronaći pri pogledu u lekarski nalaz: Babinski, Romberg, tremor, nistagmus, ataksija, koagulacija,... Ona prva su još i prihvatljiva običnom čoveku. Ova druga deluju dovoljno strašno.

Kada bilo šta od toga nije uredno, svako će se pitati koliko to nije uredno. Danas, u doba interneta, moguće je naći šta je to. Jedini je problem što odgovor na pitanje šta nije uredno nije ujedno i odgovor na pitanje koliko konktretno to, što nije uredno, nije uredno.

Sa druge strane, u medicini se nastoji da se što više toga skalira zbog orijentacije. Različiti opsezi urednih rezultata testova krvi jesu primer skaliranja. Pored toga, postoje onkološke, neurološke, fizijatrijske i mnoge druge skale. Tamo gde nema skala, lekari opisno ocenjuju nivoe različitih poremećaja.

Različite medicinske skale su neuporedive jedna sa drugom. Pored toga, postoje skale koje, bez obzira na promenu nabolje ili nagore, različita stanja ocenjuju istom ocenom. Te razlike su, donekle, prevaziđene u [7, 10]. Motivisano životom i delom medicine koji se redovno da susresti pri analizi stanja krvi, mi ćemo se - u ovom članku - baviti analizom odgovarajućih rezultata. Odredićemo algoritamsku složenost takve analize. Pritom, daćemo i konkretan primer gde će biti prikazano koliko manje preuređenje brojeva može otvoriti vrata detaljnijoj i kompletnijoj analizi i boljem shvatanju i osećaju nivoa poremećenosti neurednih rezultata.

2 METOD

U radovima [7,11] prikazan je algoritam čijom primenom se da numerički oceniti zdravstveno stanje pacijenta. Taj algoritam pronalazi jednako u različitom i sve tajne složenosti poremećaja sakrivene iza stručnih medicinskih naziva razotkriva pomoću brojeva.

PRIMEDBA 3 *U radovima* [7, 11]*, medicinski testovi su razvrstani u pet grupa. Mi ćemo se, zbog najlakšeg razumevanja suštine - u ovom članku - baviti ocenjivanjem testova četvrte grupe. Zainteresovani mogu videti kako izgleda celina stanja u dva, prethodno citirana, rada.*

Cilj tog algoritma je da čoveka posmatra kao celinu. Razlike u medicinskim testovima i pratećim skalama dovode do toga da lekari sve više pacijenta rastavljaju na delove i njihovi zaključci ostaju bez osvrta na celokupnost stanja pacijenta. Statistika, koja se u medicini obilno korisiti, ne bi bila od pomoći jer su, suštinski gledano, rezultati statističkih ispitivanja verovatnoće da se dve grupe rezultata razlikuju. Problem, koji nastaje u slučaju stanja jednog pacijenta, leži u tome što je statistika neprimenljiva na grupe sa po jednim članom. Pored toga, nije bitno samo da li ima razlike nego i kolika je ta razlika.

Mi ćemo se, u ovom članku, baviti ocenom stanja testova čiji su rezultati uredni onda kada su smešteni između dve unapred zadate (referentne) vrednosti. Ljudi se često sreću sa rezultatima takvih testova (testovi krvi i mokraće, obim grudi kod dece ženskog pola u pubertetu, promena telesne visine u detinjstvu i pubertetu...).

Neka je $\mathbf{r}$ rezultat medicinskog testa čije su uredne vrednosti između α i $\beta, \alpha < \beta$. Numerička ocena tog rezultata je

$$e_\alpha^\beta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \alpha \le \mathbf{r} \le \beta, \\ \frac{\mathbf{r}-\beta}{\beta-\alpha}, & \mathbf{r} > \beta, \\ \frac{\alpha-\mathbf{r}}{\beta-\alpha} i, & \mathbf{r} < \alpha, \end{cases} \tag{2}$$

gde je $i^2 = -1$.

PRIMEDBA 4 *Rezultati testova ove grupe iskazuju se u različitim mernim jedinicama. Deljenjem sa $\beta - \alpha$, te razlike su neutralisane.*

PRIMEDBA 5 *Slučajeve $\mathbf{r} > \beta$ i $\mathbf{r} < \alpha$ je neophodno razdvojiti jer takva dva poremećaja u istom testu zahtevaju dijametralno suprotne pristupe u lečenju. Primera radi, jedna se terapija koristi za snižavanje a sasvim druga za povećavanje broja trombocita u krvi.*

U radu [7] objašnjeno je da brojevi kao takvi nisu apsolutni. Da se podsetimo, brojevi nemaju nikakvo suštinsko značenje dok im se smisao ne odredi.

Konkretno, rezultatu $\mathbf{r}$ testa čije se uredne vrednosti nalaze između α i β, smisao je upravo segment $[\alpha, \beta]$. Po analogiji sa jednom od neuroloških skala (EDSS, [4]), uredno stanje kod ovakvih testova ocenjeno je sa 0 u [7–12]. Analogija te skale je dalje ispraćena tako što povećanje/smanjenje bilo realnog bilo imaginarnog dela ocene e_α^β označava pogoršanje/poboljšanje odgovarajućeg rezultata.

Ukoliko obratimo pažnju na slučaj kada je $\mathbf{r} > \beta$, možemo primetiti da je ocena $(\mathbf{r} - \beta)/(\beta - \alpha)$ identična oceni rezultata $\mathbf{r}^* = (r - \alpha)/(\beta - \alpha)$ testa čiji su uredni rezultati između 0 i 1 (ukoliko je $\mathbf{r} > \beta$ onda je i $\mathbf{r}^* > 1$ što se lako proverava). Važi da je $\mathbf{r} < \alpha$ ako i samo ako je $\mathbf{r}^* < 0$ a ocena takvog rezultata $\mathbf{r}^*$ se, i u ovom slučaju, poklapa sa odgovarajućom ocenom (2).

PRIMEDBA 6 *Geometrijski gledano, rezultat* $\mathbf{r}^*$ *jeste dobijen kompozicijom translacije za vektor* $\overrightarrow{AO}$, *gde je* $A(\alpha, 0)$ *i* $O(0,0)$, *i homotetije sa koeficijentom* $1/(\beta - \alpha)$ *i centrom u koordinatnom početku primenjene na rezultat* $\mathbf{r}$ *posmatran kao tačka* $(\mathbf{r}, 0)$ *u Dekartovoj koordinatnoj ravni.*

PRIMEDBA 7 *Ukoliko su poznate referentne vrednosti* α *i* β *testa čiji je rezultat* $\mathbf{r}$, *tada je zadovoljeno*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(\beta - \alpha) + \alpha, \tag{3}$$

gde je $\mathbf{r}^*$ *prethodno dobijen transformisan rezultat.*

PRIMEDBA 8 *Ocena rezultata* $\mathbf{r}$ *testa sa referentnim vrednostima* α *i* β *jednaka je* 0 *ako je* $\mathbf{r}^* \in [0,1]$, *jednaka je* $\mathbf{r}^* - 1$ *ako je* $\mathbf{r}^* > 1$ *i jednaka je* $-\mathbf{r}^*$ *ako je* $\mathbf{r}^* < 0$.

Na taj način, svi različiti testovi čiji se uredni rezultati nalaze između odgovarajućih veličina α_k i β_k transformisani su u isti test čiji se uredni rezultati nalaze između 0 i 1 ponovljen više puta. Zbog toga je ocene $e_\beta^\alpha(\mathbf{r})$ različitih testova moguće smisleno sabirati, deliti brojevima i ocenama različitim od 0 itd. Štaviše, kako je $e_\alpha^\beta(\mathbf{r}) = e_0^1\Big((\mathbf{r} - \alpha)/(\beta - \alpha)\Big)$ mi ćemo testove označavati prirodnim brojevima $1, \ldots, n$, ocene (2) obeležavati sa $e_1, \ldots, e_n$, gde je n broj realizovanih testova a e_k ocena rezultata testa k.

Da bismo posmatrali celinu, a s obzirom na mogućnost linearnog kombinovanja ocena e_k, veličine

$$E_{i_1,\ldots,i_k} = e_{i_1} + \ldots + e_{i_k} \quad \text{i} \quad E^{Abs}_{i_1,\ldots,i_k} = \left|E_{i_1,\ldots,i_k}\right| \tag{4}$$

jesu ocena ukupnog stanja u testovima $i_1, \ldots, i_k$ i apsolutna ocena stanja u tim testovima. Ove ocene su bitne jer, veoma često, posebna grupa poremećaja može ukazati na značajne promene u organizmu.

S obzirom na to da su rezultati poistovećeni, moguće ih je (misli se na rezultate $\mathbf{r}^*$ u različitim trenucima) funkcionalno povezati. Mi se, u ovom članku, nećemo upuštati u detaljna povezivanja već ćemo rezultate povezati linearno. Ukoliko su, u vremenskim trenucima t_1 i t_2, dobijeni rezultati $\mathbf{r}_1^*$ i $\mathbf{r}_2^*$ njih povezuje linearna funkcija

$$L(t) = \frac{\mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}_1^*}{t_2 - t_1}(t - t_1) + \mathbf{r}_1^*. \tag{5}$$

Važi da je

$$L(t_1) = \mathbf{r}_1^* \quad \text{i} \quad L(t_2) = \mathbf{r}_2^*.$$

Štaviše, kako se stanje ne menja odjednom već postepeno, veličina $L(t_0)$, $t_1 \leq t_0 \leq t_2$, jeste aproksimativni rezultat posmatranog testa. Shodno tome, ocena $e_0^1(t_0)$ jeste ocena aproksimativnog rezultata posmatranog testa.

Uočimo primer trombocita. Neka je u trenutku $t_1 = 0$ njihov broj u krvi 100 a u trenutku $t_2 = 10$ njihov broj jednak 500. Referentne vrednosti su $\alpha = 150$ i $\beta = 450$. Funkcija koja povezuje te rezultate je

$$L(t) = \frac{\frac{500-150}{300} - \frac{100-150}{300}}{10 - 0}(t - 0) + \frac{100 - 150}{300} = \frac{4}{30}t - \frac{1}{6}.$$

Po tom pravilu se, APROKSIMATIVNO, MENjA BROJ TROMBOCITA U KRVI SA PROTOKOM VREMENA.

Kao što vidimo, $L(0) = -\frac{1}{6} < 0$ i $L(10) = \frac{7}{6} > 1$. Kako je $L(t)$ rastuća funkcija, ona vrednosti 0 i 1 dostiže SAMO JEDNOM i to u trenucima t_α i t_β. Zato se povezivanje ocena razdvaja na segmente $[0, t_\alpha]$, $[t_\alpha, t_\beta]$, $[t_\beta, 10]$.

S obzirom na to da je funkcija $L(t)$, koja povezuje rezultate $\mathbf{r}^*$, linearna funkcija i da se uredni rezultati $\mathbf{r}^*$ posmatranog testa nalaze između 0 i 1, postoje najviše jedinstvene vrednosti t_x i t_y za koje je $L(t_x) = 0$ i $L(t_y) = 1$. Zbog toga je funkcija $\ell(t)$ koja povezuje ocene rezultata na najviše jednom povezanom podsegmentu $[t_{i_1}, t_{i_2}] \subseteq [t_1, t_2]$ jednaka 0, na najviše jednom povezanom podsegmentu $[t_{j_1}, t_{j_2}] \subseteq [t_1, t_2]$ funkcija sa realnim vrednostima i na najviše jednom podsegmentu $[t_{k_1}, t_{k_2}] \subseteq [t_1, t_2]$ funkcija sa imaginarnim vrednostima. Pritom podsegmenti $[t_{i_1}, t_{i_1}], [t_{j_1}, t_{j_2}], [t_{k_1}, t_{k_2}]$ ne mogu imati zajedničkih unutrašnjih tačaka.

Ukoliko funkcije $\ell_1(t), \ell_2(t), \ldots, \ell_k(t)$, zavisne od realnog parametra t (trenutka između t_1 i t_2), povezuju ocene rezultata različitih testova kroz vreme, tada funkcije

$$\ell_{i_1,\ldots,i_k}(t) = \sum_{u=1}^{k} \ell_{i_u}(t) \quad \text{i} \quad \ell^{Abs}_{i_1,\ldots,i_k} = \left|\ell_{i_1,\ldots,i_k}(t)\right| \tag{6}$$

povezuju prethodno definisane ocene $E_{i_1,\ldots,i_k}$ i $E^{Abs}_{i_1,\ldots,i_k}$, zavisno od protoka vremena.

Neka su

$$e^r_1, \ldots, e^r_{d+1} \tag{7}$$

ocene (aproksimativnih) rezultata r-tog testa realizovanog u trenucima

$$t_1, \ldots, t_{d+1}. \tag{8}$$

Neka su te ocene povezane funkcijom $\ell^r(t)$, posebno definisane na podsegmentima $[t_u, t_{u+1}], u = 1, \ldots, d$, pri čemu je $\ell^r(t_v) = e^r_v, v = 1, \ldots, d+1$. Neka su ocene (e^r_u) povezane, zavisno od vremena $\alpha t_1, \ldots, \alpha t_{d+1}$ i za $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, odgovarajućom funkcijom $\tilde{\ell}^r(t)$. Tada je zadovoljeno

$$\tilde{\ell}^r(\alpha t) = \frac{e^r_{k+1} - e^r_k}{\alpha t_{k+1} - \alpha t_k}(\alpha t - \alpha t_k) + e^r_k = \ell^r(t), \tag{9}$$

za proizvoljno $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Ova osobina funkcije povezivanja ocena rezultata pruža mogućnost poređenja efekata različitih terapija, primenjivanih u različitim vremenskim razdobljima, a zavisno od procenta primene terapije.

2.1 Merljivost i linearnost rezultata analize

Neka je X skup rezultata svih realizovanih testova i $\mathcal{P}(X)$ njegov partitivni skup. Skup $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra. Zaista, zadovoljeno je:

- $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$,
- Ukoliko je $A \in \mathcal{P}(X)$ onda je i $A^c = X\backslash A \subseteq X$, tj. $A^c \in \mathcal{P}(X)$,
- Ukoliko je $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$, tj. $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ onda je i $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \subset X$. Preciznije rečeno, onda je i $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{P}(X)$.

Na taj način, a na osnovu Definicije 1, sledi da je $\mathcal{P}(X)$ σ-algebra nad skupom X. Merljivost ocena (2) i (4) rezultata će s e ocenjivati u odnosu na ovu σ-algebru.

Važi naredna teorema:

TEOREMA 1 *Ocena $E_{i_1,\ldots,i_k}$ medicinskih testova jeste kompleksna σ-aditivna mera. Ocena $E^{Abs}_{i_1,\ldots,i_n}$ medicinskih testova jeste pseudo-aditivna mera.*

Dokaz. Posmatrajmo ocene $E_{i_1,\ldots,i_k}$ i $E^{Abs}_{i_1,\ldots,i_k}$ kao realne funkcije više promenljivih $E(e_1,\ldots,e_k) = e_1 + \ldots + e_k$ i $E^{Abs}(e_1,\ldots,e_k) = |e_1 + \ldots + e_k|$, gde su $e_u, u = 1,\ldots,k$ ocene rezultata odgovarajućih testova. Ukoliko su $e^1 = (e^1_u), e^2 = (e^2_u), \ldots$ disjunktni skupovi sa ocenama pojedinačnih rezultata i $e^1 \cup e^2 \cup \ldots = (e^1_1,\ldots,e^1_{n_1}, e^2_1,\ldots,e^2_{n_2},\ldots)$ tada je, u opštem slučaju zadovoljeno

$$E(e^1 \cup e^2 \cup \ldots) = E(e^1) + E(e^2) + \ldots, \tag{10}$$
$$E^{Abs}(e^1 \cup e^2 \cup \ldots) \neq E^{Abs}(e^1) + E^{Abs}(e^2) + \ldots, \tag{11}$$

što nije teško potvrditi.

Na osnovu prethodne jednakosti, sledi da je veličina $E_{i_1,\ldots,i_k}$ σ-aditivna mera.

Neka je, na skupu $[0,+\infty)$, definisana operacija

$$r_1 \hat{+} r_2 = |r_1 + r_2|, \tag{12}$$

gde su $r_{1,2}$ nenegativni realni brojevi. Ta operacija, u slučaju ocena $E^{Abs}(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})$, ima oblik

$$E^{Abs}(e_1,\ldots,e_m) \hat{+} E^{Abs}(f_1,\ldots,f_n) = E^{Abs}(e_1,\ldots,e_m,f_1,\ldots,f_n), \tag{13}$$

gde su e_u i f_v ocene rezultata, po parovima, različitih testova. S obzirom na način na koji je definisana unija skupova ocena testova, jasno sledi da je

$$\begin{aligned} E^{Abs}\big((e_1,\ldots,e_m) \cup (f_1,\ldots,f_n)\big) &= |e_1 + \ldots + e_m| \hat{+} |f_1 + \ldots + f_n| \\ &= E^{Abs}(e_1,\ldots,e_m) \hat{+} E^{Abs}(f_1,\ldots,f_n). \end{aligned}$$

Kako je $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{|z|^2}$ i kako je funkcija $\sqrt{\cdot}$ monotono rastuća, to jasno sledi da je ocena $E^{Abs}_{i_1,\ldots,i_k}$ pseudo-aditivna mera. □

Ukoliko posmatramo skupove ocena rezultata testova $e = (e_1,\ldots,e_n)$ i $f = (f_1,\ldots,f_n)$, to će - za proizvoljne realne konstante α i β - važiti da je

$$E(\alpha e + \beta f) = \alpha E(e) + \beta E(f) \quad \text{i} \quad E^{Abs}(\alpha e + \beta f) \neq \alpha E^{Abs}(e) + \beta E^{Abs}(f).$$

Pored toga je, za svaki realan broj γ, zadovoljeno

$$E^{Abs}(\gamma e) = |\gamma| E^{Abs}(e).$$

Odatle sledi da je zadovoljena naredna teorema:

TEOREMA 2 (Korekcija rezultata prikazanog u [7])
Veličina $E_{i_1,\ldots,i_n}$ *je tenzor tipa* $(1,1)$. *Veličina* $E^{Abs}_{i_1,\ldots,i_n}$ *je tenzor tipa* $(0,0)$.
□

2.2 Implementacija i algoritamska složenost metoda

Programi, koji pokrivaju prethodno objašnjenu numeričku analizu, jesu sledeći:

```
FourthGroupEstimate[r_] :=Module[{sssse = {}},
 For[i = 1, i <= Dimensions[r][[1]], i++,
  If[r[[i, 3]] <= r[[i, 2]] <= r[[i, 4]],
   sssse = Append[sssse, {r[[i, 1]], 0}],
  If[r[[i, 2]] > r[[i, 4]],
   sssse = Append[sssse,
     {r[[i,1]], (r[[i, 2]] - r[[i, 4]]*1.)/(r[[i, 4]] - r[[i, 3]])}],
  If[r[[i, 2]] < r[[i, 3]],
   sssse = Append[sssse, {r[[i, 1]],
     I*(r[[i, 3]] - r[[i, 2]]*1.)/(r[[i, 4]] - r[[i, 3]])}]]]]];
If[Dimensions[r] == {0}, sssse = {{t4, 0}}]; sssse];
```

Ovaj program ocenjuje rezultate pojedinačnih testova.

```
CompleteGroupEstimate[g_] := Module[{cg = 0},
    For[i = 1, i <= Dimensions[g][[1]], i++, cg += g[[i, 2]]];
{cg, Abs[cg]}];
```

Ovaj program daje ukupnu ocenu svih rezultata u dve koordinate. Prva koordinata razdvaja slučajeve rezultata manjih od manje i većih od veće granične vrednosti, dok druga koordinata objedinjuje sve ocene kao moduo ukupne ocene.

Jedna od bitnijih komponenti, koje se odnose na algoritme, jeste složenost tih algoritama. Postoji više vrsta složenosti algoritma koje se ispituju. To su vremenska i memorijska složenost.

Intuitivno govoreći, vremenska složenost algoritma je broj izvršenih prostih operacija u zavisnosti od broja ulaznih parametara. Memorijska složenost algoritma meri koliku će memoriju u računaru zauzeti algoritam pri izvršenju.

Zbog matematičke preciznosti, dajemo formalnu definiciju vremenske složenosti algoritma.

DEFINICIJA 4 [1] Radno vreme algoritma*, sa n podataka na ulazu, jeste maksimalan broj $T(n)$ izvršenih primitivnih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje, korenovanje, stepenovanje, binarno poređenje) koje je potrebno da se izvrše da bi se algoritam realizovao.*

Da bismo odredili asimptotsku složenost algoritma, potrebno je definisati naredne tri klase složenosti [1]:

- **Klasa složenosti Θ:**
  Za funkciju $g = g(n)$, to je skup

$$\Theta(g) = \{f : (\exists c_1, c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\} \tag{14}$$

  Činjenica da funkcija $f(n)$ pripada klasi $\Theta(g)$ zapisuje se kao $f = \Theta\big(g(n)\big) = \Theta(g)$.

- **Klasa složenosti $\mathcal{O}$:**
  Za funkciju $g = g(n)$, to je skup

$$\mathcal{O}(g) = \{f : (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\} \tag{15}$$

  Činjenica da funkcija $f(n)$ pripada klasi $\mathcal{O}(g)$ zapisuje se kao $f = \mathcal{O}\big(g(n)\big) = \mathcal{O}(g)$.

- **Klasa složenosti Ω:**
Za funkciju $g = g(n)$, to je skup

$$\Omega(g) = \big\{f : (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) 0 \leq cg(n) \leq f(n)\big\} \tag{16}$$

Činjenica da funkcija $f(n)$ pripada klasi $\Omega(g)$ zapisuje se kao $f = \Omega\big(g(n)\big) = \Omega(g)$.

Ova definicija praktično znači da će, ako je $f \in \mathcal{O}(g)$, broj primitivnih operacija algoritma biti ograničen sa gornje strane sa približno $g(n)$ primitivnih operacija; ako $f \in \Omega(g)$ tada će broj primitivnih operacija algoritma biti ograničen sa donje strane sa približno $g(n)$ primitivnih operacija; ako $f \in \Theta(g)$ tada će srednji broj primitivnih operacija algoritma biti $g(n)$. Detaljnije, $f \in \Theta(g)$ ako i samo ako je $f \in \mathcal{O}(g)$ i $f \in \Omega(g)$.

Zbog neumetnutih `For` petlji, radno vreme našeg algoritma je $T = T(n) = \rho n, \rho \in \mathbb{N}$. Sada smo u mogućnosti da odredimo koliko je složeno izvršenje našeg algoritma. Kako je

$$\Big(1 - \frac{1}{2\rho}\Big) \cdot (\rho n) \leq \rho n \leq \Big(1 + \frac{1}{2\rho}\Big)(\rho n)$$

za svako $n \geq 1$, to sledi da je asimptotska složenost našeg algoritma

$$T = \Theta(n) = \mathcal{O}(n) = \Omega(n).$$

Memorijska složenost ovog algoritma je $\mathcal{O}(n)$ jer se pamti tabela dimenzija $n \times 4$. Ovakav tip složenosti naziva se *linearna složenost* i ona je računarski poželjna.

Za više informacija na temu algoritama uopšte, čitaoca upućujemo na izvrsne knjige [1, 2].

3 Test-primer

U razmaku od 29 dana, ispitano je stanje krvi dvadesetjednogodišnjeg pacijenta. Pacijent je se javio na ispitivanje zbog pojave zadebljanja na grudima. U periodu između dve analize krvi koristio je antibiotike.

U toku analiza, realizovani su testovi standardne krvne slike, biohemijski i imunološki testovi. Primenićemo prethodno predstavljeni algoritam da bismo ocenili ukupno stanje krvi, kao i ukupna stanja podgrupa testova krvi, ovog pacijenta.

Na pregledima, u trenucima $t = 0$ i $t = 29$, realizovani su sledeći rezultati:

Krvna slika, $t = 0$:

	rezultat	α	β
sedimentacija	2	0	15
WBC	8.7	4	10
RBC	5.6	4	6.1
HGB	163	120	180
HCT	47	37	54
MCV	84.4	81.0	97.0
MCH	29	25	33
MCHC	343	300	380
RDW	15.5	8.0	14.5
HDW	26.9	22.0	32.0
CHCM	378	320	380
PLT	188	140	400
MPV	7.3	6.0	13.0
Leukocitna formula:			
NEUT%	43	40	74
LYM%	33	19	50
MONO%	6	2	10
EOS%	15	0	7
BASO%	1	0	2
LUC%	2	0	4

Krvna slika, $t = 29$:

	rezultat	α	β
sedimentacija	2	0	15
WBC	6.3	4	10
RBC	6.0	4	6.1
HGB	173	120	180
HCT	51	37	54
MCV	84.7	81.0	97.0
MCH	29	25	33
MCHC	341	300	380
RDW	15.3	8.0	14.5
HDW	26.3	22.0	32.0
CHCM	383	320	380
PLT	193	140	400
MPV	7.2	6.0	13.0
Leukocitna formula:			
NEUT%	48	40	74
LYM%	25	19	50
MONO%	5	2	10
EOS%	18	0	7
BASO%	2	0	2
LUC%	3	0	4

Tabela 1: Krvna slika

Primećujemo da je, na prvom kontrolnom pregledu, povišeno RDW i EOS%. Na drugom kontrolnom pregledu povišeno je RDW i EOS% i, pored toga, CHCM. Ocene poremećaja na prvoj kontroli su $(\mathtt{RDW}, 0.1538)$ i $(\mathtt{EOS\%}, 1.1429)$. Ocene poremećenih rezultata na drugoj kontroli su $(\mathtt{RDW}, 0.1231)$, $(\mathtt{EOS\%}, 1.1514)$, $(\mathtt{CHCM}, 0.05)$.

Medicinski gledano, na drugoj kontroli povećana je zapremina crvenih krvnih zrnaca (RDW) i pojačana je odbrana organizma od parazitne infekcije, s obzirom na to da je lekar isključio alergiju (EOS%). Kao reakcija na terapiju, neznatno je uvećan rezultat testa CHCM na drugom kontrolnom pregledu.

Kada se primeni program `FourthGroupEstimate` na rezultate krvne slike sa prve kontrole utroši se 0.406 sekundi i dobije se rezultat:

```
{{"sedimentacija", 0}, {"WBC", 0}, {"RBC", 0}, {"HGB", 0},
{"HCT", 0}, {"MCV", 0}, {"MCH", 0}, {"MCHC", 0},
{"RDW", 0.153846}, {"HDW", 0}, {"CHCM", 0}, {"PLT", 0},
{"MPV", 0}, {"NEUT%", 0}, {"LYM%", 0}, {"MONC%", 0},
{"EOS%", 1.14286}, {"BASO%", 0}, {"LUC%", 0}}
```

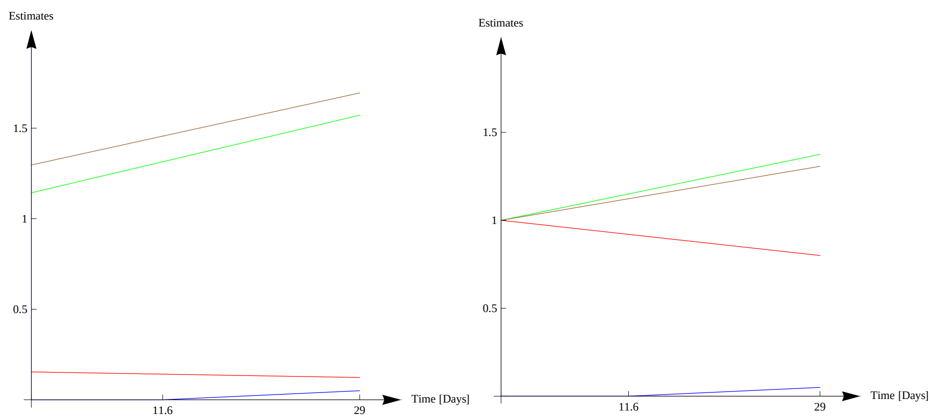
Za jednako utrošeno vreme, primenom kompozicije programa `CompleteGroupEstimate` i `FourthGroupEstimate`, dolazi se do ukupne ocene neurednog jednake $(1.2967, 1.2967)$. Prva koordinata je, u opštem slučaju, kompleksan broj.

Funkcionalno, rezultati neurednih rezultata povezani su funkcijama:

$$\begin{array}{ll} \texttt{RDW} & \left(-\frac{2}{1885}t+\frac{2}{13}, -\frac{2}{1885}t+\frac{2}{13}\right), \\ \texttt{EOS\%} & \left(\frac{3}{203}t+\frac{8}{7}, \frac{3}{203}t+\frac{8}{7}\right), \\ \texttt{CHCM} & \left(0, \frac{5}{87}t-\frac{2}{3}\right), \end{array} \tag{17}$$

gde su funkcije na prvim koordinatama definisane na segmentu $[0, 11.6]$ a funkcije na drugim koordinatama na segmentu $[11.6, 29]$. Trenutak 11.6 je značajan jer aproksimativni rezultati testa `CHCM` postaju neuredni u tom trenutku.

Grafički, aproksimativne promene tih rezultata imaju oblik



SLIKA 1: Neupoređene (levo) i upoređene (desno) ocene

Ukupne ocene rezultata krvne slike obojene su braon bojom, ocene rezultata testa RDW obojene su u crveno, zelene su promene ocena rezultata testa EOS%, a plave su promene rezultata CHCM.

S obzirom na osobinu da što je veći moduo ocene rezultata to je rezultat lošiji, sledi da udaljavanje grafika od horizontalne ose jeste ekvivalent pogoršanju dok je približavanje grafika horizontalnoj osi ekvivalent poboljšanju rezultata. Sa Slike 1 se jasno vidi da se ukupna krvna slika i rezultati testa EOS% pogoršavaju sve vreme, rezultati testa CHCM se pogoršavaju počev od trenutka $t = 11.6$, dok se rezultati testa RDW poboljšavaju.

Pored krvne slike, urađene su i biohemijske analize. Analiza tih rezultata obavljena je pomoću prethodno predstavljenih programa ali ćemo se mi zadržati na ocenama. Cilj je prikazati šta ovaj metod može, za razliku od današnjih pristupa, da oceni. Samu vremensku analizu, čitalac može obaviti u svakom trenutku. Preskočićemo analizu pojedinosti da ne bismo opterećivali rad, u ovom slučaju, sporednom temom već ćemo analizirati različite podceline. Na lekarima je da, uz podceline, tumače i pojedinosti i, shodno rezultatima, određuju adekvatne terapije.

Neuredni biohemijski rezultati, na bar jednom kontrolnom pregledu, su:

	rezultati		**referentne vrednosti**		**kritični trenuci**
TBI	33.47	58.56	0.00	23.00	**ne postoje**
TGL	0.4	0.4	0.5	2.2	**ne postoje**
CKI	267	151	21	232	8.75
Na	137	132	136	145	5.8

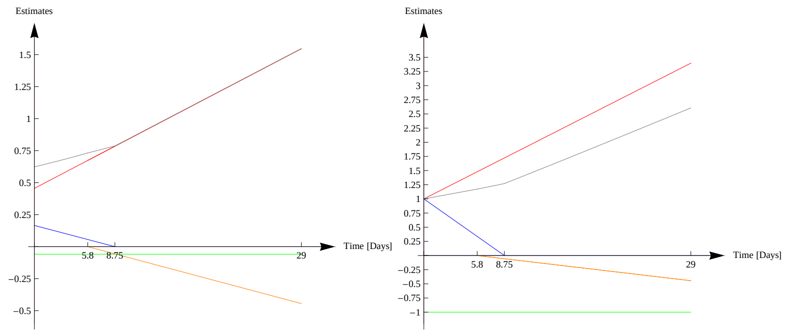
Tabela 2: Biohemija

Brojčane ocene pojedinih rezultata su:

$$(\mathtt{TBI}, 0.455, 1.546), (\mathtt{TGL}, 0.0588i, 0.0588i), (\mathtt{CKI}, 0.1656, 0), (\mathtt{Na}, 0, 0.444i)$$

gde je prva koordinata naziv testa, druga ocena rezultata na prvoj, a treća ocena rezultata na drugoj kontroli. Ukupno, ocene svih biohemijskih rezultata su $(0.621 + 0.588i, 0.624)$ na prvoj i $(1.546 + 0.503i, 1.626)$ na drugoj kontroli.

Što se grafičkog povezivanja imaginarnih delova (aproksimativnih) ocena tiče, promenićemo znak tim imaginarnim delovima i povezati ih realnom funkcijom. Kako su sve realne ocene povezane nenegativnim polinomima, moći ćemo da razlikujemo grafički povezane realne i imaginarne ocene (iznad i ispod x-ose, redom). Štaviše, ako su $p(t)$ i $q(t)$ nenegativan i nepozitivan polinom (tačnije polinomi koji povezuju realne i imaginarne ocene), tada funkcija $f(t) = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)}$ povezuje module aproksimativnih ocena rezultata odgovarajuće grupe testova. Približavanje grafika svih tih funkcija x-osi (udaljavanje grafika od x-ose) označava poboljšanje (pogoršanje) rezultata.



SLIKA 2: Neupoređene (levo) i upoređene (desno) ocene

Na prethodnoj slici, ocene stanja bilirubina su obojene crvenom, ocene stanja triglicerida zelenom, ocene stanja testa `CKI` plavom, ocene stanja natrijuma narandžastom, a ukupno stanje svih biohemijskih rezultata sivom bojom. Primećujemo da se stanja bilirubina i natrijuma pogoršavaju, stanje triglicerida je nepromenjeno, rezultati testa `CKI` se poboljšavaju. Pored toga, ukupno stanje biohemijskih rezultata se pogoršava i, od trenutka $t = 8.75$, postaje gotovo identično stanju bilirubina. Međutim, kada se te ocene uporede sa početnim stanjem, ukupno stanje je bolje od stanja bilirubina ali, zbog udaljenosti od x-ose, lošije od svega ostalog.

Ispitajmo grafički da li postoji ikakva zakonitost između promena stanja svih prethodno analiziranih rezultata kao celine sa promenom stanja krvne slike i promenom stanja biohemijskih rezultata. Funkcije, koje povezuju ocene rezultata koje ćemo posmatrati, su:

$$\textbf{SVI REZULTATI:} \quad f(t) = \begin{cases} \sqrt{3.68141 + 0.124182t + 0.00104822t^2}, & t \in [0, 5.8], \\ \sqrt{3.68068 + 0.122178t + 0.00141521t^2}, & t \in [5.8, 8.75], \\ \sqrt{3.07196 + 0.177861t + 0.00300212t^2}, & t \in [8.75, 11.6], \\ \sqrt{2.95628 + 0.184316t + 0.0033054t^2}, & t \in [11.6, 29]. \end{cases}$$

$$\textbf{KRVNA SLIKA:} \quad g(t) = \begin{cases} 1.2967 + 0.0137173t, & t \in [0, 5.8], \\ 1.2967 + 0.0137173t, & t \in [5.8, 8.75], \\ 1.2967 + 0.0137173t, & t \in [8.75, 11.6], \\ 1.26337 + 0.0165909t, & t \in [11.6, 29]. \end{cases}$$

$$\textbf{BIOHEMIJA:} \quad h(t) = \begin{cases} \sqrt{0.389218 + 0.0231778t + 0.000348153t^2}, & t \in [0, 5.8] \\ \sqrt{0.388492 + 0.0211744t + 0.000715147t^2}, & t \in [5.8, 8.75] \\ \sqrt{0.209957 + 0.0322437t + 0.00178197t^2}, & t \in [8.75, 11.6] \\ \sqrt{0.209957 + 0.0322437t + 0.00178197t^2}, & t \in [11.6, 29]. \end{cases}$$

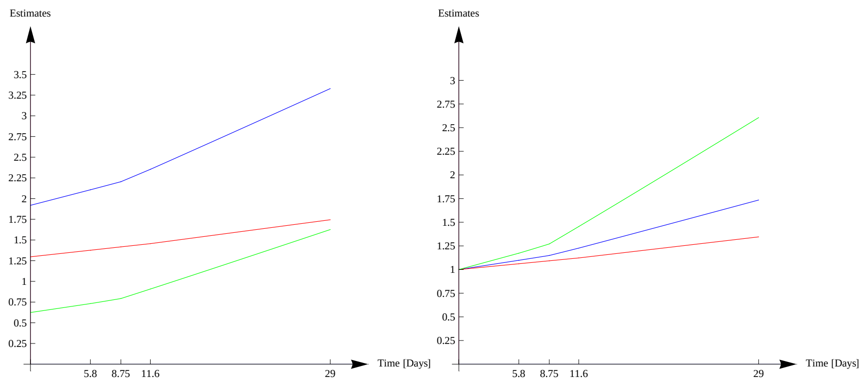
Ocene, upoređene deljenjem odgovarajućim apsolutnim vrednostima ocena u trenutku $t = 0$, povezane su funkcijama:

$$\textbf{SVI REZULTATI:} \quad F(t) = \begin{cases} \sqrt{1 + 0.0337322t + 0.000284732t^2}, & t \in [0, 5.8], \\ \sqrt{0.999803 + 0.033188t + 0.000384421t^2}, & t \in [5.8, 8.75], \\ \sqrt{0.834453 + 0.0483133t + 0.000815482t^2}, & t \in [8.75, 11.6], \\ \sqrt{0.803029 + 0.0500667t + 0.000897863t^2}, & t \in [11.6, 29]. \end{cases}$$

$$\textbf{KRVNA SLIKA:} \quad G(t) = \begin{cases} 1 + 0.0105786t, & t \in [0, 5.8], \\ 1 + 0.0105786t, & t \in [5.8, 8.75], \\ 1 + 0.0105786t, & t \in [8.75, 11.6], \\ 0.974294 + 0.0127947t, & t \in [11.6, 29]. \end{cases}$$

$$\textbf{BIOHEMIJA:} \quad H(t) = \begin{cases} \sqrt{1 + 0.0595496t + 0.000894492t^2}, & t \in [0, 5.8] \\ \sqrt{0.998134 + 0.0544025t + 0.00183739t^2}, & t \in [5.8, 8.75] \\ \sqrt{0.539432 + 0.0828423t + 0.00457834t^2}, & t \in [8.75, 11.6] \\ \sqrt{0.539432 + 0.0828423t + 0.00457834t^2}, & t \in [11.6, 29]. \end{cases}$$

Grafici prethodnih funkcija su:



SLIKA 3: Grafici funkcija f, g, h (levo) i F, G, H (desno)

Kompletni rezultati povezani su plavom, rezultati krvne slike crvenom a biohemijski rezultati zelenom linijom. Sa leve od te dve slike, jasno se očitava da se pogoršanja svih rezultata odvijaju skoro identično pogoršanjima biohemijskih rezultata dok se rezultati krvne slike pogoršavaju ravnomerno. Na grafiku desno primećujemo da su najintenzivnija pogoršanja registrovana u biohemiji. Pogoršanja svih rezultata su, po nivou u odnosu na početna stanja, između pogoršanja rezultata krvne slike i biohemijskih rezultata.

Dodajmo još i to da je

$$\begin{aligned} f(0) &= 1.9187, & g(0) &= 1.2967, & h(0) &= 0.623874; \\ f(29) &= 3.32886, & g(29) &= 1.74451, & h(29) &= 1.62593 \end{aligned}$$

odakle, na osnovu razlika $f(29) - f(0) = 1.41016, g(29) - g(0) = 0.447802$, $h(29) - h(0) = 1.00206$, izvodimo zaključak koliko se eksplicitno šta od testiranog promenilo. Značajni su i rezultati

$$F(29) = 1.73495, \quad G(29) = 1.34534, \quad H(29) = 2.60619.$$

Ti rezultati govore da se, redom, ukupno stanje krvi pogoršalo 73.495%, stanje krvne slike se pogoršalo 34.534%, a stanje biohemije 160.619% u trenutku $t = 29$ u odnosu na početno stanje.

4 Zaključak

Kroz ovaj rad smo, korišćenjem matematike, razotkrili jednu od tajni koja se na život odnosi. Razlike u nekim od medicinskih testova smo premostili. Sa jedne strane, mnoštvo rezultata smo sveli na jednu brojčanu ocenu. Sa druge strane, što je moduo ocene veći/manji to je stanje pacijenta lošije/bolje.

Sve to ne bi imalo nikakvog smisla da je postupak dobijanja tih ocena komplikovan. Mi smo koristili kompleksne brojeve zbog razdvajanja slučajeva ali je kompleksne brojeve moguće zameniti uređenim parovima (a, b) gde je realni deo kompleksnog broja jednak a a imaginarni deo kompleksnog broja jednak b. Na ovaj način, omogućeno je numeričko ocenjivanje rezultata krvi pomoću digitrona.

Nema lekarskih nalaza koji ocenjuju stanje pacijenta kao celinu. Pomenuli smo skalu EDSS u uvodu. To je neurološka skala kojom se nastoji oceniti neurološko stanje kao celina ali je njen problem što nije osetljiva na svaku promenu (ocena se ne mora nužno promeniti ako se stanje poboljšalo ili pogoršalo). Metod, koji smo predstavili - a za razliku od EDSS - osetljiv je na svaku promenu što ga, uz svu jednostavnost koju sa sobom nosi, čini upotrebljivim u radu lekara.

Ovakav metod je primer korišćenja operacije $\sqrt{\cdot}$ u realnom životu. Učenici se danas, sve češće, pitaju čemu im služi operacija korenovanja kada je nigde u životu ne primenjuju. Ovim radom, dobili su razumljiv deo odgovora na to pitanje. Kompletan odgovor dat je u radu [7].

U ovom radu je prezentovan algoritam koji, na relativno jednostavan način, meri koliko su rezultati izvesnih medicinskih testova loši. Za neke od testova je naglašeno šta prikazuju ali to što oni prikazuju nije ni od kakvog značaja za to koliko je stanje loše. U primeru smo analizirali prave medicinske rezultate na temu ocene njihove poremećenosti. Da bi se dobio odgovor na pitanje šta ta poremećenost znači, neophodno je konsultovati lekare jer oni to mnogo bolje znaju, razumeju i shvataju od nas. Mi smo samo pokazali kako odrediti koliko je loše to što je loše.

Napomenimo da matematika, koja je korišćena u radu, jeste vrlo pristupačna širokom krugu ljudi. Imajući to u vidu, smatramo da će ovaj rad poslužiti kao jednostavno shvatanje stanja sebe posle lekarskog pregleda gde pacijent dobije rezultate testova svoje krvne slike, urina, likvora, pljuvačke, i mnogih drugih, koji su uredni između dve, unapred zadate, vrednosti.

Nešto komplikovanija jeste grafička analiza rezultata. Neke od tih analiza moguće je obaviti sa učenicima u osnovnoj, dok je ostale analize moguće obaviti tek u srednjoj školi. Kakogod, grafika pruža mogućnost pregleda promene stanja zavisno od proteklog vremena. Za razliku od numeričkih ocena rezultata u trenutku, grafička analiza se bavi aproksimiranjem promena stanja jer nije moguće, sa potpunom preciznošću i bez pretpostavki, povezati rezultate medicinskih testova.

Mogućnosti za istraživanja u ovoj oblasti su raznovrsna i velika i nadamo se da će, ne samo matematičari - već i lekari - primenjivati i razvijati aktivno ovako egzaktne metode.

Literatura

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Third Edition, The MIT Press, London, 2009.

[2] S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, U.V. Vazirani, *Algorithms*, Mc Graw Hill, Boston, 2006.

[3] D. S. Đorđević, *Mera, integral i izvod*, available online: http://nasport.pmf.ni.ac.rs/materijali/219/mera-integral-izvod.pdf.

[4] J. F. Kurtzke, *Rating neurologic impairment in multiple sclerosis: An expanded disability status scale (EDSS)*, Neurology, 1983; 33: 1444–52.

[5] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *Diferencijabilna geometrija mnogostrukosti*,

[6] M. Sugeno, T. Murofushi, *Pseudo-additive measures and integrals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 122, No. 7 (1987), 197–222.

[7] N. O. Vesić, *Matematičko objedinjavanje različitosti*, MAT KOL (Banja Luka), Vol. XXI (4) (2015), 235–249.

[8] N. O. Vesić, *Matematička poslastica: Slova skrivaju brojevi otkrivaju*, Nastava Matematike, LXI, 1-2 (2016), 1–9.

[9] N. O. Vesić, *Imitacija, Manir i Stil u matematici*, MAT KOL (Banja Luka), Vol. XXII (3)(2016), 149–163.

[10] N. O. Vesić, *IGRAJMO SE MATEMATIKE I...: kratka priča o značaju suštine*, preprint.

[11] N. O. Vesić, L. Mačukanović-Golubović, D. Ilić, *Mathematical Universalization of Medical Results Estimation*, Matematički Bilten Skopje, prihvaćen za štampu.

[12] N. O. Vesić, L. Mačukanović-Golubović, Lj. V. Milenković, I. Golubović, *Reaction of Aronia, Bisphosphonates and Epsom Salt on Platelets of a Patient with Multiple Sclerosis*, submited.